

KOWALK, Sabine, SPROESSER, Ute & FREY, Kerstin
Ludwigsburg

Tendenz zur Nutzung linearer Prototypen: Ein Effekt des Unterrichts?

Theoretischer Hintergrund

Gerade zu Beginn der Auseinandersetzung mit Funktionen im Mathematikunterricht kann ein starker unterrichtlicher Fokus auf linear zu deutenden Situationen suggerieren, dass Linearität auf alle Zusammenhänge zutrifft. Freudenthal (1983, S.267) warnt zurecht: "Linearity is such a suggestive property of relations that one readily yields to the seduction to deal with each numerical relation as if it were linear". Fixieren sich Schüler*innen im Umgang mit Funktionen auf lineare Funktionen, besteht die Gefahr diese zu übergeneralisieren und so mentale Funktionsrepräsentationen auszubilden, die als lineare Prototypen bezeichnet werden (Hadjidemetriou & Williams, 2002; Ruchniewicz, 2022, S. 84). Der Bezug auf lineare Prototypen manifestiert sich u.a. beim Zeichnen und Interpretieren von Funktionsgraphen (Leinhardt et al., 1990), wenn Schüler*innen den Koordinatenursprung als Teil aller Funktionsgraphen ansehen ("origin prototype") oder regelmäßige Graphen bevorzugen (Hadjidemetriou & Williams, 2002, S.72). Beim gedanklichen Wechsel zwischen Alltagssituation und mathematischer Perspektive (situativ-graphischer Darstellungswechsel) tendieren Schüler*innen dann dazu nicht-lineare funktionale Zusammenhänge (z.B. das Befüllen einer bauchigen Vase) als linear zu modellieren (d.h. im Sinne eines Füllgraphen mit gleichmäßiger Steigung) (Stölting, 2008).

Forschungsergebnisse deuten an, dass dieses Fehlerbild von verschiedenen Faktoren wie mangelndem konzeptuellem Verständnis, einer zu dominanten Zuordnungsvorstellung, einer starken Kalkülorientierung im Unterricht oder unpassenden Überzeugungen (z.B. im Sinne, dass bestimmte Aufgabenstellungen immer linear modelliert werden müssen) determiniert wird (z.B. Van Dooren et al., 2003; Hadjidemetriou & Williams, 2010; Ruchniewicz, 2022). Zudem kann eine starke Fokussierung auf linear zu deutende Situationen im Unterricht und ein damit zusammenhängendes Erleben der Nützlichkeit linearer Modelle aus kognitionspsychologischer Perspektive die Gefahr einer Linearitätsheuristik verstärken, d.h. das Zurückgreifen auf schnell verfügbare sowie gespeicherte "Prototyp"-Situationen im intuitiven Denksystem (De Bock et al., 2002). Empirische Ergebnisse deuten darauf hin, dass das Phänomen einer linearen Fixierung nicht kurzfristig behoben kann, sondern langfristige, im Unterricht implementierte Maßnahmen verlangt (De Bock et

al., 2002). Als geeignet werden Maßnahmen wie die Integration von untypischen Beispielen von Funktionsgraphen in den Unterricht, eine Stärkung der Kovariationsvorstellung oder die Förderung von inhaltlichem Verständnis im Unterricht genannt (z.B. Ruchniewicz, 2022). Aus didaktischer Perspektive ist ein Zusammenhang zwischen dem Bezug auf Prototypen und Schwierigkeiten bei der sukzessiven Erweiterung des Funktionsbegriffs naheliegend. So können Übergeneralisierungen linearer Zusammenhänge mit falschen oder gar nicht erfolgten Erweiterungen von Grundvorstellungen zusammenhängen (Nitsch, 2015, S.24; Ruchniewicz, 2022). Die curriculumsbedingte sukzessive Behandlung von isolierten Funktionsklassen in der Schule (Büchter, 2008) sowie eine stark betonte Auseinandersetzung mit linearen und proportionalen Zusammenhängen zu Beginn der Funktionslehre erscheinen daher nicht optimal. Ein Ansatz zur Überwindung könnte es sein, im Unterrichtsgang proportionale Funktionen lediglich als Sonderfall linearer Funktionen zu behandeln. Dies soll in der vorliegenden Studie umgesetzt werden, um die Gefahr einer linearen Fixierung im Umgang mit Funktionen zu reduzieren.

Intervention und Forschungsfrage

Zur Untersuchung von möglichen Ursachen einer linearen Fixierung nimmt die vorliegende Studie in den Blick, wie sich beim Unterrichten von linearen Funktionen in Klasse 7 (Gymnasium) und Klasse 8 (Realschule) Variationen der unterrichtlichen Abfolge auf die Nutzung linearer Prototypen auswirken. Ein klassischer Unterrichtsgang (Bedingung A) sieht eine Progression von proportionalen zu linearen Funktionen vor, während ein alternativer Unterrichtsgang (Bedingung B), proportionale Funktionen lediglich als Spezialfall linearer Funktionen behandelt. In beiden Bedingungen werden digital gestützte, situierte Lernumgebungen in den Unterricht integriert. Die Möglichkeit zum entdeckenden, forschenden Lernen und der Einbezug qualitativer Graphen soll dabei einer Fixierung auf Linearität entgegenwirken. Die Forschungsfrage lautet: Wie unterscheiden sich die Lernenden im Hinblick auf die lineare Fixierung nach Durchlaufen von Bedingung A im Vergleich zu Bedingung B?

Methode

An der Intervention nahmen insgesamt 173 Schüler*innen aus Klassenstufe 7 (Gymnasium) und Klassenstufe 8 (Realschule) teil. Die Stichprobe besteht aus zwei Interventionsgruppen (Bedingung A: 65 Schüler*innen, Alter: $M=13,03$ Jahre, $SD=0,684$; Bedingung B: 53 Schüler*innen, Alter: $M=13,09$ Jahre, $SD=0,766$) sowie einer Kontrollgruppe (55 Schüler*innen, Alter: $M=13,33$ Jahre, $SD=0,818$). Die Vergleichbarkeit des Unterrichtsver-

laufs in den Interventionsgruppen wurde durch ein vorgegebenes Unterrichtsskript und den Einsatz gleicher Unterrichtsmaterialien abgesichert. Der Unterricht in der Kontrollgruppe verlief nach Schulbuch, wobei die gleichen Übungsaufgaben wie in den Interventionsgruppen zum Einsatz kamen. Insgesamt dauerte die Intervention zwischen 5 und 6 Unterrichtswochen à 4 Mathematikstunden.

Zur Evaluation der Intervention wurde ein Test eingesetzt, von dem hier zwei Items zum situativ-graphischen Darstellungswechsel beschrieben werden. Beim Item "Vase" soll ein Graph zu einer beschriebenen dynamischen Situation mit einer nicht-konstanten Änderungsrate gezeichnet werden. Dabei ändert sich die Füllhöhe von schneller steigend zu langsamer steigend. Das Item "Wachsen" erfordert die Auswahl eines passenden Graphen zur Modellierung des Zusammenhangs zwischen Alter und Körpergröße eines Mannes. Antworten bzw. Zeichnungen wurden folgenden Codes zugeordnet: Code PT = origin prototype oder lineare Prototypnutzung, erkennbar durch das Zeichnen oder Auswahl einer Geraden mit der Gleichung $y = x$ oder $y = x + b$; Code GL= gerade Linien, erkennbar durch lineares Wachstum mit abschnittsweise unterschiedlicher Steigung; Code RL= richtige Lösung; ergänzend bei Item "Vase" Code Fehler, unter dem Fehlvorstellungen wie der Graph-als-Bild-Fehler (GaBF) kodiert wurden.

Erste Ergebnisse

Eine erste deskriptive Analyse der Schülerantworten bei Item "Vase" ergibt, dass sich die Teilnahme an der Intervention positiv auswirkt. Bei diesem Item konnte die Mehrheit der Schüler*innen bei Bedingung A (35,4%) und bei Bedingung B (43,4%) nach der Intervention einen korrekten Füllgraphen zeichnen. Wohingegen in der Kontrollgruppe nur 27,3% der Schüler*innen die Aufgabe korrekt lösten. In dieser Gruppe tendierten 32,7% der Schüler*innen dazu den Graphen mit geraden Linien zu zeichnen. Wohingegen diese Tendenz in den anderen beiden Gruppen (A: 24,6% & B: 24,5%) im Nachtest geringer ausfiel. In Bezug auf die Nutzung spezifischer Prototypen ($y = x$ und $y = x + b$) zeigte sich in Bedingung A eine geringfügige Veränderung (Vortest: 12,3%; Nachtest; 9,2%), wohingegen in Bedingung B nur 5,7% der Schüler*innen diese Fehlvorstellung in Vor- und Nachtest zeigten. In der Kontrollgruppe nahm die Prototypennutzung ebenfalls ab (Vortest: 16,4%; Nachtest: 7,3%). Insgesamt nahm eine fehlerhafte Lösung der Aufgabe in allen drei Gruppen ab, wobei die Fehlerquote in Bedingung B (Vortest: 49,1%; Nachtest: 26,4%) geringfügig mehr abnahm als in Bedingung A (Vortest: 52,3%; Nachtest: 30,8). Am wenigsten Veränderung bei der Fehlerquote zeigt sich in der Kontrollgruppe (Vortest: 40%; Nachtest; 32,7%).

Diskussion und Ausblick

Die Tendenz zum Bezug auf (lineare) Prototypen gehört zu den Schwierigkeiten, die beim Unterrichten mit Funktionen auftreten können. Erste Ergebnisse der vorliegenden Studie deuten darauf hin, dass die Teilnahme an der geschilderten Intervention typischen Fehlern im Zusammenhang mit Funktionsgraphen entgegenwirken kann, ohne dabei das Zurückgreifen auf eine Linearitätsheuristik zu verstärken. Die Tendenz zur Nutzung typischer Prototypen konnte in allen drei Gruppen bislang nicht übermäßig beobachtet werden, wohl aber die Tendenz Graphen abschnittsweise linear zu modellieren. Diese Tendenz fiel in der Kontrollgruppe höher aus als in den Interventionsgruppen, was als Indiz dafür gewertet werden kann, dass die Teilnahme an der Intervention der Tendenz zur linearen Fixierung entgegenwirken kann. Die Auswertung des Items "Wachsen" sowie inferenzstatistische Vergleiche beschreiben nächste Schritte im Projekt.

Literatur

- De Bock, D. , van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students'errors. *Educational Studies in Mathematics* (50), 311–334.
- Büchter, A. (2008). Funktionale Zusammenhänge erkunden. *mathematik lehren* (148), 4–12.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Kluwer.
- Hadjidemetriou, C. & Williams, J. (2002). Children's graphical conceptions. *Research in Mathematics Education*, 4(1), 69–87. <https://doi.org/10.1080/14794800008520103>
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1–64. <https://doi.org/10.3102/00346543060001001>
- Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge: Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-10157-2>
- Ruchniewicz, H. (2022). *Sich selbst diagnostizieren und fördern mit digitalen Medien*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-35611-8>
- Van Dooren, W., Bock, D. de, Verschaffel, L. & Janssens, D. (2003). Improper Applications of proportional reasoning. *Mathematics teaching in the middle school* (4), 204–209.