HOCH, Lisa
Essen

Von der mittleren zur lokalen Änderungsrate: Eine qualitative Interviewstudie zur Entwicklung einer sprachbildenden Prüfungsvorbereitung unter der Zielperspektive des Abiturs

Die Mathematikleistung von Lernenden hängt maßgeblich von der Sprachkompetenz ab, da die Sprache essenziell für die Ausbildung eines konzeptuellen Begriffsverständnisses ist und somit zum Aufbau von inhaltlichem Verständnis beiträgt (u.a. Prediger, 2020). Die Forderung nach der Förderung von inhaltlichem Verständnis in der Analysis besteht dabei schon mehrere Jahrzehnte und die Kalküllastigkeit der Oberstufenmathematik wird fortlaufend kritisiert (u.a. Danckwerts & Vogel, 1992). Für die Generierung inhaltlichen Verständnisses in der Differentialrechnung ist ein konzeptuelles Begriffsverständnis von „Bestand“ und „Änderung“ (Sahin-Gür, 2024) essenziell, bevor in einem zweiten Schritt der in dieser Dissertation fokussierte Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate thematisiert werden kann. Im Rahmen einer qualitativen Interviewstudie, die auf die Theorien zum Constructive Alignment (Barzel & Greefrath, 2021) sowie zum sprachbildenden Mathematikunterricht und den Grundvorstellungen in der Analysis (Greefrath et al., 2016) zurückgreift, wird untersucht, welche sprachlichen und konzeptuellen Hürden bei Lernenden der Oberstufe während der Bearbeitung von Prüfungsaufgaben zum Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate auftreten und wie eine verstehensorientierte sowie sprachbildende Prüfungsvorbereitung aussehen kann.

Literatur

Barzel, B. & Greefrath, G. (2021). Metablick auf Abituraufgaben. Mehr als nur alte Abi-Aufgaben rechnen. *mathematik lehren*, 225, 32–35.

Danckwerts, R. & Vogel, D. (1992). Quo vadis, Analysisunterricht? *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 45(6), 370–374.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis: Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe.* Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5

Meyer, M. & Tiedemann, K. (2017). *Sprache Im Fach Mathematik*. Springer.

Prediger, S. (Hrsg). (2020). *Sprachbildender Mathematikunterricht. Ein forschungsbasiertes Praxisbuch.* Cornelsen.

Sahin-Gür, D. (2024, eingereicht). *Sprachbildender Verständnisaufbau für Bestand und Änderung – Entwicklungsforschung zum zunehmenden Präzisieren und Explizieren.* Springer Spektrum.

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

Von der mittleren zur lokalen Änderungsrate:
Eine qualitative Interviewstudie zur Entwicklung einer sprachbildenden Prüfungsvorbereitung unter der Zielperspektive des Abiturs

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

Fachlicher Gegenstand

- Differentialrechnung als Teil der Qualitativen Analysis
- Analysis stellt zentrale Rolle in der Oberstufenmathematik dar, jedoch Kritik an Kalküllastigkeit und dem mangelnden Aufbau von inhaltlichem Verständnis (vgl. Danckwerts, Vogel 1992; Thompson, Thompson 1994; Orton 1983)

→ Forderung: stärkerer Fokus auf inhaltliches Verständnis (vgl. Blum, Kirsch 1979; Orton 1983)

- Möglicher Lernpfad für die Differentialrechnung (vgl. Bressoud et al. 2016, Sahin-Gür 2024):
  - Variation und Kovariation am Graphen erkennen (vgl. Clement 1989; Orton 1983)
  - Unterschied von Bestand und Änderung (vgl. Hahn, Prediger 2008; Sahin-Gür 2024)
  - **Verständnis des Differenzenquotienten** *(vgl. Malle 1999; Thompson, Thompson 1994)*
  - **Verständnis des Differentialquotienten** *(vgl. Marx 2006; Ferrini-Mundy, Graham 1994)*
  - Inhaltliches Verständnis und Beherrschung prozeduraler Verfahren (vgl. White, Mitchelmore 1996)

Differentialquotient als eine der zentralen Grundvorstellungen für die Ableitung in einem Punkt (vgl. Greefrath et al. 2016):

Sei f eine in einer Umgebung der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ definierte reellwertige Funktion. Man nennt f differenzierbar an der Stelle x_0, falls der Grenzwert $f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert. Er wird dann als Ableitung an dieser Stelle bezeichnet.

Sprachsensibler MU

- Irrglaube, dass Mathematik sich rein auf Symbole und Zeichen fokussiert, denn „mathematics education begins and proceeds in language, it advances and stumbles because of language, and its outcomes are often assessed in language“ (vgl. Meyer, Tiedemann 2017; Durkin, Shire 1991)
- Sprache als zentrales Lernmedium: kommunikative & kognitive Funktion (vgl. Prediger 2020)
- Auswirkung Sprachkompetenz auf Leistungen im Mathematikunterricht in Deutschland im internationalen Vergleich sehr hoch (vgl. Prediger 2013; Bochnik, Ufer 2016)
- Einfluss der Sprachkompetenz wesentlich stärker ausgeprägt, als Einfluss anderer familiärer Benachteiligungsfaktoren → keine ausreichende Sprachförderung im Mathematikunterricht (vgl. ebd.)
- **Ziel:** Verbesserten Zugang zur Mathematik schaffen, indem mathematikbezogene Sprache zum Lerngegenstand gemacht und Sprachproduktion durch die Schüler:innen aktiv eingefordert wird (vgl. Meyer, Tiedemann 2017; Prediger 2020)

Theoretischer Hintergrund

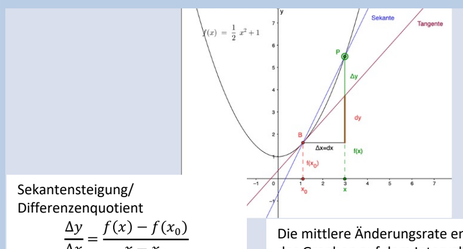
Verstehensorientierung

Was bedeutet das Verstehen eines mathematischen Sachverhalts eigentlich?

Verstehen als Struktur- und Begriffsaufbau:

- Elemente des Vorwissens werden so miteinander verknüpft und verdichtet, dass neue Wissenselemente entstehen (vgl. Drollinger-Vetter 2011)
- Drei zentrale Verknüpfungen für Wissensgenerierung (vgl. ebd.):

(1) Verknüpfung von Verstehenselementen



Sekantensteigung/ Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Tangentensteigung/ Differentialquotient

$$f'(x_0) := \frac{dy}{dx} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Die mittlere Änderungsrate entspricht der Steigung des Graphen auf dem Intervall $[x, x_0]$ bzw. zwischen den Punkten B und P (Sekante durch B und P). Die lokale Änderungsrate entspricht der Steigung des Graphen im Punkt B und somit der Steigung der Tangente an den Punkt B.

Abb.2

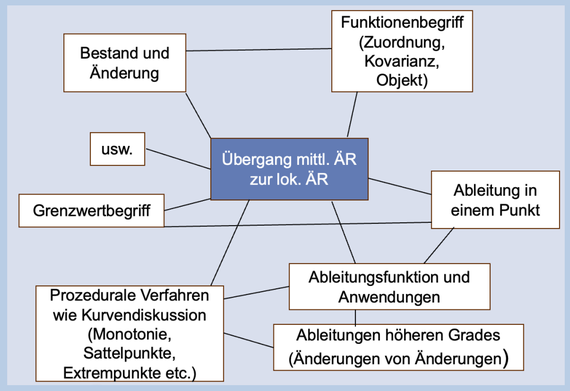


Abb.1

(2) Verknüpfung von Repräsentationen

(3) Verknüpfung mit anderen Konzepten

Die Verstehenselemente werden noch um Prozesse und Kompetenzen ergänzt

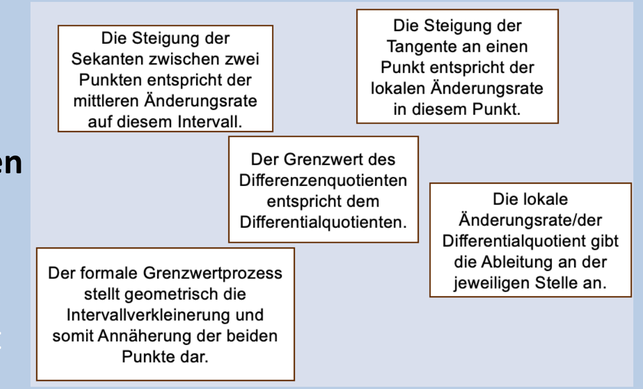


Abb.3

Verstehen ist zudem situiert (vgl. Drollinger-Vetter 2011):

- **Objektbezug:** unterschiedliche Art der Verstehensgegenstände
- **Subjektbezug:** Die Person des Verstehenden
- **Kontextgebundenheit:** Kontext, in welchem Verstehensprozess stattfindet

FORSCHUNGSFRAGEN

F1: Wie gehen die Schüler:innen mit den Aufgaben zum Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate um? Welche mathematischen und inhaltlichen Konzepte identifizieren sie?

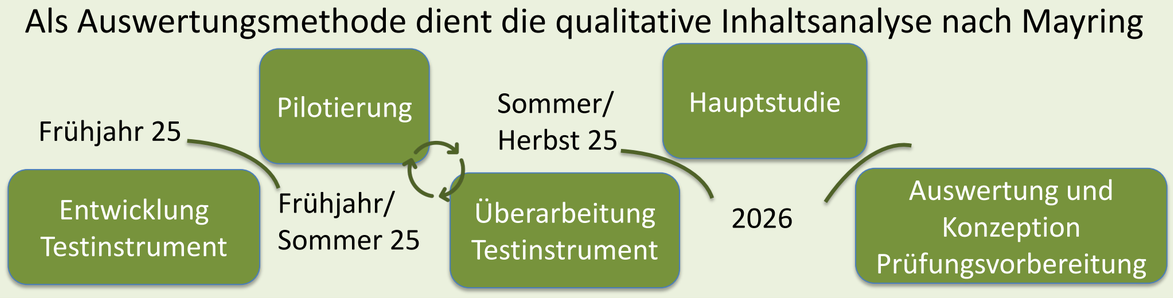
F2: Welche sprachlichen und konzeptuellen Hürden lassen sich bei der Betrachtung von Aufgaben zum Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate identifizieren?

F3: Welche Schlussfolgerungen lassen sich aus den Interviews mit den Schüler:innen für die Konzeption einer sprachsensiblen und verstehensorientierten Prüfungsvorbereitung ziehen?

FORSCHUNGSFRAGEN

Methodik und Zeitplan

- Es handelt sich um eine leitfadengestützte Interviewstudie, bei der jeweils ein bis zwei Schüler:innen (ab Jahrgangsstufe 10) interviewt werden
- Die Schüler:innen erhalten sowohl Einführungs- als auch Prüfungsaufgaben auf verschiedenen Anforderungsniveaus und müssen diese zunächst auf der Metaebene betrachten, bevor sie diese anschließend kommentiert lösen
- Relevante Fragen dabei sind:
  - Welche mathematischen und inhaltlichen Konzepte werden in der Aufgabe angesprochen?
  - Welche Fachbegriffe werden in der Aufgabe verwendet und welche Bedeutung haben diese?
  - Welche Lösungsprozesse werden angeregt und wieso?
- Als Auswertungsmethode dient die qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring



Einblick in das Testinstrument

Frau Müller ist mit ihrem Auto durch die Stadt gefahren. Die Autofahrt kann durch folgendes Weg-Zeit-Diagramm beschrieben werden:

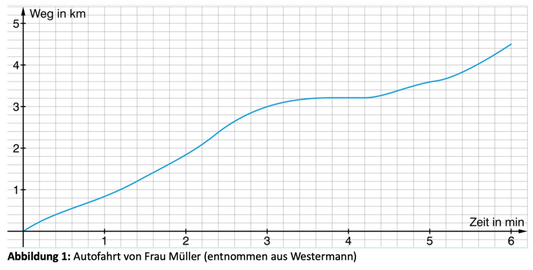


Abbildung 1: Autofahrt von Frau Müller (entnommen aus Westermann)

a) Beschreibe anhand des Graphen den Verlauf der Autofahrt von Frau Müller in deinen eigenen Worten.
b) Frau Müller hat während der Fahrt einen Blitzer gesehen. Sie ist sich aber sicher, immer nur 45km/h gefahren zu sein, sodass sie keine Geldstrafe zu erwarten hat. Wie kommt Frau Müller darauf?
c) Überprüfe anhand des Graphen, ob Frau Müller tatsächlich nie schneller als 45km/h gefahren ist. Erläutere, wie Du vorgegangen bist.

Gegeben sind die Funktion $f: x \mapsto \sqrt{x}$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}_0^+$ und die Gerade g mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x$. Betrachtet wird das Intervall, das von den x-Koordinaten der beiden Schnittpunkte des Graphen von f und der Gerade g begrenzt wird.

In diesem Intervall gibt es eine Stelle, an der die lokale Änderungsrate von f mit der mittleren Änderungsrate von f in diesem Intervall übereinstimmt. Bestimmen Sie diese Stelle.

Abb.5

Einführungsaufgabe Abb.4 **IQB-Prüfungsaufgabe**

Es werden bewusst Einführungs- und Prüfungsaufgaben eingesetzt, da die zu entwickelnde Prüfungsvorbereitung auch leistungsschwächere Schüler:innen bei der Vorbereitung auf das Abitur unterstützen soll. Es muss demnach auch untersucht werden, welche Schwierigkeiten bei grundlegenden Aufgaben auftreten können.

Blum, W. & Kirsch, A. (1979). Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. *Der Mathematikunterricht*, 25(3), 6–24.

Bochnik, K. & Ufer, S. (2016). Die Rolle (fach-)sprachlicher Kompetenzen zur Erklärung mathematischer Kompetenzunterschiede zwischen Kindern mit deutscher und nicht-deutscher Familiensprache. *Zeitschrift für Grundschulforschung*, 9, 135-147.

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V. & Törner, G. (2016). *Teaching and learning of calculus*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32975-8

Clement, J. (1989). The concept of variation and misconceptions in cartesian graphing. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(2), 77–87.

Danckwerts, R. & Vogel, D. (1992). Quo vadis, Analysisunterricht? *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 45(6), 370–374.

Drollinger-Vetter, B. (2011). *Verstehenselemente und strukturelle Klarheit: fachdidaktische Qualität der Anleitung von mathematischen Verstehensprozessen im Unterricht.* Waxmann.

Durkin, K., Shire, B. (1991). *Language in mathematics education – research and practice*. Open UP, Milton Keynes England.

Ferrini-Mundy, J. & Graham, K. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives, and integrals. In E. Dubinsky (Hrsg.), *Research issues in undergraduate mathematics learning: Preliminary analysis and results* (S. 31–45). Mathematic Association of America.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis: Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5

Hahn, S. & Prediger, S. (2008). Bestand und Änderung - Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 29(3/4), 163–198.

Malle, G. (1999). Grundvorstellungen zum Differenzen- und Differentialquotienten. *Didaktikreihe der ÖMG*, 30, 67–78.

Marx, A. (2006). *Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen.* Franzbecker.

Meyer, M. & Tiedemann, K. (2017). *Sprache Im Fach Mathematik*. Springer Spektrum.

Orton A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14(3), 235–250. https://doi.org/10.1007/BF00410540

Prediger, S. (2013). *Sprachmittel für mathematische Verstehensprozesse - Einblicke in Probleme, Vorgehensweisen und Ergebnisse von Entwicklungsforschungsstudien. In: A. Pallack (Hrsg.): Impulse für eine zeitgemäße Mathematiklehrer-Ausbildung. MNU-Dokumentation der 16. Fachleitertagung NRW*. (S. 26–36). Neuss: Seeberger.

Prediger, S. (Hrsg). (2020). *Sprachbildender Mathematikunterricht. Ein forschungsbasiertes Praxisbuch*. Cornelsen.

Sahin-Gür, D. (2024, eingereicht). *Sprachbildender Verständnisaufbau für Bestand und Änderung – Entwicklungsforschung zum zunehmenden Präzisieren und Explizieren*. Springer Spektrum.

Thompson, P. W. & Thompson, A. G. (1994). Talking about rates conceptually, Part I: A teacher's struggle. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(3), 279–303. https://doi.org/10.2307/749339

White, P. & Mitchelmore, M. (1996). Conceptual knowledge in introductory calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 79–95. https://doi.org/10.2307/749199

Abbildung 1: Verknüpfung von Verstehenselementen. Eigene Erstellung.

Abbildung 2: Verknüpfung von Repräsentationen. Eigene Erstellung mit gegebener GeoGebra Lernumgebung: Rubin. (2015). *Von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung*. https://www.geogebra.org/material/show/id/A9Vp2Cc9

Abbildung 3: Verknüpfung mit anderen Konzepten. Eigene Erstellung.

Abbildung 4: Einführungsaufgabe. Eigene Erstellung in Anlehnung an Aufgabe 1 aus: 5.2. Von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. Westermann Gruppe. Online. https://c.wgr.de/f/pdf/978-3-507-85480-2-2-l.pdf

Abbildung 5: IQB-Prüfungsaufgabe. Jahr 2024. Teil A. Aufgabe 2_2: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2024