

Welche Aufgaben haben das Potential algebraisches Denken zu fördern? - Erstellung eines Instruments zur Aufgabenanalyse

Einleitung

Das übergeordnete Forschungsvorhaben, beschäftigt sich mit der Frage, inwiefern in Schulbüchern der fünften und sechsten Klasse im Bereich der Zahlbereichserweiterungen Aufgaben auftreten, die das Potential haben, algebraisches Denken zu fördern. Da sich die meisten Forschungen auf den Bereich der natürlichen Zahlen beziehen, gibt es einige aktuelle, jedoch im Verhältnis zu den natürlichen Zahlen eher weniger, (Aufgaben-)Ansätze zu dem Bereich der ganzen und positiven rationalen Zahlen. Ebenso gibt es keine eindeutigen Kriterien für Aufgaben, die das Potential haben algebraisches Denken zu fördern. Es gibt jedoch innerhalb des wissenschaftlichen Diskurses Kriterien, die die Facetten des algebraischen Denkens definieren sowie Aufgaben, die gezielt zur Überprüfung einzelner Facetten angewendet wurden. Daher stellt sich die Frage "Durch welche Merkmale sind Aufgaben, die algebraisches Denken fördern, gekennzeichnet?" Dieser Fragestellung nähert sich der vorliegende Beitrag an, indem zentrale Merkmale algebraischen Denkens referiert werden mit dem Ziel, auf dieser Grundlage ein Instrument zur Aufgabenanalyse zu erstellen. Das Analyseinstrument wird im weiteren Verlauf des übergeordneten Forschungsvorhabens genutzt, um Aufgaben in den Schulbüchern im Bereich der Zahlbereichserweiterungen auf ihr Potential algebraisches Denken zu fördern zu analysieren.

Theoretische Rahmung

In vielen Studien, die sich mit dem algebraischen Denken befassen wird häufig grundlegend die Definition des algebraischen Denkens von Kaput (2008) verwendet. Er definiert zwei Kernaspekte mit drei Strängen algebraischen Denkens. Die beiden Kernaspekte befassen sich inhaltlich mit der Algebra (1) als systematische symbolisierende Generalisierung von mathematischen Gesetzmäßigkeiten und (2) als syntaktisch geleitetes Argumentieren und Handeln mit Generalisierungen, die durch ein konventionelles Symbolsystem ausgedrückt werden (Kaput, 2008). Diese beiden Kernaspekte lassen sich jeweils in allen drei Strängen wiederfinden, die ebenfalls von Kaput (2008) definiert werden. Die Stränge sind die Algebra als "Umgang mit Strukturen", "Auseinandersetzen mit Funktionen, Relationen und Kovariation" und "inner- und außermathematische Anwendung von

Modellierungen" (Kaput, 2008). Auch wenn diese Definition häufig als Grundlage bei der Auseinandersetzung mit dem algebraischen Denken dient, lässt sie einen konkreten Bezug zu Inhalten und Themen offen. Anhand dieser allgemeinen Definition können keine konkreten Aufgaben abgeleitet werden, die das Potential haben algebraisches Denken zu fördern (Akinwunmi & Steinweg, 2024).

Blanton (2019) verwenden die Definition von Kaput (2008), um für das Forschungsvorhaben im Programm "Learning through an Early Algebra Progression (LEAP)" vier essentielle Praktiken des algebraischen Denkens zu formulieren. Diese lauten "(1) generalizing, (2) representing, (3) justifying, and (4) reasoning with mathematical structure and relationships" (Blanton et al., 2019, S. 194). Diese vier essentiellen Praktiken lassen sich insofern auf Kaput (2008) zurückführen, dass "representing" und "generalizing" aus dem ersten Kernaspekt und "justifying" und "reasoning with" aus dem zweiten Kernaspekt abgeleitet wurden (Blanton et al., 2018). Diese vier Praktiken des algebraischen Denkens treten in drei formulierten Big Ideas auf. Diese drei Big Ideas werden als übergeordnete Inhaltsbereiche verstanden, in denen die vier Praktiken übergreifend auftreten. Die drei Big Ideas lauten "Generalisierte Arithmetik", "Äquivalenz, Ausdrücke, Gleichungen und Ungleichungen" sowie "funktionales Denken". Dabei ergibt sich die Big Idea "funktionales Denken" aus dem zweiten Kernaspekt und die anderen beiden Big Ideas aus dem ersten Kernaspekt von Kaput (2008) (Blanton et al., 2019).

In einem aktuellen Beitrag fasst Kieran (2022) die Vielschichtigkeit des algebraischen Denkens zusammen und liefert drei übergreifende Arten zur Strukturierung des algebraischen Denkens. Diese übergreifenden Arten lauten "analytic thinking" "structural thinking" und "functional thinking". Generalisierungen ziehen sich dabei wie ein roter Faden durch alle der drei Arten und sind als grundlegend anzusehen (Kieran, 2022). Diese drei übergreifenden Arten werden von Kieran (2022) aus einer Metaperspektive heraus formuliert, indem sie aktuelle Forschungsbefunde zusammenfasst und daraus diese drei Arten bildet. Ähnlich dazu stellen im aktuellen nationalen deutschen Diskurs Akinwunmi und Steinweg (2024) vier Grundideen algebraischen Denkens vor. Dabei geht es vor allem für den unterrichtlichen Zugang darum, dass Muster angeboten werden sollen, die sich auf eines ihrer definierten Objekte beziehen und durch konkrete Impulse dazu anregen Strukturen zu entdecken. Die Objekte sind in diesem Fall "Operationen", "Gleichungen", "Funktionen" und "Zahlen", wobei das Objekt "Zahlen" mit den anderen drei Objekten verwoben ist (Akinwunmi & Steinweg, 2024). Die Grundideen nach Akinwunmi & Steinweg (2024) orientieren sich an

konkreten mathematischen Gegenständen und sind somit eher auf einer inhaltlichen Ebene angesiedelt. Bei einem inhaltlichen Vergleich der drei Charakterisierungen algebraischen Denkens nach Kieran (2022), Akinwunmi & Steinweg (2024) und Blanton et al. (2019) lassen sich folgende Beziehungen feststellen:

Blanton et al, 2019	Kieran, 2022	Akinwunmi & Steinweg, 2024
Drei Big Ideas mit je vier essentiellen Praktiken algebraischen Denkens:	Formulierung drei übergreifender Arten	Grundideen
Äquivalenzen, Ausdrücke, Gleichungen und Ungleichungen	Analytic thinking	Grundidee Gleichungen
Generalisierte Arithmetik	Structural thinking	Grundidee Operationen
Funktionales Denken	Functional thinking	Grundidee Funktionen
Vier essentielle Praktiken: (1) generalizing (2) representing (3) justifying (4) reasoning with	Generalisierungen in allen drei enthalten	Übergreifende Grundideen: Muster und Strukturen Zahlen

Abb. 1: Zusammenhang zwischen den dargestellten Definitionen

Die Grundidee "Gleichungen" und das "analytic thinking" beinhalten den Umgang und die Herstellung von Äquivalenzen, Gleichheit und die relationalen Zusammenhänge von Termen (Kieran, 2022; Akinwunmi & Steinweg, 2024). Die Big Idea "Äquivalenzen, Ausdrücke, Gleichungen und Ungleichungen" befindet sich inhaltlich auf derselben Ebene (Blanton et al., 2019). Die Grundidee "Operationen" und das "structural thinking" antizipieren beide die Auseinandersetzung mit Operationen auf struktureller Ebene und nicht als reine Werkzeuge für numerische Berechnungen (Kieran, 2022; Akinwunmi & Steinweg, 2024). Die Big Idea "Generalisierte Arithmetik" lässt sich inhaltlich mit der Grundidee "Operationen" und dem "structural thinking" in Beziehung setzen, da alle drei im Kern dieselben Inhalte verfolgen (Blanton et al., 2019). Ein weiterer Zusammenhang lässt sich zwischen der Grundidee "Funktionen" und den "functional thinking" herstellen. Bei beiden geht es um die Erkundung funktionaler Zusammenhänge, Änderungsverhalten sowie der Anbahnung des Kovariationsaspektes (Kieran, 2022; Akinwunmi & Steinweg, 2024). Ebenso schließt sich auch hier die Big Idea "funktionales Denken" inhaltlich passend an (Blanton et al., 2019).

Entwicklung eines Analyseinstruments

Um der Forschungsfrage nachgehen zu können, werden Aufgaben, die in Studien zum algebraischen Denken eingesetzt wurden, mithilfe der qualitativen Inhaltsanalyse nach Kuckartz und Rädiker (2022) kategorisiert. Dazu werden zunächst aus der aktuellen Forschungsliteratur Aufgabenbeispiele herausgesucht. Ebenfalls werden aus der Forschungsliteratur deduktiv Kategorien gebildet. Diese ergeben sich aus den bereits oben dargestellten Grundideen und Arten des algebraischen Denkens, da diese durch die AutorInnen

schon mit Inhalten voneinander abgrenzbar sind. Somit lauten die ersten drei deduktiven Kategorien für den ersten Analysedurchgang "Analytisches Denken", "Funktionales Denken" und "Strukturelles Denken". Da sich Generalisierungen wie ein roter Faden durch alle Inhalte zieht (Kieran, 2022) wird auch die Kategorie "Generalisierungen" in den Kriterienkatalog aufgenommen. Ebenso verhält es sich mit der nach Akinwunmi und Steinweg (2024) übergreifenden Grundidee "Muster und Strukturen", die ebenfalls zur Analyse aufgenommen wird. Zuletzt fehlt noch die Kategorie des "mathematischen Begründens", welche aus den essentiellen Praktiken "justifying" und "reasoning with" hervorgeht. Mit diesen sechs deduktiv gewählten Kategorien werden die Aufgaben ($n = 92$) in einem ersten Analysedurchgang kategorisiert. Es ist anzunehmen, dass es teilweise doppelt codierte Aufgaben geben wird, da sich die Kategorien "Muster und Strukturen" sowie "Generalisierungen" vermutlich in fast allen Aufgaben finden lassen. In einem zweiten Durchgang werden induktiv aus den Aufgaben Subkategorien gebildet, die die dargestellte Aufgabe inhaltlich näher spezifizieren. Ziel dieser Kategorisierung ist es, eine Art Checkliste zu erhalten, mit der Aufgaben auf ihr Potential zur Förderung algebraischen Denkens in Schulbüchern analysiert werden können.

Literatur

- Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2024). *Algebraisches Denken im Arithmetikunterricht der Grundschule: Muster entdecken - Strukturen verstehen*. Mathematik. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-68701-7>
- Blanton, M., Isler-Baykal, I., Stroud, R., Stephens, A., Knuth, E. & Gardiner, A. M. (2019). Growth in children's understanding of generalizing and representing mathematical structure and relationships. *Educational Studies in Mathematics*, 102(2), S. 193-219. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09894-7>
- Blanton, M., Brizuela, B., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A., Stroud, R., Fonger, N. & Stylianou, D. (2018): Implementing a Framework for Early Algebra. In: Carolyn Kieran (Hrsg.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- To 12-Year-Olds. The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice*. (S. 27-49). Springer.
- Kaput, J. J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning?. In J.J Kaput, D. W Carraher & M. L. Blanton (Hrsg.), *Studies in mathematical thinking and learning. ALGEBRA in the Early Grades*. (S. 5-18). Lawrence Erlbaum.
- Kieran, C. (2022): The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. In: *ZDM Mathematics Education* 54 (6), S. 1131–1150. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6>
- Kuckartz, U.; Rädiker, S. (2022): *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung: Grundlagentexte Methoden*. 5. Auflage. Beltz Juventa.