

EIRUND, Hannes Frithjof; VON HERING, Robert; ROHWER, Neele;
VANSELOW, Lena & SIEVERT, Henning
Flensburg

Typische Fehler bei der stellenweisen Subtraktion. Eine Analyse im Mathematikunterricht der dritten Klasse

„Die Aufgabe ist etwas fies.“ (Proband Jonas zur Aufgabenstellung)

Die Einführung des halbschriftlichen Rechnens eröffnet neue mathematische Möglichkeiten, aber auch Herausforderungen. Ein Beispiel dafür ist die stellenweise Subtraktion, die zwar einen schematischen Weg zur Lösung liefert, je nach Zahlenmaterial aber zu Schwierigkeiten bei der Bearbeitung führen kann. Die Relevanz dieser Problematik wird durch Aussagen wie die von Jonas im vorangegangenen Zitat anekdotisch deutlich, da die Aufgabe als „fies“ personifiziert wird. Vor diesem Hintergrund werden in diesem Beitrag typische Fehler bei der stellenweisen Subtraktion untersucht. Ziel ist es, typische Fehler zu identifizieren, um in der Unterrichtspraxis gezielt auf die zugrundeliegenden (Fehl-)Vorstellungen eingehen zu können.

Halbschriftliches Rechnen

Im Mathematikunterricht der dritten Jahrgangsstufe erweitert sich der Zahlenraum von 100 auf 1000. Damit steigt die Notwendigkeit, Zwischenergebnisse und -schritte bei Rechenoperationen zu notieren (Rasch & Schütte, 2011). Das halbschriftliche Rechnen definiert sich durch eine derartige Vorgehensweise, wobei die inhaltliche Nähe zum vorausgestellten Kopfrechnen deutlich wird (Rasch & Schütte, 2011). Die Verwendung von halbschriftlichen Strategien setzt dabei ein Grundwissen von Zahlvorstellungen, Zahlbeziehungen, Rechengesetzen und einem Stellenwertverständnis voraus (z. B. Krauthausen, 2017). Bei der stellenweisen Subtraktion, als eine halbschriftliche Strategie, werden Minuend und Subtrahend in die jeweiligen Stellenwerte zerlegt und in jedem Stellenwert die Differenz gebildet; diese Teildifferenzen werden abschließend addiert. Komplexe Probleme lassen sich so auf einfachere Teilprobleme zurückführen und lösen. Besonders leistungsschwächere Schüler:innen wenden stellenweise Rechenstrategien an, da sie einem konkreten Schema folgen (Götze et al., 2019). Allerdings ist zu beachten, dass „bestimmte Rechenstrategien in den in der Grundschule betrachteten Zahlenräumen problematisch sein können“ (Heinze, 2018, S. 7). Bei der stellenweisen Subtraktion ist dies der Fall, wenn einzelne Stellenwerte des Subtrahenden größer sind als die des Minuenden. Lösungsmöglichkeiten ergeben sich infolgedessen durch die Zahlbereichserweiterung auf die ganzen Zahlen ($21 - 19 = (20 - 10) + (1 - 9) = 10 - 8 = 2$) oder das Entbündeln des nächstgrößeren Stellenwerts des Minuenden ($21 - 19 = 20 -$

10, $1 + 10 = 11$, $11 - 9 = 2$, Götze et al., 2019).

Forschungsstand und Forschungsfrage

Vergangene Untersuchungen haben sich mit der Frage beschäftigt, welche Rechenstrategien von Schüler:innen angewendet werden und ob die Aufgaben mit der gewählten Strategie korrekt gelöst wurden. Aus den gesammelten Untersuchungsergebnissen lässt sich ableiten, dass während des zweiten Schuljahres die Rechenstrategie des stellenweisen nach dem schrittweisen Rechnen tendenziell am häufigsten Verwendung findet (Padberg & Benz, 2021). Ergebnisse von Selter (2000) zeigen zudem, dass Schüler:innen die stellenweise Subtraktion unabhängig davon verwenden, ob diese Lerngegenstand im Unterricht war. Entsprechend stellt sich für diese Untersuchung die folgende Forschungsfrage: Welche typischen Fehler unterlaufen den Schüler:innen beim stellenweisen Subtrahieren? Der Begriff des typischen Fehlers wird dabei als ein von der Person unabhängiges Fehlermuster definiert.

Forschungsmethodik: Diagnostische Interviews

Kinder denken und rechnen im Mathematikunterricht häufig anders, als Erwachsene vermuten würden (KIRA, o. J.). Um mehr über die Denkwege der Schüler:innen zu erfahren und Einsicht in mögliche Schwierigkeiten und (Fehl-)Vorstellungen zu gewinnen, wurden diagnostische Interviews mit 21 Drittklässler:innen durchgeführt. Diesen Interviews gehen Vortests mit insgesamt 122 Schüler:innen aus acht Klassen voraus. Die interviewten Schüler:innen wurden aufgrund von fehlerhaften Bearbeitungen oder ungewöhnlicher Vorgehensweisen ausgewählt. Im Interviewsetting ist zunächst eine Subtraktionsaufgabe ohne und anschließend mit Stellenwertübergang stellenweise zu lösen, wobei die erste Aufgabenstellung das Schema der stellenweisen Subtraktion wiederholen soll. Die Interviewsequenz und das damit einhergehende videografierte diagnostische Interview startet mit Beginn der zweiten Aufgabenbearbeitung. Die nachfolgende Analyse erfolgt durch die qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring (2022), wobei materialgeleitete Hypothesen entwickelt werden. Angesichts der variierenden Antwortmöglichkeiten der Schüler:innen wird die Analysetechnik der Strukturierung gewählt. Um Fehler und Fehlvorstellungen aus dem transkribierten Material herauszuarbeiten, wurden deduktiv literaturbasierte Analysekriterien erstellt.

Ergebnisdarstellung

Die Analysekriterien sind den folgenden fünf Oberkategorien zugeordnet: *Reaktion während der Bearbeitung*, *kommunizierte Denkwege der Schüler:innen*, *Validierung der Aufgabe*, *neue Ansätze der Aufgabenbearbeitung*

und *Fehlertypen während der Bearbeitung*. Im Folgenden werden Ergebnisse aus der Oberkategorie *Fehlertypen während der Bearbeitung* betrachtet. Diese lassen sich in Verfahrens-, Verständnis-, Rechen- und Merkfehler unterteilen.

Fehlertypen während der Bearbeitung	Ausgewählte Unterkategorie	Anzahl gesamt
Verfahrensfehler	Bilden der absoluten Differenz	22
Verständnisfehler	Strategiewechsel	14
	Rechenrichtungsfehler	11
Rechenfehler	Fehler im Stellenwertverständnis	12
Merkfehler	Vergessen eines Stellenwerts	6
	Zahlendreher bei der weiterführenden Notation	4

Tabelle 3: Übersicht der Fehlertypen während der Bearbeitung

Die Anzahl der Fehler während der Bearbeitung entspricht nicht der Gesamtzahl der Stichprobengröße, da den Schüler:innen während der Bearbeitung multiple Fehler unterlaufen können. In der zweiten Spalte sind lediglich ausgewählte Unterkategorien abgebildet welche häufig auftreten. Bei der Bildung der absoluten Differenz wird eine inkorrekte Analogie zur Addition hergestellt, indem das Kommutativgesetz übergeneralisiert wird. Durch das häufige Auftreten wird deutlich, warum Götzes et al. (2019) diesen Fehlertyp als Hauptfehler der stellenweisen Subtraktion bezeichnen. Ein weiterer häufig auftretender Fehlertyp sind Verständnisfehler, wobei Strategiewechsel und Rechenrichtungsfehler eine dispositive Rolle einnehmen. Beim Strategiewechsel verwenden die Schüler:innen anstelle der stellenweisen die schrittweise oder eine Mischform aus beiden Rechenstrategien und verletzen dabei unabhängig von einer möglichen korrekten Berechnung den Arbeitsauftrag, die Differenz stellenweise zu berechnen. Rechenrichtungsfehler definieren sich dadurch, dass mindestens einmal fälschlicherweise die Umkehroperation verwendet wird (Götze et al., 2019). Der häufigste Rechenfehler ist ein Fehler im Stellenwertverständnis. Dabei werden die Stellenwerteinheiten falsch zugeordnet und inkorrekte Beziehungen im Stellenwertverständnis hergestellt. Merkfehler wie das Vergessen eines Stellenwerts oder Zahlendreher bei der weiterführenden Notation treten wesentlich seltener auf als die anderen drei Fehlertypen.

Diskussion

Bei der Betrachtung von Fehlern in Subtraktionsaufgaben mit Stellenwertübergang fällt auf, dass sich bestimmte Fehlerkategorien wiederholen. Diese können daher als typische Fehler bezeichnet werden. Der Lösungsansatz des Voraussetzens der Kommutativität bei der Subtraktion kann neben den Aufgabenbearbeitungen der Zahlbereichserweiterung und des Entbündelns gesondert betrachtet werden. Die Bildung der absoluten Differenz führt direkt zu einem Verfahrensfehler. Bei der Zahlbereichserweiterung und dem Entbündeln treten bei inkorrekt ausgeführter wiederkehrende Fehlermuster auf. Die Schüler:innen beginnen die Berechnung der Teildifferenzen stets mit dem größten Stellenwert. Der Strategiewechsel tritt vermehrt auf, wenn zuvor entbündelt wurde. Dabei wird bei der Teilrechnung zum Minuenden aufgefüllt, anstatt den entsprechenden Stellenwert komplett zu entbündeln. Durch diese Notationsform wird eine Mischform aus stellen- und schrittweiser Subtraktion verwendet. Der Rechenrichtungsfehler tritt in Zusammenhang mit der Zahlbereichserweiterung auf, da die negative Teildifferenz zu einer Umkehr der Rechenoperation und damit zu Schwierigkeiten bei der Bearbeitung führt.

Die Identifizierung typischer Fehler bei Subtraktionsaufgaben mit Stellenwertübergang kann dazu verwendet werden, um in der Unterrichtspraxis gezielt auf diese Fehlermuster einzugehen. Dadurch kann zugrundeliegenden Fehlvorstellungen entgegenwirkt und Kindern wie Jonas ein geeignetes strategisches Lösungswerkzeug zur Verfügung gestellt werden.

Literatur

- Götze, D., Selter, C., & Zannetin, E. (2019). *Das KIRA-Buch: Kinder Rechnen anders. Verstehen und Fördern im Mathematikunterricht*. Kallmeyer/Klett.
- Heinze, A. (2018). Halbschriftliches Rechnen: Geht es sicher und geschickt? *Mathematik differenziert, 1*, 6–9.
- KIRA. Deutsches Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik. (o. J.). Kinder besser verstehen. <https://kira.dzlm.de/node/86>
- Krauthausen, G. (2017). *Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule*. Springer Spektrum. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-662-54692-5>
- Mayring, P. (2022). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken*. Beltz.
- Padberg, F., & Benz, C. (2021). *Didaktik der Arithmetik: fundiert, vielseitig, praxisnah*. Springer Spektrum.
- Rasch, R. & Schütte, S. (2011). Zahlen und Operationen. In: G. Walter, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 66–88). Cornelsen Verlag.
- Selter, C. (2000). Vorgehensweisen von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. *Journal Für Mathematik-Didaktik, 21*, 227–258. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/BF03338920>