Nicht-negative Polynome und nicht-negative Funktionale

Dissertation

zur
Erlangung des Grades
eines
Doktors der Naturwissenschaften

Der Fakultät für Mathematik
der Technischen Universität Dortmund
vorgelegt von

Dipl.-Math. **Katrin Siemko**

aus Waltrop

im Juni 2012

Die vorliegende Arbeit wurde von der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Dortmund als Dissertation zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften genehmigt.

Promotionsausschuss:

Vorsitzender:	Prof. Dr. K. Menke
Erster Gutachter:	Prof. Dr. H. M. Möller
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. J. Stöckler
Zusätzlicher Prüfer:	Prof. Dr. Ch. Buchheim
Beisitzer:	Dr. A. Rademacher

Tag der Einreichung:	14. Juni 2012
Tag der Disputation:	30. August 2012

Danksagung

Ich danke meinem Betreuer Prof. Dr. Möller für die interessante Themenstellung und die angeregten Diskussionen. Insbesondere in Momenten, in denen ich auf der Stelle trat, gab er mir stets neue Denkanstöße und die nötige Motivation. Weiterhin bedanke ich mich bei allen Kollegen, die mich besonders kurz vor meiner Disputation unterstützten und Aufgaben übernahmen, die eigentlich die meinen waren, damit ich mich auf meine Vorbereitungen konzentrieren konnte.

Bei Dr. Frank Bowert bedanke ich mich für das Korrekturlesen der Arbeit und ebenso für die langen telefonischen Diskussionen über korrekte Formulierungen und darüber, welche mathematischen Details erwähnt oder eben nicht erwähnt werden müssen.

Nicht fehlen darf an dieser Stelle der Dank an meine Familie für ihre Unterstützung. Auch das gelegentliche Nachfragen, wie es denn mit der Dissertation vorangehe, hat mich, auch wenn ich es in dem Moment nicht hören wollte, doch motiviert. Meinen besonderen Dank schulde ich dabei meinem Mann Frédéric. Dein Rückhalt, deine Geduld und deine Liebe haben mich in den letzten Jahren über jede Durststrecke gebracht und sind für mich immer noch nicht selbstverständlich.

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Einleitung

Nicht-Negativität spielt eine wichtige Rolle in der Mathematik. Lässt sich entscheiden, ob ein Polynom p größer oder gleich null in allen Punkten des Raums $\mathbb{R}^n$ ist, so kann man auch entscheiden, ob für zwei Polynome f und g gilt, dass $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist. Sei dazu nun beispielsweise $f = 2x^4 - 6x^3 - x2 + 2x + 1$ und $g = x^4 - 11x^3 - x^2 - x - 12$. Das Polynom $f - g = x^4 - 5x^3 + 10x^2 + 3x + 13$ ist ein nicht-negatives Polynom. Damit ist $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Jetzt lassen sich mit Hilfe des Polynoms g Rückschlüsse auf Eigenschaften von f ziehen. So sind die reellen Nullstellen von f symbolisch nur schwer zu berechnen. Mit Hilfe von g lassen sie sich aber auf ein Intervall eingrenzen. Die reellen Nullstellen von g sind $x_{(1)} = 4$ und $x_{(2)} = -3$. Da g somit nur im Intervall $(-3, 4)$ kleiner als Null ist, müssen die reellen Nullstellen von f im Intervall $[-3, 4]$ liegen.

Eine Fragestellung, die im Zusammenhang mit nicht-negativen Polynomen immer wieder auftaucht, ist die, ob sich ein nicht-negatives Polynom als Summe aus Quadraten bestimmter Funktionen darstellen lässt. Als „Hilberts 17. Problem" wurde die Fragestellung bekannt, ob jedes nicht-negative Polynom eine Darstellung als Summe aus Quadraten rationaler Funktionen besitzt [**Hil00**]. Dieses Problem wurde später von Artin gelöst [**Art26**]. Hilbert selbst untersuchte auch die Frage, ob es für jedes nicht-negative Polynom eine Darstellung als Summe aus Quadraten von Polynomen (oder kurz Quadratsumme) gibt. Er stellte fest, dass univariate Polynome beliebigen Grades, bivariate Polynome vom Grad 4 und multivariate Polynome vom Grad 2 immer Quadratsummen sind [**Hil88**]. Er erbrachte den Beweis, dass für alle anderen Fälle nicht-negative Polynome existieren, die keine solche Darstellung besitzen. Ein Beispiel für ein solches Polynom veröffentlichte er allerdings nicht. Das erste konkrete Beispiel eines nicht-negativen Polynoms, das keine Quadratsumme ist, veröffentlichte Motzkin [**Mot65**]:

$$p(x, y, z) = z^6 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2z^2.$$

Die Nicht-Negativität dieses Polynoms bewies Motzkin mit Hilfe der arithmetisch-geometrischen Ungleichung, die besagt, dass für nicht-negative Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gilt:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Später untersuchte Reznick, unter welchen Bedingungen nicht-negative Polynome, die von dieser Form sind, eine Darstellung als Quadratsumme besitzen [**Rez89**]. Darauf aufbauend erforschten Choi, Lam und Reznick, wie viele Summanden für eine Darstellung als Quadratsumme maximal benötigt werden [**CLR95**]. Außerdem fanden sie Bedingungen an die Anzahl der reellen Nullstellen, unter denen homogene nicht-negative Polynome in drei Variablen vom Grad 6 bzw. in vier Variablen vom Grad 4 Quadratsummen sind [**CLR80**]. Powers und Wörmann entwickelten ein Verfahren, das nicht nur entscheidet, ob ein nicht-negatives Polynom eine Quadratsumme ist, sondern welches gleichzeitig auch eine solche Darstellung berechnen kann [**PW98**]. Putinar schränkte den Definitionsbereich der Polynome ein. Für seine Untersuchungen betrachtete er Polynome, die auf einer semi-algebraischen Menge

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}$$

nicht-negativ sind [**Put93**]. Er zerlegte diese Polynome in Summen aus bestimmten einfacheren Polynomen. Pólya fand für homogene Polynome eine notwendige Bedingung für die Positivität auf einer bestimmten semialgebraischen Menge [**Pól74**]: Es sei

$$K_0 := \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

Ist $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ homogen und $p(x) > 0$ für alle $x \in K_0$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass alle Koeffizienten des Polynoms

$$h_N(x) = (x_1 + \cdots + x_n)^N p(x)$$

positiv sind. Die Zahl N ist dabei unbeschränkt. Sätze solcher Art, die eine notwendige Bedingung für die Nicht-Negativität bzw. die Positivität eines Polynoms auf dem Raum $\mathbb{R}^n$ oder einer semi-algebraischen Teilmenge angeben, werden „Nichtnegativstellensätze“ bzw. „Positivstellensätze“ genannt. Es gibt weitere bekannte klassische Positivstellensätze und Nichtnegativstellensätze von Stengle [**Ste73**] und Schmüdgen [**Sch91**]. Zusammenfassungen und Beweise klassischer und neuerer Stellensätze findet man bei Cukierman [**Cuk07**], Scheiderer [**Sch09**], sowie Berr und Wörmann [**BW01**]. Becker, Powers und Wörmann entwickelten ein Verfahren, mit dessen Hilfe sich entscheiden lässt, ob ein Polynom nicht-negativ ist [**BPW00**]. Dieses Verfahren überprüft, ob die reelle Varietät eines bestimmten Ideals leer ist oder nicht.

Eine wichtige Anwendung finden nicht-negative Polynome beim Momentenproblem: Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere abgeschlossene Menge und $L : \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional. Das Momentenproblem ist die Fragestellung, ob ein nicht-negatives Borelmaß μ existiert, so dass $L(p) = \int_K p d\mu$. Haviland zeigte, dass ein solches Borelmaß genau dann existiert, wenn $L(p) \geq 0$ für alle auf K nicht-negativen

Polynome p gilt [**Hav35**], [**Hav36**]. Schmüdgen löste das Momentenproblem für kompakte semi-algebraische Mengen K [**Sch91**]. Kuhlmann, Marshall und Schwartz untersuchten das Momentenproblem für nicht-kompakte semi-algebraische Mengen [**KM02**], [**KMS05**]. Weitere Informationen und Anwendungen des Momentenproblems sind im Buch von Lasserre [**Las10**] zu finden.

Als Kegel wurde die Menge der nicht-negativen Polynome selbst bisher nur wenig betrachtet. Reznick untersuchte diesen konvexen Kegel für homogene Polynome vom Grad d [**Rez92**]. Außerdem interpretierte er den dualen Kegel als Menge der Summen aus d-Potenzen von linearen Polynomen. Choi und Lam untersuchten im homogenen Fall die Kanten des Kegels [**CL77**]. Sie gaben allerdings keine allgemeinen Kriterien an, sondern überprüften einzelne Beispiele. Blekherman untersuchte den Kegel der nicht-negativen Polynome und den Kegel der Quadratsummen, indem er sie mit einer Hyperebene schnitt und anschließend die Volumina der Schnitte berechnete [**Ble04**], [**Ble06**]. Er bewies damit, dass es, solange der Grad beschränkt ist, einen echten Unterschied zwischen diesen beiden Kegeln gibt. Ist der Grad der Polynome hingegen unbeschränkt, so liegt der Kegel der Quadratsummen dicht in der Menge der Polynome, die nicht-negativ auf dem Würfel $[-1,1]^n$ sind, wie Berg, Christensen und Ressel bewiesen [**BCR76**]. Weitere Ergebnisse zur Approximation nicht-negativer Polynome mit Quadrat-Summen veröffentlichten Lasserre [**Las06**] und Marshall [**Mar03**]. Desweiteren gibt es Fragestellungen im Bereich der Optimierung, bei denen nicht-negative Polynome und Quadratsummen eine wichtige Rolle spielen. Eine Übersicht dazu findet sich bei Laurent [**Lau09**].

Im Zusammenhang mit nicht-negativen Polynomen ist auch der Satz von Tchakaloff von Bedeutung. Er besagt in seiner ursprünglichen Form, die für kompakte $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und auf Ω nicht-negative Gewichtsfunktionen w gilt, dass es für jedes Integral der Form

$$I(f) = \int\limits_{\Omega} f(x)w(x)dx$$

mit $|I(x^\alpha)| < \infty$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ |\alpha| < d$ eine Kubatursumme mit $D = \binom{d+2}{d}$ Knoten und nicht-negativen Gewichten gibt, so dass

$$I(p) = \sum_{k=1}^{D} A_k p(\xi_{(k)})$$

ist [**Tch57**]. Dieser Satz wurde im Laufe der Jahre verallgemeinert. Putinar bewies, dass er auch für eine beliebige endliche Anzahl an Variablen gilt [**Put97**]. Curto und Fialkow erweiterten den Satz auf nicht-kompakte Mengen Ω [**CF02**]. Sie bewiesen außerdem eine komplexe Version des Satzes. Bayer und Teichmann verallgemeinerten ihn auf Maßräume [**BT06**].

In der vorliegenden Arbeit wird der Kegel der nicht-negativen Polynome untersucht und unter anderem der Satz von Tchakaloff rein algebraisch und funktionalanalytisch bewiesen. Dazu werden wir im zweiten Kapitel die in den weiteren Ausführungen benötigten Grundlagen über konvexe Mengen, Kegel und Hyperebenen vorstellen. Das dritte Kapitel behandelt Grundlagen über homogene Polynome, Homogenisierungen und den projektiven Raum $\mathbb{P}_n$. Anschließend werden wir diese Begriffe zusammenführen und Auswertungen homogenisierter Polynome in den Punkten des projektiven Raums definieren. Besondere Beachtung finden dabei die unendlich fernen Punkte im Raum $\mathbb{P}_n$. Im vierten Kapitel untersuchen wir für beschränkten Grad den Kegel der nicht-negativen Polynome. Als erstes beweisen wir, dass der Grad jedes nicht-negativen Polynoms eine gerade Zahl ist. Anschließend untersuchen wir den Rand und das Innere des Kegels. Wir beschreiben den Rand und das Innere vollständig über affine und unendlich ferne Nullstellen. Das fünfte Kapitel behandelt den Satz von Tchakaloff. Wir geben einen neuen Beweis der bisher weitesten Verallgemeinerung dieses Satzes für den Raum $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ mit einer beliebigen Menge Ω an. Im Gegensatz zu allen bisher veröffentlichten Beweisen verzichten wir auf maßtheoretische Argumente und argumentieren stattdessen rein algebraisch und funktionalanalytisch. Im sechsten Kapitel betrachten wir schließlich den Kegel der linearen Funktionale, die auf allen nicht-negativen Polynomen von beschränktem Grad nicht-negativ sind. Hier werden wir diesen Kegel vollständig beschreiben. Dazu untersuchen wir den Rand und das Innere des Kegels. Angelehnt an den Satz von Tchakaloff zeigen wir, welche linearen Funktionale sich als Kubatursumme mit nicht-negativen Gewichten darstellen lassen. Für alle linearen Funktionale, die keine solche Darstellung als Kubatursumme besitzen, finden wir eine einer Kubatursumme mit nicht-negativen Gewichten ähnliche Darstellung. Anschließend untersuchen wir anhand dieser Darstellungen, welche dieser Funktionale sich fortsetzen lassen zu linearen Funktionalen, die auf dem Kegel der nicht-negativen Polynome von höherem Grad nicht-negativ sind.

KAPITEL 2

Konvexe Kegel und Hyperebenen

2.1. Konvexe Mengen und Kegel

Die Definitionen und Sätze der folgenden beiden Abschnitte entstammen alle bis auf einzeln gekennzeichnete dem Buch [**HUL01**].

In dieser Arbeit betrachten wir den Raum $\mathbb{R}^D$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, das bekanntlich wie folgt definiert ist: Für $x = (x_1, \ldots, x_D), y = (y_1, \ldots, y_D) \in \mathbb{R}^D$ ist $\langle x, y \rangle = \sum\limits_{i=1}^{D} x_i y_i$. Mit der Euklidischen Norm $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ist $\mathbb{R}^D$ ein vollständiger normierter Raum.

Definition 1. Eine Menge $C \subseteq \mathbb{R}^D$ heißt *konvex*, wenn gilt:

$$x, y \in C \Rightarrow \{\alpha x + (1-\alpha) y \mid \alpha \in [0,1]\} \subseteq C.$$

Geometrisch interpretiert bedeutet das, dass für je zwei Elemente $x, y \in C$ auch ihre Verbindungsstrecke $\{\alpha x + (1-\alpha) y \mid \alpha \in [0,1]\}$ in der Menge C enthalten ist. Äquivalent zur obigen Definition ist die Aussage:

$$x_1, \ldots, x_k \in C \Rightarrow \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \;\middle|\; \alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \right\} \subseteq C.$$

Definition 2. Eine *Konvexkombination* aus Elementen $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^D$ ist ein Element der Form

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \text{ wobei } \alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1.$$

Die *konvexe Hülle* $\mathrm{co}(S)$ einer Menge $S \subseteq \mathbb{R}^D$ ist der Durchschnitt aller konvexen Mengen, die S enthalten

$$\mathrm{co}(S) := \bigcap \{C \subseteq \mathbb{R}^D \mid C \text{ konvex und } S \subseteq C\}.$$

Eine Konvexkombination ist demnach eine Linearkombination mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass alle Koeffizienten nicht-negativ sind und ihre Summe Eins ergibt. Die konvexe Hülle einer Menge lässt sich auch mit Hilfe aller Konvexkombinationen beschreiben. Es gibt demnach eine Charakterisierung als Durchschnitt von Mengen und eine als Menge aus Konvexkombinationen.

Satz 3. Die konvexe Hülle einer Menge $S \subseteq \mathbb{R}^D$ kann auch beschrieben werden als Menge ihrer Konvexkombinationen:

$$\begin{aligned} \mathrm{co}(S) \;=\; \big\{x \in \mathbb{R}^D \mid \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \text{ existieren } x_1, \ldots, x_k \in S \\ \text{und } \alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0 \text{ mit } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \text{ so dass } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = x\big\}. \end{aligned}$$

Zwar ist jedes Element aus $\mathrm{co}(S)$ eine Konvexkombination aus endlich vielen Elementen, aber die Anzahl k dieser Elemente ist erst einmal unbeschränkt. Eine Beschränkung liefert der folgende Satz:

Satz 4. (C. Carathéodory) Jedes $x \in \mathrm{co}(S) \subseteq \mathbb{R}^D$ lässt sich als Konvexkombination aus $D+1$ Elementen von S darstellen.

Der Satz von Carathéodory sagt nichts über die Existenz einer Basis aus $D+1$ Elementen aus, wie man sie im Fall von Linearkombinationen kennt. In Wirklichkeit hängen die Erzeuger x_i im Allgemeinen von x selbst ab. Betrachtet man ein Dreieck im Raum $\mathbb{R}^2$, so lässt sich jeder Punkt der Dreiecksfläche als Konvexkombination der drei Eckpunkte beschreiben. Anders sieht es allerdings aus, wenn man im Raum $\mathbb{R}^2$ eine Kreisscheibe mit Hilfe von Konvexkombinationen der Elemente des Kreisrandes beschreiben möchte. Man findet keine drei Punkte, durch deren Konvexkombinationen man die ganze Kreisfläche erhält. In Wahrheit werden in diesem Fall wirklich unendlich viele verschiedene Punkte auf dem Kreisrand benötigt, für jedes einzelne Element aber wiederum nur höchstens drei.

In den folgenden Kapiteln werden wir auch häufig abgeschlossene konvexe Mengen betrachten, die als abgeschlossene konvexe Hülle einer Menge S entstehen:

Definition 5. Die *abgeschlossene konvexe Hülle* $\overline{\mathrm{co}}(S)$ einer nicht-leeren Menge $S \subseteq \mathbb{R}^D$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen konvexen Mengen, die S enthalten.

In der Tat ist $\overline{\mathrm{co}}(S)$ wieder eine abgeschlossene Menge, da der Durchschnitt abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist. Man kann die abgeschlossene konvexe Hülle auch mit Hilfe der konvexen Hülle konstruieren:

Satz 6. Die abgeschlossene konvexe Hülle $\overline{\mathrm{co}}(S)$ ist der Abschluss $\mathrm{cl}(\mathrm{co}(S))$ der konvexen Hülle von S.

Eigenschaften der konvexen Hülle und der abgeschlossenen konvexen Hülle:

(i) Ist $S_1 \subseteq S_2$, so ist sowohl $\mathrm{co}(S_1) \subseteq \mathrm{co}(S_2)$ als auch $\overline{\mathrm{co}}(S_1) \subseteq \overline{\mathrm{co}}(S_2)$.

(ii) Ist S beschränkt (bzw. kompakt), so ist $\mathrm{co}(S)$ auch beschränkt (bzw. kompakt). Im Allgemeinen ist die konvexe Hülle einer abgeschlossenen Menge aber nicht abgeschlossen.

Weiterhin werden wir in den späteren Kapiteln den Begriff des Kegels benötigen:

Definition 7. Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^D$ heißt *Kegel*, wenn gilt:

$$x \in K \Rightarrow \alpha x \in K, \ \forall \alpha \geq 0.$$

In einem Kegel K ist demnach für jedes Element $x \in K$ auch die gesamte Halbgerade $\{\alpha x \mid \alpha \geq 0\}$ wieder enthalten. Der Begriff Kegel ist in der Literatur nicht immer gleich definiert. Manchmal wird vorausgesetzt, dass K auch konvex ist. Wir benötigen im weiteren Verlauf ähnlich zu den Konvexkombinationen auch Linearkombinationen mit nicht-negativen Koeffizienten.

Definition 8. Eine Menge heißt *konvexer Kegel*, wenn sie konvex und ein Kegel ist. Eine *konische Kombination* aus Elementen $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^D$ ist ein Element der Form

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \text{ wobei } \alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0.$$

Ist K ein konvexer Kegel, so liegt jede konische Kombination aus Elementen aus K wieder in K. Eine gegebene Menge auf Konvexität zu untersuchen wird einfacher, wenn bereits bekannt ist, dass sie ein Kegel ist. Denn ein Kegel K ist genau dann konvex, wenn für je zwei Elemente $x, y \in K$ auch ihre Summe $x + y \in K$ ist, das bedeutet $K + K \subseteq K$.

Definition 9. Die *konische Hülle* (oder genauer *konvexe konische Hülle*) $\mathrm{cone}(S)$ einer nicht-leeren Menge $S \subseteq \mathbb{R}^D$ ist die Menge aller konischen Kombinationen aus Elementen aus S.
Die *abgeschlossene konische Hülle* einer nicht-leeren Menge $S \subseteq \mathbb{R}^D$ ist der Abschluss der konischen Hülle $\overline{\mathrm{cone}}(S) := \mathrm{cl}(\mathrm{cone}(S))$.

Genauso wie bei der konvexen und der abgeschlossenen konvexen Hülle gilt auch für die konische und die abgeschlossene konische Hülle: Ist $S_1 \subseteq S_2$, so ist auch $\mathrm{cone}(S_1) \subseteq \mathrm{cone}(S_2)$ und $\overline{\mathrm{cone}}(S_1) \subseteq \overline{\mathrm{cone}}(S_2)$.

BEMERKUNG 10. Aus Satz 4 folgt direkt, dass sich jedes $x \in \text{cone}(S) \subseteq \mathbb{R}^D$ als konische Kombination aus $D+1$ Elementen darstellen lässt, denn

$$\begin{aligned} x \in \text{cone}(S) \quad &\Leftrightarrow \quad x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i,\ \alpha_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, k \\ &\Leftrightarrow \quad x = \lambda \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i,\ \lambda > 0,\ \beta_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, k, \\ &\qquad \sum_{i=1}^{k} \beta_i = 1. \end{aligned}$$

DEFINITION 11. Sei K ein konvexer Kegel. Der *polare Kegel* ist definiert durch

$$K^\circ := \{s \in \mathbb{R}^D \mid \langle s, u \rangle \leq 0\ \forall u \in K\}.$$

Der *bipolare Kegel* ist dementsprechend definiert durch

$$K^{\circ\circ} := \{c \in \mathbb{R}^D \mid \langle c, s \rangle \leq 0\ \forall s \in K^\circ\}.$$

Der polare Kegel K° hängt vom gewählten Skalarprodukt ab. Wählt man verschiedene Skalarprodukte, so erhält man verschiedene polare Kegel.
Sind K_1 und K_2 konvexe Kegel mit $K_1 \subseteq K_2$, so ist $K_1^\circ \supseteq K_2^\circ$. Die Inklusion dreht sich also um, wenn man zu den polaren Kegeln übergeht. Der polare Kegel ist aufgrund der Stetigkeit des Skalarprodukts ein abgeschlossener konvexer Kegel.
K° lässt sich auch geometrisch interpretieren: $\langle s, u \rangle \leq 0$ bedeutet, dass der von s und u eingeschlossene Winkel gleich oder größer als $\frac{\pi}{2}$ ist, wenn $s, u \neq 0$ sind. Der polare Kegel K° kann damit interpretiert werden als die Menge aller Vektoren, die einen Winkel von mindestens $\frac{\pi}{2}$ mit den Vektoren aus K einschließen und dem Nullvektor. Es gilt immer $K \cap K^\circ = \{0\}$.

DEFINITION 12. (aus [**BV04**]) Sei K ein konvexer Kegel. Der *duale Kegel* ist definiert durch

$$K^* := \{s \in \mathbb{R}^D \mid \langle s, u \rangle \geq 0\ \forall u \in K\}.$$

Der *biduale Kegel* ist dementsprechend definiert durch

$$K^{**} := \{c \in \mathbb{R}^D \mid \langle c, s \rangle \geq 0\ \forall s \in K^*\}.$$

Der duale Kegel ist ebenso wie der polare Kegel ein abgeschlossener konvexer Kegel.
Es ist $K^* = -K^\circ$ und $K^{**} = K^{\circ\circ}$.
Ist K ein Unterraum des $\mathbb{R}^D$, so ist $K^\circ = K^*$ sein Orthogonalraum.
Sind K_1 und K_2 konvexe Kegel mit $K_1 \subseteq K_2$, so ist $K_1^* \supseteq K_2^*$.

Insbesondere der bipolare Kegel liefert eine hilfreiche Anwendung der polaren Kegel:

SATZ 13. Sei K ein konvexer Kegel. Dann ist der bipolare Kegel $K^{\circ\circ}$ der Abschluss $\overline{K}$ von K.

Da $K^{\circ\circ} = K^{**}$, muss die obige Aussage ebenfalls für den bidualen Kegel gelten:

Korrolar 14. (aus [**BV04**]) Sei K ein konvexer Kegel. Dann ist der biduale Kegel K^{**} der Abschluss $\overline{K}$ von K.

2.2. Hyperebenen

Hyperebenen und Halbräume sind konvexe Mengen mit speziellen Eigentschaften, die wir im Folgenden noch benötigen werden.

Definition 15. Eine *affine Hyperebene* $H_{s,r} \subseteq \mathbb{R}^D$ mit $s \in \mathbb{R}^D \setminus \{0\},\ r \in \mathbb{R}$ ist definiert als die Menge

$$H_{s,r} := \{c \in \mathbb{R}^D \mid \langle c, s\rangle = r\}.$$

Jede affine Hyperebene $H_{s,r}$ lässt sich auffassen als eine verschobene *lineare Hyperebene*

$$H_{s,0} = \{c \in \mathbb{R}^D \mid \langle c, s\rangle = 0\}.$$

Jede affine Hyperebene „zerschneidet" den Raum $\mathbb{R}^D$ in zwei *affine (abgeschlossene) Halbräume*

$$H^+_{s,r} := \{c \in \mathbb{R}^D \mid \langle c, s\rangle \geq r\} \text{ und } H^-_{s,r} := \{c \in \mathbb{R}^D \mid \langle c, s\rangle \leq r\},$$

die beide die Hyperebene $H_{s,r}$ enthalten. Um die abgeschlossene konvexe Hülle einer Menge $S \subseteq \mathbb{R}^D$ nach Definition 5 zu erhalten, muss man den Durchschnitt aller abgeschlossenen konvexen Mengen bilden, die S enthalten. Tatsächlich reicht es aber aus, sich auf die affinen Halbräume $H^+_{s,r}$ zu beschränken:

Satz 16. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^D$. Dann ist entweder $\overline{\text{co}}(S) = \mathbb{R}^D$ oder

$$\begin{aligned} \overline{\text{co}}(S) &= \bigcap_{S \subseteq H^+_{s,r}} H^+_{s,r} \\ &= \{c \in \mathbb{R}^D \mid \langle s, c\rangle \geq r \text{ wobei } \langle s, t\rangle \geq r\ \forall t \in S\}. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Ob man die affinen Halbräume $H^+_{s,r}$ oder $H^-_{s,r}$ verwendet, ist dabei nicht von Bedeutung, da $H_{-s,-r} = H_{s,r}$ und $H^+_{-s,-r} = H^-_{s,r}$. Da es in unserem Fall einfacher und sinnvoller ist, nicht-negative Skalarprodukte zu betrachten, werden wir immer die Halbräume $H^+_{s,r}$ verwenden.
Eine besondere Rolle kommt den stützenden Hyperebenen zu:

Definition 17. Eine affine Hyperebene $H_{s,r}$ *stützt* eine Menge $S \subseteq \mathbb{R}^D$ im Punkt $x \in S$, wenn S im affinen Halbraum $H^+_{s,r}$ (oder $H^-_{s,r}$) liegt und x auf der Hyperebene liegt, das heißt

$$\langle s, b\rangle \geq r\ \forall b \in S \text{ und } \langle s, x\rangle = r.$$

$H_{s,r}$ heißt dann *stützende Hyperebene* von S.

Bemerkung 18. Korollar 14 besagt: Sei K ein konvexer Kegel, so ist

$$\overline{K} = \{c \in \mathbb{R}^D \mid \langle s, c\rangle \geq 0 \ \forall s \in K^*\}.$$

Das bedeutet aber, dass

$$\overline{K} = K^{**} = \overline{\mathrm{co}}(K) = \bigcap_{K \subseteq H^+_{s,0}} H^+_{s,0}.$$

Es reicht also mit Satz 16 aus, für den Abschluss $\overline{K}$ bzw. die abgeschlossene konvexe Hülle $\overline{\mathrm{co}}(K)$ eines konvexen Kegels K nur den Durchschnitt aller affinen Halbräume zu betrachten, die zu linearen Hyperebenen gehören.

Für jede konvexe Teilmenge C des Raums $\mathbb{R}^D$, die nicht selbst der $\mathbb{R}^D$ ist, existieren stützende Hyperebenen. Insbesondere liegt jedes Element von C, durch das eine stützende Hyperebene verläuft, auf dem Rand von C. Für abgeschlossene konvexe Mengen lässt sich so der gesamte Rand charakterisieren:

Satz 19. Der Rand einer abgeschlossenen konvexen Menge $C \subset \mathbb{R}^D$ enthält genau die Punkte aus $\overline{C}$, durch die eine stützende Hyperebene von $\overline{C}$ verläuft.

Da es bei einem konvexen Kegel K ausreicht, für die Konstruktion des Abschlusses nur affine Halbräume zu berücksichtigen, die zu linearen Hyperebenen gehören, benötigt man auch für die Betrachtung des Randes von K nur lineare stützende Hyperebenen:

Korrolar 20. Für den Rand eines konvexen Kegels $K \subseteq \mathbb{R}^D$ bedeutet Satz 19

$$\begin{aligned}\partial K &= \{u \in \overline{K} \mid \exists s \in \mathbb{R}^D\backslash\{0\} : \langle s, t\rangle \geq 0 \ \forall t \in K \text{ und } \langle s, u\rangle = 0\} \\ &= \{u \in \overline{K} \mid \exists s \in K^* \setminus \{0\} : \langle s, u\rangle = 0\}\end{aligned}$$

Damit folgt direkt, dass für das Innere von K gilt:

$$int(K) = \{u \in \mathbb{R}^D \mid \langle u, s\rangle > 0 \ \forall s \in K^*\backslash\{0\}\} \subseteq K.$$

KAPITEL 3

Homogene Polynome

3.1. Grundlagen

Es sei $\mathcal{P} = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ der Vektorraum aller Polynome in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit reellen Koeffizienten. Auch im Folgenden wird n immer die Anzahl der Variablen bezeichnen.

Alle Definitionen und Sätze dieses Abschnitts stammen aus [**Grö68**], [**Grö70**] und [**CLO92**].

DEFINITION 21. Es sei $qt \in \mathcal{P}$ ein Monom $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ t = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0$. Dabei nennt man t auch normiertes Monom (oder Potenzprodukt). Der *Grad von qt* ist definiert als $\deg(qt) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Sei $p \in \mathcal{P}$ ein Polynom $p = \sum\limits_{i=1}^{m} q_i t_i$ mit Monomen $q_i t_i,\ q_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, m$. Dann ist der *Grad von p* definiert als

$$\deg(p) = \max_{i=1,\ldots,m} \{\deg(q_i t_i) \mid q_i \neq 0\}.$$

Der Grad eines Polynoms wird manchmal auch als *Totalgrad* bezeichnet.

In dieser Arbeit werden wir die Bezeichnung *Grad* verwenden. Ab jetzt bezeichne

$$\mathcal{P}_d := \{p \in \mathcal{P} \mid \deg(p) \leq d\}$$

den Vektorraum der Polynome in n Variablen, deren Grad höchstens d ist. $\mathcal{P}_d$ hat die Dimension $D := \binom{d+n}{d}$. Ab jetzt sei $\{t_1, \ldots, t_D\}$ die geordnete Basis von $\mathcal{P}_d$, die aus Monomen mit Koeffizient 1 besteht mit graduiert lexikographischer Anordnung der Monome, das heißt

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} < x_1^{\beta_n} \cdots x_n^{\beta_n} :\ \Leftrightarrow\ \begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i < \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \text{ oder} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \text{ und für die letzten Koordinaten } \alpha_i \\ \text{und } \beta_i\text{, die verschieden sind, gilt } \alpha_i < \beta_i. \end{array}$$

BEISPIEL 1. Es sei $p = x^2 + z + z^2 + xy^2 + xy + xz^2 + x^2y + 1 \in \mathcal{P}_3[x, y, z]$. Ordnen wir die Monome, die in p vorkommen, so gilt $1 < z < x^2 < xy < z^2 < x^2y < xy^2 < xz^2$.

Wir werden die so definierte Basis $\{t_1, \ldots, t_D\}$ ab jetzt immer als *die geordnete Basis von $\mathcal{P}_d$* bezeichnen.

Definition 22. Ein Polynom $p \in \mathcal{P}_d$ heißt *homogen vom Grad k*, wenn jedes Monom, das in p enthalten ist, den Grad k hat oder wenn $p \equiv 0$ ist.

Ein homogenes Polynom wird in der Literatur manchmal auch als *Form* bezeichnet. Jedes Polynom $p \in \mathcal{P}_d$ lässt sich eindeutig mit Hilfe seiner *homogenen Komponenten* h_k darstellen: $p = \sum_{k=0}^{d} h_k$, wobei jeweils h_k ein homogenes Polynom vom Grad k ist. h_k ist die Summe aller Monome vom Grad k in p. Ist $\deg(p) = r$, so heißt h_r die *führende Form* von p.

Jedes homogene Polynom vom Grad $d \geq 1$ besitzt im Punkt $(0, \ldots, 0)$ eine Nullstelle. Wenn wir in den folgenden Kapiteln homogene Polynome auf Nullstellen untersuchen werden, werden wir immer die nicht-trivialen Nullstellen suchen.

Satz 23. Sei $p \in \mathcal{P}_d$. Es ist p ein homogenes Polynom vom Grad k, genau dann wenn für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ und jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$p(\lambda x) = \lambda^k p(x).$$

Ein gegebenes nicht-homogenes Polynom kann man mit Hilfe einer weiteren Variablen in ein homogenes Polynom überführen:

Definition 24. Sei $p \in \mathcal{P}_d$ mit $\deg(p) = r$ und $p = \sum_{k=0}^{r} h_k$, wobei jeweils h_k ein homogenes Polynom vom Grad k ist. Dann heißt

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) := \sum_{k=0}^{r} x_0^{r-k} h_k(x_1, \ldots, x_n)$$

die *Homogenisierung* von p.

f lässt sich ebenfalls darstellen als

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = x_0^r \cdot p\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right).$$

Homogenisieren bedeutet also, dass jedes Monom mit einer passenden Potenz von x_0 multipliziert wird, so dass es anschließend den Grad r besitzt. Man erhält dadurch ein Polynom aus dem Ring $\mathbb{R}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Die *homogenisierende Variable* x_0 wird hier immer an erster Stelle geschrieben.

Bemerkung 25. Durch Enthomogenisieren erhält man aus einem homogenisierten Polynom $f \in \mathbb{R}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ folgendermaßen auch wieder das Ausgangspolynom p:

$$p(x_1, \ldots, x_n) = f(1, x_1, \ldots, x_n).$$

3.2. Der projektive Raum

Wir definieren die folgende Äquivalenzrelation $\sim$ auf dem Raum $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$:

$$(\xi'_0, \ldots, \xi'_n) \sim (\xi_0, \ldots, \xi_n) :\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (\xi'_0, \ldots, \xi'_n) = \lambda \cdot (\xi_0, \ldots, \xi_n).$$

DEFINITION 26. (aus [**CLO92**]) Der n-dimensionale projektive Raum $\mathbb{P}_n$ über $\mathbb{R}$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen der Relation $\sim$ in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$:

$$\mathbb{P}_n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim .$$

Jede Äquivalenzklasse $R = [(\xi_0, \ldots, \xi_n)]$ bezeichnet einen Punkt in $\mathbb{P}_n$, und $(\xi_0, \ldots, \xi_n)$ heißen *homogene Koordinaten* von R.

Jeder Punkt in $\mathbb{P}_n$, das heißt jede Äquivalenzklasse, ist eine Gerade im Raum $\mathbb{R}^{n+1}$, die durch den Koordinatenursprung verläuft, wobei der Nullpunkt selbst nicht enthalten ist. Es sei

$$S_n := \{\xi \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \xi_0^2 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = 1\}$$

die Kugelsphäre in $\mathbb{R}^{n+1}$.

SATZ 27. (aus [**Die00**]) Sei $\asymp$ die auf S_n durch

$$\begin{aligned}(\xi'_0, \ldots, \xi'_n) \asymp (\xi_0, \ldots, \xi_n) \quad :\Leftrightarrow \quad & (\xi'_0, \ldots, \xi'_n) = (\xi_0, \ldots, \xi_n) \text{ oder} \\ & (\xi'_0, \ldots, \xi'_n) = -(\xi_0, \ldots, \xi_n)\end{aligned}$$

gegebene Äquivalenzrelation. Dann gibt es eine Bijektion zwischen $S_n / \asymp$ und $\mathbb{P}_n$.

Nach diesem Satz lässt sich der Raum $\mathbb{P}_n$ mit der Kugelsphäre im Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren, wenn man jeweils zwei Antipoden-Punkte als ein Element auffasst. Als Vertreter der Äquivalenzklassen der Relation $\sim$ wählt man dabei eins der beiden Elemente der Äquivalenzklasse, die auf der Kugeloberfläche liegen.

DEFINITION 28. (aus [**Grö70**])

(i) Ist $R = [(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)] \in \mathbb{P}_n$ und $\xi_0 = 0$, so heißt R ein *unendlich ferner Punkt*.
(ii) Ist $R = [(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)] \in \mathbb{P}_n$ und $\xi_0 \neq 0$, so heißt R ein *affiner Punkt*.

Ist $U = \{[(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)] \in \mathbb{P}_n \mid \xi_0 \neq 0\}$ die Menge aller affinen Punkte in $\mathbb{P}_n$, so ist die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \to U$ mit $\phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = [(1, \xi_1, \ldots, \xi_n)]$ eine Bijektion zwischen U und $\mathbb{R}^n$.

3.3. Polynomauswertungen in Punkten des projektiven Raums

Im folgenden Abschnitt werden wir die Auswertung homogener Polynome in den Punkten des projektiven Raums $\mathbb{P}_n$ definieren. Dazu führen wir zuerst einen neuen Homogenisierungs-Begriff ein, den wir in den folgenden Kapiteln benötigen.

Definition 29. Sei $p \in \mathcal{P}_d$ mit $p = \sum\limits_{k=0}^{m} h_k$ mit $m \leq d$. Dabei ist jeweils h_k ein homogenes Polynom vom Grad k. Dann heißt

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) := \sum_{k=0}^{m} x_0^{d-k} h_k$$

die *d-Homogenisierung* von p. Es lässt sich f ebenfalls darstellen als

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = x_0^d \cdot p\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right).$$

Das Ausgangspolynom p erhält man aus der $d-$Homogenisierung f wiederum durch:

$$p(x_1, \ldots, x_n) = f(1, x_1, \ldots, x_n).$$

Die d-Homogenisierung eines Polynoms p ist immer ein homogenes Polynom vom Grad d, auch wenn der Grad von p kleiner als d ist. Im Gegensatz zum ansonsten üblichen Homogensieren wird beim d-Homogenisieren eventuell „höher" homogenisiert. Ist $p \in \mathcal{P}_d$ und f die d-Homogenisierung von p, so ist die $d+1$-Homogenisierung $g = x_0 \cdot f$.

Wir definieren nun die Auswertung der d-Homogenisierungen in den Punkten des projektiven Raums $\mathbb{P}_n$. Da die Elemente $R \in \mathbb{P}_n$ punktierte Geraden durch den Nullpunkt sind, schneidet jede dieser Geraden die Kugelsphäre S_n in genau zwei Punkten. Wir wählen nun den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kugelsphäre für die Auswertung, dessen erste Koordinate, die nicht Null ist, positiv ist.

Definition 30. Sei f die d-Homogenisierung eines Polynoms $p \in \mathcal{P}_d$. Weiter sei $[(\xi_0, \ldots, \xi_n)] \in \mathbb{P}_n$. Dann ist

$$f[(\xi_0, \ldots, \xi_n)] := f\left(\frac{\xi_0}{\mu}, \ldots, \frac{\xi_n}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu^d} f(\xi_0, \ldots, \xi_n),$$

mit $\mu := \big(\sum\limits_{j=0}^{n} \xi_j^2\big)^{\frac{1}{2}}$, wenn für $k = \min\{j \in \{0, \ldots, n\} \mid \xi_j \neq 0\}$ der Wert $\xi_k > 0$ ist und $\mu := -\big(\sum\limits_{j=0}^{n} \xi_j^2\big)^{\frac{1}{2}}$, wenn $\xi_k < 0$.

Beispiel 2. Die 2-Homogenisierung von $p = x^2+2xy+x-1$ ist $f = x^2+2xy+xz-z^2$. Es sei $[\xi] = [z, x, y] = [2, 1, 2]$. Dann ist $\mu = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$, und es ergibt sich

$f[2,1,2] = f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$. Die 4-Homogensierung ist $g = x^2z^2 + 2xyz^2 + xz^3 - z^4$. Es ist $g[2,1,2] = g\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3^4} g(2,1,2) = \frac{12}{81} = \frac{4}{27}$.

Generalvoraussetzung:
Im Folgenden werden wir immer voraussetzen, dass im Raum $\mathbb{P}_n$ die Äquivalenzklasse $R = [(\xi_0, \ldots, \xi_n)]$ direkt durch den Repräsentanten dargestellt wird, der auf der Kugelsphäre liegt, das heißt, es gilt $\xi_0^2 + \cdots + \xi_n^2 = 1$ und $\xi_k > 0$ für $k = \min\{j \in \{0, \ldots, n\} \mid \xi_j \neq 0\}$.

In den folgenden Kapiteln werden besonders Polynome, deren Grad eine gerade Zahl ist, eine wichtige Rolle spielen. Wir werden in diesen Kapiteln voraussetzen, dass d gerade ist. In diesem Fall würde es keine Rolle spielen, welchen der beiden Punkte auf der Kugelsphäre man für die Auswertung verwendet, denn

$$f(-\xi_0, \ldots, -\xi_n) = (-1)^d f(\xi_0, \ldots, \xi_n) = f(\xi_0, \ldots, \xi_n).$$

Ab dem folgenden Kapitel werden wir demnach nur noch voraussetzen, dass die Äquivalenzklasse $R = [(\xi_0, \ldots, \xi_n)]$ durch einen Repräsentanten dargestellt wird, der auf der Kugelsphäre liegt.

Sei $p \in \mathcal{P}_d$ und f seine d-Homogenisierung. Dann gilt für die Auswertung von f in einem affinen Punkt $R = [(\xi_0 \ldots, \xi_n)] \in \mathbb{P}_n$ mit $\xi_0 \neq 0$:

$$f(R) = f(\xi_0, \ldots, \xi_n) = \xi_0^d f\left(1, \frac{\xi_1}{\xi_0}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi_0}\right) = \xi_0^d p\left(\frac{\xi_1}{\xi_0}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi_0}\right).$$

KORROLAR 31. Sei $p \in \mathcal{P}_d$, f seine d-Homogensierung, g seine $d{+}1$-Homogenisierung und $R = [(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)] \in \mathbb{P}_n$ mit $\xi_0 \neq 0$. Dann ist

$$g(R) = \xi_0^{d+1} p\left(\frac{\xi_1}{\xi_0}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi_0}\right) = \xi_0 \left(\xi_0^d p\left(\frac{\xi_1}{\xi_0}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi_0}\right)\right) = \xi_0 \cdot f(R).$$

Es ist sinnvoll, dass für die Auswertung in einem affinen Punkt $R \in \mathbb{P}_n$ die Beziehung $g(R) = \xi_0 \cdot f(R)$ gilt, wenn f die d-Homogenisierung und g die $d{+}1$-Homogenisierung desselben Polynoms ist, da wir bereits festgestellt haben, dass $g = x_0 \cdot f$ ist.

Zur Vereinfachung werden wir die Punkte des projektiven Raums $\mathbb{P}_n$ ab jetzt mit $[\xi] = [\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ bezeichnen und im Gegensatz dazu die Punkte des affinen Raums $\mathbb{R}^n$ mit $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Ist $[\xi] = [\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n] \in \mathbb{P}_n$ ein unendlich ferner Punkt, d.h. $\xi_0 = 0$, so bezeichne ξ^* ab jetzt den Punkt $\xi^* = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

DEFINITION 32. Sei $p \in \mathcal{P}_d$ und f seine d-Homogenisierung.

(i) Existiert ein $[\xi] = [\xi_0, \ldots, \xi_n] \in \mathbb{P}_n$ mit $\xi_0 \neq 0$ und $f[\xi] = 0$, so besitzt f eine *affine Nullstelle* in $[\xi]$.

(ii) Existiert ein $[\xi] = [\xi_0, \ldots, \xi_n] \in \mathbb{P}_n$ mit $\xi_0 = 0$ und $f[\xi] = 0$, so besitzt f eine *unendlich ferne Nullstelle* in $[\xi]$.

Besitzt f eine affine Nullstelle im Punkt $[\xi] = [\xi_0, \ldots, \xi_n] \in \mathbb{P}_n$ mit $\xi_0 \neq 0$, so ist

$$p\left(\frac{\xi_1}{\xi_0}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi_0}\right) = \frac{1}{\xi_0^d} f(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \frac{1}{\xi_0^d} f[\xi] = 0.$$

Der Punkt $\widetilde{\xi} := \left(\frac{\xi_1}{\xi_0}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi_0}\right)$ ist also eine reelle Nullstelle von p. Umgekehrt besitzt auch f eine affine Nullstelle, wenn p eine reelle Nullstelle besitzt.

Beispiel 3. Es sei $p = xy - 1 \in \mathbb{R}[x, y]$. Die Menge aller Nullstellen von p ist die Hyperbel $\{(\alpha, \frac{1}{\alpha}) \mid \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Die Asymptoten dieser Hyperbel sind bekanntlich die x-Achse und die y-Achse. Wir betrachten nun die 2-Homogenisierung $f = xy - z^2$ von p. Die affinen Nullstellen des homogenen Polynoms f sind die Punkte

$$\left\{ \left[\frac{1}{\mu}, \frac{\alpha}{\mu}, \frac{1}{\mu\alpha}\right] \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ und } \mu = \sqrt{1 + \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}} \right\} \subseteq \mathbb{P}_2.$$

Diese entsprechen den Nullstellen des Polynoms p. Für die Äquivalenzklasse $\left[\frac{1}{\mu}, \frac{\alpha}{\mu}, \frac{1}{\mu\alpha}\right]$ gilt:

$$\left[\frac{1}{\mu}, \frac{\alpha}{\mu}, \frac{1}{\mu\alpha}\right] = \left[1, \alpha, \frac{1}{\alpha}\right] = \left[\alpha, \alpha^2, 1\right] = \left[\frac{1}{\alpha}, 1, \frac{1}{\alpha^2}\right]$$

für $\alpha \neq 0$. Für $\alpha \to 0$ gilt

$$\lim_{\alpha \to 0} \left[\alpha, \alpha^2, 1\right] = [0, 0, 1].$$

Für $\alpha \to \infty$ gilt

$$\lim_{\alpha \to \infty} \left[\frac{1}{\alpha}, 1, \frac{1}{\alpha^2}\right] = [0, 1, 0].$$

Die beiden unendlich fernen Punkte $[0, 0, 1]$ und $[0, 1, 0]$, die man auf diese Weise erhält, sind die unendlich fernen Nullstellen von f. Wir können diese beiden Punkte interpretieren als die Schnittpunkte $(\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ der Hyperbel mit den Koordinatenachsen.

Bemerkung 33. Es sei $p \in \mathcal{P}_d$ mit $p = \sum\limits_{k=0}^{d} h_k$ und entsprechend $f = \sum\limits_{k=0}^{d} x_0^{d-k} h_k$ seine d-Homogenisierung. Dann gilt für die Auswertung von f in einem unendlich fernen Punkt $[\xi] = [0, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ (mit $\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j = 1$):

$$f[\xi] = f(\xi) = \sum_{k=0}^{d} 0^{d-k} h_k(\xi_1, \ldots, \xi_n) = h_d(\xi_1, \ldots, \xi_n) = h_d(\xi^*).$$

Das bedeutet, die Auswertung von f im unendlich fernen Punkt $[\xi] = [0, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ entspricht der Auswertung der homogenen Komponente h_d vom Grad d im Punkt $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Ist $p \in \mathcal{P}_d$ ein Polynom mit $\deg(p) = r < d$, so ist $p = \sum_{k=0}^{r} h_k$. Dann ist seine d-Homogenisierung

$$f = \sum_{k=0}^{r} x_0^{d-k} h_k = x_0^{d-r} \sum_{k=0}^{r} x_0^{r-k} h_k.$$

Für einen unendlich fernen Punkt $[\xi] \in \mathbb{P}_n$ gilt

$$f[\xi] = 0^{d-r} \sum_{k=0}^{r} 0^{r-k} h_k(\xi^*) = 0.$$

Die d-Homogenisierungen von Polynomen, deren Grad kleiner als d sind, sind somit in jedem unendlich fernen Punkt Null.

Beispiel 4. Es sei wieder $p = x^2 + 2xy + x - 1$. Die 2-Homogenisierung von p ist $f = x^2 + 2xy + xz - z^2$ und die 4-Homogenisierung $g = x^2z^2 + 2xyz^2 + xz^3 - z^4$. Desweiteren sei $[\xi] = \left[0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$. Dann ist $f[\xi] = \frac{33}{25}$ und $g[\xi] = 0$. Betrachtet man den homogenen Anteil zweiten Grades h_2 und den homogenen Anteil vierten Grades h_4 von p, so erhält man $h_2 = x^2 + 2xy$ und $h_4 = 0$. Es ist $h_2\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{33}{25}$ und $h_4\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 0$.

Es bezeichne $\mathcal{H}_d$ den Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad d in $n+1$ Variablen:

$$\mathcal{H}_d := \{f \in \mathbb{R}[x_0, x_1, \ldots, x_n] \mid f \text{ ist homogen vom Grad } d\}.$$

Wir betrachten die geordnete Basis $\{t_1, \ldots, t_D\}$ von $\mathcal{P}_d$. Damit ist $\{\widetilde{t_1}, \ldots, \widetilde{t_D}\}$ eine geordnete Basis von $\mathcal{H}_d$, wobei $\widetilde{t_i}$ die d-Homogenisierung von t_i ist, das bedeutet $\widetilde{t_i} := x_0^{m_i} t_i,\ m_i := d - \deg(t_i),\ i = 1, \ldots, D$. Wir werden ab jetzt $\{\widetilde{t_1}, \ldots, \widetilde{t_D}\}$ als *die geordnete Basis von* $\mathcal{H}_d$ bezeichnen.

Satz 34. (aus [**Mar08**]) $\mathcal{P}_d$ und $\mathcal{H}_d$ sind isomorph zueinander. Ein entsprechender Isomorphismus ist durch die Abbildung

$$\tau : \mathcal{P}_d \to \mathcal{H}_d,\ p(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_0^d p\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

gegeben. Seine Umkehrabbildung ist

$$\tau^{-1} : \mathcal{H}_d \to \mathcal{P}_d,\ f(x_0, x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(1, x_1, \ldots, x_n).$$

Da $\mathcal{P}_d$ und $\mathcal{H}_d$ isomorph sind, können wir ab jetzt entweder mit dem Raum $\mathcal{P}_d$ der Polynome in n Variablen bis zum Grad d oder im Raum $\mathcal{H}_d$ der homogenen Polynome in $n+1$ Variablen vom (genauen) Grad d arbeiten. Die Erkenntnisse, die wir über einen der beiden Räume erlangen, können wir direkt auf den anderen übertragen.

KAPITEL 4

Der Kegel der nicht-negativen Polynome

Es sei D die Dimension des Vektorraums $\mathcal{P}_d$ der Polynome in n Variablen, deren Grad kleiner oder gleich d ist. Dann gilt:

$$D = \dim \mathcal{P}_d = \binom{d+n}{d}.$$

Wir definieren

$$K_d^+ := \{p \in \mathcal{P}_d \mid p(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

die Menge der nicht-negativen Polynome in $\mathcal{P}_d$.
K_d^+ ist ein konvexer Kegel, denn K_d^+ ist ein Kegel, da

$$\begin{aligned} p \in K_d^+ &\Leftrightarrow \ p(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &\Rightarrow \ \alpha \cdot p(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall \alpha \geq 0 \\ &\Rightarrow \ \alpha \cdot p \in K_d^+ \ \forall \alpha \geq 0. \end{aligned}$$

Weiter ist K_d^+ konvex, denn

$$\begin{aligned} p_1, p_2 \in K_d^+, \lambda \in [0,1] &\Rightarrow \ p_1 \geq 0, p_2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &\Rightarrow \ \lambda \cdot p_1(x) + (1-\lambda) \cdot p_2(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &\Rightarrow \ \lambda \cdot p_1 + (1-\lambda) \cdot p_2 \in K_d^+. \end{aligned}$$

Somit ist K_d^+ ein konvexer Kegel.

Als nächstes zeigen wir, dass K_d^+ außerdem abgeschlossen ist, das heißt der Grenzwert jeder konvergenten Folge in K_d^+ liegt wieder im Kegel K_d^+. Da $\mathcal{P}_d$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist, sind alle Normen auf $\mathcal{P}_d$ äquivalent. Damit spielt es keine Rolle, welche Norm wir zur Betrachtung der Konvergenz verwenden. Dazu definieren wir die Norm $\|p\|_2$ folgendermaßen: Es sei $\{t_1, \ldots, t_D\}$ wieder die geordnete Basis von $\mathcal{P}_d$ und $p = \sum\limits_{i=1}^{D} q_i t_i$. Dann ist

$$\|p\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{D} q_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sei nun $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K_d^+, die gegen $p^* \in \mathcal{P}_d$ konvergiert: $\lim\limits_{n\to\infty} \|p_n - p^*\|_2 = 0$. Angenommen, es sei $p^* \notin K_d^+$. Dann existiert ein $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $p^*(\xi) = -c < 0$. Da $\mathcal{P}_d$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist und $\lim\limits_{n\to\infty} \|p_n - p^*\|_2 = 0$, ist auch

$\lim_{n\to\infty} |p_n(x) - p^*(x)| = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und damit auch $\lim_{n\to\infty} |p_n(\xi) - p^*(\xi)| = 0$. Aber es ist $p_n \in K_d^+$ für alle $n \in \mathbb{N}$, das heißt $p_n(\xi) \geq 0$ und $p^*(\xi) = -c$. Damit ist

$$\lim_{n\to\infty} |p_n(\xi) - p^*(\xi)| = \lim_{n\to\infty} |p_n(\xi) - (-c)| \geq c > 0.$$

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass p_n gegen p konvergiert. Also existiert kein solches $\xi \in \mathbb{R}^n$ und es ist $p^* \in K_d^+$. Damit ist K_d^+ ein abgeschlossener konvexer Kegel.

Ziel dieses Kapitels ist es nun, den abgeschlossenen konvexen Kegel K_d^+ vollständig zu beschreiben, das bedeutet sein Inneres und seinen Rand vollständig zu charakterisieren. Als erstes werden wir dazu zeigen, dass der Kegel K_d^+ nur Polynome enthält, deren Grad eine gerade Zahl ist. Anschließend werden wir die Polynome auf dem Rand und im Inneren des Kegels untersuchen und zu dem Ergebnis kommen, dass auf dem Rand des Kegels genau die Polynome liegen, deren d-Homogenisierungen affine oder unendlich ferne Nullstellen besitzen und das Innere des Kegels genau die Polynome enthält, deren d-Homogenisierungen positiv sind.

Zuerst zeigen wir nun, dass der Grad jedes Polynoms aus K_d^+ eine gerade Zahl ist. In der Literatur findet sich häufig die Aussage, dass nur der Fall, dass d gerade ist, interessant sei, so beispielsweise im Buch von Marshall [**Mar08**] oder in den Artikeln von Blekherman [**Ble04**] oder Choi, Lam und Reznick [**CLR80**]. Wir zeigen hier, dass der Fall eines nicht-negativen Polynoms mit einem ungeraden Grad gar nicht existiert.

Wir betrachten nun $p \in \mathcal{P}_d \setminus \{0\}$ mit $\deg(p) = r$ und der Darstellung $p = \sum\limits_{k=0}^{r} h_k$, wobei h_k jeweils ein homogenes Polynom vom Grad k ist.

Lemma 35. Für jedes $p \in \mathcal{P}_d \setminus \{0\}$ existiert ein $\eta \in \mathbb{R}^n$ mit $|p(\eta) - h_r(\eta)| < |h_r(\eta)|$.

Beweis. Für $a \in \mathcal{P}_d$ definieren wir $\|a\|_{max} := \max\{|a(\xi_1, \ldots, \xi_n)| : \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = 1\}$. Es sei $m_k := \|h_k\|_{max}$ und $m := \max\{m_0, \ldots, m_r\}$. Sei $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\sum\limits_{j=1}^{n} \zeta_j^2 = 1$ und $|h_r(\zeta)| = m_r$. Dann ist $m_k \geq |h_k(\zeta)|$ für $k = 0, \ldots, r$. Wähle $\mu := \frac{m}{m_r} \geq 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mu = \tfrac{m}{m_r} \quad &\Rightarrow \quad \mu m_r = m \\
&\Rightarrow \quad \mu^r m_r = \mu^{r-1} m \geq \mu^k m \geq \mu^k m_k, \ k = 0, \ldots, r-1 \\
&\Rightarrow \quad \underbrace{|h_r(\mu\zeta)|}_{=:s_r} = |\mu^r h_r(\zeta)| \geq |\mu^k h_k(\zeta)| = \underbrace{|h_k(\mu\zeta)|}_{=:s_k}, \ k = 0, \ldots, r-1 \\
&\Rightarrow \quad s_r \geq s_k, \ k = 0, \ldots, r-1.
\end{aligned}$$

Setze nun $\vartheta := \mu\zeta$. Dann ist $|h_k(\vartheta)| = s_k,\ k = 0, \ldots, r-1$. Wähle $\lambda > 0$ so groß, dass $\lambda^r > \lambda^{r-1} + \cdots + \lambda^2 + \lambda + 1$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
& \lambda^r > \lambda^{r-1} + \cdots + \lambda^2 + \lambda + 1 \\
\Rightarrow\quad & \lambda^r |h_r(\vartheta)| = \lambda^r s_r > \sum_{k=0}^{r-1} \lambda^k s_r \geq \sum_{k=0}^{r-1} \lambda^k s_k = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda^k |h_k(\vartheta)| = \sum_{k=0}^{r-1} |h_k(\lambda\vartheta)| \\
& \geq \left| \sum_{k=0}^{r-1} h_k(\lambda\vartheta) \right| \\
\Rightarrow\quad & |p(\lambda\vartheta) - h_r(\lambda\vartheta)| < |h_r(\lambda\vartheta)|.
\end{aligned}$$

Mit $\eta := \lambda\vartheta$ gilt nun $|p(\eta) - h_r(\eta)| < |h_r(\eta)|$. □

Da die h_k homogene Polynome sind, ist $|h_k(\eta)| = |h_k(-\eta)|$ für $k = 0, \ldots, r$. Damit gilt auch

$$|h_r(-\eta)| > \sum_{k=0}^{r-1} |h_k(-\eta)| \geq \left| \sum_{k=0}^{r-1} h_k(-\eta) \right|.$$

Daraus folgt, dass auch $|p(-\eta) - h_r(-\eta)| < |h_r(-\eta)|$ für dasselbe η wie oben.

Lemma 36. Für $p \in \mathcal{P}_d \setminus \{0\}$ und $\eta \in \mathbb{R}^n$ gelte $|p(\eta) - h_r(\eta)| < |h_r(\eta)|$. Dann haben $p(\eta)$ und $h_r(\eta)$ das gleiche Vorzeichen.

Beweis. Es muss $h_r(\eta) \neq 0$ sein, denn wäre $h_r(\eta) = 0$, so würde nach der Voraussetzung gelten $|p(\eta)| = |p(\eta) - h_r(\eta)| < |h_r(\eta)| = 0$. Da dies ein Widerspruch ist, muss $h_r(\eta) \neq 0$ sein.
Desweiteren muss auch $p(\eta) \neq 0$ sein, da ansonsten $|h_r(\eta)| = |p(\eta) - h_r(\eta)| < |h_r(\eta)|$ wäre, was ebenfalls ein Widerspruch ist.
Angenommen, $h_r(\eta)$ und $p(\eta)$ hätten unterschiedliche Vorzeichen. Dann folgt, dass $|p(\eta) - h_r(\eta)| = |p(\eta)| + |h_r(\eta)| \geq |h_r(\eta)|$. Dies ist aber ebenfalls ein Widerspruch zur Voraussetzung. Somit haben $h_r(\eta)$ und $p(\eta)$ dasselbe Vorzeichen. □

Mit diesen beiden Lemmata beweisen wir nun, dass für ein nicht-negatives Polynom der Grad r gerade sein muss.

Satz 37. Ist p ein nicht-negatives Polynom, so ist $r = \deg(p)$ eine gerade Zahl.

Beweis. Für jedes Polynom $p \in \mathcal{P}_d$ mit $\deg(p) = r$ und der führenden Form h_r existiert nach Lemma 35 ein $\eta \in \mathbb{R}^n$, so dass $|p(\eta) - h_r(\eta)| < |h_r(\eta)|$ und ebenso $|p(-\eta) - h_r(-\eta)| < |h_r(-\eta)|$. Damit haben nach Lemma 36 die Werte $p(\eta)$ und $h_r(\eta)$ das gleiche Vorzeichen. Die Werte $p(-\eta)$ und $h_r(-\eta)$ haben ebenfalls das gleiche Vorzeichen. Ist r ungerade, so gilt $h_r(-\eta) = -h_r(\eta)$, da h_r ein homogenes Polynom vom Grad r ist. Demnach ist entweder $p(\eta)$ oder $p(-\eta)$ negativ. Ist r ungerade, kann p somit kein nicht-negatives Polynom sein. Jedes nicht-negative Polynom p muss also geraden Grad haben. □

Da demnach die nicht negativen Polynome im Polynomraum P_{2m+1} höchstens den Grad $2m$ haben, gehen wir im Folgenden immer davon aus, dass d eine gerade Zahl ist.

Ab jetzt gelte für den Rest dieses Kapitels die folgende **Generalvoraussetzung:**

d ist eine gerade Zahl.

Wenn wir d-Homogenisierungen in Elementen des projektiven Raums $\mathbb{P}_n$ auswerten, spielt es nun keine Rolle mehr, welchen der beiden Vertreter der Äquivalenzklasse $[\xi]$, die auf der Kugelspäre liegen, wir zur Auswertung heranziehen, da

$$f(-\xi_0, \ldots, -\xi_n) = (-1)^d f(\xi_0, \ldots, \xi_n) = f(\xi_0, \ldots, \xi_n).$$

Satz 38. Ist $p \in \mathcal{P}_d$ mit $\deg(p) = d$ und $p(x) \geq 0$ und für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so ist auch $h_d(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Angenommen, es sei $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $h_d(\xi) < 0$ und $u_k := h_k(\xi),\ k = 0, \ldots, d$. Wähle $\lambda > 0$ so groß, dass

$$\lambda^d > \left| \frac{u_{d-1}}{u_d} \lambda^{d-1} + \cdots + \frac{u_1}{u_d} \lambda + \frac{u_0}{u_d} \right|.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} & \lambda^d > \left| \tfrac{u_{d-1}}{u_d} \lambda^{d-1} + \cdots + \tfrac{u_1}{u_d} \lambda + \tfrac{u_0}{u_d} \right| \\ \Rightarrow\ & \left| u_d \lambda^d \right| > \left| u_{d-1} \lambda^{d-1} + \cdots + u_1 \lambda^1 + u_0 \right| \\ \Rightarrow\ & |h_d(\lambda\xi)| > |p(\lambda\xi) - h_d(\lambda\xi)| \\ \Rightarrow\ & h_d(\lambda\xi) \text{ und } p(\lambda\xi) \text{ haben das gleiche Vorzeichen nach Lemma 36.} \end{aligned}$$

Da $p(\lambda\xi) \geq 0$ für alle $\lambda > 0$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, ist $h_d(\lambda\xi) = \lambda^d h_d(\xi) \geq 0$. Es ist $\lambda^d > 0$ und damit $h_d(\xi) \geq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. □

Ist p ein nicht-negatives Polynom, so muss also auch seine führende Form ein nicht-negatives Polynom sein.
Mit der gleichen Argumentation muss auch das homogene Polynom niedrigsten Grades, das in p vorkommt, sozusagen die *niedrigste Form*, ein nicht-negatives Polynom sein. Der Beweis verläuft analog zum obigen. Ist h_ℓ die niedrigste Form von p, so wählt man allerdings $\lambda > 0$ so klein, dass

$$\lambda^\ell > \left| \frac{u_d}{u_\ell} \lambda^d + \frac{u_{d-1}}{u_\ell} \lambda^{d-1} + \cdots + \frac{u_{\ell+1}}{u_\ell} \lambda^{\ell+1} \right|.$$

Damit haben $p(\lambda\xi)$ und $h_\ell(\lambda\xi)$ das gleiche Vorzeichen, und h_ℓ muss nicht-negativ sein.

Der Beweis des obigen Satzes zeigt auch, für $\xi \in \mathbb{R}^n$, deren Norm sehr groß ist, dominiert die führende Form das Polynom p, das heißt, sie bestimmt auch das Vorzeichen von $p(\xi)$. Für $\xi \in \mathbb{R}^n$, deren Norm sehr klein ist, dominiert die niedrigste Form und bestimmt das Vorzeichen von $p(\xi)$.

Wir widmen uns nun dem Rand des Kegels K_d^+. Dazu betrachten wir zuerst die Polynome, die zum Kegel gehören und reelle Nullstellen besitzen. Sie liegen alle auf dem Rand, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 39. Sei $p \in K_d^+$ und es existiere ein $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $p(\xi) = 0$. Dann ist $p \in \partial K_d^+$.

Beweis. Angenommen, es sei $p \in int(K_d^+)$. Dann existiert $\varepsilon > 0$, so dass gilt $\{g \in \mathcal{P}_d : \|p-g\|_2 < \varepsilon\} \subseteq K_d^+$. Sei $g^* := p - \frac{\varepsilon}{2} \cdot t_1$, wobei $t_1 = x_1^0 \cdots x_n^0$. Dann ist

$$\|p - g^*\|_2 = \left\|p - p + \frac{\varepsilon}{2} \cdot t_1\right\|_2 = \left\|\frac{\varepsilon}{2} \cdot t_1\right\|_2 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Damit ist $g^* \in \{g \in \mathcal{P}_d : \|p-g\|_2 < \varepsilon\} \subseteq K_d^+$. Aber es ist $p(\xi) = 0$ und damit $g^*(\xi) = p(\xi) - \frac{\varepsilon}{2} = -\frac{\varepsilon}{2} < 0$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass $g^* \in K_d^+$ ist. Somit ist $p \notin int(K_d^+)$, sondern $p \in \partial K_d^+$. □

Alle Polynome aus K_d^+, die eine reelle Nullstelle besitzen, liegen auf dem Rand. Diese Aussage ist äquivalent dazu, dass alle Polynome aus K_d^+, deren d-Homogenisierungen eine affine Nullstelle besitzen, auf dem Rand liegen. Wir untersuchen als nächstes, ob auch die Polynome aus K_d^+, deren d-Homogenisierungen unendlich ferne Nullstellen besitzen, auf dem Rand des Kegels liegen. Dazu betrachten wir zunächst ein Beispiel. Es sei

$$p = x^2y^2 - 2xy + x^2 + 1 \in (\mathbb{R}[x,y])_4.$$

p lässt sich auch schreiben als $p = (xy-1)^2 + x^2$. Da sowohl $(xy-1)^2 \geq 0$ als auch $x^2 \geq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ist $p \in K_4^+ \subseteq (\mathbb{R}[x,y])_4$. Allerdings besitzt p keine reelle Nullstelle, denn jede reelle Nullstelle von p müsste gleichzeitig Nullstelle des ersten und des zweiten Summanden sein. $(xy-1)^2$ besitzt die Nullstellen $\{(\alpha, \frac{1}{\alpha}) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ und x^2 die Nullstellen $\{(0,\beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$. Der Schnitt dieser beiden Mengen ist leer. Für das Polynom

$$p_\varepsilon := x^2y^2 - 2xy + x^2 - \frac{\varepsilon}{2}y + 1 = p - \frac{\varepsilon}{2}y$$

mit $\varepsilon > 0$ gilt: $\|p - p_\varepsilon\|_2 = \frac{\varepsilon}{2}$. Allerdings ist $p_\varepsilon \notin K_4^+$, denn es existieren Punkte, in denen p_ε negativ ist: $p_\varepsilon(0, \frac{4}{\varepsilon}) = -\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{4}{\varepsilon} + 1 = -1 < 0$. Damit existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein Polynom $p_\varepsilon \in \{g \in \mathcal{P}_4 : \|p-g\|_2 < \varepsilon\}$ mit $p_\varepsilon \notin K_4^+$. Somit ist $p \in \partial K_4^+$, obwohl p keine reelle Nullstelle besitzt. Wir betrachten nun die 4-Homogenisierung von p:

$$f(z,x,y) := z^4 \cdot p\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = x^2y^2 - 2xyz^2 + x^2z^2 + z^4.$$

Da p keine reellen Nullstellen besitzt, besitzt f keine affinen Nullstellen. Aber für $z=0,\ x=0,\ y=1$ gilt: $f[0,0,1]=f(0,0,1)=0$. f besitzt also die unendlich ferne Nullstelle $[0,0,1]$.

Das Beispiel lässt vermuten, dass auch die Polynome, deren d-Homogenisierungen unendlich ferne Nullstellen besitzen, auf dem Rand von K_d^+ liegen. Es ist somit sinnvoll, von den Polynomen $p \in \mathcal{P}_d$ zu den entsprechenden d-Homogenisierungen $f \in \mathcal{H}_d$ überzugehen. Wir wissen bereits, dass $\mathcal{P}_d$ und $\mathcal{H}_d$ isomorph zueinander sind. Ein Isomorphismus zwischen beiden ist durch die Abbildung

$$\tau : \mathcal{P}_d \to \mathcal{H}_d,\ p(x_1,\dots,x_n) \mapsto x_0^d p\left(\frac{x_1}{x_0},\dots,\frac{x_n}{x_0}\right).$$

gegeben. Die Umkehrabbildung von τ ist

$$\tau^{-1} : \mathcal{H}_d \to \mathcal{P}_d,\ f(x_0,x_1,\dots,x_n) \mapsto f(1,x_1,\dots,x_n).$$

Als Vektorraumhomomorphismen zwischen endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräumen sind τ und τ^{-1} stetig. Es sei

$$\widetilde{K}_d^+ := \{f \in \mathcal{H}_d \mid f(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^{n+1}\}.$$

Satz 40. Mit dem obigen Isomorphismus τ gilt: $\tau(K_d^+) = \widetilde{K}_d^+$.

Beweis. Im ersten Schritt werden wir zeigen, dass die Inklusion $\tau(K_d^+) \supseteq \widetilde{K}_d^+$ gilt. Sei dazu $f \in \widetilde{K}_d^+$. Das bedeutet $f(x_0,x_1,\dots,x_n) \geq 0$ für alle $(x_0,x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Für $p = \tau^{-1}(f)$ gilt dann $p(x_1,\dots,x_n) = f(1,x_1,\dots,x_n) \geq 0$ für alle Punkte $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Damit ist $p \in K_d^+$ und $f \in \tau(K_d^+)$.

Im zweiten Schritt müssen wir noch zeigen, dass auch die umgekehrte Inklusion $\tau(K_d^+) \subseteq \widetilde{K}_d^+$ erfüllt ist. Sei jetzt $f \in \tau(K_d^+)$. Dann ist $p = \tau^{-1}(f) \in K_d^+$. Das bedeutet $p(x_1,\dots,x_n) \geq 0$ für alle $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Wir untersuchen nun, ob $f(x_0,x_1,\dots,x_n) \geq 0$ für alle $(x_0,x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dazu führen wir eine Fallunterscheidung durch.

Zuerst betrachten wir den Fall, dass $x_0 \neq 0$ ist. Dann ist

$$f(x_0,x_1,\dots,x_n) = \underbrace{x_0^d}_{>0} \cdot \underbrace{p\left(\frac{x_1}{x_0},\dots,\frac{x_n}{x_0}\right)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Nun untersuchen wir den Fall, dass $x_0 = 0$ ist. Sei $p = \sum_{k=0}^{m} h_k$, wobei h_k jeweils ein homogenes Polynom vom Grad k ist. Dann ist $f = \sum_{k=0}^{m} x_0^{d-k} h_k$.

Gilt $\deg(p) = m < d$, so ist $d - k > 0$ für alle $k \leq m$. In diesem Fall ist $f(0, x_1, \dots, x_n) = \sum\limits_{k=0}^{m} 0^{d-k} h_k = 0$ und somit $f \in \widetilde{K}_d^+$.

Wenn aber $\deg(p) = d$, so ist $f(0, x_1, \dots, x_n) = h_d(x_1, \dots, x_n)$. Da $p(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ für alle $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, muss $h_d(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ für alle $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sein. Das bedeutet $f(0, x_1, \dots, x_n) = h_d(x_1, \dots, x_n) \geq 0$, und damit ist $f \in \widetilde{K}_d^+$. $\square$

Da $\tau(K_d^+) = \widetilde{K}_d^+$, können wir ab jetzt entweder mit dem Kegel K_d^+ oder dem Kegel $\widetilde{K}_d^+$ arbeiten und die Erkenntnisse, die wir über den einen erlangen, auf den anderen übertragen. Da die Abbildung τ stetig ist, bildet sie den Rand von K_d^+ auf den Rand von $\widetilde{K}_d^+$ ab. Für die d-Homogenisierungen f gilt

$$f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^{n+1} \Leftrightarrow f[x] \geq 0 \ \forall [x] \in \mathbb{P}_n.$$

Damit ist $\widetilde{K}_d^+ = \{f \in \mathcal{H}_d \mid f[x] \geq 0 \ \forall [x] \in \mathbb{P}_n\}$.

Wir kommen nun zurück zu unserer Behauptung, dass auch die Polynome, deren d-Homogenisierungen unendlich ferne Nullstellen besitzen, auf dem Rand von K_d^+ liegen.

Satz 41. Sei $p \in K_d^+$, und seine d-Homogenisierung besitze eine affine oder unendlich ferne Nullstelle $[\xi] = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n] \in \mathbb{P}_n$. Dann liegt p auf dem Rand von K_d^+.

Beweis. Es sei $p = \sum\limits_{i=1}^{D} q_i t_i$. Dann ist seine d-Homogenisierung $f = \sum\limits_{i=1}^{D} q_i \widetilde{t}_i$. Hierbei bezeichne $\widetilde{t}_i$ wieder die d-Homogenisierung von t_i, das heißt, es ist $\widetilde{t}_i = x_0^{m_i} t_i$ mit $m_i = d - \deg(t_i)$, $i = 1, \dots, D$. Wir definieren nun $q := (q_1, \dots, q_D) \in \mathbb{R}^D$ und $\widetilde{t}[\xi] := (\widetilde{t}_1[\xi], \dots, \widetilde{t}_D[\xi]) \in \mathbb{R}^D$. Dann ist

$$f[\xi] = \sum_{i=1}^{D} q_i \widetilde{t}_i[\xi] = \langle q, \widetilde{t}[\xi] \rangle = 0.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $a = (a_1, \dots, a_D) \in \mathbb{R}^D$ mit $\|a\|_2 < \varepsilon$ und $\langle a, \widetilde{t}[\xi] \rangle > 0$, da $\widetilde{t}[\xi] \neq 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \langle q, \widetilde{t}[\xi] \rangle = 0 \text{ und } \langle a, \widetilde{t}[\xi] \rangle > 0 \quad &\Rightarrow \quad \langle q - a, \widetilde{t}[\xi] \rangle < 0 \\ &\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{D} (q_i - a_i) \widetilde{t}_i[\xi] < 0. \end{aligned}$$

Damit ist $f_a := \sum\limits_{i=1}^{D} (q_i - a_i) \widetilde{t}_i$ negativ in $[\xi]$. Weiter sei $p_a := \sum\limits_{i=1}^{D} (q_i - a_i) t_i$.

Wir unterscheiden nun zwischen den beiden Fällen, dass f eine affine Nullstelle und dass f eine unendlich ferne Nullstelle besitzt. Zuerst untersuchen wir den Fall, dass f eine affine Nullstelle besitzt, das heißt $\xi_0 \neq 0$. Dann ist

$$f[\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n] = f(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_0^d f\left(1, \frac{\xi_1}{\xi_0}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_0}\right) = \xi_0^d p\left(\frac{\xi_1}{\xi_0}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_0}\right) = 0.$$

Damit ist aber auch

$$\xi_0^d p_a\left(\frac{\xi_1}{\xi_0}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_0}\right) = \xi_0^d f_a\left(1, \frac{\xi_1}{\xi_0}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_0}\right) = f_a(\xi_0, \dots, \xi_n) < 0.$$

Das heißt $p_a\left(\frac{\xi_1}{\xi_0}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_0}\right) < 0$ und $\|p - p_a\|_2 < \varepsilon$. Somit existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein Polynom $p_a \in \{g \in \mathcal{P}_d : \|p - g\|_2 < \varepsilon\}$ mit $p_a \notin K_d^+$, und das heißt $p \in \partial K_d^+$.

Der zweite Fall, den wir betrachten müssen, besteht darin, dass f eine unendlich ferne Nullstelle besitzt, also $\xi_0 = 0$. Es ist $p_a = \sum_{k=0}^{d} h_{a,k}$, wobei $h_{a,k}$ jeweils ein homogenes Polynom vom Grad k ist. Dann ist $f_a = \sum_{k=0}^{d} x_0^{d-k} h_{a,k}$. Da $\xi_0 = 0$, ist

$$f_a[\xi] = f_a(\xi) = h_{a,d}(\xi_1, \dots, \xi_n) < 0.$$

Somit ist auch $\lambda^d h_{a,d}(\xi_1, \dots, \xi_n) = h_{a,d}(\lambda\xi_1, \dots, \lambda\xi_n) < 0$ für alle $\lambda > 0$. Sei nun $u_k := h_{a,k}(\xi_1, \dots, \xi_n),\ k = 0, \dots, d$. Wähle $\lambda > 0$ so groß, dass

$$\lambda^d > \left| \frac{u_{d-1}}{u_d}\lambda^{d-1} + \dots + \frac{u_1}{u_d}\lambda + \frac{u_0}{u_d} \right|.$$

Genauso wie im Beweis zu Satz 38 haben dann $h_{a,d}(\lambda\xi_1, \dots, \lambda\xi_n)$ und $p_a(\lambda\xi_1, \dots, \lambda\xi_n)$ das gleiche Vorzeichen. Damit ist $p_a(\lambda\xi_1, \dots, \lambda\xi_n) < 0$, da $h_{a,d}(\lambda\xi_1, \dots, \lambda\xi_n) < 0$. Da für p_a außerdem gilt $\|p - p_a\|_2 < \varepsilon$, existiert also für jedes $\varepsilon > 0$ ein Polynom $p_a \in \{g \in \mathcal{P}_d : \|p - g\|_2 < \varepsilon\}$ mit $p_a \notin K_d^+$, das heißt $p \in \partial K_d^+$. □

KORROLAR 42. Ist $p \in \mathcal{P}_d$ ein nicht-negatives Polynom mit $\deg(p) < d$ und f seine d-Homogenisierung, so gilt nach Bemerkung 33 immer $f[\xi] = 0$ für jeden unendlich fernen Punkt $[\xi] = [0, \xi_1, \dots, \xi_n]$. Damit liegt p auf dem Rand von K_d^+. Das heißt

$$p \in K_d^+ \text{ mit } \deg(p) < d \Rightarrow p \in \partial K_d^+.$$

Wir haben bis jetzt gezeigt, dass alle Polynome, deren d-Homogenisierungen eine affine oder eine unendlich ferne Nullstelle besitzen, auf dem Rand von K_d^+ liegen. Es gibt keine weiteren Polynome auf dem Rand, wie der folgende Satz zeigt:

SATZ 43. Sei $p \in K_d^+$ und seine d-Homogenisierung besitze weder eine affine noch eine unendlich ferne Nullstelle. Dann ist $p \in int(K_d^+)$.

BEWEIS. Es sei $p = \sum_{i=1}^{D} q_i t_i$. Dann ist $f = \sum_{i=1}^{D} q_i \widetilde{t_i}$ wiederum seine d-Homogenisierung. Da f weder eine affine noch eine unendlich ferne Nullstelle besitzt, ist $f[\xi] > 0$ für alle $[\xi] \in \mathbb{P}_n$. Es gilt

$$f[\xi] > 0 \ \forall [\xi] \in \mathbb{P}_n \Leftrightarrow f(\xi) > 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ mit } \sum_{j=0}^{n} \xi_j^2 = 1.$$

Das bedeutet $f(\xi) > 0 \ \forall \xi \in S_n$. Es ist $0 < f(\xi) < M$ für alle $\xi \in S_n$ mit passendem $M \in \mathbb{R}$, da S_n kompakt und f stetig ist. Da S_n eine kompakte Menge ist, nimmt f auf S_n sein Minimum an, das heißt, es existiert $\xi^\times \in S_n$ mit

$$f(\xi^\times) = \min\{f(\xi) \mid \xi \in S_n\} =: m > 0.$$

Mit $q := (q_1, \ldots, q_D)$, $\widetilde{t}(\xi) := (\widetilde{t}_1(\xi), \ldots, \widetilde{t}_D(\xi)) \in \mathbb{R}^D$ gilt $\langle q, \widetilde{t}(\xi)\rangle \geq m$ für alle $\xi \in S_n$. Die Abbildung $\varphi : S_n \to \mathbb{R}, \ \xi \mapsto \frac{2}{m} \cdot \|\widetilde{t}(\xi)\|_2$ ist stetig und nimmt auf S_n ihr Maximum an: $\delta := \max\{\varphi(\xi) \mid \xi \in S_n\} > 0$. Nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung gilt dann für alle $a \in \mathbb{R}^D$ mit $\|a\|_2 < \frac{1}{\delta}$ und alle $\xi \in S_n$:

$$|\langle a, \widetilde{t}(\xi)\rangle|^2 \leq \|a\|_2^2 \cdot \|\widetilde{t}(\xi)\|_2^2 \leq \frac{1}{\delta^2} \cdot \|\widetilde{t}(\xi)\|_2^2 \leq \frac{m^2}{4}.$$

Daraus folgt: $|\langle a, \widetilde{t}(\xi)\rangle| \leq \frac{m}{2}$. Für alle $a \in \mathbb{R}^D$ mit $\|a\|_2 < \frac{1}{\delta}$ und $f_a := \sum_{i=1}^{D} (q_i - a_i)\widetilde{t}_i$ gilt dann

$$\begin{aligned} f_a(\xi) &= \sum_{i=1}^{D} (q_i - a_i)\widetilde{t}_i(\xi) \\ &= \sum_{i=1}^{D} q_i \widetilde{t}_i(\xi) - \sum_{i=1}^{D} a_i \widetilde{t}_i(\xi) \\ &\geq m - \tfrac{m}{2} = \tfrac{m}{2} > 0. \end{aligned}$$

Damit ist $f_a(\xi) > 0$ für alle $\xi \in S_n$ und damit $f_a[\xi] > 0$ für alle $[\xi] \in \mathbb{P}_n$. Sei nun $g \in \mathcal{P}_d$ und $\|g - p\|_2 < \frac{1}{\delta}$, d.h. es existiert ein $a = (a_1, \ldots, a_D) \in \mathbb{R}^D$ mit $\|a\|_2 < \frac{1}{\delta}$ und $g = p - \sum_{i=1}^{D} a_i t_i$. Dann gilt für alle $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$g(\xi) = \sum_{i=1}^{D} (q_i - a_i) t_i(\xi) = \sum_{i=1}^{D} (q_i - a_i)\widetilde{t}_i(1, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{D} (q_i - a_i)\widetilde{t}_i[1, \xi_1, \ldots, \xi_n] > 0.$$

Das bedeutet für alle $g \in \{w \in \mathcal{P}_d : \ \|w - p\|_2 < \frac{1}{\delta}\}$ gilt $g(\xi) > 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Da also eine offene Kugel um p existiert, die komplett in K_d^+ enthalten ist, ist $p \in int(K_d^+)$. □

Wir haben nun den Kegel K_d^+ vollständig beschrieben. Auf dem Rand von K_d^+ liegen genau die nicht-negativen Polynome, deren d-Homogenisierungen affine oder unendlich ferne Nullstellen besitzen. Insbesondere befinden sich alle Polynome aus K_d^+, deren Grad kleiner als d ist, auf dem Rand des Kegels. Die Polynome, deren d-Homogenisierungen affine Nullstellen besitzen, sind genau die Polynome, die reelle Nullstellen besitzen. Alle Polynome aus K_d^+, deren d-Homogenisierungen keine

Nullstellen besitzen, liegen im Inneren des Kegels.

Mit Hilfe von Satz 40 und der anschließenden Folgerung, dass für den Kegel der homogenen nicht-negativen Polynome gilt $\widetilde{K}_d^+ = \{f \in \mathcal{H}_d \mid f[x] \geq 0 \ \forall [x] \in \mathbb{P}_n\}$, erhalten wir das folgende Korollar:

Korrolar 44. Sei $p \in \mathcal{P}_d$ und $s \in \mathbb{N}_0$ eine gerade Zahl mit $s \geq \deg(p)$. Dann ist p genau dann ein nicht-negatives Polynom, wenn für seine s-Homogenisierung f gilt: $f(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) \geq 0$ für alle $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) \in S_n$.

Ein Polynom aus $\mathcal{P}_d$ ist also genau dann nicht-negativ, wenn seine s-Homogenisierung nicht-negativ auf der Kugelsphäre S_n im Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Das Problem zu entscheiden, ob ein vorgegebenes Polynom in n Variablen nicht-negativ ist, lässt sich demnach mit diesen Erkenntnissen umformulieren in das Problem zu entscheiden, ob ein homogenes Polynom in $n+1$ Variablen nicht-negativ auf der kompakten, algebraischen Menge S_n ist. Um dieses Problem zu lösen, kann man beispielsweise Untersuchungen mit Methoden der Analysis durchführen.

KAPITEL 5

Der Satz von Tchakaloff

Der Satz von Tchakaloff lautet in seiner ursprünglichen Version:

Satz 45 (Tchakaloff). (aus [**Tch57**]) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen und beschränkt und $w(x) \geq 0\ \forall x \in \Omega$ eine Gewichtsfunktion. Desweiteren sei

$$I(f) := \int_\Omega f(x)w(x)dx$$

mit $|I(x^\alpha)| < \infty$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^2,\ |\alpha| \leq d$. Dann existieren $A_1, \ldots, A_D \geq 0$ und $\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(D)} \in \Omega$ mit $D = \binom{d+2}{d}$ so dass

$$I(p) = \sum_{k=1}^{D} A_k p(\xi_{(k)})$$

für alle $p \in \mathcal{P}_d$.

Dieser Satz wurde zunächst vom zweidimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$ verallgemeinert auf den n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$ (siehe [**Put97**]). Anschließend wurden weitere Verallgemeinerungen auch für nicht-kompakte Teilmengen Ω des $\mathbb{R}^n$ und ebenso für andere Räume wie den Raum $\mathbb{C}^n$ und allgemeine Maßräume bewiesen (siehe [**BT06**]). Der Beweis der bisher weitesten Verallgemeinerung von Curto & Fialkow (siehe [**CF02**]) beruht auf maßtheoretische Argumente. Wir werden hier einen neuen Beweis dieser weitesten Verallgemeinerung des Satzes von Tchakaloff vorstellen, der ohne diese Argumentationsweisen auskommt und stattdessen algebraische und funktionalanalytische Argumente benutzt. Der hier vorgestellte Beweis beruht auf den Beweisideen des Satzes von Tchakaloff in der Version von Putinar (siehe [**Put97**]) für kompakte Mengen Ω. Er wird hier ausgeweitet auf beliebige Teilmengen Ω des $\mathbb{R}^n$.

Satz 46. [Verallgemeinerung des Satzes von Tchakaloff] Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und außerdem $w(x) \geq 0\ \forall x \in \Omega$ eine Gewichtsfunktion. Desweiteren sei

$$I(f) := \int_\Omega f(x)w(x)dx$$

mit $|I(x^\alpha)| < \infty$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ |\alpha| \leq d$, und es gelte:

Ist $p(x) \geq 0\ \forall x \in \Omega$ und $p \not\equiv 0$ auf Ω, so folgt $I(p) = \int_\Omega p(x)w(x)dx > 0$.

Dann existieren $A_1, \dots, A_D \geq 0$ und $\xi_{(1)}, \dots, \xi_{(D)} \in \Omega$ mit $D = \binom{d+n}{d}$, so dass

$$I(p) = \sum_{k=1}^{D} A_k p(\xi_{(k)})$$

für alle $p \in \mathcal{P}_d$.

Damit der Beweis dieses Satzes übersichtlicher wird, werden wir den Satz in zwei Teile aufspalten, die einzeln bewiesen werden.

Satz 47. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und $w(x) \geq 0 \; \forall x \in \Omega$ eine Gewichtsfunktion. Desweiteren sei

$$I(f) := \int_\Omega f(x) w(x) dx$$

mit $|I(x^\alpha)| < \infty$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n,\; |\alpha| \leq d$. Dann existieren $m \in \mathbb{N},\; A_1, \dots, A_m \geq 0$ und $\xi_{(1)}, \dots, \xi_{(m)} \in \Omega$, so dass

$$I(p) = \sum_{k=1}^{m} A_k p(\xi_{(k)})$$

für alle $p \in \mathcal{P}_d$.

Satz 48. Mit den Voraussetzungen aus Satz 47 existieren $A_1, \dots, A_D \geq 0$ und $\xi_{(1)}, \dots, \xi_{(D)} \in \Omega$ mit $D = \binom{d+n}{d}$, so dass

$$I(p) = \sum_{k=1}^{D} A_k p(\xi_{(k)})$$

für alle $p \in \mathcal{P}_d$.

Wir werden für den Beweis von Satz 47 eine Fallunterscheidung durchführen. Zunächst betrachten wir den Fall, dass gilt:

$$p \in \mathcal{P}_d,\; p(x) = 0 \;\forall x \in \Omega \Rightarrow p \equiv 0.$$

Im zweiten Teil des Beweises werden wir sehen, wie man verfährt, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist.

Beweis von Satz 47 (Teil 1). Es sei $\{t_1, \dots, t_D\}$ wieder die geordnete Basis von $\mathcal{P}_d$. Nach Voraussetzung gilt $|I(t_i)| < \infty$ für $i = 1, \dots, D$. Weiter sei

$$M_{\Omega,d} := \{(t_1(x), \dots, t_D(x)) \mid x \in \Omega\} \subseteq \mathbb{R}^D$$

und $K := \mathrm{cone}(M_{\Omega,d})$. Damit ist K ein konvexer Kegel.
Es ist nun zu zeigen, dass $J := (I(t_1), \dots, I(t_D)) \in K$, denn das bedeutet, es existiert eine konische Kombination aus (endlich vielen) Elementen aus $M_{\Omega,d}$, um J darzustellen. Die Koeffizienten der konischen Kombination entsprechen dann den

Gewichten $A_1, \dots, A_m$ der Kubatursumme.

Im ersten Schritt zeigen wir (ähnlich zu der Vorgehensweise von Putinar in [**Put97**]) nun, dass $J \in K^{**} = \overline{K}$. Dazu interpretieren wir den dualen Kegel K^* als Kegel aus Polynomen auf Ω, genauer betrachten wir einen Isomorphismus von $\mathbb{R}^D$ nach $\mathcal{P}_d$, der K^* auf die Menge der auf Ω nicht-negativen Polynome abbildet:

$$\phi : \mathbb{R}^D \to \mathcal{P}_d,\ q = (q_1, \dots, q_D) \mapsto \sum_{i=1}^{D} q_i t_i(x).$$

Aus der Definition von ϕ geht direkt hervor, dass ϕ linear und bijektiv ist. Weiter gilt

$$\begin{aligned} q \in K^* \quad &\Leftrightarrow \quad \langle q, u \rangle = \sum_{i=1}^{D} q_i u_i \geq 0\ \forall u = (u_1, \dots, u_D) \in K \\ &\Leftrightarrow \quad \langle q, t(x) \rangle = \sum_{i=1}^{D} q_i t_i(x) \geq 0 \text{ mit } t(x) := (t_1(x), \dots, t_D(x))\ \forall x \in \Omega \\ &\Leftrightarrow \quad p(x) := \sum_{i=1}^{D} q_i t_i(x) \geq 0\ \forall x \in \Omega \\ &\Leftrightarrow \quad p(x) \geq 0\ \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

Somit bildet der Isomorphismus ϕ den dualen Kegel K^* auf die Menge

$$G := \{p \in \mathcal{P}_d \mid p(x) \geq 0\ \forall x \in \Omega\}$$

ab. Den bidualen Kegel K^{**} interpretieren wir als Kegel aus linearen Funktionalen auf G. Wir bilden dazu ähnlich wie gerade einen Isomorphismus ψ zwischen $\mathbb{R}^D$ und dem Raum $\mathcal{P}'_d$ der linearen Funktionale auf $\mathcal{P}_d$:

$$\psi : \mathbb{R}^D \to \mathcal{P}'_d,\ \ell \mapsto L \text{ mit } L(t_1) = \ell_1, \dots, L(t_D) = \ell_D.$$

Aus der Linearität der Funktionale L folgt die Linearität von ψ. Das bedeutet

$$L(p) = L(\phi(q)) = \psi(\ell)\big(\phi(q)\big) = \langle \ell, q \rangle.$$

Für zwei lineare Funktionale $L_1, L_2 \in \mathcal{P}'_d$ mit $L_1 = \psi(\ell_1)$ und $L_2 = \psi(\ell_2)$ gilt:

$$\begin{aligned} L_1 = L_2 \quad &\Rightarrow \quad L_1(p) = L_2(p)\ \forall p \in \mathcal{P}_d \\ &\Rightarrow \quad \langle \ell_1, q \rangle = \langle \ell_2, q \rangle\ \forall q \in \mathbb{R}^D \\ &\Rightarrow \quad \langle \ell_1 - \ell_2, q \rangle = 0\ \forall q \in \mathbb{R}^D \\ &\Rightarrow \quad \ell_1 - \ell_2 \in (\mathbb{R}^D)^\perp = \{0\} \\ &\Rightarrow \quad \ell_1 = \ell_2. \end{aligned}$$

Demnach ist ψ injektiv. Es ist $\dim(\mathcal{P}'_d) = \dim(\mathcal{P}_d)$. Und damit ist ψ auch surjektiv. ψ bildet den bidualen Kegel K^{**} auf die Menge

$$H := \{L \in \mathcal{P}'_d \mid L(p) \geq 0\ \forall p \in G\} \subseteq \mathcal{P}'_d$$

ab, denn für $\ell \in \mathbb{R}^D$ gilt:

$$\ell \in K^{**} \Leftrightarrow \langle \ell, q\rangle \geq 0 \; \forall q \in K^* \Leftrightarrow (\psi(\ell))(p) = L(p) \geq 0 \; \forall p \in G \Leftrightarrow \psi(\ell) = L \in H.$$

Für $p \in G$ gilt nun $I(p) = \int\limits_\Omega p(x)w(x)dx \geq 0$, da $p(x) \geq 0$ und $w(x) \geq 0$ für alle $x \in \Omega$ ist. Somit ist das lineare Funktional $I \in H$. Und für den Vektor $J = (I(t_1), \ldots, I(t_D))$ und $q \in K^*$ ist $I(p) = I(\phi(q)) = \sum\limits_{i=1}^{D} q_i I(t_i) = \langle q, J\rangle$. Also ist $\psi(J) = I$. Damit ist $J \in K^{**} = \overline{K}$.

Im zweiten Schritt zeigen wir, dass $J \in K$ ist. Nach Korollar 20 ist das Innere des Kegels $int(K) = \{u \in \mathbb{R}^D \mid \langle u, s\rangle > 0 \; \forall s \in K^* \backslash \{0\}\} \subseteq K \subseteq \overline{K}$. Wir zeigen nun $J \in int(K) \subseteq K$. Sei $q \in K^* \backslash \{0\}$, also $\langle q, u\rangle \geq 0 \; \forall u \in K$. Für $p = \phi(q)$ bedeutet das $p(x) \geq 0 \; \forall x \in \Omega$ und $p \not\equiv 0$ auf Ω. Dann ist $I(p) = \int\limits_\Omega p(x)w(x)dx > 0$. Also ist $\langle J, q\rangle > 0 \; \forall q \in K^* \backslash \{0\}$. Demnach ist $J \in int(K) \subseteq K$. Insgesamt haben wir gezeigt,dass

$$J = (I(t_1), \ldots, I(t_D)) \in K = \text{cone}\{(t_1(x), \ldots, t_D(x)) \mid x \in \Omega\}.$$

Da $J \in K$, existiert eine konische Kombination aus Elementen aus M, um J darzustellen, d.h. es existieren $A_1, \ldots, A_m \geq 0, \; \xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(m)} \in \Omega$, so dass

$$J = \sum_{j=1}^{m} A_j (t_1(\xi_{(j)}), \ldots, t_D(\xi_{(j)})).$$

Da nun für jedes $t_i, \; i = 1, \ldots, D$, die Gleichung gilt $I(t_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} A_j t_i(\xi_{(j)})$, gilt auch für jedes Polynom $p = \sum\limits_{i=1}^{D} q_i t_i \in \mathcal{P}_d$:

$$\begin{aligned} I(p) &= \sum_{i=1}^{D} q_i I(t_i) = \sum_{i=1}^{D} q_i \left(\sum_{j=1}^{m} A_j t_i(\xi_{(j)}) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} A_j \left(\sum_{i=1}^{D} q_i t_i(\xi_{(j)}) \right) = \sum_{j=1}^{m} A_j p(\xi_{(j)}). \end{aligned}$$

□

Wir haben nun bewiesen, dass Satz 47 gilt, wenn die Bedingung

$$p \in \mathcal{P}_d, \; p(x) = 0 \; \forall x \in \Omega \Rightarrow p \equiv 0$$

erfüllt ist. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so lässt sich der zweite Schritt im Beweis nicht durchführen, denn es existiert ein $p \in \mathcal{P}_d$ mit $p(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$ und damit $I(p) = 0$, aber $p \not\equiv 0$. Das bedeutet $\langle J, q\rangle = 0$ für ein $q \in K^* \setminus \{0\}$ und damit $J \in \partial K$. Die obige Bedingung ist in jedem Fall erfüllt, wenn Ω innere Punkte besitzt. Besitzt Ω keine inneren Punkte, so ist es möglich, dass Ω in der Varietät eines Ideals $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{P}$ mit $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ enthalten ist. Dann kann $p \in \mathcal{P}_d$ existieren mit $p(x) = 0 \ \forall x \in \Omega$, aber $p \not\equiv 0$. Nur in dem Fall, dass ein solches p existiert, lässt sich der zweite Schritt im obigen Beweis nicht durchführen. Deshalb werden wir nun genau diesen Fall betrachten.

Beweis von Satz 47 (Teil 2). Sei $\mathfrak{a}$ das Verschwindungsideal von Ω, das heißt $\mathfrak{a} = \{p \in \mathcal{P}_d \mid p(x) = 0 \ \forall x \in \Omega\}$. In unserem Fall sind dabei nur die Polynome von Interesse, die höchstens den Grad d besitzen, daher setze $\widetilde{\mathfrak{a}} := \mathfrak{a} \cap \mathcal{P}_d$. Die Menge $\widetilde{\mathfrak{a}}$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{P}_d$. Es bezeichne $\widetilde{V} := \mathcal{P}_d/\widetilde{\mathfrak{a}}$ den Faktorraum. Es gilt für $p_1, p_2 \in \mathcal{P}_d$:

$$p_1 \sim p_2 :\Leftrightarrow p_1 - p_2 \in \widetilde{\mathfrak{a}}.$$

Wir bezeichnen mit $[p]$ die Äquivalenzklasse von p. Da $a(x) = 0$ für alle $a \in \widetilde{\mathfrak{a}}$ und alle $x \in \Omega$ ist, gilt $p_1(x) = p_2(x)$ für alle $x \in \Omega$, wenn $[p_1] = [p_2]$. Umgekehrt folgt aus $p_1(x) = p_2(x)$ für alle $x \in \Omega$ die Gleichheit der Äquivalenzklassen, das heißt $[p_1] = [p_2]$. Daher ist

$$[p](x) := p(x)$$

für $x \in \Omega$ wohldefiniert. Für zwei Polynome $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ mit $p_1 = p_2 + a$, $a \in [0]$ gilt

$$\begin{aligned} I(p_1) &= \int_\Omega p_1(x)w(x)dx = \int_\Omega p_2(x)w(x)dx + \int_\Omega a(x)w(x)dx \\ &= \int_\Omega p_2(x)w(x)dx + 0 = I(p_2). \end{aligned}$$

Damit lässt sich die Integralfunktion für die Äquivalenzklassen problemlos definieren als

$$I([p]) := I(p).$$

Da $\{t_1, \ldots, t_D\}$ eine Basis von $\mathcal{P}_d$ ist, ist $\{[t_1], \ldots, [t_D]\}$ ein Erzeugendensystem von $\widetilde{V}$. Es existiert somit eine Basis $\{[t_{i_1}], \ldots, [t_{i_r}]\}$, $r = \dim(\widetilde{V})$ von $\widetilde{V}$. Dann ist $I([t_{i_j}]) = I(t_{i_j})$ und damit $|I([t_{i_j}])| < \infty$ für $j = 1, \ldots, r$. Um die Schreibweise zu vereinfachen, nennen wir $[t_{i_j}] =: v_j$ für $j = 1, \ldots, r$. Nun gehen wir vor wie im obigen Beweis, denn nun gilt: $[p](x) = 0 \ \forall x \in \Omega \Rightarrow [p] = [0]$ und damit

$$[p](x) \geq 0 \ \forall x \in \Omega, \ [p] \neq [0] \Rightarrow I([p]) > 0.$$

Wir definieren

$$M_{\Omega,r} := \{(v_1(x), \ldots, v_r(x)) \mid x \in \Omega\} \subseteq \mathbb{R}^r$$

und $K := \operatorname{cone}(M_{\Omega,r}) \subseteq \mathbb{R}^r$. Führt man den Beweis analog zum obigen jetzt mit diesen neuen $M_{\Omega,r}$ und K im Raum $\mathbb{R}^r$ durch, erhält man am Ende

$$J := (I(v_1), \ldots, I(v_r)) \in K.$$

Damit existieren $A_1, \ldots, A_m \geq 0$ und $\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(m)} \in \Omega$, so dass für alle $p \in \mathcal{P}_d$ gilt

$$I(p) = I([p]) = \sum_{j=1}^{m} A_j [p](\xi_{(j)}) = \sum_{j=1}^{m} A_j p(\xi_{(j)}).$$

□

Bisher haben wir gezeigt, dass es für I eine Kubatursumme mit endlich vielen Knoten und positiven Gewichen gibt. Es bleibt noch zu zeigen, dass eine solche Kubatursumme mit positiven Gewichten und höchstens D Knoten existiert.

Beweis von Satz 48. Wir zeigen nun, dass es eine konische Kombination aus D Elementen aus $M_{\Omega,d}$ gibt, um J darzustellen. Nach Satz 47 existiert eine konische Kombination aus endlich vielen Elementen, und nach Bemerkung 10 existieren $s_1, \ldots, s_{D+1} \in M_{\Omega,d} = \{(t_1(x), \ldots, t_D(x)) \mid x \in \Omega\}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_{D+1} \geq 0$, so dass $J = \sum\limits_{j=1}^{D+1} \lambda_j s_j$. Wir benötigen nun eine Darstellung mit D statt $D+1$ Elementen. Dazu verwenden wir eine Methode, die angelehnt ist an ein Verfahren aus [**Dav67**]. Wir werden nun zeigen, dass gilt:

$$\exists\ \beta_1, \ldots, \beta_D \geq 0,\ \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_D}\} \subset \{s_1, \ldots, s_{D+1}\},\ \text{so dass } J = \sum_{j=1}^{D} \beta_j s_{ij}.$$

Da $s_1, \ldots, s_{D+1} \in \mathbb{R}^D$ sind, müssen sie linear abhängig sein, das heißt, es existieren $\gamma_1, \ldots, \gamma_{D+1} \in \mathbb{R}$, nicht alle Null mit $\sum\limits_{j=1}^{D+1} \gamma_j s_j = 0$. Damit ist auch $\tau \cdot \sum\limits_{j=1}^{D+1} \gamma_j s_j = 0$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$. Es ist demnach

$$J = \sum_{j=1}^{D+1} \lambda_j s_j - \tau \cdot \sum_{j=1}^{D+1} \gamma_j s_j = \sum_{j=1}^{D+1} (\lambda_j - \tau\gamma_j) s_j$$

für alle $\tau \in \mathbb{R}$. Gesucht ist jetzt ein $\tau \in \mathbb{R}$, so dass mindestens einer der Summanden Null wird und alle anderen nicht-negativ sind. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

Zunächst untersuchen wir den Fall, dass ein $k \in \{1, \ldots, D+1\}$ existiert mit $\gamma_k > 0$. Für $\tau > 0$ und $\gamma_i \leq 0$ gilt: $\lambda_i - \tau\gamma_i \geq 0$. Sei nun $\gamma_j > 0$. Setze

$$\tau_0 := min \left\{ \frac{\lambda_j}{\gamma_j} \middle| \gamma_j > 0 \right\} > 0.$$

OBdA ist $\tau_0 = \frac{\lambda_{D+1}}{\gamma_{D+1}}$. Dann ist $\lambda_k - \tau_0\gamma_k \geq \lambda_k - \frac{\lambda_k}{\gamma_k}\gamma_k = 0$ für $k \in \{1, \ldots, D\}$ mit $\gamma_k \neq 0$, und für $k = D+1$ gilt: $\lambda_{D+1} - \tau_0\gamma_{D+1} = \lambda_{D+1} - \frac{\lambda_{D+1}}{\gamma_{D+1}}\gamma_{D+1} = 0$.

Als nächstes müssen wir noch den Fall untersuchen, dass für alle $k \in \{1, \ldots, D+1\}$

gilt $\gamma_k \leq 0$. Für

$$\tau_0 := min\left\{ \frac{\lambda_j}{\gamma_j} \middle| \gamma_j < 0 \right\} < 0$$

und oBdA $\tau_0 = \frac{\lambda_{D+1}}{\gamma_{D+1}}$ ist $\lambda_k - \tau_0\gamma_k \geq \lambda_k - \frac{\lambda_k}{\gamma_k}\gamma_k = 0$ für alle $k \in \{1, \dots, D\}$ mit $\gamma_k \neq 0$. Für $k = D + 1$ gilt: $\lambda_{D+1} - \tau_0\gamma_{D+1} = \lambda_{D+1} - \frac{\lambda_{D+1}}{\gamma_{D+1}}\gamma_{D+1} = 0$.

Somit gilt in beiden Fällen mit $\beta_j = \lambda_j - \tau_0\gamma_j,\ j = 1, \dots, D$:

$$J = \sum_{j=1}^{D} (\lambda_j - \tau_0\gamma_j)s_j = \sum_{j=1}^{D} \beta_j s_j$$

mit $\beta_1, \dots, \beta_D \geq 0$ und $s_1, \dots, s_D \in M$.

□

Satz 46 trifft eine Aussage darüber, wie viele Knoten maximal für eine Kubatursumme mit positiven Gewichten benötigt werden. Das bedeutet nicht, dass wirklich für jedes Integral diese Anzahl erforderlich ist.

Beispiel 5. Es sei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}$ und $w(x) = 1$. Dann ist

$$I(p) = \int_{\Omega} p(x)dx = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} p(x, y)dxdy.$$

Sei nun $p \in \mathcal{P}_d$. Die geordnete Basis von $\mathcal{P}_2$ ist $\mathcal{B} := \{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$. Es ist $|I(t_i)| < \infty$ für alle $t_i \in \mathcal{B}$. Wir berechnen den Vektor $J = (I(1), \dots, I(y^2))$: Es gilt $I(1) = 4,\ I(x) = 0,\ I(y) = 0,\ I(x^2) = \frac{4}{3},\ I(xy) = 0$ und $I(y^2) = \frac{4}{3}$. Somit ist $J = (4, 0, 0, \frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3})$. Satz 46 besagt, dass es eine Kubatursumme mit positiven Gewichten mit maximal 6 Knoten für dieses Integral gibt. Es existiert sogar eine solche Kubatursumme mit 4 Knoten. Mit $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$ und den Knoten $\xi_{(1)} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right),\ \xi_{(2)} = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right),\ \xi_{(3)} = \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right),\ \xi_{(4)} = \left(0, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ ist dann:

$$t(\xi_{(1)}) = \left(1, \sqrt{\tfrac{2}{3}}, 0, \tfrac{2}{3}, 0, 0\right), \quad t(\xi_{(2)}) = \left(1, -\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 0, \tfrac{2}{3}, 0, 0\right),$$
$$t(\xi_{(3)}) = \left(1, 0, \sqrt{\tfrac{2}{3}}, 0, 0, \tfrac{2}{3}\right), \quad t(\xi_{(4)}) = \left(1, 0, -\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 0, 0, \tfrac{2}{3}\right).$$

Damit ist $t(\xi_{(1)}) + t(\xi_{(2)}) + t(\xi_{(3)}) + t(\xi_{(4)}) = (4, 0, 0, \frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}) = J$.
Das bedeutet

$$I(p) = p\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right) + p\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right) + p\left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) + p\left(0, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

für alle $p \in \mathcal{P}_2$.

KAPITEL 6

Der Kegel der nicht-negativen Funktionale

Im vorherigen Kapitel wurde das Integral I aufgefasst als ein nicht-negatives lineares Funktional auf dem Kegel der nicht-negativen Polynome. Wir wollen nun untersuchen, ob es für jedes auf dem Kegel der nicht-negativen Polynome nicht-negative lineare Funktional eine Darstellung als Kubatursumme mit nicht-negativen Gewichten gibt.

Es folgt eine Übersicht über die Isomorphismen zwischen den D-dimensionalen Vektorräumen $\mathbb{R}^D$, dem Polynomraum $\mathcal{P}_d$, seinem Dualraum $\mathcal{P}'_d$ und dem Raum der homogenen Polynome $\mathcal{H}_d$, die wir im Folgenden verwenden werden und schon in den vorherigen Kapiteln verwendet haben. Wie schon im Kapitel 4 ist d in diesem Kapitel immer eine gerade Zahl aus $\mathbb{N}_0$.

In Kapitel 3 wurde der folgende Isomorphismus eingeführt:

$$\tau : \mathcal{P}_d \to \mathcal{H}_d,\ p(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_0^d p\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right).$$

Ist $p = \sum_{k=0}^{d} h_k$ die Darstellung von p mit Hilfe seiner homogenenen Anteile, so gilt

$$\tau(p) = \sum_{k=0}^{d} x_0^{d-k} h_k.$$

Die Umkehrabbildung von τ ist

$$\tau^{-1} : \mathcal{H}_d \to \mathcal{P}_d,\ f(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto f(1, x_1, \dots, x_n).$$

In Kapitel 5 wurden die beiden folgenden Isomorphismen eingeführt:

$$\phi : \mathbb{R}^D \to \mathcal{P}_d,\ (q_1, \dots, q_D) \mapsto \sum_{i=1}^{D} q_i t_i.$$

$$\psi : \mathbb{R}^D \to \mathcal{P}'_d,\ (\ell_1, \dots, \ell_D) \mapsto L \text{ mit } L(t_i) = \ell_i,\ i = 1, \dots, D.$$

Für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ können wir den Vektor $t(\xi) := (t_1(\xi), \dots, t_D(\xi))$ bilden. Jedes Polynom $p \in \mathcal{P}_d$ mit $p = \sum_{i=1}^{D} q_i t_i$ ist eindeutig durch den Vektor $q = (q_1, \dots, q_D)$

definiert. Jedes lineare Funktional L auf dem Raum $\mathcal{P}_d$ ist durch Angaben der Werte $L(t_i),\ i = 1, \dots, D$ eindeutig definiert. Der Vektor $\ell = (L(t_1), \dots, L(t_D))$ bestimmt also das Funktional L eindeutig. Nach Kapitel 5 gilt

$$L(p) = \langle \ell, q \rangle.$$

Wir definieren den konvexen Kegel

$$K := \operatorname{cone}(M_{\mathbb{R}^n,d}) = \operatorname{cone}\{t(\xi) \mid \xi \in \mathbb{R}^n\}.$$

Dann ist der duale Kegel K^* durch

$$K^* := \{q \in \mathbb{R}^D \mid \langle q, t(\xi) \rangle \geq 0\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n\}$$

definiert. Es ist $K_d^+ = \phi(K^*)$ und $\tau(K_d^+) = \widetilde{K}_d^+$.

Weiter ist

$$K^{**} := \{\ell \in \mathbb{R}^D \mid \langle \ell, q \rangle \geq 0\ \forall q \in K^*\},$$

der biduale Kegel von K. Wir definieren den Kegel der auf K_d^+ nicht-negativen Funktionale

$$K_d^{++} := \{L : \mathcal{P}_d \to \mathbb{R} \text{ linear } \mid L(p) \geq 0\ \forall p \in K_d^+\}.$$

Dann ist $K_d^{++} = \psi(K^{**})$. Für jedes lineare Funktional $L \in \mathcal{P}_d'$ ist $\widetilde{L} := L \circ \tau^{-1}$ ein lineares Funktional auf $\mathcal{H}_d$. Es ist $L(p) \geq 0$ für alle $p \in K_d^+$, genau dann wenn $\widetilde{L}(f) \geq 0$ für alle $f \in \widetilde{K}_d^+$. Damit existiert ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{P}_d'$ und $\mathcal{H}_d'$, der K_d^{++} abbildet auf

$$\widetilde{K}_d^{++} := \left\{\widetilde{L} : \mathcal{H}_d \to \mathbb{R} \text{ linear } \mid \widetilde{L}(f) \geq 0\ \forall f \in \widetilde{K}_d^+\right\}.$$

Wir betrachten wie auch beim Kegel der nicht-negativen Polynome zuerst, welche Funktionale auf dem Rand von K_d^{++} liegen.

Satz 49. Es sei $L \in K_d^{++}$. Dann ist $L \in \partial K_d^{++}$ genau dann wenn ein $p \in K_d^+ \setminus \{0\}$ existiert mit $L(p) = 0$.

Beweis. Es ist $L \in K_d^{++}$ genau dann wenn $\ell = \psi^{-1}(L) \in K^{**}$ ist. Nach Korollar 20 ist $\ell \in \partial K^{**} = \partial K$ äquivalent dazu, dass ein $q \in K^* \setminus \{0\}$ existiert mit $\langle \ell, q \rangle = 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $p = \phi(q) \in K_d^+ \setminus \{0\}$ und $L(p) = 0$ ist, da $L(p) = \langle \ell, q \rangle$ ist. $\square$

Der Rand von K_d^{++} enthält somit genau die Funktionale aus K_d^{++}, die in einem $p \in K_d^+ \setminus \{0\}$ verschwinden. Es ist $\widetilde{L} \in \widetilde{K}_d^{++}$ äquivalent dazu, dass $L = \widetilde{L} \circ \tau \in K_d^{++}$. Da die Abbildung τ linear und stetig ist, liegen auf dem Rand von $\widetilde{K}_d^{++}$ genau die Funktionale $\widetilde{L} \in \widetilde{K}_d^{++}$, für die ein $f \in \widetilde{K}_d^+ \setminus \{0\}$ existiert mit $\widetilde{L}(f) = 0$.

Nach Korollar 14 ist der Abschluss des Kegels K genau $\overline{K} = K^{**}$. Wir untersuchen nun, ob $K = K^{**}$ ist. Da $K = \text{cone}(M_{\mathbb{R}^n,d})$ mit $M_{\mathbb{R}^n,d} = \{t(\xi) \mid \xi \in \mathbb{R}^n\}$ ist, ließe sich in diesem Fall jedes Element aus K^{**} als konische Kombination aus Elementen aus $M_{\mathbb{R}^n,d}$ darstellen. Unter Verwendung von ψ könnten wir dann wie in Kapitel 5 jedes auf K_d^+ nicht-negative lineare Funktional als Kubatursumme mit positiven Gewichten darstellen.

Definition 50. Sei $L : \mathcal{P}_d \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional. L heißt *Auswertungsfunktional*, wenn ein $\xi \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $L(p) = L_\xi(p) := p(\xi)$ für alle $p \in \mathcal{P}_d$.

Satz 51. Ist $L_\xi : \mathcal{P}_d \to \mathbb{R}$ ein Auswertungsfunktional, so ist $L_\xi \in K_d^{++}$.

Beweis. Sei $L_\xi : \mathcal{P}_d \to \mathbb{R}$ das Auswertungsfunktional im Punkt ξ. Ist $p^* \in K_d^+$, so ist $L_\xi(p^*) = p^*(\xi) \geq 0$. Das bedeutet $L_\xi \in K_d^{++}$. □

Es gilt die folgende Beziehung:

$$K = \text{cone}(M_{\mathbb{R}^n,d}) = \text{cone}\{(L_\xi(t_1), \ldots, L_\xi(t_D)) \mid L_\xi \text{ ist ein Auswertungsfunktional}\}.$$

Der Kegel K ist nicht abgeschlossen. Jedes $\rho \in K$ hat die Form $\rho = \sum_{j=1}^{D} \alpha_j t(\xi_{(j)})$ mit passenden $\alpha_j \geq 0$ und $\xi_{(j)} \in \mathbb{R}^n$. Die erste Komponente ρ_1 ist demnach $\rho_1 = \sum_{j=1}^{D} \alpha_j$. Genau dann ist ρ_1 gleich Null, wenn $\alpha_1 = \cdots = \alpha_D = 0$ gilt. K enthält somit keinen Vektor, dessen erste Komponente Null ist, außer dem Nullvektor. Wir betrachten nun das lineare Funktional L mit dem zugehörigen Vektor $\ell = (0, \ldots, 0, 1)$. Wie gerade erläutert ist $\ell \notin K$. Sei nun $p = \sum_{i=1}^{D} q_i t_i \in K_d^+$. Dann ist $L(p) = \langle \ell, q \rangle = q_D$. Da p ein nicht-negatives Polynom ist, muss $q_D \geq 0$ sein. Somit ist L nicht-negativ für alle $p \in K_d^+$, aber es ist $\ell \in K^{**} \setminus K$. Das heißt $K^{**} \setminus K \neq \varnothing$, und damit ist K nicht abgeschlossen. Demnach ist $\psi(K) \neq K_d^{++}$, das bedeutet, es existieren auf K_d^+ nicht-negative lineare Funktionale, die sich nicht als Kubatursumme mit positiven Gewichten darstellen lassen.

Satz 52. Sei $L : \mathcal{P}_d \to \mathbb{R}$ ein auf K_d^+ positives lineares Funktional, d.h. $L(p) > 0$ für alle $p \in K_d^+ \setminus \{0\}$, so existieren $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \geq 0$ und $\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(m)} \in \mathbb{R}^n$, so dass $L(p) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p(\xi_{(k)})$.

Beweis. Wir zeigen, dass $\ell = \psi^{-1}(L) \in K$. Da $L \in K_d^{++}$, ist $\ell \in K^{**}$. Es ist $int(K) = \{u \in \mathbb{R}^D \mid \langle u, s \rangle > 0 \; \forall s \in K^* \setminus \{0\}\}$ nach Korollar 20. Da $L(p) > 0$ für alle $p \in K_d^+ \setminus \{0\}$, ist $\langle \ell, q \rangle > 0$ für alle $q \in K^* \setminus \{0\}$. Damit ist $\ell \in int(K) \subseteq K$, das heißt $\ell \in \text{cone}\{t(\xi) \mid \xi \in \mathbb{R}^n\}$. Somit existieren $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \geq 0$ und $\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(m)} \in \mathbb{R}^n$ mit $\ell = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k t(\xi_{(k)})$. Das bedeutet aber genau $L(p) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p(\xi_{(k)})$ für alle $p \in \mathcal{P}_d$. □

Für jedes auf K_d^+ positive lineare Funktional existiert also eine Darstellung als Kubatursumme mit positiven Gewichten. Genauso wie im Satz 46 existiert nun eine konische Kombination aus höchstens D Elementen, das heißt $L(p) = \sum_{k=1}^{D} \alpha_k p(\xi_{(k)})$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_D \geq 0,\ \xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(D)} \in \mathbb{R}^n$. Der Beweis von Satz 52 hat desweiteren gezeigt, dass alle auf K_d^+ positiven linearen Funktionale im Inneren von K_d^{++} liegen.

Bei der Untersuchung des Kegels K_d^+ haben wir festgestellt, dass auf dem Rand von K_d^+ genau die Polynome liegen, deren d-Homogenisierungen eine affine oder unendlich ferne Nullstelle besitzen. Das legt den Verdacht nahe, dass wir auch bei der Untersuchung des Randes des Kegels K_d^{++} entsprechende Funktionale berücksichtigen müssen. Wir rufen dazu noch einmal Definition 30 und Bemerkung 33 aus Kapitel 3 in Erinnerung. Für einen Punkt $[\xi] \in \mathbb{P}_n$ ist die Auswertung eines Polynoms $f \in \mathcal{H}_d$ definiert als $f[\xi] = f(\xi)$. Dabei ist ξ der Repräsentant der Äquivalenzklasse $[\xi]$, der auf der Kugelsphäre S_n liegt. Ist f die d-Homogenisierung eines Polynoms p, dessen Grad kleiner als d ist und $[\xi]$ ein unendlich ferner Punkt, so ist $f[\xi] = 0$.

Definition 53. Es sei $\widetilde{L} : \mathcal{H}_d \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional. $\widetilde{L}$ heißt *Auswertungsfunktional in einem unendlich fernen Punkt*, wenn ein $[\xi] \in \mathbb{P}_n$ existiert mit $\xi_0 = 0$ und $\widetilde{L}(f) = \widetilde{L}_{[\xi]} := f[\xi]$ für alle $f \in \mathcal{H}_d$.

$\mathcal{P}_d$ und $\mathcal{H}_d$ sind isomorph. Ist $\widetilde{L}$ ein lineares Funktional auf $\mathcal{H}_d$, so ist $L = \widetilde{L} \circ \tau$ ein lineares Funktional auf $\mathcal{P}_d$. Um die Bezeichnung zu vereinfachen, bezeichnen wir im folgenden auch jedes lineare Funktional $L : \mathcal{P}_d \to \mathbb{R}$, für das $\widetilde{L} = L \circ \tau^{-1}$ ein Auswertungsfunktional in einem unendlich fernen Punkt ist, selbst als Auswertungsfunktional in einem unendlich fernen Punkt.

Ist $L_\xi : \mathcal{P}_d \to \mathbb{R}$ ein Auswertungsfunktional mit $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, so kann man mit Hilfe des Isomorphismus τ aus L_ξ auch ein lineares Funktional auf $\mathcal{H}_d$ bilden: $\widetilde{L} : \mathcal{H}_d \to \mathbb{R}$ mit $\widetilde{L}(f) = (L_\xi \circ \tau^{-1})(f) = f\big(\xi^\times\big)$ für alle $f \in \mathcal{H}_d$, wobei $\xi^\times = (1, \xi_1, \ldots, \xi_n)$. Dann ist $f\left[\frac{1}{\mu}\xi^\times\right] = \frac{1}{\mu^d} f(\xi^\times) = \frac{1}{\mu^d} p(\xi)$, wenn f die d-Homogenisierung von p ist. Dabei ist $\mu = \big(1 + \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2\big)^{\frac{1}{2}}$. Damit ist

$$\widetilde{L}(f) = \underbrace{\mu^d}_{>0} \cdot \widetilde{L}_{[\frac{1}{\mu}\xi^\times]}(f) = \mu^d f\big[\frac{1}{\mu}\xi^\times\big] = \mu^d f\big[\frac{\xi_0}{\mu}, \ldots, \frac{\xi_n}{\mu}\big].$$

Es ergibt sich

Satz 54. Sei $L : \mathcal{P}_d \to \mathbb{R}$ ein Auswertungsfunktional. Dann gilt für das lineare Funktional $\widetilde{L} : \mathcal{H}_d \to \mathbb{R}$ mit $\widetilde{L} := L \circ \tau^{-1}$: Es existieren $\mu > 0$ und $[\xi] \in \mathbb{P}_n$ mit

$\xi_0 \neq 0$ und $\widetilde{L}(f) = (L \circ \tau^{-1})(f) = \mu \cdot \widetilde{L}_{[\xi]}(f) = \mu f[\xi]$ für alle $f \in \mathcal{H}_d$. Wir bezeichnen $\widetilde{L}_{[\xi]}$ als *Auswertungsfunktional in einem affinen Punkt.*

Wir betrachten noch einmal das obige Beispiel. Das Funktional L mit dem zugehörigen Vektor $\ell = (0, \ldots, 0, 1)$ ist ein nicht-negatives Funktional auf dem Kegel K_d^+, aber $\ell \notin K$. Wir gehen vom Raum $\mathcal{P}_d$ zu $\mathcal{H}_d$ über. Der Vektor $\ell = (0, \ldots, 0, 1)$ gehört nun zu dem Funktional $\widetilde{L}$ mit $\widetilde{L}(\widetilde{t}_1) = 0, \ldots, \widetilde{L}(\widetilde{t}_{D-1}) = 0,\ \widetilde{L}(\widetilde{t}_D) = 1$. Das bedeutet, $\widetilde{L}$ ist das Funktional, das jedes Polynom $f \in \mathcal{H}_d$ im Punkt $[\xi] = [0, \ldots, 0, 1]$ auswertet. $\widetilde{L}$ ist damit ein Auswertungsfunktional in einem unendlich fernen Punkt.

Satz 55. Ist $L : \mathcal{P}_d \to \mathbb{R}$ ein Auswertungsfunktional in einem unendlich fernen Punkt, so ist $L \in K_d^{++}$.

Beweis. Sei $L : \mathcal{P}_d \to \mathbb{R}$ ein Auswertungsfunktional in einem unendlich fernen Punkt. Dann ist $\widetilde{L} : \mathcal{H}_d \to \mathbb{R}$ mit $\widetilde{L} = L \circ \tau^{-1}$, und es existiert $[\xi] \in \mathbb{P}^n$ mit $\xi_0 = 0$, so dass $\widetilde{L}(f) = \widetilde{L}_{[\xi]}(f) = f[\xi]$ für alle $f \in \mathcal{H}_d$. Ist $f^* \in \widetilde{K}_d^+$, so ist $\widetilde{L}_{[\xi]}(f^*) = f^*[\xi] \geq 0$. Das bedeutet $\widetilde{L}_{[\xi]} \in \widetilde{K}_d^{++}$ und damit $L \in K_d^{++}$. □

Der Kegel $\widetilde{K}_d^{++}$ ist die konische Hülle aller Auswertungsfunktionale in affinen und unendlich fernen Punkten. Um dies zu zeigen, benötigen wir folgenden Satz aus [**HUL01**]. Da der Satz entscheidend für die folgenden Ergebnisse ist, wird der Beweis hier wiedergegeben.

Satz 56. Sei $W \subseteq \mathbb{R}^D$ eine nicht-leere kompakte Menge mit $0 \notin \operatorname{co}(W)$. Dann ist $\operatorname{cone}(W)$ abgeschlossen.

Beweis. Die Menge $C := \operatorname{co}(W)$ ist kompakt. Jedes Element aus $\operatorname{cone}(W)$ hat die Gestalt $\alpha \cdot x$ mit $x \in C$ und $\alpha \geq 0$. Sei nun $(\alpha_n x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \operatorname{cone}(W)$ mit $\alpha_n \geq 0$ und $x_n \in C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Cauchy-Folge. Wir zeigen nun, dass dann $(\alpha_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $y \in \operatorname{cone}(W)$ konvergiert. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Es gelte $x_{n_k} \to x$. Da $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C$ und C kompakt ist, ist auch $x \in C$. Damit ist insbesondere $x \neq 0$. Es ist

$$\alpha_{n_k} = |\alpha_{n_k}| = \frac{\|\alpha_{n_k} x_{n_k}\|_2}{\|x_{n_k}\|_2}.$$

Da $(\alpha_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, ist somit $(\alpha_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Damit konvergiert $(\alpha_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen ein $\alpha \geq 0$. Das bedeutet

$$\alpha_{n_k} x_{n_k} \to \alpha x =: y$$

mit $\alpha \geq 0$ und $x \in C$. Somit ist $(\alpha_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, die eine konvergente Teilfolge besitzt, die gegen $y = \alpha x \in \operatorname{cone}(W)$ konvergiert. Also konvergiert die Folge $(\alpha_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ selbst gegen y. □

Wir betrachten nun die Menge

$$\widetilde{M} := \left\{ (\widetilde{t}_1[\xi], \ldots, \widetilde{t}_D[\xi]) \mid [\xi] \in \mathbb{P}_n \right\}.$$

Als nächstes zeigen wir mit Hilfe von Satz 56, dass $\operatorname{cone}(\widetilde{M}) = K^{**}$ ist. Dazu gehen wir wieder zum Raum $\mathcal{H}_d$ über. Die Abbildung $\Lambda : \mathbb{P}_n \to \mathcal{H}'_d$ mit $\Lambda[\xi] = \widetilde{L}_{[\xi]}$ ist eine Bijektion zwischen dem Raum $\mathbb{P}_n$ und der Menge aller Auswertungsfunktionale in affinen und unendlich fernen Punkten. Für das Auswertungsfunktional $\widetilde{L}_{[\xi]}$ mit $\ell_{[\xi]} := \psi^{-1}\big(\widetilde{L}_{[\xi]} \circ \tau\big)$ gilt

$$\ell_{[\xi]} = (\widetilde{t}_1[\xi], \ldots, \widetilde{t}_D[\xi]).$$

Damit ist der Kegel, der von allen Auswertungsfunktionalen in affinen und unendlich fernen Punkten erzeugt wird, genau dann abgeschlossen, wenn $\operatorname{cone}(\widetilde{M})$ abgeschlossen ist.

Satz 57. $\operatorname{cone}(\widetilde{M})$ ist ein abgeschlossener Kegel.

Beweis. $\widetilde{M}$ ist eine nicht-leere Menge. Wenn $\widetilde{M}$ kompakt ist und $0 \notin \operatorname{co}(\widetilde{M})$, so gilt nach Satz 56, dass die konische Hülle $\operatorname{cone}(\widetilde{M})$ abgeschlossen ist. Für die Menge $\widetilde{M}$ gilt $\widetilde{M} = \left\{ (\widetilde{t}_1(\xi), \ldots, \widetilde{t}_D(\xi)) \mid \xi \in S_n^+ \right\}$. Dabei ist S_n^+ die Teilmenge der Sphäre S_n, die alle Punkte enthält, deren erste Komponente, die nicht Null ist, positiv ist. Da d gerade ist und $\widetilde{t}_1, \ldots, \widetilde{t}_D$ homogen vom Grad d sind, ist $\widetilde{t}_j(\xi) = \widetilde{t}_j(-\xi)$ für $j = 1, \ldots, D$. Damit ist

$$\widetilde{M} = \left\{ (\widetilde{t}_1(\xi), \ldots, \widetilde{t}_D(\xi)) \mid \xi \in S_n^+ \right\} = \left\{ (\widetilde{t}_1(\xi), \ldots, \widetilde{t}_D(\xi)) \mid \xi \in S_n \right\}.$$

Die Abbildung $\widetilde{t} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^D,\ \xi \mapsto (\widetilde{t}_1(\xi), \ldots, \widetilde{t}_D(\xi))$ ist stetig. Da S_n kompakt ist, ist $\widetilde{M} = \widetilde{t}(S_n)$ somit auch kompakt.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $0 \notin \operatorname{co}(\widetilde{M})$ ist. Dazu sei $v \in \mathbb{R}^D$ der Vektor, dessen Einträge an den Stellen $k_0, \ldots, k_n$ Eins und an allen anderen Stellen Null sind. Dabei ist k_i der Index von $\widetilde{t}_{k_i} := x_i^d$. Sei nun $w \in \widetilde{M}$, d.h. $w = (\widetilde{t}_1[\xi], \ldots, \widetilde{t}_D[\xi])$ mit einem $[\xi] \in \mathbb{P}_n$. Dann ist $\langle v, w \rangle = \sum_{i=0}^{n} \xi_i^d > 0$, da $\sum_{i=0}^{n} \xi_i^2 = 1$. Damit ist aber $\langle v, s \rangle > 0$ für alle $s \in \operatorname{co}(\widetilde{M})$. Deshalb gilt $0 \notin \operatorname{co}(\widetilde{M})$. Somit ist $\operatorname{cone}(\widetilde{M})$ ein abgeschlossener Kegel. $\square$

Da $\operatorname{cone}(\widetilde{M})$ abgeschlossen ist, ist auch der Kegel, der von allen Auswertungsfunktionalen in affinen und unendlich fernen Punkten erzeugt wird, abgeschlossen. Da $K \subseteq \operatorname{cone}(\widetilde{M}) \subseteq K^{**}$, $\overline{K} = K^{**}$ und $\operatorname{cone}(\widetilde{M})$ abgeschlossen ist, muss $\operatorname{cone}(\widetilde{M}) = K^{**}$ sein. Das bedeutet, der Kegel $\widetilde{K}_d^{++}$ wird von allen Auswertungsfunktionalen in affinen und unendlich fernen Punkten erzeugt. Es ist also

$$\widetilde{K}_d^{++} = \operatorname{cone}\left\{ \widetilde{L}_{[\xi]} : \mathcal{H}_d \to \mathbb{R} \mid \widetilde{L}_{[\xi]}(f) = f[\xi],\ [\xi] \in \mathbb{P}_n \right\}.$$

Das bedeutet, für jedes auf $\widetilde{K}_d^+$ nicht-negative lineare Funktional $\widetilde{L} \in \mathcal{H}_d'$ existieren $m \leq D,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \geq 0$ und $[\xi_{(1)}], \ldots, [\xi_{(m)}] \in \mathbb{P}_n$ mit $\widetilde{L}(f) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k f[\xi_{(k)}]$ für alle $f \in \mathcal{H}_d$. Genau wie im Satz 46 existieren $\alpha_1, \ldots, \alpha_D \geq 0$ und $[\xi_{(1)}], \ldots, [\xi_{(D)}] \in \mathbb{P}_n$ mit $\widetilde{L}(f) = \sum_{k=1}^{D} \alpha_k f[\xi_{(k)}]$. Das Funktional $\widetilde{L}$ lässt sich im Allgemeinen nun also nicht als konische Kombination aus Auswertungsfunktionalen in affinen Punkten darstellen, aber als konische Kombination aus Auswertungsfunktionalen in affinen und unendlich fernen Punkten: Es existieren $m, r \in \mathbb{N}_0$ mit $m + r = D$, $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_m, \widetilde{\beta}_1, \ldots, \widetilde{\beta}_r \geq 0$, affine Punkte $[\xi_{(1)}], \ldots, [\xi_{(m)}] \in \mathbb{P}_n$ und unendlich ferne Punkte $[\zeta_{(1)}], \ldots, [\zeta_{(r)}] \in \mathbb{P}_n$ mit

$$\widetilde{L}(f) = \sum_{k=1}^{m} \widetilde{\alpha}_k f[\xi_{(k)}] + \sum_{j=1}^{r} \widetilde{\beta}_j f[\zeta_{(j)}]$$

für alle $f \in \mathcal{H}_d$. Wir definieren den Operator Θ_d auf $\mathcal{P}_d$ wie folgt:

$$\Theta_d : \mathcal{P}_d \to \mathcal{P}_d,\ p \mapsto h_{d,p}.$$

Dabei ist $h_{d,p}$ der homogene Anteil vom Grad d, der in p enthalten ist. Für das lineare Funktional $L = \widetilde{L} \circ \tau$ auf $\mathcal{P}_d$ ergibt sich mit $\alpha_k := \xi_{(k),0}^d \cdot \widetilde{\alpha}_k,\ k = 1, \ldots, m$ und $\beta_j := \widetilde{\beta}_j,\ j = 1, \ldots, r$ nun:

Satz 58. Sei $L : \mathcal{P}_d \to \mathbb{R}$ ein lineares, auf K_d^+ nicht-negatives Funktional, so existieren $m, r \in \mathbb{N}_0$ mit $m + r = D$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_r \geq 0$, $\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(m)} \in \mathbb{R}^n$ und unendlich ferne Punkte $[\zeta_{(1)}], \ldots, [\zeta_{(r)}] \in \mathbb{P}_n$, so dass

$$L(p) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p(\xi_{(k)}) + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \big(\Theta_d(p)\big)(\zeta_{(j)}^*)$$

für alle $p \in \mathcal{P}_d$.

Beispiel 6. Der Laplace-Operator auf $\mathcal{P}_2 = (\mathbb{R}[x, y])_2$ ist bekanntlich definiert als

$$\Delta p(x, y) = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(x, y).$$

Wir definieren nun $L(p) := \Delta p(0, 0)$. Da $p \in (\mathbb{R}[x, y])_2$, besitzt p eine Darstellung $p = q_1 + q_2 \cdot x + q_3 \cdot y + q_4 \cdot x^2 + q_5 \cdot xy + q_6 \cdot y^2$. Es ist $L(p) = 2q_4 + 2q_6$. Ist p ein nicht-negatives Polynom, so ist $L(p) \geq 0$, da sowohl $q_4 \geq 0$ als auch $q_6 \geq 0$ sein müssen. Für L gibt es keine Darstellung der Form $L(p) = \sum_{k=1}^{6} \alpha_k p(\xi_{(k)})$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_6 \geq 0$ und $\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(6)} \in \mathbb{R}^2$. Gäbe es eine solche Darstellung, so müsste nämlich auch für jedes konstante Polynom $p^\times(x, y) = q_1^\times$ mit $q_1^\times \neq 0$ gelten $L(p^\times) = \sum_{k=1}^{6} \alpha_k p^\times(\xi_{(k)})$.

Es ist aber $L(p^\times) = 0$ und

$$\sum_{k=1}^{6} \alpha_k p^\times(\xi_{(k)}) = \left(\sum_{k=1}^{6} \alpha_k\right) \cdot q_1^\times \neq 0.$$

Da $L \in K_d^{++}$ ist, existiert für das Funktional L aber eine Darstellung wie in Satz 58. Es ist $\ell = \psi^{-1}(L) = (0,0,0,2,0,2)$. Für die unendlich fernen Punkte $[\zeta_{(1)}] = [0,1,0]$ und $[\zeta_{(2)}] = [0,0,1]$ gilt nun $\widetilde{t}[\zeta_{(1)}] = (0,0,0,1,0,0)$ und $\widetilde{t}[\zeta_{(2)}] = (0,0,0,0,0,1)$. Damit hat $\widetilde{L} = L \circ \tau^{-1}$ die Darstellung

$$\widetilde{L}(f) = 2f[\zeta_{(1)}] + 2f[\zeta_{(2)}]$$

für alle $f \in \mathcal{H}_2$. Der homogene Anteil vom Grad 2 in p ist $\Theta_2(p) = q_4x^2 + q_5xy + q_6y^2$. Für $\zeta_{(1)}^* = (1,0) \in \mathbb{R}^2$ und $\zeta_{(2)}^* = (0,1) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\big(\Theta_2(p)\big)(\zeta_{(1)}^*) = q_4$ und $\big(\Theta_2(p)\big)(\zeta_{(2)}^*) = q_6$. Damit ist

$$L(p) = 2\big(\Theta_2(p)\big)(\zeta_{(1)}^*) + 2\big(\Theta_2(p)\big)(\zeta_{(2)}^*)$$

für alle $p \in \mathcal{P}_2$.

Wir haben gezeigt, dass jedes lineare, auf K_d^+ nicht-negative Funktional eine Darstellung der Form $L(p) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p(\xi_{(k)}) + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \big(\Theta_d(p)\big)(\zeta_{(j)}^*)$ besitzt. Umgekehrt ist auch jedes lineare Funktional, das eine solche Darstellung besitzt, nicht-negativ auf K_d^+, denn für $L(p) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p(\xi_{(k)}) + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \big(\Theta_d(p)\big)(\zeta_{(j)}^*)$ und $p^* \in K_d^+$ gilt:

$$L(p^*) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \underbrace{p^*(\xi_{(k)})}_{\geq 0} + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \underbrace{\big(\Theta_d(p^*)\big)(\zeta_{(j)}^*)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Die linearen Funktionale aus K_d^{++} sind demnach genau die Funktionale, für die eine solche Darstellung existiert.

Wir untersuchen schließlich noch die Frage, ob sich ein lineares auf K_d^+ nicht-negatives Funktional zu einem linearen auf K_{d+2}^+ nicht-negativen Funktional fortsetzen lässt. Besitzt ein solches Funktional eine Darstellung, der obigen Form, bei der keine unendlich fernen Punkte notwendig sind, so lässt es sich zu einem linearen auf K_{d+2}^+ nicht-negativen Funktional fortsetzen:

Satz 59. Sei $L \in K_d^{++}$, und es existieren $\alpha_1, \ldots, \alpha_D \geq 0$, $\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(D)} \in \mathbb{R}^n$ mit $L(p) = \sum_{k=1}^{D} \alpha_k p(\xi_{(k)})$ für alle $p \in \mathcal{P}_d$. Dann existiert $L' \in K_{d+2}^{++}$ mit $L'|_{\mathcal{P}_d} = L$.

Beweis. Für das lineare Funktional L' mit $L'(p) = \sum_{k=1}^{D} \alpha_k p(\xi_{(k)})$ für alle $p \in \mathcal{P}_{d+2}$ gilt: $L' \in K_{d+2}^{++}$ und $L'|_{\mathcal{P}_d} = L$. □

Über die Darstellung des linearen Funktionals $L \in K_d^{++}$ als Kubatursumme mit nicht-negativen Gewichten erhält man somit direkt eine Fortsetzung $L' \in K_{d+2}^{+}$. Mit der gleichen Argumentation erhält man, dass sich L' fortsetzen lässt zu einem linearen Funktional aus K_{d+4}^{++}. Ist L also ein Funktional aus K_d^{++} mit einer Darstellung als Kubatursumme mit nicht-negativen Gewichten, so lässt sich L fortsetzen zu einem Funktional aus $K_{\tilde{d}}^{++}$ mit einer beliebigen geraden Zahl $\tilde{d} \in \mathbb{N}$. Werden in der Darstellung aus Satz 58 allerdings unendlich ferne Punkte benötigt, ist das nicht der Fall:

Satz 60. Sei $L \in K_d^{++}$, und es existiere aber für L keine Darstellung der Form $L(p) = \sum_{k=1}^{D} \alpha_k p(\xi_{(k)})$. Dann existiert kein $L' \in K_{d+2}^{++}$ mit $L'|_{\mathcal{P}_d} = L$.

Beweis. Angenommen es existiere ein $L' \in K_{d+2}^{++}$ mit $L'|_{\mathcal{P}_d} = L$. Dann existieren $m, r \in \mathbb{N}_0$ mit $m + r = \binom{d+2+n}{d+2}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_r \geq 0$, $\xi_{(1)}, \dots, \xi_{(m)} \in \mathbb{R}^n$ und unendlich ferne Punkte $[\zeta_{(1)}], \dots, [\zeta_{(r)}] \in \mathbb{P}_n$, so dass

$$L'(p) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p(\xi_{(k)}) + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \big(\Theta_{d+2}(p)\big)(\zeta_{(j)}^*)$$

für alle $p \in \mathcal{P}_{d+2}$. Für $p^* \in \mathcal{P}_d$ ist $L'(p^*) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p^*(\xi_{(k)}) + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \big(\Theta_{d+2}(p^*)\big)(\zeta_{(j)}^*)$. Da aber $p^* \in \mathcal{P}_d$, ist $\big(\Theta_{d+2}(p^*)\big) = 0$. Damit ist $L'(p^*) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p^*(\xi_{(k)})$. Das bedeutet für die Einschränkung von L' auf $\mathcal{P}_d$: $L'|_{\mathcal{P}_d}(p) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p(\xi_{(k)})$ für alle $p \in \mathcal{P}_d$. Dies ist aber ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass L keine solche Darstellung besitzt. Insgesamt folgt somit, dass L keine Fortsetzung $L' : \mathcal{P}_{d+2} \to \mathbb{R}$ besitzt mit $L' \in K_{d+2}^{++}$. □

In dieser Arbeit ist es uns nun erstmals gelungen, den Kegel der linearen Funktionale, die auf allen nicht-negativen Polynomen nicht-negativ sind, vollständig zu beschreiben. Wir haben bewiesen, dass auf dem Rand des Kegels genau die Funktionale liegen, für die ein nicht-negatives Polynom existiert, in dem das Funktional verschwindet. Weiter haben wird gezeigt, dass die linearen Funktionale, die auf dem Kegel K_d^+ nicht-negativ sind, genau die Funktionale sind, für die eine Darstellung der Form

$$L(p) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p(\xi_{(k)}) + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \big(\Theta_d(p)\big)(\zeta_{(j)}^*)$$

mit $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_r \geq 0$, $\xi_{(1)}, \dots, \xi_{(m)} \in \mathbb{R}^n$ und unendlich fernen Punkten $\zeta_{(1)}, \dots, \zeta_{(r)} \in \mathbb{R}^{n+1}$ existiert. Die linearen Funktionale, die auf dem Kegel $\widetilde{K}_d^+$ der homogenen nicht-negativen Polynome in $n + 1$ Variablen nicht-negativ sind, sind genau die Funktionale, für die es eine Darstellung der Form

$$\widetilde{L}(f) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k f[\xi_{(k)}] + \sum_{j=1}^{r} \beta_j f[\zeta_{(j)}]$$

mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_r \geq 0$, affinen Punkten $[\xi_{(1)}], \ldots, [\xi_{(m)}]$ und unendlich fernen Punkten $[\zeta_{(1)}], \ldots, [\zeta_{(r)}]$ gibt. Darüberhinaus lassen sich genau die Funktionale aus K_d^{++} zu Funktionalen aus K_{d+2}^{++} fortsetzen, für die in der obigen Darstellung keine unendlich fernen Punkte benötigt werden. Insbesondere sind diese Funktionale fortsetzbar zu Funktionalen aus $K_{\tilde{d}}^{++}$ mit einer beliebigen geraden Zahl $\tilde{d} \in \mathbb{N}$. Das bedeutet, ist das Funktional einmal nicht-negativ fortsetzbar, so ist es beliebig oft nicht-negativ fortsetzbar. Außerdem erhält man mit unserer Darstellung sogar direkt ein solches Funktional im Raum $\mathcal{P}'_{\tilde{d}}$. Somit haben wir mit den obigen Darstellungen erstmals ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Nicht-Negativität von Funktionalen aus $\mathcal{P}'_d$ und $\mathcal{H}'_d$ gefunden. Desweiteren haben wir hier ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Fortsetzbarkeit der linearen Funktionale aus K_d^{++} zu Funktionalen aus K_{d+2}^{++} erhalten. Mit Hilfe dieser Kriterien lassen sich die Untersuchungen eines linearen Funktionals auf Nicht-Negativität und auf Fortsetzbarkeit wesentlich vereinfachen. Bei beiden Untersuchungen ist es nun ausreichend, für das lineare Funktional L eine Darstellung des Vektors $\ell = \psi^{-1}(L)$ als konische Kombination der Vektoren $t(\xi)$ bzw. $\tilde{t}[\xi]$ zu finden. Anstelle des relativ schwierigen Problems, die Nicht-Negativität eines linearen Funktionals zu überprüfen, reicht es mit den Erkenntnissen aus dieser Arbeit nun also aus, ein Gleichungssystem zu lösen.

Literaturverzeichnis

[Art26] Artin, E.: Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. In: *Abhandlungen Hamburg* 5 (1926), S. 100–115

[BCR76] Berg, Christian ; Christensen, Jens Peter R. ; Ressel, Paul: Positive definite functions on Abelian semigroups. In: *Math. Ann.* 223 (1976), S. 253–274

[Ble04] Blekherman, Grigoriy: Convexity properties of the cone of nonnegative polynomials. In: *Discrete Comput. Geom.* 32 (2004), Nr. 3, S. 345–371

[Ble06] Blekherman, Grigoriy: There are significantly more nonnegative polynomials than sums of squares. In: *Isr. J. Math.* 153 (2006), S. 355–380

[BPW00] Becker, Eberhard ; Powers, Victoria ; Wörmann, Thorsten: Deciding positivity of real polynomials. In: *Real algebraic geometry and ordered structures (Baton Rouge, LA, 1996)* Bd. 253. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2000, S. 19–23

[BT06] Bayer, Christian ; Teichmann, Josef: The proof of Tchakaloff's Theorem. In: *Proc. Am. Math. Soc.* 134 (2006), Nr. 10, S. 3035–3040

[BV04] Boyd, Stephen ; Vandenberghe, Lieven: *Convex optimization.* Cambridge University Press. xiii, 2004

[BW01] Berr, Ralph ; Wörmann, Thorsten: Positive polynomials on compact sets. In: *Manuscr. Math.* 104 (2001), Nr. 2, S. 135–143

[CF02] Curto, Raúl E. ; Fialkow, Lawrence A.: A duality proof of Tchakaloff's theorem. In: *J. Math. Anal. Appl.* 269 (2002), Nr. 2, S. 519–532

[CL77] Choi, Man-Duen ; Lam, Tsit-Yuen: Extremal positive semidefinite forms. In: *Math. Ann.* 231 (1977), S. 1–18

[CLO92] Cox, David ; Little, John ; O'Shea, Donal: *Ideals, varieties, and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.* Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag. xi, 1992

[CLR80] Choi, Man-Duen ; Lam, Tsit-Yuen ; Reznick, Bruce: Real zeros for positive semidefinite forms. I. In: *Math. Z.* 171 (1980), S. 1–26

[CLR95] Choi, M. D. ; Lam, T. Y. ; Reznick, B.: Sums of squares of real polynomials. In: *K-theory and algebraic geometry: connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992)* Bd. 58. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 1995, S. 103–126

[Cuk07] Cukierman, Fernando: Positive polynomials and hyperdeterminants. In: *Collect. Math.* 58 (2007), Nr. 3, S. 279–289

[Dav67] Davis, P.J.: A construction of nonnegative approximate quadratures. In: *Math. Comput.* 21 (1967), S. 578–582

[Die00] tom Dieck, Tammo: *Topology. (Topologie.) 2. Aufl.* de Gruyter Lehrbuch. Berlin: de Gruyter. x, 2000

[Grö68] Gröbner, Wolfgang: *Algebraische Geometrie. 1. Teil: Allgemeine Theorie der kommutativen Ringe und Körper.* B.I.-Hochschultaschenbücher. 273/273a. Mannheim etc.: Bibliographisches Institut, 1968

[Grö70] Gröbner, Wolfgang: *Algebraische Geometrie. Teil 2: Arithmetische Theorie der Polynomringe.* B.I.-Hochschultaschenbücher 737/737a*. Mannheim-Wien-Zürich: Bibliographisches Institut AG XI, 1970

[Hav35] Haviland, E.K.: On the momentum problem for distribution functions in more than one dimension. In: *Am. J. Math.* 57 (1935), S. 562–568

[Hav36] Haviland, E.K.: On the momentum problem for distribution functions in more than one dimension. II. In: *Am. J. Math.* 58 (1936), S. 164–168

[Hil88] Hilbert, David: Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten. In: *Math. Ann.* 32 (1888), S. 342–350. – aus Gesammelte Abhandlungen II, S. 154-164, Springer, Berlin, 1933

[Hil00] Hilbert, David: Mathematische Probleme. In: *Arch. f. Math. u. Phys.* 3 (1900), S. 44–63, 213–237. – aus Gesammelte Abhandlungen III, S. 290-329, Springer, Berlin, 1935

[HUL01] Hiriart-Urruty, Jean-Baptiste ; Lemaréchal, Claude: *Fundamentals of convex analysis.* Grundlehren. Text Editions. Berlin: Springer. x , 2001

[KM02] Kuhlmann, S. ; Marshall, M.: Positivity, sums of squares and the multi-dimensional moment problem. In: *Trans. Am. Math. Soc.* 354 (2002), Nr. 11, S. 4285–4301

[KMS05] Kuhlmann, S. ; Marshall, M. ; Schwartz, N.: Positivity, sums of squares and the multi-dimensional moment problem. II. In: *Adv. Geom.* 5 (2005), Nr. 4, S. 583–606

[Las06] Lasserre, Jean B.: A sum of squares approximation of nonnegative polynomials. In: *SIAM J. Optim.* 16 (2006), Nr. 3, S. 751–765

[Las10] Lasserre, Jean B.: *Moments, positive polynomials and their applications.* Imperial College Press Optimization Series 1. London: Imperial College Press. xxi, 361 p., 2010

[Lau09] Laurent, Monique: Sums of squares, moment matrices and optimization over polynomials. In: *Emerging applications of algebraic geometry* Bd. 149. New York : Springer, 2009, S. 157–270

[Mar03] Marshall, M.: Approximating positive polynomials using sums of squares. In: *Can. Math. Bull.* 46 (2003), Nr. 3, S. 400–418

[Mar08] Marshall, Murray: *Positive polynomials and sums of squares.* Mathematical Surveys and Monographs 146. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). xii, 2008

[Mot65] Motzkin, Theodore: The arithmetic-geometric inequality. In: *Inequalities (Ed. O. Shisha) Proc. of Sympos. at Wright-Patterson AFB, August* (1965), S. 19–27. – Academic Press, Neq xork, 1967, 205-224

[Pól74] Pólya, George: *Collected papers. Volume II: Location of Zeros. Ed. by R. P. Boas.* Mathematicians of Our Time, 8. Cambridge, Massachusetts-London: The MIT Press. X, 1974

[Put93] Putinar, Mihai: Positive polynomials on compact semi-algebraic sets. In: *Indiana Univ. Math. J.* 42 (1993), Nr. 3, S. 969–984

[Put97] Putinar, Mihai: A note on Tchakaloff's theorem. In: *Proc. Am. Math. Soc.* 125 (1997), Nr. 8, S. 2409–2414

[PW98] Powers, Victoria ; Wörmann, Thorsten: An algorithm for sums of squares of real polynomials. In: *J. Pure Appl. Algebra* 127 (1998), Nr. 1, S. 99–104

[Rez89] Reznick, Bruce: Forms derived from the arithmetic-geometric inequality. In: *Math. Ann.* 283 (1989), Nr. 3, S. 431–464

[Rez92] Reznick, Bruce: Sums of even powers of real linear forms. In: *Mem. Am. Math. Soc.* 96 (1992), Nr. 463

[Sch91] SCHMÜDGEN, Konrad: The K-moment problem for compact semi-algebraic sets. In: *Math. Ann.* 289 (1991), Nr. 2, S. 203–206

[Sch09] SCHEIDERER, Claus: Positivity and sums of squares: a guide to recent results. In: *Emerging applications of algebraic geometry* Bd. 149. New York : Springer, 2009, S. 271–324

[Ste73] STENGLE, Gilbert: A Nullstellensatz and a Positivstellensatz in semialgebraic geometry. In: *Math. Ann.* 207 (1973), S. 87–97

[Tch57] TCHAKALOFF, Vladimir: Formules de cubatures mécaniques à coefficients non négatifs. In: *Bull. Sci. Math., II. Ser.* 81 (1957), S. 123–134