Renate MOTZER, Augsburg

Magische Quadrate von der 1.Klasse bis zur linearen Algebra

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Magische Quadrate haben schon seit Jahrtausenden Menschen fasziniert. Das hier dargestellte sog. Lo-Shu-Quadrat ist vermutlich schon 4000 Jahre alt. Häufig ist es das erste magische Quadrat, das Kinder kennenlernen. In einige Lehrwerke findet es sich bereits Ende der 1. Klasse. Kinder können entdecken, dass die Zahlen von 1-9 so angeordnet sind, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in beiden Diagonalen die gleiche Summe vorliegt. Manchmal werden als „Geschwister von Lo-Shu“ andere Quadrate benannt, die die gleiche Eigenschaft haben und es wird ein Weg zum Erzeugen eines solchen Quadrats vorgestellt (vgl. Das Zahlenbuch 1).

In höheren Klassen kann untersucht werden, dass es nur sieben davon gibt und dass alle acht über die Symmetrieabbildungen eines Quadrats zusammenhängen. Diese Verknüpfung zwischen Geometrie und Arithmetik kann ab der 4. Klasse thematisiert werden, wenn die Symmetrieabbildungen den Kindern bekannt sind.

An der Universität kann schließlich die Gruppe der Symmetrieabbildungen diskutiert werden. Man kann die Gruppentafel aufstellen und sich die Nichtkommutativität der Hintereinanderausführung von Abbildungen bewusst machen. In diesem Zusammenhang wird noch einmal deutlich, dass man durch Drehen und Spiegeln keine weiteren magischen Quadrate finden kann. Wenn man ein gedrehtes Quadrat spiegelt, gelangt man zu einem Quadrat, das man durch eine andere Spiegelung direkt bekommen könnte. Zweimal Spiegeln andererseits ist gleichbedeutend mit einer Drehung.

In der zweiten Klasse kann man versuchen, magische Quadrate nur mit den Vielfachen von 2 (nur mit geraden Zahlen), den Vielfachen von 3 usw. zu füllen. Auch dies funktioniert. Man nehme z.B. das Lo-Shu-Quadrat und multipliziere jeden Eintrag mit 2 bzw. 3 usw.

Die Bestimmung der magischen Summe bei einem vorgegebenen Zahlenmaterial kann von Schülern entdeckt werden (alle Zahlen zusammenzählen und die Summe auf drei Zeilen/ Spalten verteilen).

Auch dass die Summe bei einem magischen 3x3-Quadrat immer das 3-fache der mittleren Zahl ist, kann entdeckt und begründet werden. Die Kinder können sehen, dass in den 4 Summen, zu denen die mittlere Zahl gehört, die anderen beiden Summanden den gleichen Abstand zu dieser Zahl haben und sich daher zum doppelten ergänzen.

Kennt man Variablen und Parameter, so kann ein magisches 3x3- Quadrat wie folgt erzeugt werden:

a-b	a+b+c	a-c
a+b-c	a	a-b+c
a+c	a-b-c	a+b

An der Universität kann man darin auch eine Basis für den Vektorraum aller magischen 3x3 Quadrate entdecken und sich bewusst machen, dass es sich um einen 3-dimensionalen Vektorraum handelt.

Etwas schwieriger stellt sich die Basissuche dar, wenn man 4x4- Quadrate betrachtet. Diese werden in der Schule meist anhand des Kupferstich „Melencholia“ von Albrecht Dürer eingeführt. An dem dort dargestellten Quadrat kann man viel entdecken, z.B. dass die magischen Summe 34 noch viel öfters vertreten ist als nur in den Zeilen, Spalten und Diagonalen. Manche dieser zusätzlichen Summen gelten in allen 4x4-Quadraten: die Summe der 4 Ecken und der 4 mittleren Zahlen ist immer auch die magische Summe. Ein Beweis dieser Eigenschaft verläuft analog zu dem, warum im 3x3- Quadrat in der Mitte ein Drittel der magischen Summe steht.

Weitere Summen gelten nur in manchen magischen Quadraten und alle Quadrate, die diese Eigenschaft erfüllen, bilden einen Untervektorraum.

Wählt man z.B. die Tatsache, dass sich das Quadrat in 4 kleine Quadrate mit magischer Summe aufteilen lässt, so gelangt man zu einem (siebendimensionalen) Unterraum, für den man eine Basis aus Quadraten angeben kann, die nur die Zahlen 0 und 1 als Einträge hat, und zwar in jeder Zeile/Spalte/Diagonale genau eine 1 (diese werden oft auch Grundquadrate genannt).

In diesem Unterraum kann man auch leicht eigene magische Quadrate suchen, z.B. ein Geburtstagsquadrat, das neben dem Geburtsdatum (auf 4 Stellen verteilt) das aktuelle Jahr (auf 2 Stellen verteilt) und das Alter enthält. Eventuell braucht man beim Ausfüllen eines solchen Quadrats aber ein paar negative Zahlen.

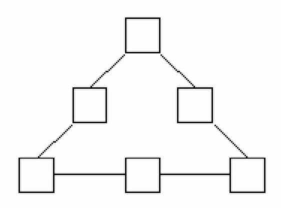
In der linearen Algebra ist interessant zu untersuchen, warum 7 der 8 Grundquadrate (es gibt 8 davon, die wie vorher durch Spiegeln und Drehen zusammenhängen) linear unabhängig sind und warum diese Menge noch keine Basis für den Vektorraum aller magischen 4x4-Quadrate liefert.

Auch weitere Zusatzeigenschaften können untersucht werden.

Weiterhin kann gesehen werden, dass alle Nullsummenquadrate einen Unterraum bilden und alle Quadrate mit einer vorgegebenen Summe einen affinen Unterraum. Die Nullsummenquadrate bilden den Kern des Vektorraumhomomorphismus, der jedem magischen Quadrat die magische Summe zuordnet.

Wer mag, kann auch die Kombinatorik ins Spiel bringen und sich erarbeiten, wie man die Koeffizienten in der Basisdarstellung wählen muss, damit man genau ein Quadrat mit den Zahlen von 1-16 erhält.

Wenn einem magische Quadrate zu aufwändig erscheinen, kann man sich auch mit magischen Dreiecken begnügen. Hier liegt die magische Summe nicht von vornherein fest und man kann untersuchen, welche Summen möglich sind. Um alle Lösungen zu einer bestimmten Summe zu bekommen, kann man wieder die Symmetrieabbildungen ins Spiel bringen.



Diesmal liegt ein vierdimensionaler Vektorraum zugrunde.

Als kompliziertere Figur könnte man einen magischen Davidstern erstellen und sich überlegen, warum bei Davidsternen die magische Summe wieder eindeutig sein muss.

Man sieht also, es gibt ein reichhaltiges Potential an Fragestellungen. Von magischen Quadraten geht eine große Faszination aus, die gelegentlich sogar im Fernsehen zu erleben ist (so hat z.B. bei „Wetten-dass" im Oktober 2002 oder bei „Deutschlands Superhirn 2011" ein Kandidat dafür gewonnen, dass er ein geeignetes magisches Quadrat erzeugen konnte; faszinierend anzusehen ist auch Nicolai Friedrich als Gedankenleser in http://www.youtube.com/watch?v=3gzWB_uOJHA).

Erfahrungen im Unterricht zeigen, dass manche Erstklässler noch einige Probleme haben abzusehen, ob eine Summe von 3 Zahlen nun 15 ergibt oder nicht und welche Zahl gegebenenfalls noch zu ergänzen ist.

Für diese Schüler mag es in den Mathematikstunden vor allem um die Zerlegungen der Zahl 15 gehen. Andere sehen mehr die geometrischen Eigenschaften, d.h. welche Spalten, Zeilen oder Teilfiguren ihre Plätze getauscht haben, wenn man magische Quadrate miteinander vergleicht.

Ist ein Teil eines Quadrates gegeben, so sehen manche schnell, wo sie einen weiteren Eintrag eindeutig berechnen können. Andere ergänzen mit selbst gewählten Zahlen und stoßen dann auf das Problem, dass sich nicht alle Summen passend berechnen lassen. Eindeutige Stellen zu sehen ist also ein größeres Lernziel bei der Beschäftigung mit magischen Quadraten.

Dass man selbst magische Quadrate (oder Dreiecke) mit einigen Wunschzahlen erzeugen kann, kann eine weitere Erkenntnis sein, die Kinder im Umgang mit magischen Quadraten gewinnen. Gerade ein eigenes Geburtstagsquadrat kann einen persönlichen Bezug schaffen.

Beim Vervollständigen von magischen Quadraten (die evtl. noch zusätzliche Eigenschaften erfüllen) können auch Gleichungssysteme eine Rolle spielen. Dass lineare Vektorräume viel mit Lösungen von linearen Gleichungssystemen zu tun haben, kann bewusst gemacht werden, wenn an der Universität die Vektorraumeigenschaften erarbeitet werden.

Die Tatsache, dass die Menge der magischen Quadrate Eigenschaften besitzt, die kennzeichnend für einen Vektorraum sind, d.h. dass man (skalare) Vielfache und Summen berechnen kann, kann man Kindern aber schon viel früher bewusst man (auch wenn der Vektorraumbegriff noch sehr weit weg liegt).

Matrizen tauchen im Zusammenhang mit Vektorraumeigenschaften häufig als die darstellenden Matrizen von linearen Abbildungen auf. In unserem Fall sind die Vektoren selbst Matrizen. Das mag ungewöhnlich erscheinen, zeigt aber, dass Vektorraum-Modelle nicht nur aus Zeilen- und Spaltenvektoren bestehen müssen. Den Studierenden muss oft erst bewusst gemacht werden, dass es zwar eine Isomorphie zum $\mathbf{R}^n$ gibt, aber es sich lohnt, die Objekte durchaus zunächst und immer mal wieder als das anzuschauen, was sie sind.

Literatur

Wittmann, E. Ch., Müller, G. N. (2006): Das Zahlenbuch 1 Ausgabe Bayern, Ernst Klett Grundschulverlag , S. 106f.

Motzer, R. (2008): Magische Quadrate – Einführung in die Lineare Algebra anhand dieses Vektorraummodells, erschienen als preprint: http://www.math.uni-augsburg.de/forschung/preprint/

Unterrichtsentwürfe finden sich in meinem Beitrag bei Lehrer-online:
http://www.lehrer-online.de/magische-quadrate.php