Kathrin SCHLARMANN, Oldenburg

Rekonstruktion von mentalen Strukturen von Studierenden zum Konzept Basis in der Linearen Algebra

Die Lineare Algebra stellt eine komplexe Theorie konzeptueller Natur dar. Charakteristisch für die Lineare Algebra sind eine Vielzahl von Äquivalenzaussagen und viele gehaltvolle Begriffe mit weitreichender Bedeutsamkeit. Um den Begriff Basis flexibel anwenden zu können, müssen die Beziehungen zwischen den Teilbegriffen Linearkombination, lineare Unabhängigkeit und Erzeugendensystem gut ausgebildet sein. Im Rahmen einer Analyse zweier Fallbeispiele behandelt dieser Aufsatz folgende Frage: Wie unterscheiden sich aktivierte mentale Strukturen von Studierenden voneinander, die in der Bearbeitung von Aufgaben zum Thema Basis erfolgreich beziehungsweise nicht erfolgreich sind?

Mentale Strukturen

Die Vernetzung von Ideen und Inhalten stellt einen essentiellen Bestandteil von Begriffsbildung dar. Nach Skemp (1973) resultiert der gesamte Prozess des Verbindens und Transformierens von Ideen in der Konstruktion einer komplexen mentalen Struktur. Skemp nennt eine solche mentale Struktur „Schema" (1973, S. 39) und beschreibt sie als das „major instrument (…) for solving new problems" (Skemp 1973, S. 43). Mentale Strukturen sind rein gedankliche Objekte, die nicht direkt zugänglich sind. Studierende greifen bei der Bearbeitung von Aufgaben auf subjektive Erfahrungen und individuelle Perspektiven zurück (dazu gehören z.B. mentale Strukturen, Strategien und Überzeugungen). Um mentale Strukturen, die von Studierenden aktiviert werden, zu untersuchen, ist eine Analyse ihrer Denkprozesse erforderlich. Darauf aufbauend erfolgt im Folgenden die Rekonstruktion von mentalen begrifflichen Strukturen, die dem mathematischen Denken und Handeln zugrunde liegen. In Bearbeitungsprozessen wird nur ein Teil der mentalen Struktur aktiviert. Als formales Raster für die Analyse von Denkprozessen und die Rekonstruktion der mentalen Strukturen dient die triadische Zeichenrelation nach Peirce (unter anderem angewendet in Presmeg 2006 oder Schreiber 2012), bestehend aus Representamen, Interpretant und Objekt. Aufgrund des begrenzten Umfangs kann darauf nicht ausführlicher eingegangen werden.

Zur Untersuchung

An der Untersuchung haben 15 Mathematikstudierende teilgenommen, wobei in diesem Aufsatz nur die zwei Fälle Peter und Mike betrachtet werden. Die Untersuchung fand etwa vier Wochen nach der Abschlussprüfung zum Modul Lineare Algebra statt. Die Probanden wurden (unter anderem) aufgefordert, eine Basis zum Untervektorraum $\mathrm{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = z \right\} \subset \mathbb{R}^3$ anzugeben (exakte Aufgabenstellung mit Erläuterungen siehe Schlarmann 2012). Die Probanden arbeiteten zunächst alleine an der Aufgabe. In einem anschließenden Einzelinterview reflektierten sie ihre Bearbeitungen und entwickelten weitere Ideen zum Lösen der Aufgabe. Dem Interviewer kam dabei die Aufgabe zu, die Probanden anzuregen, ihre Gedanken offenzulegen. Er fungierte nicht als Erklärer.

Peters Bearbeitungsprozess und seine aktivierte mentale Struktur

Im Folgenden wird der Bearbeitungsprozess von Peter zusammenfassend dargestellt. Die Nummern in Klammern verweisen auf die jeweilige Verbindung in Abbildung 1. Peter fokussiert zunächst die in U gegebene Bedingung $2x = z$ und wählt unter ihrer expliziten Berücksichtigung den Vektor (1,1,2) als einen Basisvektor (1). Des Weiteren fügt er den Vektor (2,0,4) hinzu und erläutert die zweite Komponente mit den Worten: „Da die (beiden Basisvektoren) aber linear unabhängig sein müssen, hab ich da die Null gewählt.“ (2) Mit der Begründung „Da wir im $\mathbb{R}^3$ sind, brauche ich drei Basisvektoren“ (3), gibt Peter (0,1,0) als dritten Vektor an. Erläuternd, dass die lineare Unabhängigkeit nach wie vor gelten müsse, bemerkt er, dass der Vektor (0,1,0) aus den zuvor gewählten Basisvektoren erzeugbar ist (4): „Wenn man den (zeigt auf (2,0,4)) durch zwei teilen würde und dann (…) die alleine schon voneinander abzieht (zeigt auf (1,1,2)), dann fällt der weg (streicht (0,1,0) durch).“ (5) Peter überprüft dann, ob ein anderer dritter Basisvektor, nämlich (1,2,2), in Frage kommt. Er erkennt wieder eine Linearkombination, die diesen Vektor aus den übrigen beiden erzeugt (6), und streicht den zuvor geschriebenen Vektor (1,2,2) durch. Peter wendet sich daraufhin dem gegebenen Untervektorraum in der Aufgabenstellung zu und erläutert: „Vielleicht reichen auch zwei. (…) Das ist zwar ein Vektor im $\mathbb{R}^3$, aber das könnte ja zum Beispiel eine Ebene sein und dann braucht man nur zwei Vektoren.“ An dieser Stelle betrachtet er U als irgendein ganzheitliches Objekt, z.B. eine Ebene, und erinnert, dass eine Ebene von zwei Basisvektoren aufgespannt wird (7). Des Weiteren erklärt er, bei U handele es sich um eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$. Drei Basisvektoren kämen somit nicht in Frage, „weil dann wär es der $\mathbb{R}^3$ ja auch selbst“ (8). Schließlich überprüft Peter, ob alle Elemente aus U mit den Vektoren (1,1,2) und (2,0,4) erzeugbar sind, indem er sie linear kombiniert und Beziehungen unter den Komponenten sowie die allgemeine Struktur der Vektoren fokussiert (9). Abbildung 1 zeigt die rekonstruierte, bei der Bearbeitung aktivierte mentale Struktur von Peter. Dabei wird der Fokus auf die konzeptuellen Aspekte gelegt. Der Begriff Basis steht im Mittelpunkt, da die Aufgabe eine Beschäftigung mit diesem Konzept explizit fordert.

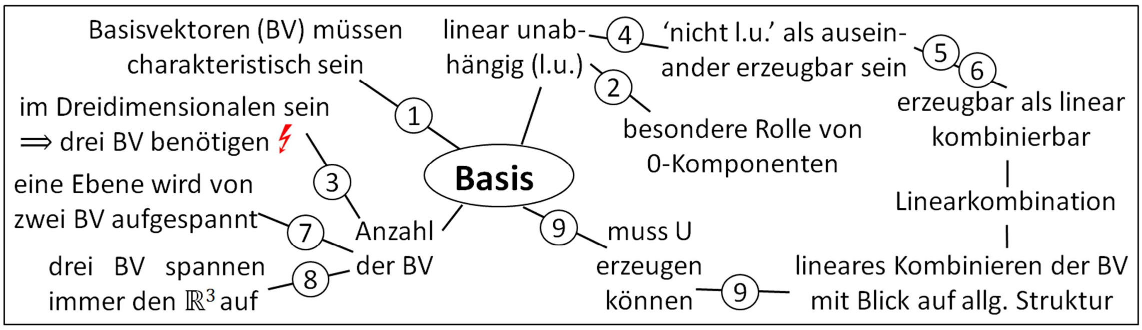

Abbildung 1: Rekonstruktion der aktivierten mentalen Struktur von Peter

Mikes Bearbeitungsprozess und seine aktivierte mentale Struktur

Zu Beginn der Bearbeitung erwähnt Mike, dass eine Basis ein linear unabhängiges Erzeugendensystem sei, und notiert daraufhin: „Es gilt $\det(A) \neq 0 \Longrightarrow$ lin. unabh.“ (1). (Die Nummern in Klammern verweisen auf die jeweilige Verbindung in Abbildung 2.) Diese Eigenschaft wendet Mike an, indem er drei mögliche Basisvektoren, nämlich (1,0,2), (0,1,0) und (1/2, 0,1) als Spaltenvektoren in eine 3x3-Matrix schreibt und ihre Determinante berechnet (2). Bei der Wahl der Vektoren wird explizit beachtet, dass $2x = z$ erfüllt wird (2). Die Berechnung der Determinante ergibt Null. Daraufhin beginnt Mike einen neuen Versuch mit den Vektoren (1,0,2), (0,1,0) und (1,1,2). Er kommt zu dem Ergebnis, dass auch diese drei Vektoren nicht linear unabhängig sind (3) und probiert noch zwei weitere Möglichkeiten, bei denen er den dritten Vektor variiert (4), (5). Dabei liegt sein Fokus auf den Berechnungen der Determinanten. Mike stellt die Vermutung auf, dass es keinen dritten Vektor gäbe. Er erläutert, dass er keinen dritten Vektor finde, sodass die lineare Unabhängigkeit erfüllt sei, und er könne sich vorstellen, dass eine Basis aus den beiden Vektoren (1,0,2) und (0,1,0) bestehe. Darauf reagiert der Interviewer mit der Aufforderung, dies zu prüfen. Mike erklärt, man müsse mit der Basis U aufspannen können (6) und sagt: „Weiß ich jetzt gerade nicht mehr wie man es prüft. (…) Spann von ja den beiden halt (schreibt $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$). Weiß ich jetzt so nicht. Das ist jetzt einfach der Spann von den beiden. Was man da jetzt mit aufstellen kann, bin ich auch gerade überfragt.“ (7) Seitens des Interviewers wird das Stichwort Linearkombination gegeben. Mike äußert, er habe dies schon mal gehört und sollte es auch eigentlich wissen. Er assoziiert jedoch keine weiteren Ideen (8) und kann an dieser Stelle nicht weiterarbeiten.

Abbildung 2 zeigt die Rekonstruktion der aktivierten mentalen Struktur von Mike.

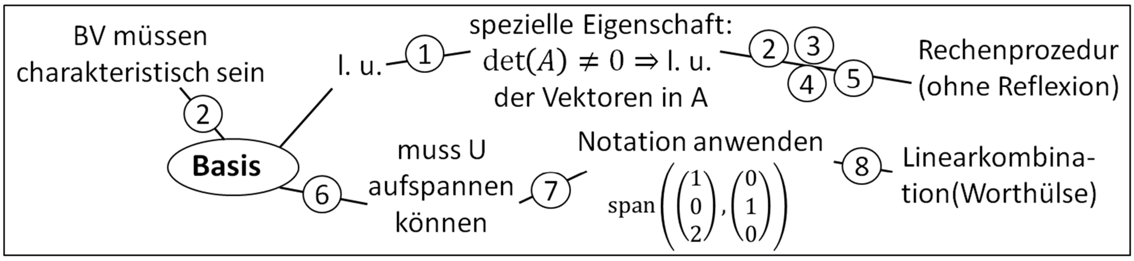

Abbildung 2: Rekonstruktion der aktivierten mentalen Struktur von Mike

Vergleich der Fallbeispiele

Peter und Mike fokussieren zu Beginn ihrer Bearbeitungen beide den Aspekt der linearen Unabhängigkeit, assoziieren dabei aber unterschiedliche Aspekte. Mike greift auf eine rechenbetonte Eigenschaft zurück (vgl. Abb. 2), die nur in speziellen Kontexten Anwendung findet und in dieser Aufgabe nicht greift, da sich damit nur n-viele n-Tupel auf lineare Unabhängigkeit untersuchen lassen. Die von Peter verwendeten Aspekte lassen sich auch auf andere Vektorräume übertragen. Daher wird die Verbindung zur linearen Unabhängigkeit in Peters aktivierter mentaler Struktur bzgl. dieser Aufgabe als substantieller angesehen. Beide Probanden gehen zunächst davon aus, dass eine Basis von U drei Vektoren beinhalte, und greifen im weiteren Verlauf die Eigenschaft des Erzeugens auf. Während Mike Probleme mit der Anwendung in diesem Kontext hat und auch der Begriff der Linearkombination scheinbar nur als Worthülse vorliegt, kann Peter die Eigenschaft des Erzeugens nutzen, um sich selbst von seiner Lösungsidee zu überzeugen. Das Konzept der Linearkombination verwendet Peter an dieser Stelle und auch zuvor im Zusammenhang mit der linearen Unabhängigkeit. Somit ist es für ihn in diesem Aufgabenkontext flexibel zur Argumentation verfügbar.

Literatur

Presmeg, N. (2006): Semiotics and the “connections” standard: Significance of semiotics for teachers of mathematics. Educational Studies in Mathematics, Vol. 61, 163–182. New York: Springer.

Schlarmann, K. (2012): Konzeptuelles Begriffsverständnis von Lehramtsstudierenden in der Linearen Algebra. http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2012/files/BzMU12_0202_Schlarmann.pdf, letzter Aufruf 19.03.2013

Schreiber, C. (2013): Semiotic processes in chat-based problem-solving situations. Educational Studies in Mathematics, Vol. 82, 51-73. New York: Springer.

Skemp, R. R. (1973): The psychology of learning mathematics. Harmondsworth: Penguin Books.