

FROHN, Daniel & LANGENHAGEN, Sarah
Bielefeld

Grundvorstellungen in der Geometrie

Grundvorstellungen werden als idealtypische inhaltliche Deutungen mathematischer Begriffe charakterisiert, die normativ formuliert werden (Salle & Clüver, 2021; vom Hofe, 1995). Folglich können sie als didaktische Leitlinien in die Planung und Gestaltung schulischer Lehr-Lern-Prozesse eingehen, mit dem Ziel, dass Lernende tragfähige Vorstellungen zu mathematischen Begriffen ausbilden (Salle & Clüver, 2021). Die drei zentralen Eigenschaften von Grundvorstellungen tragen zu diesem Ziel bei (vom Hofe, 1995; vom Hofe & Fast, 2015): Grundvorstellungen verleihen einem mathematischen Begriff Sinn, indem sie diesen an inner- und/oder außermathematische Inhalte und Kontexte anknüpfen, die den Lernenden bereits bekannt sind. Zudem erlauben Grundvorstellungen ein flexibles Operieren auf der Vorstellungsebene, indem sie die Ausbildung mentaler Repräsentationen unterstützen. Weiterhin ermöglichen sie die Anwendung des mathematischen Begriffs, insbesondere im Zusammenhang mit Modellierungen und dem Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen.

Zu einer Vielzahl schulisch relevanter Begriffe verschiedener mathematischer Teildisziplinen wurden bereits Grundvorstellungen formuliert. In der Geometrie gibt es bislang allerdings nur wenige Begriffe, zu denen Grundvorstellungen hergeleitet bzw. formuliert wurden. Insbesondere in der elementaren Geometrie ist eine erhebliche Forschungslücke diesbezüglich zu verzeichnen (Langenhagen et al., eingereicht). Neben den wenigen Arbeiten, in denen *konkrete* Grundvorstellungen zu elementargeometrischen Begriffen präsentiert oder thematisiert werden, gibt es weiterhin kaum Arbeiten, in denen die Rolle von Grundvorstellungen in der Geometrie *allgemein* in den Blick genommen wird. Als Hauptursache für den Mangel an Grundvorstellungen zu geometrischen Begriffen wird die Anschaulichkeit der Geometrie hervorgehoben (z. B. Rembowski, 2015; vom Hofe & Fast, 2015). Die Tatsache, dass "im Bereich der Geometrie 'bildliche Darstellungen' a priori vorhanden [sind]" (Ludwig et al., 2015), schließt allerdings nicht aus, dass es auch im Bereich der Geometrie sinnvoll sein kann, Grundvorstellungen zu formulieren (Langenhagen et al., eingereicht). Das bloße Vorhandensein bildlicher Darstellungen garantiert schließlich noch keine Ausbildung tragfähiger Vorstellungen und einen verständnisorientierten Umgang mit mathematischen Begriffen seitens der Lernenden. So führt beispielsweise die Darstellung eines Kreises noch nicht automatisch dazu, die wesentliche Eigenschaft der Abstandsgleichheit aller Punkte zum Mittelpunkt zu erfassen und diese sinnvoll in geometrischen Situationen anzuwenden.

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

Im Folgenden soll der gegenwärtige Forschungsstand zu Grundvorstellungen in der Geometrie dargelegt und systematisiert werden, um einen Ausgangspunkt für die Herleitung weiterer Grundvorstellungen zu schaffen. Da geometrische Begriffe von ganz unterschiedlicher Natur sein können, erfolgt diese Systematisierung anhand von Begriffsarten in der Geometrie nach Holland (2007), der Figuren-, Relations-, Maß- und Abbildungsbegriffe unterscheidet: Während *Figurenbegriffe* dadurch charakterisiert werden, dass sie eine als Punktmenge aufgefasste geometrische Figur bezeichnen (z. B. Punkt, Strecke, achsensymmetrische Figur, Kreis), beziehen sich *Relationsbegriffe* auf eine Beziehung zwischen geometrischen Objekten (z. B. ist kongruent zu, ist ähnlich zu, ist parallel zu). Die sogenannten *Maßbegriffe* in der Geometrie wie Flächeninhalt, Länge, Volumen und Winkelmaß sind dadurch charakterisiert, dass geometrischen Figuren durch das Messen oder das Berechnen "eine Größe aus einem *Größenbereich* zugeordnet" (Holland, 2007, S. 87, Hervorhebung im Original) wird. *Abbildungsbegriffe* beziehen sich auf geometrische Abbildungen, d. h. Abbildungen der Ebene oder des Raumes auf sich (z. B. spezifische Kongruenzabbildungen, zentrische Streckung).

Bei der Betrachtung des derzeitigen Forschungsstandes zu Grundvorstellungen in der Geometrie fällt auf, dass diese bislang primär zu Maßbegriffen formuliert wurden: Im Bereich der Elementargeometrie präsentiert Wörner (2014a, 2014b) Grundvorstellungen zum *Flächeninhaltsbegriff*. Weiterhin werden Grundvorstellungen zum (euklidischen) *Abstands begriff* von Frohn und Salle (2020) formuliert. Außerdem lassen sich für das Teilgebiet der Trigonometrie Grundvorstellungen zu *Sinus* und *Kosinus* anführen (s. Katter, 2023; Salle & Clüver, 2021; Salle & Frohn, 2017). Dabei fassen wir die trigonometrischen Begriffe Sinus und Kosinus als Maßbegriffe auf, da hierbei Winkelgrößen reelle Zahlen zugeordnet werden (sogar positive reelle Zahlen im elementargeometrischen Fall von Winkeln in rechtwinkligen Dreiecken).

Im Bereich der Analytischen Geometrie werden durch Frohn (2020, 2023) Grundvorstellungen zum *Skalar-* und zum *Vektorprodukt* sowie zur *skalaren Multiplikation* formuliert. Diese Operationen mit Vektoren lassen sich allerdings nicht eindeutig in eine der obigen Kategorien einordnen, da sich die Klassifikation Hollands (2007) auf Begriffe der elementaren Geometrie bezieht, in der klassischerweise keine Rechenoperationen mit geometrischen Objekten durchgeführt werden. Allenfalls das Skalarprodukt, bei dem das Ergebnis eine (nicht notwendig positive) reelle Zahl ist, ließe sich bei einem erweiterten Verständnis in die Kategorie der Maßbegriffe einordnen, wobei im Fall von negativen Werten schon der Bereich der Größen verlassen wird. Bei der skalaren Multiplikation und beim Vektorprodukt entsteht dagegen

durch die Verknüpfung ein Vektor, dessen geometrische Interpretation den Zusammenhang zu den beiden Faktoren beschreiben kann, der aber kein Maß im herkömmlichen Sinne darstellt. Insgesamt lässt sich festhalten, dass sich die Grundvorstellungen zu den Produkten in der analytischen Geometrie also eher als Vorstellungen zu Rechenoperationen mit geometrischen Objekten einordnen lassen. Aus diesem Grund erweitern wir die Klassifikation Hollands (2007) um *Operationsbegriffe*.

Grundvorstellungen zu einem Relationsbegriff, nämlich zu *parallelen Geraden*, werden durch Fetzer und Paravicini (2024) mit dem Fokus auf die Hochschulgeometrie formuliert.

Mit Grundvorstellungen zum Begriff der *Achsen Spiegelung* werden durch Langenhagen et al. (eingereicht) außerdem Grundvorstellungen zu einem Abbildungsbegriff hergeleitet.

In Bezug auf Figurenbegriffe werden konkrete Grundvorstellungen zu den Begriffen *Punkt*, *Strecke* und *Kreis* durch Zeitler (2024) entwickelt. Weiterhin lassen sich vereinzelt Arbeiten identifizieren, die vor dem Hintergrund des Grundvorstellungskonzeptes verschiedene Aspekte von Figurenbegriffen in den Blick nehmen, allerdings werden dort keine konkreten Grundvorstellungen formuliert. Beispielsweise thematisieren Dohrmann und Kuzle (2015) normative Überlegungen zum Winkelbegriff. Dabei werden teilweise "Winkelvorstellungen" aufgegriffen, die den "figurative[n] (statische[n]) Winkelaspekt" (Dohrmann & Kuzle, 2015, S. 31) und damit den Winkel als Figurenbegriff betreffen. Außerdem diskutiert Hattermann (2015, S. 79) "mögliche Aspekte einer Grundvorstellung eines Kreises in einer 2D-Umgebung", ohne hier explizit verschiedene Grundvorstellungen zu formulieren.

Abschließend lässt sich festhalten, dass Grundvorstellungen in der Geometrie in der bisherigen Forschung noch wenig ausgearbeitet worden sind. Für die systematische Herleitung weiterer Grundvorstellungen in der Geometrie erscheint es sinnvoll, die Besonderheiten der unterschiedlichen Begriffsarten zu berücksichtigen. Hierbei könnten Analogiebildungen (wie beim Skalar- und Vektorprodukt) hilfreich sein, beispielsweise auch im Fall paralleler und orthogonaler Geraden für Relationsbegriffe oder im Fall von Achsen Spiegelungen und Drehungen für Abbildungsbegriffe.

Literatur

Dohrmann, C., & Kuzle, A. (2015). Winkel in der Sekundarstufe I – Schülervorstellungen erforschen. In M. Ludwig, A. Filler, & A. Lambert (Hrsg.), *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen* (S. 29–42). Springer Spektrum.

- Fetzer, A., & Paravicini, W. (2024). Das Grundvorstellungskonzept in der Hochschulgeometrie: Eine Diskussion anhand des Konzepts der parallelen Geraden. *mathematica didactica*, 47(1). <https://doi.org/10.18716/ojs/md/2024.1651>
- Frohn, D. (2020). Mehr als Orthogonalität: Das Skalarprodukt beziehungsreich anwenden – mit Grundvorstellungen. *mathematik lehren*, 218, 33–38.
- Frohn, D. (2023). Mit Vektoren multiplizieren: Grundvorstellungen zu Produkten in der analytischen Geometrie. *mathematik lehren*, 236, 38–44.
- Frohn, D., & Salle, A. (2020). Wie finde ich den richtigen Abstand? *mathematik lehren*, 223, 32–36.
- Hattermann, M. (2015). Grundvorstellungsumbrüche beim Übergang zur 3D-Geometrie. In M. Ludwig, A. Filler, & A. Lambert (Hrsg.), *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen* (S. 75–86). Springer Spektrum.
- Holland, G. (2007). *Geometrie in der Sekundarstufe: Entdecken – Konstruieren – Deduzieren; didaktische und methodische Fragen* (3. Aufl.). Franzbecker.
- Katter, V. (2023). *Historische, logische und individuelle Genese der Trigonometrie aus didaktischer Sicht*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-41355-2>
- Langenhagen, S., Jetses, T., & Salle, A. (eingereicht). Herleitung von Grundvorstellungen zur Achsenspiegelung. *Mathematische Semesterberichte*.
- Ludwig, M., Filler, A., & Lambert, A. (Hrsg.). (2015). *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen: Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-06835-6>
- Rembowski, V. (2015). *Eine semiotische und philosophisch-psychologische Perspektive auf Begriffsbildung im Geometrieunterricht: Begriffsfeld, Begriffsbild und Begriffskonvention und ihre Implikationen auf Grundvorstellungen*. Universität des Saarlandes. <https://publikationen.sulb.uni-saarland.de/handle/20.500.11880/26717>
- Salle, A., & Clüver, T. (2021). Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien – Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 42(2), 553–580. <https://doi.org/10.1007/s13138-021-00184-5>
- Salle, A., & Frohn, D. (2017). Grundvorstellungen zu Sinus und Kosinus. *mathematik lehren*, 204, 8–12.
- vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum Akademischer Verlag.
- vom Hofe, R., & Fast, V. (2015). Geometrische Darstellungen als Vorstellungsgrundlage für algebraische Operationen am Beispiel der negativen Zahlen. In M. Ludwig, A. Filler, & A. Lambert (Hrsg.), *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 43–55). Springer Spektrum.
- Wörner, D. (2014a). Grundvorstellungen zum Flächeninhaltsbegriff. In E.-M. Plackner & D. Wörner (Hrsg.), *Grundlagen fördern* (S. 151–181). Franzbecker.
- Wörner, D. (2014b). Grundvorstellungen zum Flächeninhaltsbegriff ausbilden – eine exemplarische Studie. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1327–1330). WTM-Verlag. <https://doi.org/10.17877/DE290R-1049>
- Zeitler, T. (2024). *Punkt, Gerade, Kreis: Eine verfahrensbasierte Herleitung von Grundvorstellungen*. Universität Bayreuth. https://doi.org/10.15495/EPUB_UBT_00008038