

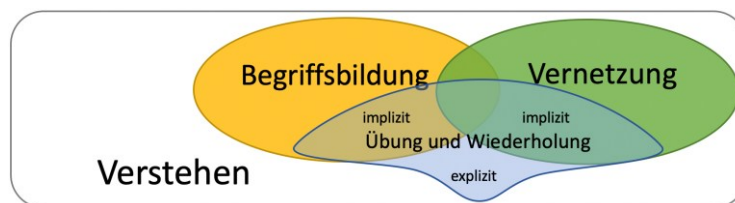
HARTMANN, Mutfried & RICHTER, Petra
Karlsruhe, Erlangen

Konzept und Umsetzung eines nachhaltigen Mathematikunterrichts ProNaMU

Eine mangelnde Nachhaltigkeit des Mathematikunterrichts wird besonders in Schulen des einfachen und mittleren Bildungsabschlusses beklagt. Die großen Anteile an Lernenden, die nicht die Mindeststandards erfüllen, erfordern hier Lösungen. Ein über viele Jahre formativ evaluiertes Konzept wird seit 2020 im Rahmen des Projektes ProNaMU (Professionell Nachhaltig Mathematik Unterrichten) über Selbstlernmaterialien an der Eichendorffschule implementiert.

Konzept

Insbesondere im Hinblick auf die Nachhaltigkeit des Lernens ist Verstehensorientierung die zentrale Voraussetzung erfolgreichen Mathematikunterrichts. Auf dieser Basis erweisen sich drei Säulen als fundamental: Eine stabile und reichhaltige Begriffsbildung, eine vielfältige Vernetzung der Inhalte und ein gezielt auf diese beiden Aspekte orientiertes Wiederholen und Üben.



Stabile, reichhaltige Begriffsbildung: Es zeigt sich auch bei sogenannten schwächeren Schülern*innen, dass sie weniger Probleme mit Reichhaltigkeit und Komplexität, sondern primär mit zu früher Abstraktion haben. Die Begriffsbildung setzt deshalb intensiv auf *von Argumentationen unterstützte vielfältige Handlungserfahrungen*, die die Reichhaltigkeit der Begriffe erfahrbar machen. Um eine Nachhaltigkeit auch über die Schulzeit hinaus zu sichern, wird die Handlungsorientierung möglichst mit *Berufs- und Alltagsorientierung* verknüpft. Die Handlungserfahrungen bilden die Grundlage darauf aufbauender mathematischer Aktivitäten und werden nicht durch ein schnelles Einführen von Regeln und Formeln abgelöst. Formeln werden konsequent, auch langfristig, nicht auswendig gelernt oder aus Formelsammlungen entnommen. Vielmehr werden diese auf Basis der Anschauung memo- und rememoriert, um *stabile mentale Bilder* aufzubauen. Die Formelsammlung wird ersetzt durch kognitiv aktivierende *formelfreie Plakate*, die durchgängig verwendete Bilder sinnvoll strukturiert kombinieren. Um durch die

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.

<https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0>

Ausbildung *referentieller Verbindungen* (Paivio, 1986) stabile *Assoziationskomplexe* (Freud, 1992) zu schaffen, werden verschiedene Repräsentationen (geschriebenes und gesprochenes Wort, Symbole, Bilder, Handlungen, etc.) eng miteinander in Verbindung gebracht.

Die sprachliche Begleitung auch späteren formalen Handelns adressiert dabei immer anschauliche Vorstellungen. Verwendung einfacher Sprache erleichtert das Erfassen der Zusammenhänge (Hamburger Verständlichkeitsmodell). *Sprachsensibilität* wird darüber hinaus durch die Diskussion der Fachwörter bezüglich ihrer Bedeutungen in unterschiedlichen Kontexten, ihrer Herkunft und der Abgrenzung gegenüber ähnlichen Wörtern gelebt. Begriffe werden konkret über ihre Eigenschaften möglichst *aspektreich* in Bezug zur Umwelt gestellt. Es geht nicht nur um das Erkennen eines Begriffs in der Umwelt, sondern darum, zu hinterfragen, *warum* er dort auftritt. Dies ist *kognitiv aktivierend* und liefert Anlässe für *kreative Variationen*.

Vernetzung der Inhalte: Zentral für ein nachhaltiges Lernen ist nicht nur eine Vernetzung der Begriffsaspekte und Repräsentationsformen zu Assoziationskomplexen, sondern auch eine längerfristig angelegte systematische Vernetzung der Inhalte. Neues Wissen muss in bestehendes integriert und mit diesem in vielfältiger Weise in Verbindung gebracht werden. So entsteht ein zusammenhängendes, sich gegenseitig stützendes Wissensnetz.

Hierzu gilt es Ähnlichkeiten zu erkennen und zu nutzen. Zentrale Strategien dazu sind das *Variieren* und das *Analogisieren*. Mit diesen heuristischen Techniken werden neue Inhalte an alte angeknüpft. *Schlüsselideen*, werden damit zu weittragenden und verbindenden *Leitgedanken*. Die für Schüler häufig unüberschaubaren Mengen an unterschiedlichen Inhalten werden durch das Erkennen des strukturell Gleichen zu wenigen zentralen Prinzipien. Seitens der Didaktik bedarf es deutlich detaillierterer Analysen. In der Strukturierung des Lerninhalts nach viel zu groß gefassten Leitideen wie Zahl oder Messen sind wirklich leitende Ideen wie z.B. relativer oder absoluter Vergleich bestenfalls versteckt und können ihre ordnende Kraft nicht entfalten.

Wesentlich für eine effektive Vernetzung und Reduktion des zu merkenden Wissens ist das *Modularisieren*. Eigene Formeln wie die für Volumen und Oberfläche eines geraden Kreiszyinders sind völlig kontraproduktiv. Die Unzahl überflüssiger Formeln wird bestenfalls noch durch die zusätzliche Angabe ihrer Umstellungen in ihrer Widersinnigkeit übertroffen. Werden hingegen die notwendigen Überlegungen z.B. für die Berechnung der Zylinderoberfläche oder des Zylindervolumens bei Bedarf jedes Mal selbst ange stellt, so werden dabei *implizit grundlegende Vorstellungen* wie Kreisflächeninhalt, Kreisumfang und Zylindernetz wieder aktiviert. Damit erleben

die Lernenden Mathematik nicht als ein unübersichtliches Sammelsurium zerstückelter Inhalte, sondern als ein in sich schlüssiges, auch *ohne Formelsammlung* wirklich anwendbares Wissen von überschaubarem Umfang.

Ein wesentlicher Bestandteil der Vernetzung, sich ein mentales Modell des Wissensnetzes selbst zu bilden, erfolgt durch Übersichten, die im Rückblick Inhalte ordnen. Hierzu dienen z.B. auch die formelfreien Plakate.

Wiederholen und Üben: Durch die *implizite Wiederholung* z.B. bei modularem Vorgehen werden automatisch grundlegende Inhalte permanent durch ihre Anwendung geübt. Auch beim Analogisieren oder bei der Erstellung von zusammenfassenden Übersichten in der Rückschau wird implizit wiederholt. Dadurch kann ein explizites Wiederholen erheblich reduziert werden. Da beim Üben Qualität vor Quantität geht (Odenbach, 1967), kann zugunsten der Begriffsbildung und Vernetzung erheblich an expliziter *Übungszeit eingespart* werden.

Diese wird gezielt entsprechend einer *spaced repetition* zeitlich getaktet dort eingesetzt, wo ein implizites Wiederholen nicht ausreichend stattfindet. Hierzu genügen oft Kurzwiederholungen. Sie verzichten auf rechnerische Schwierigkeiten, *ermöglichen Erfolgserlebnisse* auch für Schwächere und nehmen nur wenige Minuten in Anspruch. Mit Kurzwiederholungen verschafft sich die Lehrkraft einen *klassenweiten Überblick*, um nötigenfalls rechtzeitig auf zu starke Vergessenseffekte reagieren zu können. Die formelfreien Plakate liefern eine gute Grundlage für spontan eingeforderte Kurzreferate durch Schüler. Sie können auch während des Unterrichts stets aufgesucht werden, wenn sich Lernende etwas in Erinnerung rufen wollen.

Das Üben dient einer gewissen Automatisierung, darf aber nicht zu einer Entkopplung von Denken und Rechnen (Wittmann, 1990) bzw. Vorstellung und Vorgehen führen. Jede Form von Algorithmus wird deshalb eng an die ihn *begründende Vorstellung* gebunden. Die *sprachliche Begleitung* wird dabei entsprechend an die Vorstellungen angepasst. *Fokussiertes Üben* trainiert einzelne Lösungsschritte, die sonst zu sehr in den Hintergrund geraten. Es vermeidet kognitiven overload ohne die kognitive Aktivierung zu vernachlässigen. Für den Übungserfolg ist *unmittelbares Feedback* unerlässlich. Dabei werden reine Flüchtigkeitsfehler ohne viel Aufhebens schnell selbst ausgebessert. Wenn hingegen "echte" Probleme auftreten, wird ein möglichst *elaboriertes Feedback*, dass auch wirklich auf die entsprechenden Grundvorstellungen abzielt, gegeben.

Implementierung und erste Erfahrungen

Der Mathematikunterricht in der Eichendorffschule in Erlangen erfolgt ab der 7. Jgst. über Selbstlernmaterialien in Lernbüros. Dies erleichtert die

schrittweise Implementierung des Konzepts über das Material. Die konkrete Erzeugung konsistenter konzeptkonformer Lernumgebungen erfolgt seit über 3 Jahren gemeinsam durch Hochschule und Schule. Dabei werden diese unmittelbar im praktischen Einsatz getestet, Schwächen und Stärken beobachtet, analysiert und in einem *zyklischen Refinement* überarbeitet.

Die Inhalte werden auf digitalen Lernkarten angeboten. Da sich das sinnentnehmende Lesen erklärender Texte als nur bedingt erfolgreich erwiesen hat, werden vielfach *Videovignetten* eingesetzt. Als ideal haben sich Videos von etwa 3 bis 6 min gezeigt, die mehrfach durch *Interaktionen geringer Anforderung* unterbrochen werden, um Aufmerksamkeit und Erfolgserlebnisse zu sichern. Übungen in Form interaktiver Umgebungen, Arbeitsblätter und Aufgaben an haptischen Materialien, häufig mit einer Verbindung aus *Handlungs- und Berufsorientierung*, schließen sich daran an.



Aktuell wurden die Materialien erst in Teilen konzeptkonform umgestaltet. Dennoch lassen sich bereits relevante Effekte beobachten: Mathematik wird kaum mehr als ein Problemfach angesehen. Die einzelnen Inhaltsbereiche werden in deutlich kürzerer Zeit absolviert als bisher. Die Formelsammlungen werden kaum mehr benutzt. Die Schüler sind erfolgreicher beim Lösen von Schätz- und Rechenaufgaben. Es wird zunehmend ernsthaftes Interesse an der Mathematik entwickelt. Das Selbstwirksamkeitsgefühl und der Glaube an das eigene Denken haben sich deutlich verbessert.

Literatur

- Freud, S. (1992). Zur Auffassung der Aphasien. Eine kritische Studie. Hrsg. Vogel, P., Psychologie Fischer.
- Hartmann, M. & Loska, R. (2008). Mathematik ohne Regeln und Formeln? Vásárhelyi, E. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S.441-444). WTM.
- Odenbach, K. (1967). Die Übung im Unterricht. Georg Westermann Verlag.
- Paivio, A. (1986). Mental representations: a dual-coding approach. Oxford University.
- Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1990). Handbuch produktiver Rechenübungen. 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins. Klett.