

JANßEN, Thomas; LUTZ, Tim; REID, David & BIKNER-AHSBAHS, Angelika  
Bremen, Innsbruck, Kristiansand (Norwegen), Bremen

## **Gleichungen mit einer Multitouch-App verstehen: Erste Schritte einer Weiterentwicklung**

Das Verständnis von linearen Gleichungen und des Umgangs mit ihnen ist ein zentrales Ziel der Mittelstufe, mit Anwendungen und Fortsetzungen weit darüber hinaus. Gerade bei der Annäherung an das Thema können Handlungsmodelle Lernenden dabei helfen, eine relationale Sicht auf das Gleichheitszeichen einzunehmen und Äquivalenzumformungen zu motivieren und verstehbar zu machen. Digitale Implementierungen solcher Handlungsmodelle versprechen innovative Interaktionsformen und Aufgaben sowie direktes Feedback zu den ausgeführten Handlungen und Eingaben.

### **Bisherige Forschung**

Im BMBF-Projekt *Multimodal Algebra lernen* (mal-projekt.de, 2016 – 2019) wurde dazu ein Konzept entwickelt. Goguen (1999) folgend lag die Zielsetzung zugrunde, klar erkennbare Korrespondenzen zwischen Handlungsmodell und mathematischem Zeichensystem zu etablieren. Um (anders als im klassischen Waagemodell) auch den Umgang mit negativen Zahlen realisieren zu können, wurde die Idee der Algebra Tiles aufgegriffen. Hier werden positive ganze Zahlen durch eine entsprechende Anzahl an quadratischen Plättchen dargestellt. (Zur Illustration siehe die Abbildung weiter unten, hier sind positive Elemente blau markiert.) Negative Zahlen werden durch Plättchen gleicher Form, aber in anderer Farbe (in der Abbildung rot) repräsentiert. Unbekannte werden durch Streifen in der Breite eines Plättchens dargestellt, auch sie treten in zum Vorzeichen passenden Farben auf. Hintergrund für diese Darstellung ist eine Interpretation in Anlehnung an den Flächeninhalt. In der Abbildung werden stattdessen Wolken verwendet, um den Unbekannten-Aspekt von Variablen zu betonen. Gleichungen werden nun durch zwei nebeneinander angeordnete Zonen dargestellt, in denen aus den genannten Objekten Terme gebildet werden. Dabei werden zunächst alle Objekte addiert, die auf derselben Seite der Gleichung liegen. Um auch Subtraktionsterme zu ermöglichen, diese aber von der Addition negativer Terme abzugrenzen, wurden Subtraktionszonen in Erwägung gezogen (Janßen et al., 2019).

Das Lösen der Gleichungen geschieht durch Handlungen, die den Äquivalenzumformungen entsprechen: Wegnehmen bzw. Hinzufügen gleicher Objekte auf beiden Seiten entspricht dem Subtrahieren bzw. Addieren des entsprechenden Terms. Des Weiteren wurde eine an die Grundvorstellung des

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),  
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.

<https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0>

Verteilens angelehnte Geste implementiert, die die Division als Äquivalenzumformung abbildet (Janßen et al., 2020). Dazu müssen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die vorhandenen Objekte in dieselbe Anzahl von gleichwertigen Gruppen verteilt werden. Indem diese Gruppen durch horizontale Linien getrennt werden, wird eine intendierte Division angezeigt. Alle Gruppen bis auf eine verschwinden daraufhin – aus  $3x + 3 = 6$  wird beispielsweise  $x + 1 = 2$ .

Das System soll zu jedem Zeitpunkt anzeigen können, ob (ausgehend von der Ausgangsgleichung) immer noch Gleichwertigkeit zwischen den Seiten besteht. Ansonsten – bei unzulässigen Umformungen – gibt das System entsprechendes Feedback. Außerdem kann eine symbolische Interpretation der aktuellen Situation angezeigt werden.

Ein zentrales Ziel des MAL-Projekts war, die genannten Interaktionen nicht nur auf einem Bildschirm zu ermöglichen, sondern auch mit physischen, elektronisch ausgestatteten *Smart Objects*. Auch aufgrund dieser ambitionierten Zielsetzung erreichte die „einfache“ App für Touchgeräte keine Veröffentlichungsreife.

### Darstellung der neuen App und ihrer Funktionalitäten

Auf der Basis unserer Erfahrungen im MAL-Projekt wird nun eine neue iOS-App programmiert. Zum einen können so die bereits gewonnenen Erkenntnisse der breiten Schulöffentlichkeit zugänglich gemacht werden. Zum anderen entstehen durch die Fokussierung auf eine Touch-App zum Lösen *linearer* Gleichungen neue Möglichkeiten für didaktische Reflexion und Forschung. Abbildung 1 zeigt einen Zwischenstand der Entwicklung.



**Abb.1:** Screenshot der App, Stand Januar 2025. Dargestellt ist die Gleichung  $3x + 3 = 6$ . Zur Illustration sind einzelne Terme zusammengefasst.

Im gezeigten Aufbaumodus können mit Hilfe der entsprechenden Schaltflächen im unteren Bereich Gleichungen aus Objekten aufgebaut werden, die dann frei verschoben werden können. Oben besteht die Möglichkeit, verschiedene symbolische Interpretationen der gelegten Gleichung darzustellen.

In früheren Versionen der App wurden Plättchen dann als zusammengehörig interpretiert, wenn sie aneinandergeschoben wurden. So konnten Teilterme zusammengefasst werden, was in der symbolischen Interpretation entsprechend dargestellt wurde: Aus  $1 + 1$  wurde  $2$ , zwei zusammengeschobene Variablenplättchen wurden als  $2x$  interpretiert. Die gebildeten Gruppen waren aber instabil: Bewegen eines der Teilobjekte trennte die Gruppe. Ein Term wie  $2x$  konnte daher nicht als Objekt behandelt werden. In der neuen App ist dies möglich. Eine Geste erlaubt es, Objekte zu einer neuen Gruppe zusammenzufassen, indem man die entsprechenden Objekte mit den Fingern berührt und diese dann zusammenzieht (ähnlich wie in der App *Touch Counts* (Sinclair & de Freitas, 2014)), getrennt werden sie durch die entgegengesetzte Bewegung. Befinden sich positive und negative Plättchen in einer Gruppierung, so werden diese verrechnet (in der Abbildung unten zu sehen).

Sobald eine Gleichung fertig aufgebaut ist, wird in einen neuen Modus mit anderem Erscheinungsbild und neuen Interaktionen gewechselt: Addieren und Subtrahieren von Termen erfordert das Ziehen von Plättchen in die bzw. aus der Arbeitszone heraus. Optisch wird Feedback gegeben, ob nach den ausgeführten Operationen immer noch eine äquivalente Gleichung vorliegt. Die oben beschriebene Divisionsgeste ermöglicht das Dividieren als Äquivalenzumformung; auch hier gibt die App Feedback, ob diese in der gegebenen Situation sinnvoll möglich ist: In der Abbildung wäre dies der Fall, wenn die beiden Null-Paare aufgelöst und dann mit zwei Fingern parallele horizontale Linien gezogen werden.

### **Möglichkeiten für neue Reflexion und Forschung**

Die neuen Entwicklungsansätze verweisen auf Reflexions- und Forschungsfragen rund um die Behandlung linearer Gleichungen im Mathematikunterricht: Die neue Möglichkeit, Terme zu gruppieren und mit diesen zu operieren, bietet eine Gelegenheit, dieses sonst häufig als „Trockenübung“ separat behandelte Thema sinnstiftend in den Unterricht zum Lösen linearer Gleichungen einzubetten. Dies erfordert neue Aufgaben – eventuell auch in einem anderen Modus, in dem es nur eine Fläche gibt und somit das Manipulieren von Termen im Mittelpunkt steht. Eine offene Frage in diesem Zusammenhang betrifft die Interpretation der gruppierten Terme – sowohl durch Schüler\*innen als auch durch die App (welche symbolische Ausgabe gehört zu welcher Konfiguration?).

Auch in Hinblick auf das Feedback besteht noch Klärungsbedarf, etwa zu erlaubten und unerlaubten Bewegungen sowie zum Aufbau tragfähiger Vorstellungen von fachlich korrekten und vielleicht auch geschickten Gleichungsumformungen aufzubauen (Reid et al., 2022).

Um den Unbekannten-Aspekt zu betonen, werden in der dargestellten Version die Variablen nicht durch längliche Plättchen, sondern durch Wolken dargestellt. Damit gibt man den Unbestimmten-Aspekt auf, der in den Algebra Tiles eigentlich angelegt ist, mit physischen Plättchen allerdings ohnehin nie eingelöst werden kann (wie lang müsste das Variablen-Plättchen sein?). Technisch wäre eine solche maßbezogene Interpretation in einer virtuellen App denkbar, wirft aber ihrerseits neue Probleme auf.

Schließlich werden mit der App neue kollaborative Lernumgebungen rund um lineare Gleichungen (einschließlich des Verständnisses von Termumformungen und ihrer arithmetischen Grundlagen) möglich sein (Bikner-Ahsbahs & Janßen, 2020), die in empirischen Untersuchungen auf ihr epistemisches Potential überprüft werden können. Beispielsweise könnte die in der App nur in bestimmten Fällen zulässige Divisionsgeste auch zu Diskussionen bezüglich der Zahlbereichserweiterung von  $\mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{Q}$  führen.

## Literatur

- Bikner-Ahsbahs, A. & Janßen, T. (2020). Getrennt und koordiniert zum Ziel. Aufgabenprinzip zur Förderung von Interesse an mathematischem Handeln. *mathematik lehren* (221), 18-21.
- Goguen, J. (1999). An introduction to algebraic semiotics, with application to user interface design. In G. Goos, J. Hartmanis, J. van Leeuwen & C. L. Nehaniv (Hrsg.), *Lecture Notes in Computer Science. Computation for Metaphors, Analogy, and Agents* (S. 242–291). Springer.
- Janßen, T., Reid, D. & Bikner-Ahsbahs, A. (2019). Issues in modelling terms involving subtraction in a manipulative environment for linear equations—and a possible solution. In U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen und M. Veldhuis (Hrsg.), *Proceedings of CERME11*. Freudenthal Institute, Utrecht University & ERME.
- Janßen, T., Vallejo-Vargas, E., Bikner-Ahsbahs, A. & Reid, D. A. (2020). Design and Investigation of a Touch Gesture for Dividing in a Virtual Manipulative Model for Equation-solving. *Digital Experiences in Mathematics Education* 6(2), 166-190. <https://doi.org/10.1007/s40751-020-00070-8>
- Reid, D. A., Bikner-Ahsbahs, A., Janßen, T. & Vallejo-Vargas, E. (2022). Forms of epistemic feedback. In U. T. Jankvist, R. Elicer, A. Clark-Wilson, H.-G. Weigand und M. Thomsen (Hrsg.), *Proceedings of the 15th International Conference on Technology in Mathematics Teaching: Making and Strengthening “Connections and Connectivity” for Teaching Mathematics with Technology* (S. 105-112). Aarhus University.
- Sinclair, N. & de Freitas, E. (2014). The haptic nature of gesture: Rethinking gesture with new multitouch digital technologies. *Gesture* 14(3), 351-274. <https://doi.org/10.1075/gest.14.3.04sin>