ZIMMERMANN, Alexander
Eisenstadt

Zur Bedeutung der Vermittlung definitionstheoretischer Inhalte im schulischen und akademischen Mathematikunterricht

Motivation

Nach Käpnick und Benölken (2020) sollte der schulmathematische Unterricht die Kinder von Anfang an zu einem sachlichen Argumentieren hinführen. So heben sie hervor:

„Die Befähigung von Grundschulkindern zum Begründen ist wie der Begriffserwerb eine sehr anspruchsvolle Aufgabe für den Lehrer. […] Wichtig ist u. E., die Kinder von Anfang an an ein Begründen von Lösungen, von Lösungswegen, von Einzelaussagen oder verallgemeinerten Behauptungen zu gewöhnen. Dies schließt auch eine spezielle sprach-logische Schulung ein, die der Deutschunterricht in der Regel nicht leistet (z. B. […] Erkennen der Bedeutung von ‚alle' und ‚jede' als Ausdruck einer Quantifizierung […]).“ (Käpnick und Benölken, 2020, S. 125)

Da Definitionen in der Mathematik eine wichtige Rolle innehaben, erfordert ein sachliches Begründen in der Mathematik neben Kenntnissen in Logik oft auch welche im Definieren. Weigand betont, dass „im Geometrieunterricht darauf Wert zu legen [ist], dass Schülerinnen und Schüler nicht nur Definitionen kennen oder verwenden, sondern dass sie vor allem das *Definieren lernen.*“ (Weigand, 2018, S. 98) Nach Weigand ist also das Vermitteln von Kenntnissen im Definieren eine wichtige Aufgabe eines modernen Schulgeometrieunterrichtes. Dabei ist zu beachten, dass die Definitionsregeln von spezifisch schulgeometrischen Inhalten unabhängig sind, weswegen die im Rahmen der Schulgeometrie vermittelten Kenntnisse im Definieren auch auf sämtliche andere Bereiche anwendbar sind.

Definitionen sind aber nicht nur in der Mathematik, sondern auch in anderen Wissenschaftsdisziplinen und darüber hinaus von größter Wichtigkeit, bspw. für die Schaffung von Rechtsklarheit und damit von Rechtssicherheit in wichtigen Bereichen gesellschaftlichen Zusammenlebens. Da das Definieren-Können für das sachliche Begründen oft wichtig, mitunter sogar entscheidend ist und somit die sprachlogische Schulung, „die der Deutschunterricht in der Regel nicht leistet“ (Käpnick und Benölken, 2020, S. 125), in einem wesentlichen Ausmaß ergänzt, sollte sich der schulmathematische Unterricht der Vermittlung zumindest einführender Fertigkeiten im Definieren annehmen.

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

Zum Inhalt und den Zielen des Vortrages

Im Vortrag wird anhand zweier Beispiele, eines aus dem Bildungsbereich und eines aus der Mathematikdidaktik, geprüft, ob die Bezeichnung >Definition< jeweils auch wirklich angemessen ist. Denn Definitionen genügen gewissen Kriterien, die andere Ausdrücke nicht erfüllen. Ziel dieses Vortrages ist es nicht, zu klären, was unter dem Ausdruck >Definition< zu verstehen ist. Auch ist es nicht das Ziel, zu untersuchen, ob jemand diesen oder jenen Ausdruck für eine Definition hält, denn letzteres ist keine logische, sondern eine empirische Frage. Vielmehr werden im Vortrag wichtige ausgewählte Ausdrücke, die als Definition intendiert sind und auch als >Definition< bezeichnet werden, einer dahingehenden *logischen* Prüfung unterzogen, ob diese Ausdrücke die an Definitionen gestellten Kriterien erfüllen. Ferner wird untersucht, ob aus der jeweiligen beabsichtigten Definition eine inhaltlich unangemessene logische Folgerung gezogen werden kann. Denn ist dies der Fall, so ist auch die entsprechende beabsichtigte Definition inhaltlich inakzeptabel, obwohl sie zunächst inhaltlich angemessen erscheinen mag.

Nachfolgend wird auf das Beispiel aus dem Bildungsbereich etwas näher eingegangen. Dabei handelt es sich um die beabsichtigte Definition des Ausdrucks >Bildungsstandard< durch den zweiten Paragraphen der „Verordnung des Bundesministers für Bildung, Wissenschaft und Forschung über Bildungsstandards im Schulwesen“ Österreichs, die in (Zimmermann, 2025) einer logischen Prüfung unterzogen wird. Demnach sind „‚Bildungsstandards‘ konkret formulierte Lernergebnisse in den einzelnen oder den in fachlichem Zusammenhang stehenden Pflichtgegenständen, die sich aus den Lehrplänen der in § 1 genannten Schularten und Schulstufen ableiten lassen.“ (BGBl. II Nr. 1/2009)

Dass eine angemessene Definition des Ausdrucks >Bildungsstandard< für das Schulwesen Österreichs wichtig ist, wird in einem auf der Internetseite des österreichischen Parlamentes abrufbaren Dokument deutlich:

„Eine möglichst exakte Definition von Bildungsstandards, deren Aufgaben und Funktionen sowie Bedeutung für die Entwicklung des österreichischen Schulwesens ist daher unbedingt notwendig. Vor allem aber aus Gründen der Rechtssicherheit und des Rechtsschutzes ist es unabkömmlich, die rechtlichen Grenzen zwischen Bildungsstandards einerseits und Lehrplan sowie Leistungsbeurteilung andererseits abzustecken.“ (Vorblatt und Erläuterungen zum Ministerialentwurf 183/ME des österreichischen Parlamentes, o.J., S. 4)

Im Vortrag wird anhand eines einfachen, aber streng logischen Beweises gezeigt, dass die o. a. beabsichtigte Definition *D* des Ausdrucks >Bildungsstandard< aus der entsprechenden ministeriellen Verordnung für das Schulwesen Österreichs inhaltlich unangemessen ist. Dies wird dadurch gezeigt, dass allein aus *D* ein inhaltlich inakzeptabler Satz *C* beweisbar ist. Der Beweis erfolgt mittels einer geeigneten n-gliedrigen Folge von Sätzen

$$B_1 = D$$

$$B_2$$

$$B_3$$

$$\dots$$

$$B_n = C,$$

bestehend aus *D* und den Beweisschritten B_2, B_3, … und B_n mit einer natürlichen Zahl n > 1. Da *C* zwar eine inhaltlich unangemessene, aber rein logische Konsequenz allein aus *D* ist, ist somit streng bewiesen, dass auch *D* inhaltlich unangemessen ist. Denn, vereinfachend formuliert, eine Erweiterung einer Satzmenge um eine Definition stiftet keine neuen Inhalte, eine solche Erweiterung ist also eine konservative, eine nichtkreative (Shoenfield, 1967, S. 58f; Kleinknecht, 1979, S. 173). Dass sich *D* als inhaltlich unangemessen entpuppt, ist selbstverständlich ein ernüchterndes, ja katastrophales Ergebnis, denn *D* ist die beabsichtigte Definition des Ausdrucks >Bildungsstandard< aus der entsprechenden ministeriellen Verordnung für das Schulwesen Österreichs. Somit ist im Wirkungsbereich dieser Verordnung u. a. sowohl die erforderliche Rechtssicherheit als auch der nötige Rechtsschutz in Gefahr. Obgleich *D* aus der entsprechenden ministeriellen Verordnung stammt, kann also *D* nicht die gesuchte, „möglichst exakte Definition von Bildungsstandards" (Vorblatt und Erläuterungen zum Ministerialentwurf 183/ME des österreichischen Parlamentes, o.J., S. 4) sein.

Bereits dieses einfache Beispiel zeigt in aller Deutlichkeit, wie wichtig die fachunabhängige schulische und akademische Vermittlung zumindest einführender Kenntnisse sowohl aus der Definitionstheorie als auch aus der Logik wäre.

Literatur

BGBl. II Nr. 1/2009. *Verordnung des Bundesministers für Bildung, Wissenschaft und Forschung über Bildungsstandards im Schulwesen*. Abgerufen am 4. Januar 2025 von https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20006166.

Käpnick, F. & Benölken, R. (2020). *Mathematiklernen in der Grundschule*. 2. Auflage. Springer.

Kleinknecht, R. (1979). *Grundlagen der modernen Definitionstheorie*. Scriptor.

Shoenfield, J. R. (1967). *Mathematical Logic*. Addison-Wesley.

Vorblatt und Erläuterungen zum Ministerialentwurf 183/ME des österreichischen Parlamentes (o.J.). Abgerufen am 4. Januar 2025 von https://www.parlament.gv.at/dokument/XXIII/ME/183/fname_106733.pdf (https://www.parlament.gv.at/gegenstand/XXIII/ME/183).

Weigand, H.-G. (2018). Begriffslernen und Begriffslehren. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme & G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. 3., erweiterte und überarbeitete Auflage (S. 85–106). Springer Spektrum.

Zimmermann, A. (2025). Zur Bedeutung von Logik für die wissenschaftliche Begriffsbildung am Beispiel des sog. >Bildungsstandardbegriffs<. Erscheint in *PH publico*