

BARDY, Thomas & FEHLMANN, René  
Windisch (CH), Bern (CH)

## **Mathematische Modellierung des Tennisaufschlags: Adaptive Aufgaben für die Sekundarstufen**

Ein zentrales Problem des Mathematikunterrichts weltweit dürfte der unzureichende Einsatz adaptiver (Modellierungs-)Aufgaben sein. Oft müssen alle Lernenden einer Klasse an denselben Aufgaben mit einheitlichem Anforderungsniveau arbeiten. Dabei werden die Leistungsstarken oft unter- und die Leistungsschwachen häufig überfordert. Wir zeigen am Beispiel von fünf unterschiedlichen mathematischen Modellierungen des Tennisaufschlags eine mögliche Lösung des Problems auf. Von Modell zu Modell nimmt die Komplexität der Modellierung zu, die mathematischen/physikalischen Anforderungen steigen, und die neue Modellierung führt zu realitätsnäheren Ergebnissen. Die entwickelten Modelle bieten die Möglichkeit, durch ihre Anordnung in der Oberflächenstruktur als sog. „Parallelaufgaben“ (Modelle A, B und C für die Sekundarstufe I; Modelle C, D und E für die Sekundarstufe II) heterogene Lerngruppen anzusprechen und einen differenzierenden Mathematikunterricht zum Unterrichtsthema „mathematisches Modellieren im Sport“ anzuregen.

### **1. Adaptive Aufgaben**

Aufgaben spielen im Mathematikunterricht schon immer eine zentrale Rolle. Chapman (2013, 1) geht sogar so weit zu sagen, dass „mathematical tasks are central to the learning of mathematics“. Somit ist die passende Aufgabenauswahl eine zentrale Praktik von Lehrpersonen. Bei der Auswahl von Aufgaben sind aber Unterschiede zwischen Lehrpersonen nachweisbar. Sie bewerten das „Differenzierungspotenzial“ von Aufgaben unterschiedlich, erkennen es häufig nicht und haben oft einen anderen Fokus auf die „innere Struktur“ von Aufgaben untereinander, aber auch im Vergleich zu Expertinnen und Experten (Bardy et al., 2021).

Insgesamt gibt es viele Möglichkeiten, differenzierenden Mathematikunterricht zu gestalten. Neben einem „geschlossenen Ansatz“ (z.B. Helmke, 2010) gibt es auch einen „offenen Ansatz“, auf den wir uns hier mit den entwickelten „Parallelaufgaben“ (Leuders & Prediger, 2016) beziehen. Im Speziellen steht eine Differenzierungsstrategie im Fokus, bei der für alle Lernenden einer Klasse (inhaltlich) identische Modellierungsaufgaben verwendet werden. Dieser Aufgabentyp wird als „adaptive Aufgabe“ bezeichnet, weil sich die Adaptivität entfaltet, während Lernende z.B. in Übungsphasen an derselben Aufgabe auf unterschiedlichen Lernniveaus arbeiten. Mehrere Studien haben die Merkmale und den didaktischen Nutzen solcher Aufgaben

in unterschiedlichen Kontexten schon untersucht (z. B. Bardy et al., 2021; Leuders & Prediger, 2016).

Eine „adaptive Modellierungsaufgabe“ befasst sich mit einer realen Problemstellung, die mehrere Startpunkte, Lösungswege und Lösungen für Lernende unterschiedlicher Niveaus zulässt, so dass jede(r) Lernende—ob leistungsschwach oder -stark—aktiv an der eigenen Lösungsfindung arbeiten kann. Die zentrale Idee dieses Aufgabentyps besteht darin, alle Lernende auf ihrem jeweiligen Leistungsniveau kognitiv zu aktivieren, indem eine Beantwortung derselben Fragestellung durch Beschreiten des Modellierungskreislaufs auf unterschiedlichen Leistungsniveaus verfolgt wird.

## **2. Forschungsfragen**

Das Potenzial des mathematischen Modellbildens als Herausforderung für alle Lernenden in einem heterogenen Umfeld wurde bisher nur unzureichend untersucht. Die 1. Forschungsfrage (FF1) leitet sich aus dieser Forschungslücke ab: Wie kann eine adaptive Modellierungsaufgabe zum Tennisaufschlag für unterschiedliche Bildungsniveaus konzipiert und dem Modellierungskreislauf zugeordnet werden, wobei auf jedem Niveau differenziert wird?

Unbekannt ist, wie Lernende auf adaptive Modellierungsaufgaben im Klassenzimmer reagieren. Die 2. Forschungsfrage (FF2) folgt aus dieser Forschungslücke: Welche ersten Erfahrungen ergaben sich beim Einsatz der entwickelten adaptiven Modellierungsaufgaben im Unterricht und in der Lehramtsausbildung?

## **3. Mathematische Modelle zum Aufschlag beim Tennis**

Insgesamt haben wir sieben mathematische Modelle (zwei für das Studium, siehe Bardy & Fehlmann, 2023) für den Tennisaufschlag entwickelt (FF1). In den Modellen A und B werden alle Kräfte, die auf den Tennisball wirken, ignoriert. Die zentrale Fragestellung dabei ist, in welchem Winkel der Ball geschlagen werden muss, so dass er gerade noch im Aufschlagfeld landet, und welche Gebiete im Aufschlagfeld überhaupt getroffen werden können? Im Modell A wird davon ausgegangen, dass die Flugbahn des Tennisballs geradlinig ist und dass das Netz, über das der Ball fliegen muss, überall die gleiche Höhe hat. Die Geradlinigkeit des Ballflugs wird auch im Modell B angenommen, aber die Realität der unterschiedlichen Netzhöhe wird nun berücksichtigt. Im Modell C wird die Realität der Schwerkraft anerkannt und somit die Annahme des geradlinigen Flugs aufgegeben. Ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands ist die Flugbahn des Ballmittelpunkts ein Parabelsegment. Im Modell D wird zusätzlich noch der Luftwiderstand berücksich-

tigt. Modell E befasst sich auch mit dem Einfluss von Topspin, einem Vorwärtsdrall, den Tennisspielerinnen und -spieler dem Ball z.B. beim Aufschlag verleihen können. Modell F berücksichtigt Sidespin/Slice anstelle von Topspin und bezieht auch den möglichen Einfluss des Windes mit ein. Modell G schließlich befasst sich mit einer Kombination von Topspin und Sidespin, die in der Realität des Aufschlags häufig vorkommt.

#### **4. Erste Unterrichtserfahrungen**

Gruppe I war eine 9. Klasse mit 17 Lernenden ( $w=6$ ,  $m=11$ ). Sie bekamen nur die Modelle A und B zur Auswahl, da im Vorfeld nicht erwartet wurde, dass Lernende dieser Gruppe ein Leistungsniveau haben, das die Bearbeitung von Modell C erlauben würde. Die Herausforderung, den Strahlensatz in einer horizontalen und vertikalen Ansicht anzuwenden (Modell A), war für die Klasse neu und stellte eine Transferleistung dar. Die Gruppe II bestand aus 9 Lehramtsstudierenden ( $w=3$ ,  $m=6$ ), die das Fachstudium der Mathematik bereits abgeschlossen hatten. Sie konnten zwischen dem Modell C (analytisch zu behandeln) und den Modellen D und E (mit numerischer Integration) wählen.

Wir haben versucht, das Verständnis der Aufgabenstellung durch klare Formulierungen und vorgegebene Modellvereinfachungen positiv zu beeinflussen. Die Lernenden der Gruppe I schätzen diesen Modellierungsschritt mit 35% als leicht ein (Gruppe II: 44%). Bei der Übertragung des realen Modells in ein mathematisches Modell boten wir Unterstützung an, indem Formeln und Symbole direkt zur Verfügung gestellt wurden. 35% der Lernenden (Gruppe I) stuften diesen Schritt als den schwierigsten ein (Gruppe II: 56%). Bei der Arbeit im mathematischen Modell können Probleme auftreten, insbesondere Rechenfehler. Gruppe I sah zu 35% diesen Schritt als den schwierigsten an (Gruppe II mit 56% als etwas schwierig). Beiden Gruppen fielen das Interpretieren und das Validieren der Ergebnisse des mathematischen Modells eher leicht (41% bzw. 33%).

Die Tatsache, dass es sich bei der Aufgabenstellung um ein Phänomen handelte, das sie aus ihrem Alltag gut kannten, wurde durchweg als positiv und motivierend bewertet. In Bezug auf parallele adaptive Aufgaben wünschen sich beide Gruppen (63% bzw. 71%) mehr Wahlaufgaben in Schulbüchern.

#### **5. Diskussion**

Die entwickelten sieben mathematischen Modelle des Tennisaufschlags zeigen, dass es möglich ist, Modelle einer realen Situation auf sehr unterschiedlichen Bildungsniveaus zu erstellen (FF1). So kann differenzierender Mathematikunterricht auch bei Modellierungsaufgaben umgesetzt werden.

Der Einsatz digitaler Werkzeuge eignet sich, um die Arbeit der Lernenden

im Bereich der Mathematik zu erleichtern oder insbesondere Leistungsschwächeren das Experimentieren mit Einflussgrößen zu ermöglichen (z. B. Modelle mit der GeoGebra-App und eigenen Daten testen; <https://www.geogebra.org/m/md5jbrxh>). Wünschenswert sind selbstständiges Programmieren durch Lernende oder fächerübergreifender Unterricht, z.B. mit dem Fach Informatik. Eine anschließende praktische Umsetzung auf dem Tennisplatz ist ebenfalls denkbar und bietet die Möglichkeit, das Thema „Tennisaufschlag“ als Teil eines größeren physikalisch-mathematischen Projekts umzusetzen.

Ein Ergebnis der Unterrichtserfahrung (FF2) ist, dass Lernende intensiv an die Arbeit mit adaptiven Modellierungsaufgaben herangeführt werden müssen, da sie insbesondere auch ihr Kompetenzniveau richtig einschätzen müssen, um die für sie geeignete Aufgabenspalte auswählen zu können. Das ist ein langfristiger Prozess, bei dem die Lehrperson eine wichtige Rolle spielt.

Lernende sollten bereits Erfahrungen mit mathematischen Modellbildungen gesammelt haben, bevor sie an der mathematischen Modellierung des Tennisaufschlags arbeiten. Die Erfahrung erleichtert die Auswahl bestimmter Modellierungsschritte und ist hilfreich für die Auswahl einer geeigneten Spalte der Parallelaufgabe.

## Literatur

- Bardy, T., & Fehlmann, R. (2023). Mathematical Modeling of the Tennis Serve: Adaptive Tasks from Middle and High School to College. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, 26(3), 167–202. <https://doi.org/10.7468/jksmed.2023.26.3.167>
- Bardy, T., Holzäpfel, L., & Leuders, T. (2021). Adaptive tasks as a differentiation strategy in the mathematics classroom: Features from research and teachers' views. *Mathematics Teacher Education and Development*, 23(3), 25–53.
- Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(1), 1–6. <https://doi.org/10.1007/s10857-013-9234-7>
- Helmke, A. (2010). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität: Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts*. Klett-Kallmeyer.
- Leuders, T., & Prediger, S. (2016). *Flexibel differenzieren und fokussiert fördern im Mathematikunterricht*. Cornelsen Scriptor.