Katrin REIMANN, Köln

Eulers Zahlauffassung in seiner „Algebra“

Leonhard Euler gilt als einer der bedeutenden Mathematiker und als ein herausragender Kopf seiner Zeit. In diesem Beitrag wird Eulers Zahlauffassung in seinem Lehrbuch „vollständige Anleitung zur Algebra“ dargelegt. Die „vollständige Anleitung zur Algebra“ erschien 1770 in St. Petersburg und wurde als systematische Einführung in die Arithmetik und lineare Algebra für ein mathematisch interessiertes Publikum konzipiert. Eulers Absicht war es ein „ein Lehrbuch zu verfertigen aus welcher ein jeder ohne einige Beyhülffe die Algebra leicht fassen und gründlich erlernen könne“ (Euler, Vorwort). Zu Beginn des Lehrbuchs gibt Euler eine programmatische Definition an, was er unter Mathematik versteht: „Die Mathematik ist überhaupt nichts anderes als eine Wissenschaft der Größen, welche Mittel ausfindig macht, wie man diese ausmessen kann“ (Euler, Teil 1 § 2). Den Begriff der Größe will Euler wie folgt verstanden haben: „Erstlich wird alles dasjenige eine *Größe* genannt, was einer Vermehrung oder einer Verminderung fähig ist“ (Euler Teil 1 § 1). Als Beispiele für Größen nennt er Gewichte, Längen und Summen von Geld. Euler definiert die Größen bezogen auf die Möglichkeit der Vermehrung und der Verringerung und setzt damit implizit eine Ordnung voraus, welche er nicht näher charakterisiert. Auch die Eigenschaft der Transitivität und der Irreflexivität der „kleiner als“-Relation, welche wir heute klassischerweise mit einem Größenbereich verbinden, thematisiert Euler nicht. Die Größen stammen bei Euler aus der Empirie. Sie sind mit ihren Eigenschaften gegeben und werden nicht formal eingeführt.

1. Zahlen

Euler führt Zahlen in Bezug zu Größen ein. Dazu führt er zunächst aus, dass eine Größe nur durch eine bekannte Größe der gleichen Art bestimmt bzw. ausgemessen werden kann, indem das Verhältnis der beiden Größen zueinander angegeben wird. Bezogen auf dieses Verhältnis von zwei Größen bestimmt Euler die Zahl: „Somit ist eine Zahl nichts anderes als das Verhältnis, in dem eine Größe zu einer anderen steht, welche als Einheit angenommen wird“ (Euler, Teil 1 § 4). Zahlen werden hier definiert im Sinne der Grundvorstellung einer Aufteilsituation bzw. des Messens und nicht der Verteilsituation, bei welcher die vorhandene Einheit erhalten bleibt. Zahlen werden also nicht im Maßzahl-, oder Kardinalzahlaspekt eingeführt, wie es heute in der Schule üblich ist, sondern im Verhältniszahlaspekt. Dadurch werden Zahlen als das Verhältnis zweier Größen gleicher Art aus der Anschauung definiert. Durch diese empirische Herleitung übernehmen die Zahlen die Eigenschaften der messbaren Größen.

Bei der Erweiterung des Zahlbereichs auf die ganzen Zahlen und auch später auf die Bruchzahlen nimmt Euler jeweils wieder Bezug zu den zugrundeliegenden Größen: „Da nun negative Zahlen als Schulden betrachtet werden können, insofern als die positiven den wirklichen Besitz angeben, kann man sagen, dass die negativen Zahlen weniger sind als nichts;" (Euler Teil 1 § 18). Er definiert somit die negativen Zahlen im Bezug auf empirische Größen. Durch die Grundrechenart der Division stößt Euler auf nicht ganzzahlige Verhältnisse, deren Existenz er nun zunächst durch Rückführung in den realen Gegenstandsbereich erklärt und rechtfertigt. „Man darf sich nur eine Strecke vorstellen, die 7 Fuß lang ist. Wohl niemand wird bezweifeln, das es möglich ist diese Strecke in drei gleiche Teile zu zerlegen und sich einen Begriff von der Größe eines solchen Teiles zu machen“ (Euler, Teil 1 § 68). Diese Erläuterung in dem Größenbereich der Längen reicht für Euler aus, um sich einen Begriff von einem Bruch zu machen und diesen den Grundrechenarten zu unterwerfen. Die Eigenschaften der Zahlen werden von den Größen abgeleitet und werden nicht definiert. Deutlich wird dies auch am Beispiel von Eulers Begründung der Dichtheit in den reellen Zahlen. Euler erläutert, dass zwischen zwei Zahlen unendlich viele Mittelzahlen liegen müssen am Beispiel einer Strecke innerhalb des Größenbereich der Längen auf. Dies stellt jedoch keine Veranschaulichung des Sachverhaltes dar, sondern liefert die Begründung für die Eigenschaft. Die Eigenschaften werden also durch die Bezugnahme auf den realen Gegenstandsbereich erklärt und begründet. Sie kommen den Zahlen auf „natürliche Weise“ zu, indem sie ihnen auf Grund ihrer empirischen Herkunft übertragen werden.

Auch bei der Begründung von Regeln und Gesetzten nimmt Euler Bezug auf die Größenbereiche. So erläutert Euler die Regel, dass das Produkt einer negativer Zahlen mit einer positiven Zahl negativ sein muss, durch Schulden und verankert es im Größenbereich der Geldsumme. Eine formale algebraischer Herleitung erfolgt nicht.

2. Variable

Euler verwendet den Begriff der Variable selber nicht, sondern spricht von der veränderlichen Zahlgröße oder unbekannten Zahl. Buchstaben als Bezeichnung für Zahlen führt Euler schon bei der Erläuterung der Addition ein: „Da dies nun an und für sich klar ist, so bemerke man noch, dass auf allgemeine Art die Zahlen durch Buchstaben, wie a, b, c, d usw. angedeutet werden.“ (Euler, Teil 1 § 10). Im Anschluss wendet er die Addition auf die

Buchstaben als Stellvertreter der Zahlen an. Bei der Betrachtung von Gleichungen tauchen die Buchstaben auch noch in einer weiteren Funktion auf. Neben den Buchstaben, welche gesuchte unbekannte Zahlen repräsentieren, führt Euler Buchstaben auch als gegebene unbekannte Zahlen ein. Der Umgang mit den Variablen wird in den vorgerechneten Beispielaufgaben deutlich: "[...] Nun ist die Frage wie viele Männer und Frauen sind es? Um diese Aufgabe zu lösen, setzt man die Zahl der Männer gleich x und sieht diese als bekannt an, d.h. man verfährt mit ihr, als ob man die Probe machen wollte, ob sie der Aufgabe genügt.“ (Euler, Teil 2 § 5) Variablen werden hier behandelt als wären sie konkrete Zahlen.

3. Imaginäre Zahlen

Eine gesonderte Stellung innerhalb Eulers Ausführungen nehmen die Imaginären Zahlen ein. Bei der Lösung von Gleichungen taucht die Quadratwurzel von negativen Zahlen auf natürliche Weise auf. Jedoch passen diese nicht in die von Euler gemachte Auffassung von Zahlen. Sondern er stellt fest: „Daher bedeuten $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, usw. solche unmöglichen oder imaginären Zahlen, weil dadurch Quadratwurzeln von Negativenzahlen angegeben werden. Von diesen behauptet man also mit vollem Recht, dass sie weder größer noch kleiner als nichts, ja nicht einmal nichts selbst sind, weshalb sie für unmöglich gehalten werden müssen.“ (Euler, Teil 1 § 144) Für Euler sind „mögliche Zahlen“ immer innerhalb einer Ordnungsrelation vergleichbar, da Euler Zahlen von empirischen Größen aus denkt, die zu einer „Vermehrung oder Verminderung“ fähig sein sollen. Die imaginären Zahlen können aber eben so nicht angeordnet werden. Dies bringt Euler bei der Besprechung der imaginären Zahlen als Lösung von Gleichungen auf den Punkt. Dort grenzt er diese von den irrationalen Lösungen ab, von denen immerhin eine Näherung möglich ist. „[…] während bei imaginären Ausdrücken, wie etwa $\sqrt{-5}$, auch keine Näherung stattfindet, da 100 davon ebensoweit entfernt ist wie 1 oder irgendeine andere Zahl“ (Euler, Teil 2 § 140). Ebenso wie die negative Abgrenzung zu den „möglichen Zahlen stellt diese Ausführung die Unmöglichkeit der Anordbarkeit der imaginären Zahlen heraus. Imaginäre Zahlen sind also nicht das Verhältnis von zwei Größen zueinander und beziehen sich höchstens indirekt auf einen empirischen Gegenstandsbereich.

Die Beschäftigung mit den imaginären Zahlen hielt Euler dennoch für wichtig. In seinem Lehrbuch spricht er sich explizit für eine Betrachtung von diesen aus und rechtfertigt sein Handeln somit vor dritten. Euler sah in den Imaginären Zahlen ein Indikator für die Unlösbarkeit der Aufgabe an. Dies zeigt deutlich, dass die Ergebnisse für Euler in der Realität möglich und sinnhaft sein mussten. Euler löst sein Problem im Umgang mit den imaginären Zahlen, indem er feststellt: „Obwohl aber diese Zahlen, wie z.B. $\sqrt{-4}$ ihrer Natur nach ganz und gar unmöglich sind, haben wir von ihnen doch einen hinlänglichen Begriff, da wir wissen, daß durch sie eine Zahl angedeutet wird, die mit sich selbst multipliziert als Produkt -4 hervorbringt; und dieser Begriff ist ausreichend, um diesen Zahlen den Rechenverfahren zu unterwerfen“ (Euler, Teil 1 § 145). Durch diese begriffliche Klärung war Euler in der Lage die gängigen Rechengesetze auch auf die imaginären Zahlen anzuwenden. Dies führte zu einem weiteren Grund für die Behandlung der unmöglichen Zahlen, da sie nach Anwendung weitere Operationen wieder zu möglichen Ergebnissen führen konnten. Euler ließ sie daher als Zwischenergebnisse zu.

4. Eulers Auffassung von Algebra

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass Euler nicht definiert bzw. „setzt“ wie ein moderner Mathematiker, da sein Untersuchungsgegenstand aus der Empirie gegeben ist. Sein Vorgehen ist regelhaft und wird im Bezug zu einem realen Gegenstandsbereich gerechtfertigt. Frasers Ausspruch bezogen auf den Analyst im 18. Jahrhundert kann auch auf Euler im Bezug auf die Zahlen formuliert werden: „For the 18th century analyst, functions are things that are given ´out there`, in the same way that the natural scientist studies plants, insects or minerals, given in nature“ (Fraser, S. 262).

Im Gegensatz zu einer modernen formalen Auffassung von Algebra, bei welcher die Strukturen im Vordergrund stehen und deren Objekte rein abstrakt sind, ist Eulers Zielsetzung in seiner Algebra es Phänomene der Umwelt zu beschreiben und zu verstehen. Seine Objekte sind messbare Größen, bzw. das Verhältnis der Größen zueinander. Damit erfüllt Eulers Auffassung in seiner Algebra den Merkmalen einer empirisch-gegenständlichen Theorie in der Mathematik. Ein besonderer Augenmerk soll dabei noch auf dem Begriff der imaginären Zahlen gelegt werden. Diese entstehen durch die der Theorie eigenen Rechengesetze und besitzen kein Referenzobjekt. Jedoch kommt innen innerhalb Eulers Algebra eine Bedeutung zu und auch die Rechengesetze können wieder auf sie angewandt werden. Sie stellen somit ein theoretischer Begriff innerhalb Eulers Algebra dar. (Für eine umfangreichere Betrachtung siehe Reimann/Witzke, erscheint in Kürze)

Literatur

Euler, L. (1770): Vollständige Anleitung zur Algebra, Stuttgart.

Fraser, C. G. (2005) Joseph Louis Lagrange, In: Landmarks writings in western mathematics 1640 – 1940, Amsterdam.