Robuste lineare und nichtlineare Lösungsverfahren für die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

Dem Fachbereich Mathematik der Universität Dortmund
vorgelegt am 4. Februar 2003 von

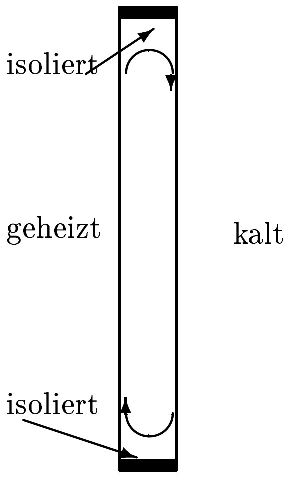
Diplom–Mathematiker Rainer Schmachtel

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung und Erprobung eines robusten numerischen Verfahrens zur Lösung von strömungsmechanischen Problemen für inkompressible Fluide. Unter einem robusten Verfahren verstehen wir dabei ein Verfahren, das, in den Grenzen des betrachteten Problemkreises, weitgehend unabhängig von dem zugrundeliegenden Operator ist, das auch bei gestörten Rechengittern, wie z.B. starken Anisotropien oder Verformungen der einzelnen Gitterzellen, noch gut funktioniert, und das möglichst wenige “freie” Parameter enthält, die der Nutzer vor der Anwendung des Verfahrens erst langwierig auf das zu berechnende Problem einstellen muß (“Feintuning”). Bildlich gesprochen wollen wir also nicht ein hochspezialisiertes Formel 1 Auto konstruieren, das auf ganz speziellen Strecken Höchstgeschwindigkeiten erzielen kann, sondern eher einen Geländewagen, mit dem man auf jedem Untergrund und bei jeder Witterung fahren kann. Trotzdem möchten wir natürlich auch nicht auf eine komfortable Reisegeschwindigkeit verzichten.



Als ein Beispiel für die große Klasse von Problemstellungen, die mit den im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Verfahren behandelt werden können, sei der sogenannte MIT-Benchmark [16] angegeben. Hierbei handelt es sich um eine temperaturgetriebene Strömung in einem Gefäß, welches achtmal so hoch ist wie breit (betrachtet wird eine zweidimensionale Konfiguration), und das auf einer Seite geheizt, auf der anderen gekühlt wird. Nebenstehende Skizze zeigt den schematischen Aufbau der Apparatur, Abbildung 1.1 einen typischen Strömungsverlauf sowie eine Temperaturverteilung (Abbildung etwas gestaucht).

Die zur Berechnung verwendeten stationären Gleichungen der Boussinesqapproximation haben die Gestalt

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} &= \nu_u\Delta\mathbf{u} - \nabla p - \mathbf{j}T + \mathbf{f} \qquad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}\cdot\nabla T &= \nu_T\Delta T + g \end{aligned} \tag{1.1}$$

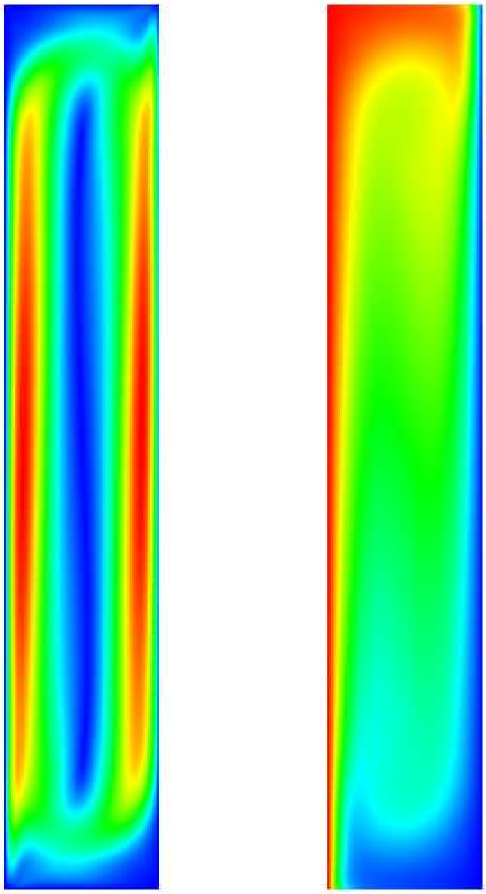


Abbildung 1.1: Strömungsgeschwindigkeit und Temperaturverlauf, MIT-Benchmark

Dabei bezeichnet $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ die Geschwindigkeit, p den Druck und T die Temperatur, $\mathbf{f}$ und g sind äußere Kraftterme und $\mathbf{j}$ ein Vektor in Richtung der Gravitationskraft. ν_u und ν_t sind die Viskosität und die Wärmeleitfähigkeit des Fluides.

Typische Schwierigkeiten, die bei der numerischen Behandlung solcher Strömungen auftreten, sind:

- Die Notwendigkeit zur feinen Auflösung der Randschichten, was besonders nahe der geheizten Wände zu sehr langgestreckten Elementen mit hohen 'Aspect-Ratios' führt. Dadurch entstehen sehr schnell Probleme bei der Diskretisierung und beim Mehrgitterlöser.

- Die geeignete Behandlung der Nichtlinearität in den Gleichungen, die zwar zu stationären Resultaten führt, aber doch signifikant groß ist. Daraus ergeben sich Probleme mit Fixpunkt-artigen Lösern, deren Konvergenzverhalten degeneriert.

- Die geeignete Behandlung der Kopplung von Druck, Geschwindigkeit und Temperatur. Dies führt zu Problemen sowohl beim linearen, als auch beim nichtlinearen Löser.

Dieses Benchmarkproblem ist prototypisch für viele praxisrelevante Probleme aus Physik, Chemie und Ingenieurwissenschaften. Dabei können auch, wie z.B. in der Planetologie

([11], [55]), Probleme auftreten, bei denen die Viskosität stark temperaturabhängig ist. Bei etlichen Polymerströmungen beinhaltet die Viskosität zusätzlich noch eine Abhängigkeit von der Geschwindigkeit und vom Druck $\nu = \nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, p, T)$, ebenso wie bei der Modellierung des Fließverhaltens granularer Medien mit Hilfe des sogenannten Schaeffer-Modells (siehe [41], [50]). In diesem Fall muß zur Beschreibung des Diffusionsterms in der Impulsgleichung statt des Laplaceoperators $\Delta\mathbf{u}$ der symmetrische Deformationstensor $\nabla\cdot(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$ verwendet werden. Auch die Behandlung, insbesondere die Lösung, derartiger Probleme fällt in den Rahmen dieser Arbeit.

Somit kann man sich als die allgemeinste Form der Problemklassen, die im Rahmen der in dieser Arbeit entwickelten Methoden behandelt werden können, Gleichungen der folgenden Form vorstellen:

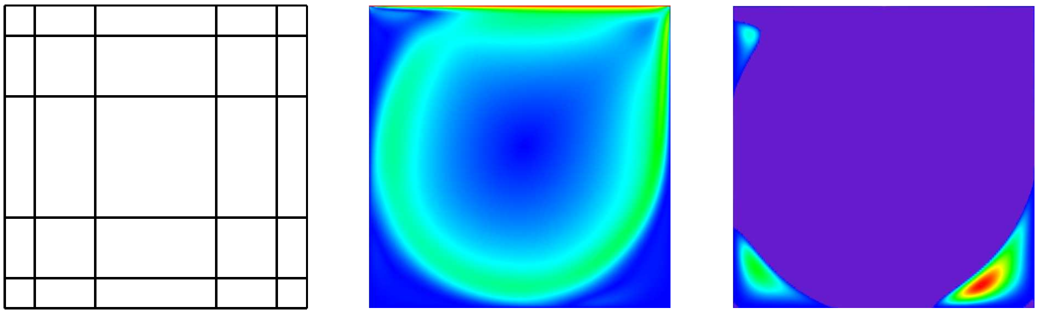
$$\begin{aligned} \rho(x,\mathbf{u},p,T)[\alpha_{\mathbf{u}}\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}] - \nabla\cdot\nu_{\mathbf{u}}(x,\mathbf{u},p,T)(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) + \nabla p &= \mathbf{F}(T) + P \\ \nabla\cdot\mathbf{u} &= 0 \\ \alpha_T T - \nabla\cdot\nu_T(x,\mathbf{u},p,T)\nabla T + \mathbf{u}\cdot\nabla T &= Q \end{aligned} \tag{1.2}$$

Hierbei sind P und Q allgemeine Quellterme. Bei der Behandlung viskoelastischer Fluide beschreibt P beispielsweise den Extra-Stress-Tensor τ in den von Oldroyd vorgeschlagenen Formulierungen (siehe dazu [3] und die darin zitierte Literatur). Auf die Analyse einzelner Zeitschrittverfahren wird in dieser Arbeit verzichtet. Da die Diskretisierung der Zeitableitung jedoch einen Term der Gestalt $\alpha\mathbf{u}$ liefert, fallen auch die instationären Verfahren in den Rahmen dieser Arbeit.

Weiterhin wollen wir ausdrücklich zulassen, daß nicht nur, wie beim Boussinesqmodell, eine, sondern gegebenenfalls auch mehrere zusätzliche Gleichungen mit den Impuls- und Masseerhaltungsgleichungen gekoppelt sind. Hierbei ist vor allem an Mehrgleichungsturbulenzmodelle gedacht wie die $k-\epsilon$ oder $k-\omega$-Modelle (siehe dazu z.B. [53], [34] sowie [33], [12]), oder Probleme aus der Chemie, wie die Behandlung reaktiver Strömungen.

In der vorliegenden Arbeit wird, im Gegensatz zu Operator-Splitting Methoden, ein voll gekoppelter Zugang gewählt, also eine Methode, die die starke Kopplung der einzelnen Lösungskomponenten in (1.2) direkt im Lösungsverfahren berücksichtigt. Bei einem solchen Zugang stößt man sehr schnell auf Schwierigkeiten, und zwar sowohl bei der Behandlung der Nichtlinearität der Gleichungen, als auch beim Lösen der linearen Gleichungssysteme, welche bei der Linearisierung im Rahmen einer äußeren, nichtlinearen Iteration entstehen. Als Beispiel hierfür dient eine Berechnung der zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen auf dem Einheitsquadrat, und zwar eine sogenannte Lid-Driven-Cavity Rechnung. Dabei sind als Randbedingungen für $\mathbf{u} = (u, v)$ gesetzt: $u|_{y=1} = 1$, $v|_{y=1} = 0$, sonst $\mathbf{u}|_\Gamma = 0$ (verwendetes Grobgitter sowie ein typischer Strömungsverlauf siehe Abbildung 1.2).

In Tabelle 1.1 ist für verschiedene Reynoldszahlen die Anzahl der nichtlinearen Iterationen angegeben, die benötigt werden, um die relative L_2-Norm des Defekts auf 10^{-10} zu reduzieren. ∞ bedeutet dabei, daß der Prozeß nach 200 Iterationen abgebrochen wurde, ohne daß die Normschranke erreicht worden ist, *div* bedeutet, daß die auftretenden linearen Gleichungssysteme (mit einem Standard-Mehrgitterverfahren) nicht gelöst werden konn-



Grobgitter Norm der Geschwindigkeit Stromfunktion > 0

Abbildung 1.2: Grobgitter und Strömungsverlauf einer Driven-Cavity-Rechnung

ten. Man sieht deutlich, daß im Bereich mittlerer bis hoher Reynoldszahlen die einfache Fixpunktiteration als nichtlineares Iterationsverfahren nicht mehr geeignet ist, allerdings scheitert der Einsatz des Newtonverfahrens an der Schwierigkeit der zu lösenden linearen Gleichungssysteme.

	"Reynoldszahl" $1/\nu$		
Level	1000	5000	10000
4	38	∞	∞
5	19	∞	∞
6	17	41	∞

Fixpunktiteration

	"Reynoldszahl" $1/\nu$		
Level	1000	5000	10000
4	10	div	div
5	8	div	div
6	6	div	div

Newtonverfahren

Tabelle 1.1: Anzahl der nichtlinearen Iterationen zur Reduktion des Defektes auf 10^{-10}

Zur Überwindung dieses Problemes wird im Rahmen dieser Arbeit ein Verfahren entwickelt und erprobt, bei dem diejenigen Terme aus der Fréchetableitung, welche die numerischen Eigenschaften (M-Matrix) der entstehenden Matrizen stören, nicht voll, sondern nur mit einem Gewicht von $\sigma < 1$ eingebaut werden, was zwar keine quadratische Konvergenz mehr erwarten läßt, jedoch zu einer stark verbesserten Fixpunktiteration führt. Tabelle 1.2 zeigt die Anzahl der benötigten nichtlinearen Iterationen, wenn der 'Reaktionsterm' aus der Fréchetableitung, also

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}^{\mathbf{n}}, \tag{1.3}$$

nur mit $\sigma = 0.5$ gewichtet wird. Die linearen Gleichungssysteme bleiben lösbar, und die Zahl der nichtlinearen Iterationsschritte steigt auch bei wachsender Reynoldszahl nur sehr moderat an.

	"Reynoldszahl" $1/\nu$		
Level	1000	5000	10000
4	19	21	25
5	13	17	21
6	11	13	16

Tabelle 1.2: Anzahl der nichtlinearen Iterationen bei Verwendung des reduzierten Newtonverfahrens mit $\sigma = 0.5$

In diesem Zusammenhang wurden auch sehr erfolgreiche Tests für den Fall durchgeführt, daß die volle Jacobimatrix nicht oder nur unter sehr großem Aufwand zu berechnen ist, und daher nur Teile davon für das Iterationsverfahren verwendet werden können.

Wie an obigem Beispiel bereits gesehen, stellt auch das Lösen der großen, dünn besetzten Gleichungssysteme, welche bei der Diskretisierung der Differentialgleichungen entstehen, ein schwieriges Problem dar. Wegen der Größe dieser Systeme scheidet ein direktes Lösen mittels Gauß-Elimination aus. Als iteratives Lösungsverfahren ist der Einsatz von Mehrgitterverfahren (siehe z.B. [20], [49]) aufgrund ihres asymptotisch optimalen Aufwandsverhaltens erstrebenswert. Die wichtigsten Komponenten eines solchen Mehrgitterverfahrens sind der Transfer zwischen groben und feinen Gittern, sowie der Glätter. Ein sehr häufig verwendetes Glättungsverfahren für gekoppelte Probleme der hier betrachteten Art ist der sogenannte Vanka-Glätter (siehe [52]), ein elementweise arbeitendes Gauß-Seidel-artiges Verfahren, welches den Vorteil eines geringen Aufwandes hat, und trotzdem die Kopplung unter den einzelnen Lösungskomponenten berücksichtigt. Leider versagt 'der Vanka' als Glätter bei großen Deformationen des Rechengitters, wenn also zum Beispiel ein Teil der Elemente stark gestreckt ist.

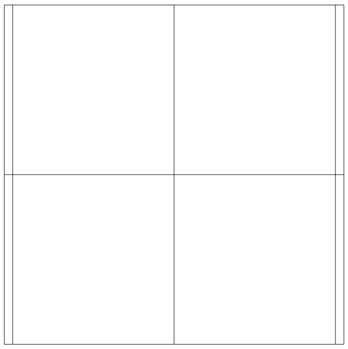


Abbildung 1.3: Grobgitter mit gestreckten Elementen (1-20)

Als Beleg hierfür sei wieder eine Driven-Cavity Rechnung angegeben, und zwar auf einem Gitter, das durch regelmäßiges Verfeinern des Grobgitters aus Abbildung 1.3 entsteht. Die wandnahen Elemente haben ein Seitenverhältnis von 1 zu 20. Wie die linke Spalte von Tabelle 1.3 zeigt, wird die Konvergenz des Mehrgitterverfahrens mit dem Vanka-Glätter bei zunehmender Gitterfeinheit immer schlechter und konvergiert auf Level 6 praktisch überhaupt nicht mehr. Im Rahmen dieser Arbeit wurde der Vanka-Glätter derart weiterentwickelt, daß er zwar weitgehend seine Vorteile, insbesondere die Geschwindigkeit, behält, und trotzdem unempfindlich gegenüber Gitterstörungen ist. Dazu wurde die ursprüngliche, elementweise Arbeitsweise des Glätters durch eine allgemeinere, blockorientierte ersetzt. Dies ermöglicht es, anisotrope Elemente zu (lokalen) Blöcken zusammenzufassen ('blocken'), auf denen die entstehenden Teilprobleme kleiner Dimension direkt gelöst werden können. Bei diesen kleinen Systemen ist das Verwenden eines direkten Lösers mit moderatem Aufwand möglich ist. Hierzu verwendet man hochentwickelte Routinen aus Softwarebibliotheken, wie zum Beispiel BLAS (Basic Linear Algebra Soubroutines `http://www.netlib.org/blas`, siehe auch [31], [17]). Von diesen gibt es für alle namhaften Rechnerplattformen auf die Hardware angepaßte und optimierte Versionen. Wenn man darauf achtet, daß die entstehenden Blöcke nahezu isotrop sind, 'sieht' der so entstehende, LMPSC-Verfahren genannte Glätter (Local Multilevel Pressure Schur Complement) die Anisotropien in den Elementen gar nicht, und man erzielt Mehrgitterkonvergenzraten, die mit denen auf isotropen Gittern vergleichbar sind. Die rechte Spalte in Tabelle 1.3 belegt dies beispielhaft.

	Vanka	neuer Glätter
4	0,28	0,16
5	0,57	0,20
6	0,99	0,17

Tabelle 1.3: Konvergenzraten des linearen Mehrgitterverfahrens auf gestreckten Gittern

Durch Verwendung desselben Glätters, lediglich mit einer anderen Blockungsstrategie für die Elemente, ist es dann auch möglich, viele der oben geschilderten Gleichungssyteme, die beim Einsatz des Newtonverfahrens entstehen, zu lösen! Eine gute Blockungsstrategie läßt sich hierbei allerdings nicht mehr an der Geometrie der Gitterelemente festmachen, da die Probleme auch auf regulären kartesischen Gittern auftreten (Tabelle 1.1). Allerdings erweist sich die gleichmäßige Blockung mit einer empirisch ermittelten Blockgröße von 64 Elementen als sehr effektiv (siehe Kapitel 5.2.2).

Steigt der Verzerrungsgrad der Elemente (auch *Aspect-Ratio* genannt) noch weiter an, was zum Beispiel beim Auflösen von Randschichten notwendig ist, dann genügt allerdings die Anpassung des Glätters alleine nicht mehr, um ein effektives Mehrgitterverfahren zu erhalten. Es wird in dieser Arbeit gezeigt werden, daß in diesem Fall sämtliche Komponenten des Mehrgitterverfahrens, also auch die Gittertransferroutinen und der Aufbau der Grobgittermatrizen, abgeändert werden müssen, und es wird ein Verfahren entwickelt, das diese Prozesse adaptiv steuert. Das so entstehende Mehrgitterverfahren liefert auch dann sehr gute Resultate, wenn die Störungen im Gitter nicht von einem stark unterschiedlichen Seitenverhältnis der Elemente herrühren, sondern einzele (Vierecks-)Elemente quasi zu Dreiecken degenerieren, indem ein Innenwinkel gegen π geht, oder zwei Eckpunkte aufeinanderfallen (Abbildung 1.4). Solche Gitter sind in der Praxis nicht selten, sondern entstehen häufig beim Einsatz automatischer Gittergeneratoren oder bei der Approximation krummrandiger Gebiete.

In der folgenden schematischen Übersicht werden die einzelnen, neu entwickelten Komponenten dargestellt, zusammen mit dem Abschnitt, in dem sie beschrieben werden.

Lineares Mehrgitter

- Adaptive Gittertransferroutinen (Kap. 4.1.1)
- Modifizierter Aufbau der Grobgittermatrizen (Kap. 4.1.1)
- Adaptive Steuerung der Grobgitterkorrektur (Kap. 4.1.1)
- Der erweiterte Vanka-Glätter (LMPSC-Glätter) (Kap. 4.2.3)
- Verschiedene Blockungsstrategien für den LMPSC-Glätter (Kap. 4.2.4)

Äußere, nichtlineare Iteration

- Verbesserte, Newton-artige Fixpunktiteration (Kap. 5.1.1)
- Anpassung des LMPSC-Glätters auf die daraus entstehenden linearen Gleichungssysteme (Kap. 5.2.2)

Bei den Teilen des numerischen Verfahrens, bei denen wir Standardkomponenten benutzen, wie z.B. die zur Diskretisierung benutzten Finite-Elemente Ansatzräume oder die Verfahren zur Stabilisierung des Konvektionstermes, wurden diese im Hinblick auf ihre Stabilität auf gestörten Gittern hin untersucht und dementsprechend ausgewählt.

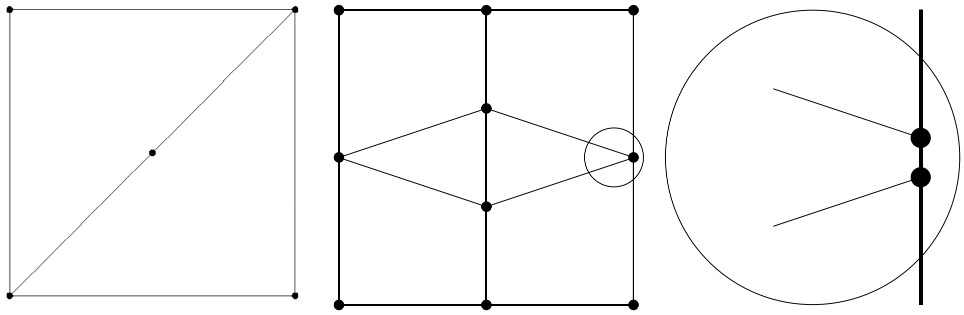


Abbildung 1.4: Vierecksgitter mit Elementen, die zu Dreiecken entartet sind

Die Ergebnisse dieser Vergleichsuntersuchungen sind ebenfalls in der vorliegenden Arbeit aufgeführt. Bei der Auswahl des Elementtyps wird dabei auf Arbeiten von Turek [48], Rannacher und Becker [7] zurückgegriffen. Bei der Wahl einer geeigneten Methode zur Konvektionsstabilisierung wurde im Hinblick auf die angestrebte Robustheit ein besonderes Augenmerk darauf gelegt, daß das Verfahren möglichst wenig Parameter beinhaltet, die auf das jeweilige Problem angepaßt werden müssen. Hierbei hat sich eine Variante des Upwindverfahrens als optimal erwiesen. Für die Zukunft zeichnen sich völlig parameterfreie Methoden, wie das TVD [29] oder das FCT-Verfahren ([28], [30]) als mögliche Alternativen ab. Einige in diesen Arbeiten von Kuzmin et al entwickelte Verfahren sind augenblicklich noch in der Testphase und haben dort bereits sehr vielversprechende Ergebnisse gezeigt.

Abschließend läßt sich sagen, daß in dieser Arbeit erfolgreich ein Verfahren entwickelt wurde, welches quasi als Black-Box Verfahren für eine große Klasse von Problemen ohne spezifische Anpassung verwendet werden kann, und dabei trotzdem keine Abstriche bei der Konvergenzgeschwindigkeit machen muß.

Gegliedert ist die Arbeit wie folgt. Kapitel 2 führt kurz die verwendeten Notationen ein und diskutiert noch einmal die behandelten Gleichungen. Kapitel 3 beschäftigt sich eingehend mit der bei der Wahl einer Diskretisierung auftretenden Problemen und deren Behebung. In Kapitel 4 entwickeln wir die robusten Mehrgitterkomponenten und untersuchen ihre Effizienz. Das 5. Kapitel beschäftigt sich mit dem Verfahren zur Behandlung der Nichtlinearität. Hauptaspekte sind dabei die Geschwindigkeit der Konvergenz, sowie die Lösbarkeit der entstehenden linearisierten Probleme. Zum Abschluß wird in Kapitel 6 am Beispiel der Boussinesqapproximation exemplarisch gezeigt, daß und wie sich die bisher präsentierten Konzepte auf erweiterte Problemstellungen anwenden lassen. Kapitel 7 gibt noch eine Zusammenfassung und einen Ausblick in die Zukunft.

An dieser Stelle sei angemerkt, daß die hier präsentierten Resultate in der Zeit zwischen 1997 und 2002 entstanden sind. Einige Teile der älteren Ergebnisse sind bereits in [49] eingeflossen und auch dort nachzulesen.

Die in dieser Arbeit dargestellten numerischen Resultate wurden mit einem Programm erzeugt, das auf dem an den Universitäten Heidelberg und Dortmund entwickelten Programmpaket FEATFLOW (*www.featflow.de*) sowie der Softwarebibliothek FEAT [8] aufbaut. Mein herzlicher Dank gilt Herrn Prof. Dr. Turek für seine Betreuung bei der Entstehung dieser Arbeit und besonders für seine Hilfe und Unterstützung in schwierigen Phasen, und daneben den zahlreichen Kollegen und Kolleginnen in Dortmund und Heidelberg, die mir in den letzten Jahren bei der Überwindung von allerlei fachlichen, technischen und sonstigen Problemen geholfen haben.

Kapitel 2

Notation

Im folgenden Abschnitt werden wir sowohl die in dieser Arbeit benutzte Notation erläutern, als auch kurz das zugrunde liegende Finite-Elemente Verfahren sowie die Fixpunkt-Defekt-korrektur zur Behandlung der nichtlinearen Gleichungssysteme einführen. Für eine eingehendere Erläuterung der Methode der Finiten Elemente sei auf die einschlägige Literatur, z.B. [13] oder [19] verwiesen.

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ mit Lipschitz-stetigem Rand. Mit $\|\cdot\|_0, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ werden die Normen der Sobolewräume $L_2(\Omega), H^1(\Omega), H^2(\Omega)$ bezeichnet, mit $\|\cdot\|_{-1}$ die Norm des Dualraumes zu $H^1(\Omega)$. $\|\cdot\|_h$ bezeichnet das diskrete Analogon zur H^1-Norm , also $\|\mathbf{u}\|_h^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{u}\|_{1,T}^2$.

Alle Schwierigkeiten, die durch Verzerrungen des Gitters oder andere Anisotropien entstehen, treten auch schon bei den stationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen auf. Daher wurden bei der Entwicklung und Analyse der neuen Verfahren diese Gleichungen als Testproblem gewählt. Sie haben im Fall von Dirichletrandbedingungen die Gestalt:

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \\ \nabla\cdot\mathbf{u} &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} \quad \text{auf } \delta\Omega \end{aligned} \tag{2.1}$$

Die Diskretisierung der Differentialgleichungen erfolgt in dieser Arbeit mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente. Die Grundlage hierfür ist die sogenannte schwache Formulierung, die im Falle von (2.1) lautet:

Finde $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times L$, so daß

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u},\mathbf{v}) + n(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v}) + b(p,\mathbf{v}) &= (\mathbf{f},\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ b(q,\mathbf{u}) &= 0 \qquad \forall q \in L \end{aligned} \tag{NST}$$

Im Falle homogener Dirichletrandbedingungen, also $\mathbf{u} = 0$ auf dem Rand von Ω, bezeichnet $\mathbf{V}$ den Sobolewraum $\mathbf{H_0^1(\Omega)}$ und L den Raum $L_0^2(\Omega)$, also den Raum der Funktionen aus $L^2(\Omega)$, mit Mittelwert 0.

Die Bilinearformen in (NST) sind definiert durch

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v}) \;:=\; \int_\Omega \nabla\mathbf{u}\nabla\mathbf{v}\,dx \tag{2.2}$$

$$b(q,\mathbf{v}) \;:=\; -\int_\Omega q\nabla\cdot\mathbf{v}\,dx, \tag{2.3}$$

und die Trilinearform $n(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$, in Anlehnung an [19] für ($\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$,$\mathbf{w}$) mit $\mathbf{u}\in\{\mathbf{v}\in\mathbf{V}|\nabla\cdot\mathbf{v}=0\}$, und $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{V}$ ist definiert durch:

$$n(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left(u_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}w_j - u_iv_j\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right)\,dx. \tag{2.4}$$

(Hier haben wir bei der Notation die Einsteinsche Summenkonvention verwendet, das heißt, daß über benachbarte, gleiche Indizes summiert wird.)

Es ist wohlbekannt ([19],[45]), daß das Problem (NST) für $\mathbf{f}\in\mathbf{H^{-1}(\Omega)}$ mindestens eine Lösung besitzt, die für den Fall, daß $\nu^{-2}||\mathbf{f}||_{\mathbf{-1}}$ hinreichend klein ist, sogar eindeutig ist.

Zur Diskretisierung des Problems gehen wir aus von einer Zerlegung $\mathbf{T_h}$ des Gebietes Ω konvexe Viereckselemente mit einer Gitterweite h, die den maximalen Durchmesser der Elemente bezeichnet. Die Zerlegung wird als regulär angenommen (siehe z.B. [13]), d.h. die Schnittmenge zweier Elemente ist entweder leer, ein gemeinsamer Knoten oder eine gemeinsame Kante. Von einer Familie solcher Zerlegungen $\{\mathbf{T_h}\}_h$ sagt man, sie genüge einer *uniform shape condition* [13], wenn für jede Zerlegung $\mathbf{T_h}$ der Quotient aus Umkreisradius und Inkreisradius beschränkt und die Winkel der Elemente gleichmäßig von π weg beschränkt sind. Sofern nichts anderes angegeben ist, verläuft der Verfeinerungsprozeß vom Gitter $\mathbf{T_{2h}}$ zum feineren Gitter $\mathbf{T_h}$ regulär, d.h. die neuen Elemente entstehen durch Verbinden der gegenüberliegenden Seitenmitten. Mit ∂T_h bezeichnen wir die Vereinigung der Randkanten Γ aller Elemente $T\in\mathbf{T_h}$.

$\mathbf{V_h}$ und L_h beschreiben die diskreten Ansatzräume für die Geschwindigkeit und den Druck (für die Details der Finite-Elemente Räume siehe Abschnitt 3).

Die Bilinearformen $a(\cdot,\cdot)$ und $b(\cdot,\cdot)$ werden ersetzt durch ihre diskreten Entsprechungen

$$a_h(\mathbf{u_h},\mathbf{v_h}) \;:=\; \sum_{T\in\mathbf{T_h}}\int_T \nabla\mathbf{u_h}\nabla\mathbf{v_h}\,dx \tag{2.5}$$

$$b_h(q_h,\mathbf{v_h}) \;:=\; -\sum_{T\in\mathbf{T_h}}\int_T q_h\nabla\cdot\mathbf{v_h}\,dx, \tag{2.6}$$

ebenso die Trilinearform $n(\cdot,\cdot,\cdot)$ durch:

$$n_h(\mathbf{u_h},\mathbf{v_h},\mathbf{w_h}) := \frac{1}{2}\sum_{T\in\mathbf{T_h}}\int_{T_h}\left(u_{h,i}\frac{\partial v_{h,j}}{\partial x_i}w_{h,j} - u_{h,i}v_{h,j}\frac{\partial w_{h,j}}{\partial x_i}\right)\,dx. \tag{2.7}$$

Wie man sofort sieht, besitzt diese Form die Antisymmetrie

$$n_h(\mathbf{u_h}, \mathbf{v_h}, \mathbf{w_h}) = -n_h(\mathbf{u_h}, \mathbf{w_h}, \mathbf{v_h}), \tag{2.8}$$

und damit speziell

$$n_h(\mathbf{u_h}, \mathbf{v_h}, \mathbf{v_h}) = 0. \tag{2.9}$$

Die diskrete Formulierung von Problem (NST) lautet damit:

Finde $(\mathbf{u_h}, p_h) \in \mathbf{V_h} \times L_h$, so daß

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u_h}, \mathbf{v_h}) + n_h(\mathbf{u_h}, \mathbf{u_h}, \mathbf{v_h}) + b_h(p_h, \mathbf{v_h}) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v_h}) \quad \forall \mathbf{v_h} \in \mathbf{V_h} \\ b_h(q_h, \mathbf{u_h}) &= \quad 0 \qquad \forall q_h \in L_h \end{aligned} \tag{NST_h}$$

Vernachlässigt man in den Navier-Stokes-Gleichungen den konvektiven Term, so erhält man die sogenannten Stokes-Gleichungen:

Finde $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Ł$, so daß

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(p, \mathbf{v}) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ b(q, \mathbf{u}) &= \quad 0 \qquad \forall q \in L \end{aligned} \tag{ST}$$

beziehungsweise in diskreter Form:

Finde $(\mathbf{u_h}, p_h) \in \mathbf{V_h} \times L_h$, so daß

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u_h}, \mathbf{v_h}) + b_h(p_h, \mathbf{v_h}) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v_h}) \quad \forall \mathbf{v_h} \in \mathbf{V_h} \\ b_h(q_h, \mathbf{u_h}) &= \quad 0 \qquad \forall q_h \in L_h \end{aligned} \tag{ST_h}$$

Dieses vereinfachte Problem wird im Rahmen dieser Arbeit nicht explizit untersucht werden, jedoch ist die eindeutige Lösbarkeit des (kontinuierlichen oder diskreten) Stokesproblems bei der Stabilitätsanalyse von Finite-Elemente Paaren von Bedeutung (BB-Stabilität, Abschnitt 3.1.3). Daher sollen an dieser Stelle die Gleichungen bereits einmal definiert werden.

Betrachten wir nun wieder die Navier-Stokes Gleichungen. Um den gewählten Lösungsansatz für das diskrete Problem zu beschreiben, führen wir dieses nach Basiswahl in eine äquivalente Matrizenschreibweise über. Mit $\mathbf{u_h}, p_h$ werden nun, sofern Verwechslungen ausgeschlossen sind, die Koeffizientenvektoren der gleichnamigen diskreten Funktionen bezeichnet. (NST_h) wird somit umformuliert zu:

Finde $\mathbf{u_h}, p_h$, so daß

$$\begin{aligned} S(\mathbf{u_h})\mathbf{u_h} + Bp_h =& \mathbf{f_h} \\ B^T \mathbf{u_h} =& 0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

beziehungsweise in kompakter Matrix-Vektor-Schreibweise:

$$\begin{bmatrix} S(\mathbf{u_h}) & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u_h} \\ p_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f_h} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.10*}$$

Hierbei ist der diskrete nichtlineare Operator

$$\begin{aligned} S(\mathbf{u}) := & \quad \nu L + K(\mathbf{u}) \\ \sim & \quad -\nu\Delta \cdot + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot \end{aligned} \tag{2.11}$$

die Summe aus dem diffusiven (Laplace-) L und dem konvektiven Teil $K(\mathbf{u})$ des Operators, während

$$B \sim \nabla, \quad B^T \sim \nabla \cdot \tag{2.12}$$

eine Diskretisierung des Gradienten bzw. der Divergenz darstellen.

Zur Lösung dieses Systems wird eine nichtlineare oder auch 'äußere' Iteration verwendet, die sich algebraisch schreiben läßt als:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u_h^{l+1}} \\ {p_h}^{l+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u_h^l} \\ {p_h}^l \end{bmatrix} - \omega^{l+1} \begin{bmatrix} N(\mathbf{u_h^l}) & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{def^l_{u_h}} \\ \mathrm{def}^l_{p_h} \end{bmatrix}, \tag{2.13}$$

mit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{def^l_{u_h}} \\ \mathrm{def}^l_{p_h} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} S(\mathbf{u_h^l}) & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u_h^l} \\ {p_h}^l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f_h} \\ 0 \end{bmatrix}$$

In der obigen Formulierung bezeichnet l den Iterationsindex. Es handelt sich dabei um einen Fixpunkt-Defektkorrekturprozeß mit einem passend zu wählenden Vorkonditionierer

$$\begin{bmatrix} N(\mathbf{u^l}) & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix},$$

sowie einem Dämpfungsparameter ω^{l+1}. Hier sei darauf hingewiesen, daß es diese Vorgehensweise unter anderem erlaubt, den Defekt mit einer anderen Diskretisierung zu berechnen, als sie im Vorkonditionierer verwendet wird. So kann es beispielsweise in bestimmten Situationen, wie im Falle kleiner Reynoldszahlen und feiner Gitter, vom Aspekt der Genauigkeit her gesehen zulässig und wünschenswert sein, ein Verfahren höherer Ordnung zu wählen, jedoch führt diese Diskretisierung auf lineare Gleichungssysteme, die oft nur sehr schwierig zu lösen sind. Durch den Defektkorrekturansatz hat man die Möglichkeit, in diesem Falle für den Defekt eine Diskretisierung mit einer Stabilisierung des Konvektionsterms von hoher Ordnung zu wählen, und eine einfache, aber robustere Stabilisierung –Upwind-Verfahren, Stromliniendiffusion oder ähnliches– lediglich in den Vorkonditionierer einzubauen. Da für die Approximationsgüte nur die Diskretisierung des Defektes ausschlaggebend ist, erhält man so eine höhere Approximationsgüte und gleichzeitig eine Iterationsmatrix mit der nötigen M-Matrix Eigenschaft. In Kapitel 5.1.1 werden wir hierauf noch näher eingehen. Wenn es bei den Resultaten der folgenden Kapitel nicht explizit erwähnt wird, wurde jedoch für die Defektberechnung und den Vorkonditionierer dieselbe Stabilisierung verwendet.

In den Rahmen von (2.13) fallen aber nicht nur die einfachen Fixpunktiterationen. Fasst man (2.1) als Nullstellenproblem auf

$$F(\mathbf{u}, p; f) := \begin{bmatrix} S(\mathbf{u})\mathbf{u} \quad + \quad \nabla p - \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}, \tag{2.14}$$

so hat die Fréchetableitung von F die Gestalt

$$F'_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} -\nu\Delta + \mathbf{u} \cdot \nabla(\cdot) + (\cdot) \cdot \nabla \mathbf{u} & \nabla \\ \nabla \cdot & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.15}$$

und ein Schritt des Newton-Verfahrens schreibt sich als

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^{\mathbf{l}+\mathbf{1}} \\ p^{l+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{\mathbf{l}} \\ p^{l} \end{bmatrix} - [F'_{\mathbf{u}^{\mathbf{l}}}]^{-1} F(\mathbf{u}^{\mathbf{l}}, p^{l}; f). \tag{2.16}$$

Wenn man nun dieses kontinuerliche Verfahren diskretisiert, erhält man wieder (2.13) mit der speziellen Wahl $\omega^{l+1} \equiv 1$ und

$$\begin{aligned} N(\mathbf{u}) :=& \quad \nu L + K(\mathbf{u}) + R(\mathbf{u}) \\ \sim& \quad \nu\Delta \cdot + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot + (\cdot \nabla)\mathbf{u}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Somit stellt (2.13) gerade eine Diskretisierung des Newtonverfahrens (2.16) dar.

Alle weiteren Bezeichnungen, die nicht Standard sind, werden an den Stellen definiert, an denen sie benötigt werden.

Kapitel 3

Die Diskretisierung

3.1 Das $\tilde{Q}_1/Q_0$ Element

Zur Finite-Elemente Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen verwenden wir im folgenden mit einer regulären Zerlegung des Gebietes Ω in (konvexe) Vierecke das sogenannte nichtkonforme $\tilde{Q}_1/Q_0$ Element (auch Rannacher-Turek Element genannt, siehe [37]), auf dessen Eigenschaften in diesem Kapitel kurz eingegangen werden soll. Dieses Elementpaar kann als die Erweiterung des bekannten Crouzeix-Raviart Elementes für Dreiecke betrachtet werden [14]. Der Vorteil dieses Elementes besteht darin, daß es ein relativ einfaches Element ist, aber im Gegensatz zu dem konformen Q_1/Q_0 Element, bestehend aus stückweise-bilinearen Ansätzen für die Geschwindigkeit, zusammen mit stückweise konstanten für den Druck, ohne zusätzliche Stabilisierung die Babušca-Brezzi-Bedingung erfüllt, also das diskrete Stokes-Problem (ST_h) eindeutig lösbar ist. Man unterscheidet bei dem Element zwei Versionen: die parametrische sowie die nichtparametrische Version, die sich bezüglich ihres Approximations- und Stabilitätsverhaltens unterscheiden. In den nächsten Unterabschnitten werden diese beiden Elementtypen auf ihre Eignung für die Verwendung stark gestreckter oder verformter Gitter hin untersucht. Die klassischen Konvergenzaussagen für diese Elemente sind nur als Zitate angegeben, für die Beweise sei auf die Literatur, besonders [37], verwiesen. Für die folgende Analyse nehmen wir an, daß die Zerlegung $\mathbf{T_h}$ einer uniform shape condition [13] genüge, und alle Elemente in etwa denselben Durchmesse h haben. Später werden wir diese Annahme dann wieder fallen lassen.

3.1.1 Die parametrische Version

Sei $\mathbf{T_h}$ eine wie oben beschriebene Viereckszerlegung des Gebietes Ω. Für die Approximation des Druckes verwenden wir den Raum der stückweise konstanten Funktionen aus $L_0^2(\Omega)$, also derjenigen Funktionen aus $L^2(\Omega)$ mit Mittelwert Null:

$$L_h := \{q_h \in L_0^2(\Omega) | q_h|_T = \text{konst.}, \forall T \in \mathbf{T_h}\}. \tag{3.1}$$

Als Ansatzraum für die Geschwindigkeiten definieren wir die rotiert-bilinearen Elemente. Für die parametrische Version benötigen wir das Referenzelement $\hat{T} = [-1,1] \times [-1,1]$.

Für jedes $T \in \mathbf{T_h}$ sei $\psi_T : \hat{T} \to T$ eine zugehörige 1-1–Transformation, und wir setzen

$$\hat{Q}_1(T) := \{q \circ \psi_T^{-1} | \; q \in \operatorname{span}\langle x^2 - y^2, x, y, 1\rangle\}. \tag{3.2}$$

Die Freiheitsgrade der verwendeten Finiten Elemente werden mittels der Funktionale $\{F_\Gamma^{(a/b)}(\cdot), \Gamma \subset \partial\mathbf{T_h}\}$ bestimmt durch

$$F_\Gamma^{(a)}(v) \;\; := \;\; |\Gamma|^{-1} \oint_\Gamma v \, d\gamma \tag{3.3}$$

oder

$$F_\Gamma^{(b)}(v) \;\; := \;\; v(m_\Gamma). \tag{3.4}$$

Die entsprechenden diskreten Räume $\mathbf{H_h} = \mathbf{H^{(a/b)}}$ und L_h definieren wir als

$$\begin{aligned} L_h &:= \{q_h \in L_0^2(\Omega) | \; q_h|_T = \text{const.}, \; \forall T \in \mathbf{T_h}\} \\ \mathbf{H_h^{(a/b)}} &:= S_h^{(a/b)} \times S_h^{(a/b)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

mit

$$S_h^{(a/b)} := \left\{ \begin{matrix} v_h \in L^2(\Omega) | v_h|_T \in \hat{Q}_1(T), \; \forall T \in \mathbf{T_h}, \; v_h \text{ stetig bzgl. der Funktionale} \\ F_{\Gamma_{i,j}}^{(a/b)}(\cdot), \; \forall \text{ Kanten } \Gamma_{i,j} \end{matrix} \right\}. \tag{3.6}$$

Da die Finite-Elemente Funktionen auf den Kanten nicht linear sind, führen beide Wahlen, im Gegensatz zum Fall des Crouzeix-Raviart Elementes, zu unterschiedlichen, aber jeweils unisolventen Ansatzräumen [48].

Betrachten wir nun die Approximationseigenschaften der obigen Räume. Sei $j_h : L_0^2(\Omega) \to L_h$ der elementweise konstante Interpolationsoperator, der den Mittelwert 0 erhält. Für diesen gilt, analog zum Dreiecksfall [14]

$$||q - j_h q||_0 \leq ch \, ||q||_1 \; \forall q \in L_0^2(\Omega) \cap H^1(\Omega). \tag{3.7}$$

Weiterhin sei $i_h^{(a/b)} : \mathbf{H_0^1(\Omega)} \to \mathbf{H_h^{(a/b)}}$ der globale Interpolationsoperator in $\mathbf{H_h^{(a/b)}}$, der durch die lokalen Vorschriften

$$F_\Gamma(i_h^{(a/b)}\mathbf{v}) = F_\Gamma(\mathbf{v}) \quad , \forall \; \Gamma \subset \partial\mathbf{T_h} \tag{3.8}$$

definiert wird.

Leider erhält man hier nicht die gleichen optimalen Fehlerabschätzungen, wie beim Crouzeix-Raviart Element oder beim konformen, bilinearen Viereckselement. Ursache hierfür ist, daß die Räume $\mathbf{H_h^{(a/b)}}$ nicht isoparametrisch sind, d.h. die (bilineare) Transformation ψ_T ist aus einem anderen Polynomraum als die Ansatzfunktionen auf $\hat{T}$. Um dennoch optimale Approximationseigenschaften zu erhalten, müssen Bedingungen an die Uniformität des Gitters gestellt werden. Die Ergebnisse werden hier nur zitiert, die genaue Herleitung kann bei [37] und [48] nachgelesen werden.

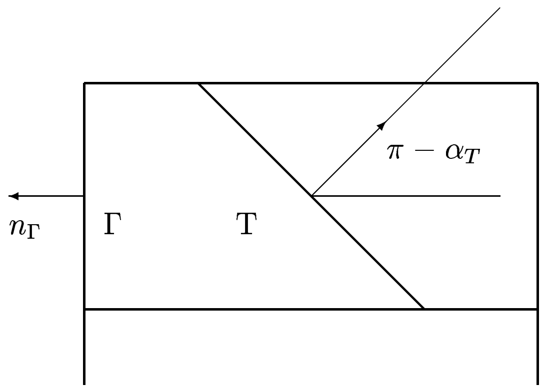


Abbildung 3.1: Verzerrung eines Elements

Für jedes Element $T \in \mathbf{T_h}$ sei $\alpha_T \in (0, \pi/2)$ der maximale Winkel zwischen den Normaleneinheitsvektoren zweier gegenüberliegender Kanten von T (siehe Abbildung 3.1.1). Dann ist die Größe

$$\sigma_h := \max\{|\pi - \alpha_T|\,, \forall T \in \mathbf{T_h}\} \tag{3.9}$$

ein Maß für die Uniformität des Gitters $\mathbf{T_h}$.

Damit kann man für den Interpolationsfehler zeigen:

Zitat 1. *Für die Interpolationsoperatoren $i_h = i_h^{(a/b)}$ gilt:*

$$\|v - i_h v\|_0 + h\,\|v - i_h v\|_h \;\; \leq ch(h + \sigma_h)\,\|v\|_2 \qquad , \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)\,.$$

Weiterhin ist das oben angegebene Elementpaar "stabil", das heißt, daß es das diskrete Analogon zur *Babuška-Brezzi-Bedingung* (BB_h) erfüllt. Für den *integralmittelorientierten* Interpolationsoperator $i_h^{(a)} : \mathbf{H_0^1(\Omega)} \to \mathbf{H_h}^{(a)}$ gilt:

Zitat 2. *Es gilt:*

$$\begin{aligned} b_h(\chi_h, \mathbf{v} - i_h^{(a)}\mathbf{v}) &= 0 \quad , & \forall\, \chi_h \in L_h\,, \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{H_0^1(\Omega)}\,, \\ \|i_h^{(a)}\mathbf{v}\|_h &\leq \gamma\,\|\nabla \mathbf{v}\|_0 \quad , & \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{H_0^1(\Omega)}\,. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir mit $\tilde{\beta} = \dfrac{\beta}{\gamma} > 0$ auch die Abschätzung

$$\tilde{\beta}\,\|p_h\|_0 \leq \max_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{H_h}^{(a)}} \frac{b_h(p_h, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h}\,. \tag{3.10}$$

Um für das Paar $(\mathbf{H_h}^{(b)}, L_h)$ mit dem *seitenmittenorientierten* Interpolationsoperator $i_h^{(b)}$: $\mathbf{H_0^1(\Omega)} \to \mathbf{H_h}^{(b)}$ die Stabilitätseigenschaft zu erhalten, muß das Gitter $\mathbf{T_h}$ genügend uniform sein.

Zitat 3. *Wenn die Größe $\sigma = \sup_{h>0} \sigma_h$ hinreichend klein ist, dann gilt die Stabilitätsabschätzung (*$\mathrm{BB_h}$*) auch für das Elementepaar* $(\mathbf{H_h}^{(b)}, L_h)$.

Bemerkung 4. *Um diese Kleinheitsforderung an σ in Zitat 3 zu vermeiden ist es vorteilhaft, die Bilinearform $b_h(\cdot,\cdot)$ durch ihre durch numerische Quadratur entstandene Näherung zu ersetzen:*

$$\tilde{b}_h(q,v) := \sum_{\Gamma \in \partial T_h} q(b_\Gamma) v(b_\Gamma) \cdot n_\Gamma. \tag{3.11}$$

Wie Rannacher und Turek [37] zeigen, ist in diesem Fall die Stabilitätsbedingung auch ohne zusätzliche Forderungen an das Gitter T_h erfüllt.

Diese Überlegungen führen schließlich zu folgender asymptotischer Fehlerabschätzung für die *parametrischen* Elemente:

Zitat 5. *Unter den vorangehenden Voraussetzungen besitzen die diskreten Stokes Probleme (ST_h) für $\mathbf{H_h} = \mathbf{H_h}^{(a)}$ und, wenn $\sigma = \sup_{h>0} \sigma_h$ hinreichend klein ist bzw. die modifizerte Bilinearform $b_h(\cdot,\cdot)$ aus Bemerkung 4 verwendet wird, auch für $\mathbf{H_h} = \mathbf{H_h}^{(b)}$ eindeutige Lösungen $\{\mathbf{u_h}, p_h\} \in \mathbf{H_h}^{(a/b)} \times L_h$. Weiterhin gelten die Fehlerabschätzungen*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_h + \|p - p_h\|_0 &\leq c(h + \sigma_h)\left\{\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1\right\}, \\ \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0 + \|p - p_h\|_{-1} &\leq c(h + \sigma_h)^2\{\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1\}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Man sieht an den Abschätzungen (3.12), daß es zur Konvergenz der parametrischen rotiert bilinearen Stokes Elemente erforderlich ist, daß die Gitter $\{\mathbf{T_h}\}_h$ für $h \to 0$ *asymptotisch uniform* sind: $\sigma_h = \max\{|\pi - \alpha_T|, \forall T \in \mathbf{T_h}\} \to 0$ für $h \to 0$. Dies ist durch den hier verwendeten, regelmäßigen Verfeinerungsprozeß in der Regel gewährleistet. Bei lokaler Gitterverfeinerung hingegen kann es zu Problemen kommen. Werden nämlich gerade die stark deformierten Elemente nicht verfeinert, so muß σ_h nicht zwangsläufig für $h \to 0$ gegen null gehen.

Im nächsten Abschnitt werden wir daher eine Variante des rotiert-bilinearen Elementes vorstellen, die bei der Interpolationsabschätzung, und daher auch bei der Fehlerabschätzung ohne den Regularitätsterm σ_h auskommt.

3.1.2 Die nichtparametrische Version

Die im Abschnit 3.1.1 beschriebenen, parametrischen rotiert bilinearen Elemente besitzen auch entsprechende nichtparametrische Gegenstücke. Für jedes Element $T \in \mathbf{T_h}$ sei (ξ, η) ein lokales Koordinatensystem, welches durch Verbinden der Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten erzeugt wird (siehe Abbildung 3.2). Wir machen dazu den Ansatz

$$\xi = a_\xi x + b_\xi y \quad , \quad \eta = a_\eta x + b_\eta y$$

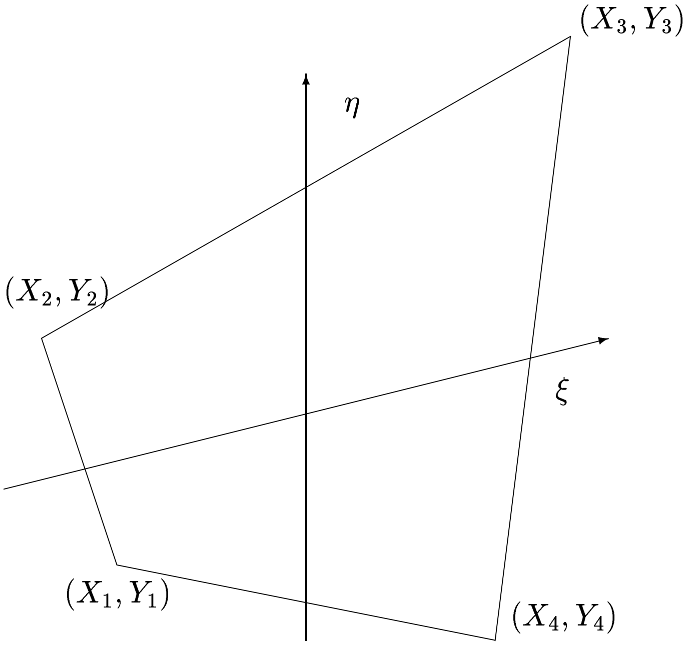


Abbildung 3.2: Lokales Koordinatensystem

mit

$$
\begin{aligned}
(XM_i, YM_i) &= (\frac{1}{2}(X_i + X_{i+1}), \frac{1}{2}(Y_i + Y_{i+1})) \\
(a_\xi, b_\xi) &= (XM_2 - XM_4, YM_2 - YM_4) \\
(a_\eta, b_\eta) &= (XM_1 - XM_3, YM_1 - YM_3)\,.
\end{aligned}
$$

Der Ansatzraum $\hat{Q}_1(T)$ auf jedem Element $T \in \mathbf{T_h}$ ist dann gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\hat{Q}_1(T) &:= \operatorname{span}\langle \xi^2 - \eta^2, \xi, \eta, 1\rangle \\
&= \operatorname{span}\langle c_1 x^2 + c_2 xy + c_3 y^2, a_\xi x + b_\xi y, a_\eta x + b_\eta y, 1\rangle \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

mit Koeffizienten $c_i(a_\xi, b_\xi, a_\eta, b_\eta)$.
Durch Lösen eines 4×4 Gleichungssystems (bzw. 6×6 in drei Raumdimensionen, siehe [42]) kann man sich nun auf effiziente Weise die vier lokalen Basisfunktionen berechnen, die wieder wie im *parametrischen* Fall durch Vorgabe der Funktionale $\{F_\Gamma^{(a/b)}(\cdot)\,,\, \Gamma \subset \partial\mathbf{T_h}\}$ eindeutig bestimmt sind. Die Räume L_h und $\mathbf{H_0^1(\Omega)}$, sowie die Interpolationsoperatoren j_h, i_h definiert man analog zum vorangehenden Abschnitt.

$\hat{Q}_1(T)$ enthält nun automatisch alle linearen Polynome, weshalb direkt (siehe [18]) das *Bramble–Hilbert–Lemma* ohne Transformation auf das Referenzelement $\hat{T}$ angewandt werden kann. Man erhält damit für $i_h = i_h^{(a/b)}$

$$
\|v - i_h v\|_0 + h\,\|v - i_h v\|_h \le ch^2\,\|v\|_2 \quad , \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)\,. \qquad (3.14)
$$

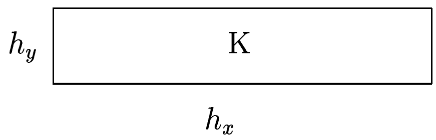
In dieser Interpolationsabschätzung taucht nun keine Abhängigkeit von der Uniformität des Gitters mehr auf, wie wir sie beim parametrischen Element in Zitat 1 gesehen haben, sondern es läßt sich die optimale Approximationsordnung zeigen. Das *mittelwertorientierte* Element $\mathbf{H_h}^{(a)}$ ist damit stabil und konvergent auch auf nichtkartesischen Gittern, während für das Element $\mathbf{H_h}^{(b)}$ wieder eine Kleinheitsbedingung für den Term σ gelten oder eine modifizierte Bilinearform $\tilde{b}_h(\cdot,\cdot)$ verwendet werden muß [48]. Dann erhält man die optimalen Fehlerabschätzungen für das Stokesproblem:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_h + \|p-p_h\|_0 &\leq ch\,\{\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1\}\,, \\ \|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_0 + \|p-p_h\|_{-1} &\leq ch^2\{\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1\}\,. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Wie schon bei der Interpolationsabschätzung taucht auch hier keine Bedingung an die Gleichmäßigkeit des Gitters auf.

3.1.3 Stabilität auf gestreckten Gittern

Im Abschnitt 3.1 wurde bei der Analyse stets davon ausgegangen, daß die Gitter *quasi uniform* sind, d.h. daß alle Elemente in etwa dieselbe Größe und Form besitzen ("uniform shape condition" und "uniform size condition"). Diese Eigenschaften bzw. die daraus hergeleiteten lokalen inversen Abschätzungen erscheinen essentiell für die Beweise der Stabilität der Elemente (Babuška-Brezzi Bedingung), jedoch schränken sie die Flexibilität bei der Wahl des Rechengitters stark ein. In der Praxis möchte man häufig zum Auflösen von Randschichten Gitter haben, welche lokal stark anisotrop sind. Im folgenden betrachten wir den Fall eines rechtwinkligen Tensorproduktgitters mit den horizontalen bzw. vertikalen Ausdehnungen h_x bzw. h_y (siehe Abbildung 3.3). Die Größe $\rho := \max_{K\in\mathbf{T_h}} \rho_K$ ist der sogenannte "Aspect-Ratio" des Gitters. Solche Anisotropien haben bei den hier betrachteten Elementen keinen negativen Einfluß auf die Interpolationsgüte [2] (für eine eingehende Analyse einer Vielzahl anderer Elemente siehe auch [1]). Wie Becker/Rannacher [7] zeigen, hat die Wahl des Elementes jedoch großen Einfluß auf die Stabilität.



$$\rho_K := \frac{h_{max}}{h_{min}} = \frac{h_x}{h_y}$$

Abbildung 3.3: Element eines rechtwinkligen Tensorproduktgitters

Für das nichtparametrische $\tilde{Q}_1/Q_0$-Element gilt das folgende

Lemma 6. *Die nichtparametrische Version des nichtkonformen $\tilde{Q}_1/Q_0$-Stokes-Elements ist stabil auf beliebigen, rechtwinkligen Tensorproduktgittern, d.h. es gilt:*

$$\sup_{\mathbf{v_h}\in\mathbf{H_h}} \frac{(p_h, \nabla\cdot\mathbf{v_h})}{\|\nabla\mathbf{v_h}\|_h} \geq \gamma\|p_h\|, \quad \forall p_h \in L_h, \tag{3.16}$$

mit einer Konstanten γ, die unabhängig von der Gitterweite und dem "Aspect-Ratio" ist.

Beweis
(Nach Becker/Rannacher [7]) Für ein beliebiges $p_h \in L_h$ gibt es ein $v \in \mathbf{H_0^1}$, so daß gilt (siehe [19])

$$(p_h, \nabla \cdot v) \geq \gamma \|p_h\| \|\nabla v\|.$$

Die diskrete Funktion $\mathbf{v_h} \in \mathbf{H_h}$, definiert durch

$$\int_\Gamma \mathbf{v_h}\, ds = \int_\Gamma v\, ds \quad \forall \Gamma \in \partial\Pi_h$$

erfüllt dann

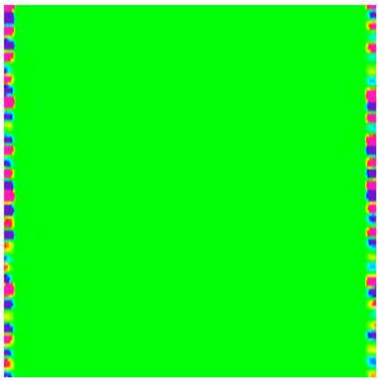
$$(p_h, \nabla \cdot \mathbf{v_h}) = (p_h, \nabla \cdot v) \geq \gamma \|p_h\|\, \|\nabla v\|.$$

Es bleibt nun also nur noch die H^1-Stabilität dieses Interpolationsprozesses zu zeigen. Da für die nichtparametrischen Elemente $\Delta \mathbf{v_h}$ auf jedem Element verschwindet, und weiterhin $\nabla \mathbf{v_h} \cdot \mathbf{n}$ konstant ist auf den Kanten (für allgemeinere, nichtrechtwinklige Gitter bedarf es einiger technischer Modifikationen des Beweises; siehe [7]), gilt

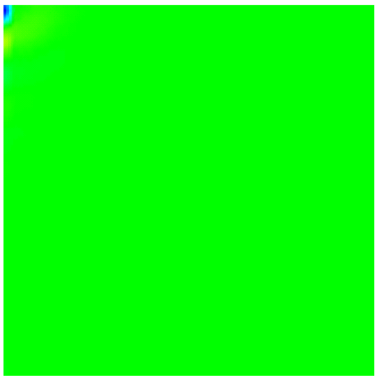
$$\begin{aligned}
\int_K \nabla \mathbf{v_h} \nabla \mathbf{v_h}\, dx &= -\int_K \Delta \mathbf{v_h} \mathbf{v_h}\, dx + \int_\Gamma \mathbf{v_h} \nabla \mathbf{v_h} \cdot \mathbf{n}\, ds \\
&= -\int_K \Delta \mathbf{v_h} \mathbf{v}\, dx + \int_\Gamma \mathbf{v} \nabla \mathbf{v_h} \cdot \mathbf{n}\, ds \\
&= \int_K \nabla \mathbf{v} \nabla \mathbf{v_h}\, dx.
\end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung erhalten wir sofort die gewünschte Ungleichung $\|\mathbf{v_h}\| \leq \|\mathbf{v}\|$. □

Eine derartige Stabilitätsaussage gilt für die parametrische Version des $\tilde{Q}_1 - Q_0$ Elementes nicht. Die Übertragung des obigen Beweises scheitert daran, daß die essentielle Bedingung $\Delta \mathbf{v_h}|_K = 0$ im allgemeinen nicht erfüllt ist, nicht einmal auf rechtwinkligen Gittern. Tatsächlich können bei praktischen Rechnungen diese Instabilitäten beobachtet werden.



parametrisch



nichtparametrisch

Abbildung 3.4: Druckverlauf auf einem anisotropen Gitter (AR=16)

Abbildung 3.4 zeigt den Druckverlauf für eine Driven-Cavity Rechnung (siehe Abschnitt 1) auf einem Einheitsquadrat. Das Rechengitter ist zur linken und rechten Wand hin verzerrt mit einem Aspect-Ratio von 16. Die Skalierung des Druckes ist bei beiden Abbildungen gleich. Bei der Rechnung mit dem parametrischen Element sieht man deutlich das starke Oszillieren des Druckes entlang der Wände. Bei der analogen Rechnung mit dem nichtparametrischen Element sind diese Oszillationen nicht zu beobachten.

Um dennoch auch mit dem parametrischen Element auf derartigen gestreckten Gittern befriedigende Stabilitätseigenschaften zu erzielen, müssen die Ansatzfunktionen auf jedem Element passend skaliert werden. Mit dem Ansatz:

$$\tilde{Q}_1(K) := \left\{ q \circ \psi_K^{-1} : q \in \operatorname{span}(1, \rho_K x, y, (\rho_K x)^2 - y^2) \right\} \tag{3.17}$$

konnten Becker und Rannacher [7] zeigen, daß das so entstehende Element die Stabilitätsbedingung erfüllt. Allerdings greift dieser Ansatz lediglich bei rechteckigen, langgestreckten Elementen.

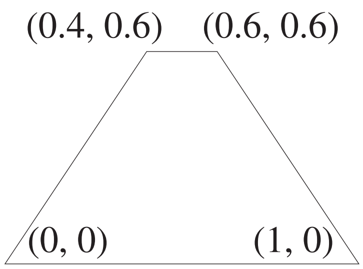


Abbildung 3.5: nichtrechteckiges, verzerrtes Element

Wie Buijssen [10] gezeigt hat, ist bei beliebigen verzerrten Elementen die Definition des Anisotropiegrades als Verhältnis der Verbindungsstrecken gegenüberliegender Seitenmitten nicht ausreichend. Abbildung 3.5 zeigt ein Viereckselement, bei dem die Strecken, die jeweils gegenüberliegende Seitenmitten miteinander verbinden, die gleiche Länge haben. Läßt man die beiden oberen Knoten aufeinander zu wandern, dann bleibt dieses Seitenverhältnis immer noch gleich, das Element degeneriert dadurch jedoch nahezu zu einem Dreieck. Wie in diesem Fall der Skalierungsfakor ρ_K zu wählen ist, ist völlig unklar. Wie wir im Abschnitt 3.1.5 zeigen werden, kann die nichtparametrische Version des $\tilde{Q}_1/Q_0$-Elementes auf derartige Elemente ohne weitere Stabilisierungen angewendet werden.

3.1.4 Zur Auswahl des Elementtyps

In den vorherigen Abschnitten haben wir gesehen, daß sich die beiden Versionen des $\tilde{Q}_1/Q_0$ Elementes hinsichtlich ihrer Stabilitätseigenschaften voneinander unterscheiden. Die nichtparametrische Version, welche ohne die Transformation auf ein Referenzelement auskommt, erweist sich als die stabilere im Hinblick auf Winkeldeformationen sowie Längenanisotropien des Gitters. Zwar lassen sich die Probleme beim parametrischen Element durch gezielte Anpassung überwinden, bzw. verlieren bei fortschreitender, regelmäßiger Verfeinerung an Bedeutung. Die nichtparametrische Version liefert jedoch in allen Fällen ohne zusätzliche Maßnahmen zufriedenstellende Ergebnisse, und der Mehraufwand (für die Berechnung der lokalen Basisfunktionen) ist vernachlässigbar. Da das Ziel der Arbeit die Entwicklung robuster Lösungsverfahren ist, wird in der weiteren Untersuchung lediglich auf das nichtparametrische Element eingegangen, beziehungsweise dieses verwendet werden.

3.1.5 Beispielrechnungen

Die folgenden Beispielrechnungen sollen noch einmal die Stabilität des nichtparametrischen, rotiert bilinearen Elementes auch auf extrem deformierten Gittern demonstrieren. Die gezeigten Beispiele sind hierbei nicht nur als Kuriosum interessant. Bei der Verwendung von automatischen Gittergeneratoren kommt es in der Praxis leider häufig vor, daß einige der Elemente stark gestaucht werden und nahezu zu Dreiecken degenerieren. Wir werden im Folgenden zeigen, daß die nichtparametrische Form des $\tilde{Q}_1/Q_0$-Elements auch auf solchen Gittern sehr gute Ergebnisse zeitigt

Bei dem gewählten Beispielproblem handelt es sich um eine Driven-Cavity Rechnung auf dem Einheitsquadrat mit einer Viskosität $\nu = 1/5000$. Die Rechnungen wurden auf Level 8, also dem siebenmal verfeinerten Grobgitter durchgeführt. (Der feinste Level besteht somit im ersten Beispiel aus circa 65.500 Zellen und rund 130.000 Freiheitsgraden (Kanten) pro Geschwindigkeitskomponente, bei den Beispielen zwei und drei entsprechend den Grobgitterstrukturen 65.000 bzw. 190.000 Freiheitsgraden)

Bei dem ersten Beispiel besteht das Grobgitter aus 4 "Vierecken", bei denen je ein Winkel zu π entartet ist. Zusätzlich zu den drei offensichtlichen Ecken ist somit auch die Mitte der äußeren Kante als Eckpunkt des Elementes aufzufassen (Abbildung 3.6). Durch die Verwendung des lokalen Koordinatensystems bei den nichtparametrischen Elementen entstehen durch diese Entartungen keinerlei Probleme. Diese lokalen Koordinatensysteme, die durch Verbinden gegenüberliegender Seitenmitten entstehen, sind auch auf diesem Gitter immer noch nahezu orthogonal (die Lage der lokalen Koordinatenachsen für die vier Grobgitterelemente kann man auf der rechten Zeichnung in Abbildung 3.6 erkennen).

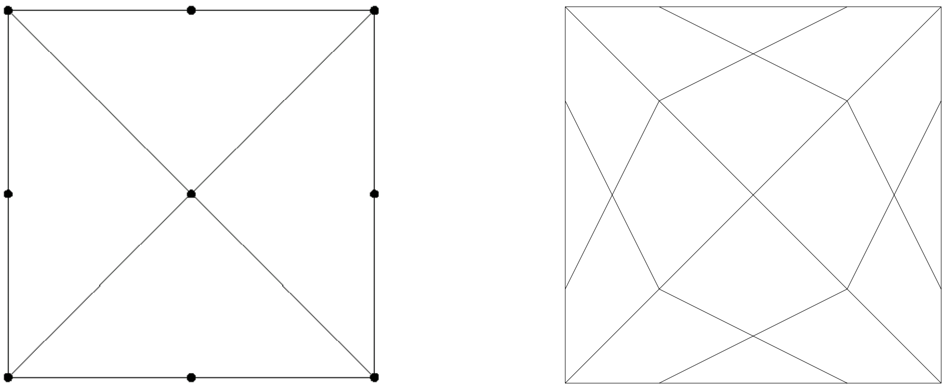
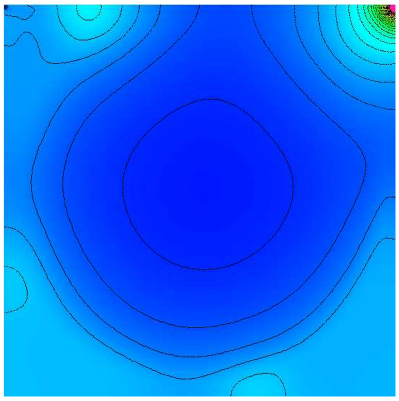


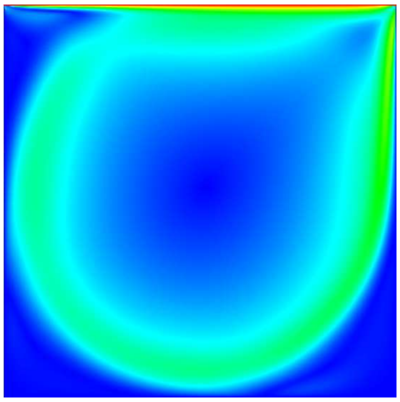
Abbildung 3.6: Grobgitter 1 und erste Verfeinerung

Auch die Verfeinerung der Elemente erfolgt wie üblich durch das Verbinden gegenüberliegender Seitenmitten. Durch diesen Prozeß erhält man eine Hierarchie von Gittern, bei denen die Elemente zu den Wandmitten hin immer verzerrter werden, bis zum Extremfall eines Dreiecks direkt an der Wand. Man erkennt keine Störungen in der Lösung durch das verzerrte Gitter. Vor allem zeigt der Druck an den kritischen Stellen keine Oszillationen und auch das Geschwindigkeitsfeld weist keine Unregelmäßigkeiten durch das Gitter auf (siehe Abbildung 3.7).

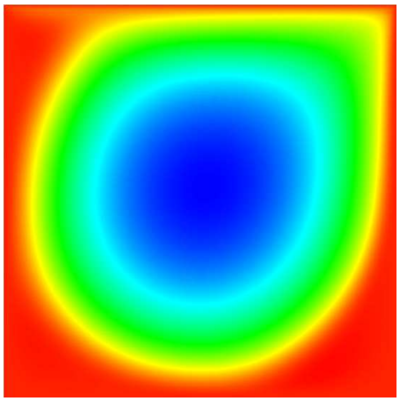
Als nächstes betrachten wir das Profil einiger Größen entlang einer Schnittgeraden durch



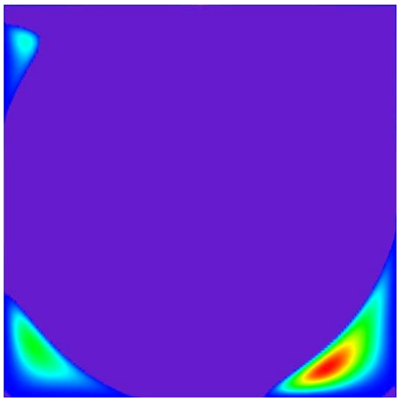
Druck



Norm der Geschwindigkeit



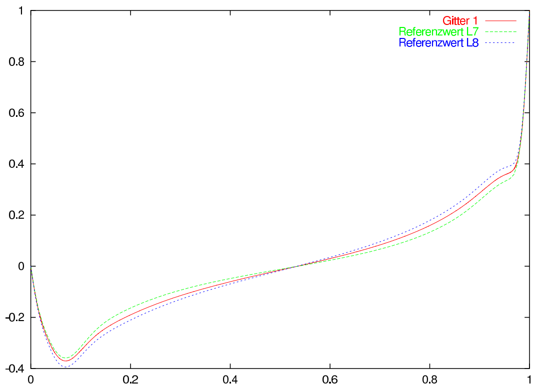
Stromfunktion



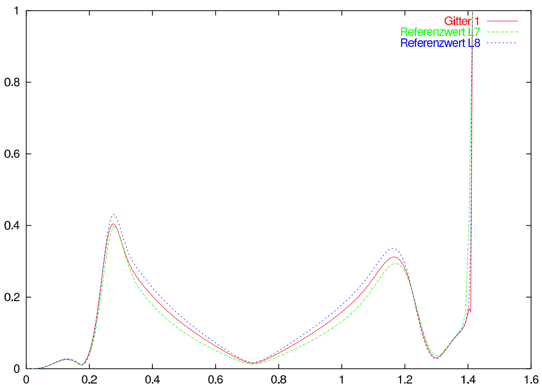
Stromfunktionswerte ≥ 0

Abbildung 3.7: Typische Lösung einer Driven-Cavity Simulation

das Rechengebiet. In Abbildung 3.8 ist die U-Komponente der Geschwindigkeit auf einer Vertikalen sowie die Norm der Geschwindigkeit angegeben. Dazu zum Vergleich jeweils die Kurven für ein isotropes, kartesisches Gitter, wobei der Referenzwert L7 von einem etwas gröberen, der Wert L8 von einem etwas feineren Gitter stammt. Es ist gut zu erkennen, daß die auf dem "Dreiecksgitter" erzeugten Werte sehr schön zwischen diesen beiden Referenzkurven liegen.

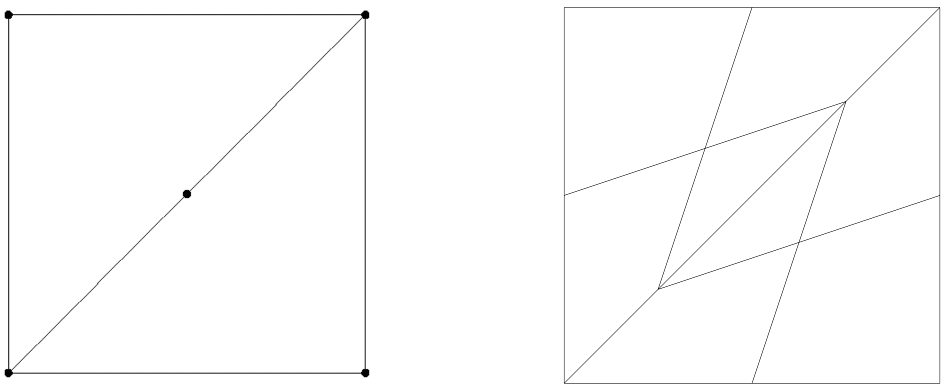


U-Geschwindigkeit bei $x \equiv 0.5$



Norm der Geschwindigkeit auf der Diagonalen $x = 1 - t/\sqrt{2}, y = t/\sqrt{2}$

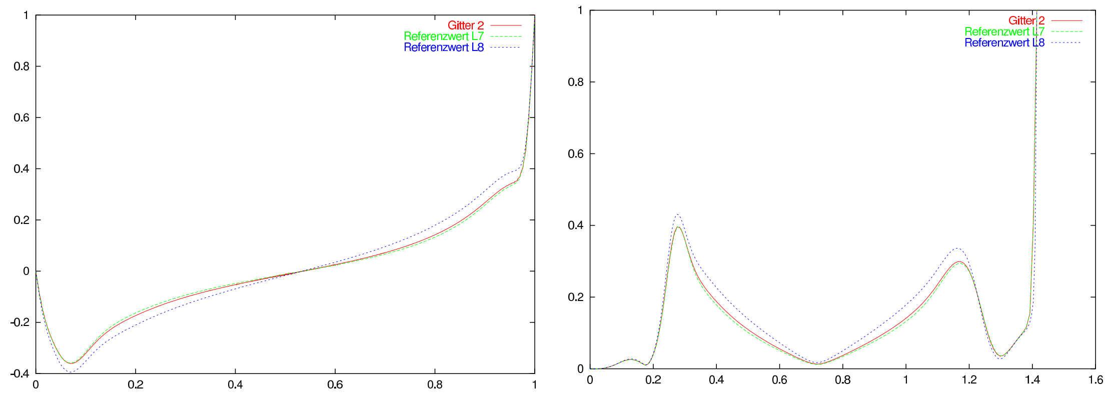
Abbildung 3.8: Profile auf Gitter 1



Grobgitter 2 erste Verfeinerung

Abbildung 3.9: Gitter 2

Derselbe Test wurde auch noch für eine ähnliche Konfiguration durchgeführt, bei der im Grobgitter ebenfalls die Elemente zu Dreiecken entartet sind. Allerdings liegen diese entarteten Elemente nun in der Mitte des Rechengebietes (siehe Abbildung 3.9).

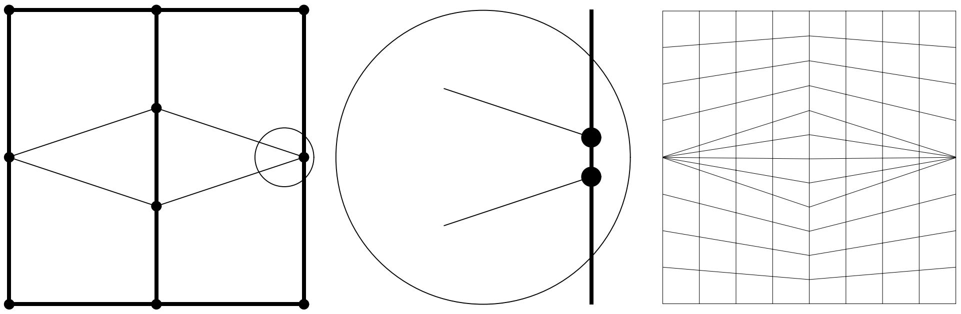


U-Geschwindigkeit bei $x \equiv 0.5$

Norm der Geschwindigkeit auf der Diagonalen $x = 1 - t/\sqrt{2}, y = t/\sqrt{2}$

Abbildung 3.10: Profile auf Gitter 2

Auch bei diesem Gitter sind keinerlei Instabilitäten zu beobachten. Da sich die Darstellungen des Strömungsfeldes und des Druckes nicht von denen des ersten Beispieles unterscheiden lassen, seien für diese Konfiguration lediglich die Geschwindigkeitsprofile angegeben (siehe Abbildung 3.10). Das Grobgitter im zweiten Beispiel hat nur 2 Elemente, statt 4 wie im ersten Beispiel, daher muß man die Gitterfeinheit auf dem feinsten Level mit der der Referenzlösung auf Level 7 vergleichen. Die Abbildung 3.10 zeigt, daß diese beiden Kurven nahezu identisch sind. Hierbei ist zu bedenken, daß die beiden Linien, entlang derer die Profile genommen sind, mitten durch das Gebiet gehen, in dem die Elemente am stärksten verzerrt sind.

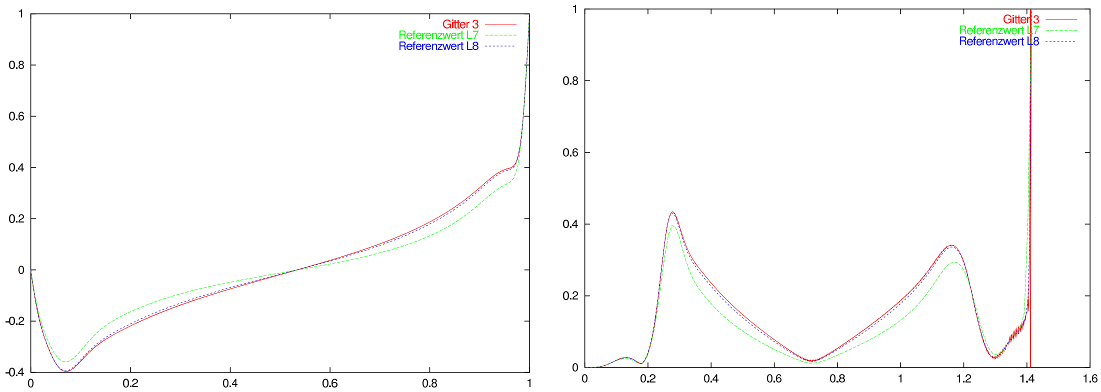


Grobgitter 3 | Zoom | zweite Verfeinerung

Abbildung 3.11:

Als letztes Beispiel betrachten wir eine Konfiguration, bei der zwei Eckpunkte eines Vierecks (nahezu) aufeinanderfallen (siehe Abbildung 3.11).

Die Gitter, die durch den regelmäßigen Verfeinerungsprozeß entstehen, enthalten an der rechten und linken Wand "Dreiecke", die mit zunehmender Verfeinerung immer spitzwinkliger werden.



U-Geschwindigkeit bei $x \equiv 0.5$

Norm der Geschwindigkeit auf der Diagonalen $x = 1 - t/\sqrt{2}, y = t/\sqrt{2}$

Abbildung 3.12: Profile auf Gitter 3

Trotz dieser starken Deformation zeigt die Abbildung 3.12, daß die Qualität der Lösung auch auf diesem Gitters nicht leidet.Die leichten, unnatürlichen Oszillationen, die die Norm der Geschwindigkeit in der linken oberen Ecke des Gebietes zeigt (entspricht dem Parameterwert $t = \sqrt{2}$) rühren vom Postprozessing her. Da auf der Diagonalen selbst, im Gegensatz zu den beiden vorigen Beispielen keine Geschwindigkeitsfreiheitsgrade liegen, müssen die Werte für die Ausgabe durch Interpolation erzeugt werden. Ein Schnitt entlang der Horizontalen $y \equiv 0.5$ (Abb.3.13), also mitten durch die Region mit den entarteten Elementen, zeigt wieder keinerlei Störungen.

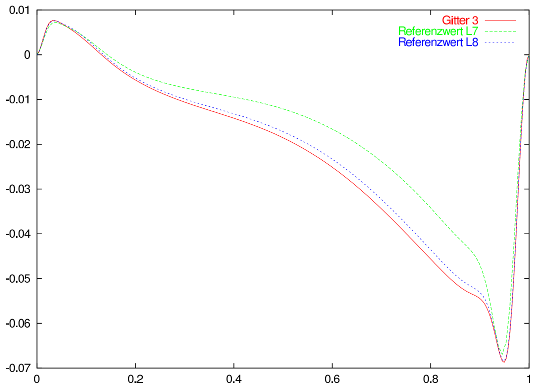


Abbildung 3.13: U-Geschwindigkeit bei $y \equiv 0.5$

Die oben gezeigten Beispiele bestätigen die theoretischen Erkenntnisse, daß die nichtparametrische Version des $\tilde{Q}_1/Q_0-$Elementes sehr robust gegenüber Einflüssen des Gitters ist. Die sind im speziellen

- Verzerrungen der Elemente, bei denen die Normalen gegenüberliegender Kanten einen großen Winkel einschließen
- Elemente mit großen Aspect-Ratios
- degenerierte Elemente, bei denen ein Winkel π beträgt, oder bei denen zwei Eckpunkte zusammenfallen.

Der dritte Punkt ist hierbei bei der Verwendung von 'professionellen' Gittergeneratoren besonderem Interesse, bei denen bei komplexen Geometrien häufig derart degenerierte Elemente erzeugt werden. Auf all diesen Gittern liefert das nichtparametrische Element eine hohe Diskretisierungsgüte und insbesondere auf den langgestreckten Gittern ist das Paar $\tilde{Q}_1/Q_0$ ohne weitere Modifikationen BB-stabil.

3.2 Stabilisierung der Konvektionsterms

Wie bereits eingangs beschrieben lautet die kontinuierliche Formulierung der stationären Navier-Stokes-Gleichungen im Fall von Dirichletrandbedingungen

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = f, \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{3.18}$$

Mit den zugehörigen Bilinearformen $a(\cdot,\cdot)$ und $b(\cdot,\cdot)$, sowie der Trilinearform

$$n(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) := \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \, dx. \tag{3.19}$$

läßt sich die variationelle Formulierung dieses Problems schreiben als:

Finde ein Paar $\{\mathbf{u}, p\} \in H := \mathbf{H_0^1(\Omega)} \times L := L_0^2(\Omega)$, so daß

$$\begin{array}{rcll} \nu a(\mathbf{u},\mathbf{v}) + n(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v}) + b(p,\mathbf{v}) & = & (f,\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in H \\ b(q,\mathbf{u}) & = & 0 & \forall q \in L. \end{array} \tag{3.20}$$

Auf einem Gitter $\mathbf{T_h}$, bestehend aus Viereckselementen T hat man, mit der diskreten Trilinearform

$$n_h(\mathbf{u_h},\mathbf{v_h},\mathbf{w_h}) := \sum_{T\in T_h} \int_K u_{h,i} \frac{\partial v_{h,j}}{\partial x_i} w_{h,j} \, dx, \tag{3.21}$$

den diskreten Bilinearformen $a_h(\cdot,\cdot)$ und $b_h(\cdot,\cdot)$ und den diskreten Räumen H_h und L_h die diskrete Formulierung:

Finde ein Paar $\{\mathbf{u_h}, p_h\} \in H_h \times L_h$, so daß

$$\begin{array}{rcll} \nu a_h(\mathbf{u_h},\mathbf{v_h}) + n_h(\mathbf{u_h},\mathbf{u_h},\mathbf{v_h}) + b_h(p_h,\mathbf{v_h}) & = & (f,\mathbf{v_h}) & \forall \mathbf{v_h} \in H_h \\ b(q_h,\mathbf{u_h}) & = & 0 & \forall q_h \in L_h. \end{array} \tag{3.22}$$

Dies entspricht einer zentralen Diskretisierung der Ableitungen im Konvektionsterm. Eine solche Diskretisierung ist bekanntermaßen von 2. Ordnung, jedoch nur dann stabil, wenn die Gitterweite h fein genug ist, wobei die benötigte Feinheit von der Reynoldszahl abhängig ist. In praxisrelevanten Rechnungen wird eine derartige Gitterweite nicht erreicht. Dies kann einerseits zu Oszillationen in der Lösung führen, die nicht physikalisch begründet, sondern ein rein numerisches Artefakt sind. Darüber hinaus kann nicht mehr garantiert werden, daß die Steifigkeitsmatrix weiterhin eine M-Matrix ist, oder zumindest ähnliche Eigenschaften besitzt, was dazu führen kann, daß die klassischen numerischen Lösungsverfahren nicht mehr, oder nur deutlich schlechter konvergieren.

Somit muß man, vor allem im Bereich höherer Reynoldszahlen, eine Stabilisierung des konvektiven Termes vornehmen. Zwei Verfahren sind dazu weit verbreitet: *UPWIND*-Verfahren sowie Stromliniendiffusionsmethoden. Auf deren Realisierung sowie Vor- und Nachteile soll in den nächsten beiden Abschnitten kurz eingegangen werden.

3.2.1 Upwind

Das von uns verwendete UPWIND-Verfahren ist das von Turek [48] bzw. [49] beschriebene, und basiert auf Arbeiten von Ohmori/Ushijima [36] und Tobiska/Schieweck [40]. Die Idee dabei ist die Definition kantenorientierter sogenannter Lumpinggebiete und Lumpingoperatoren. Jedes Viereckselement wird in 8 sogenannte baryzentrische Teilgebiete unterteilt, indem man das Viereck vom Schwerpunkt zu den Ecken und Seitenmitten hin 'zerschneidet'. Für jede Kante definieren wir ein Lumpinggebiet R_l durch

$$R_l := \bigcup_{k \in \Lambda_l} S_{lk}, \tag{3.23}$$

wobei Λ_l die Menge derjenigen Indizes k ist, bei denen die Kanten m_l und m_k benachbart sind (siehe Abbildung 3.14).

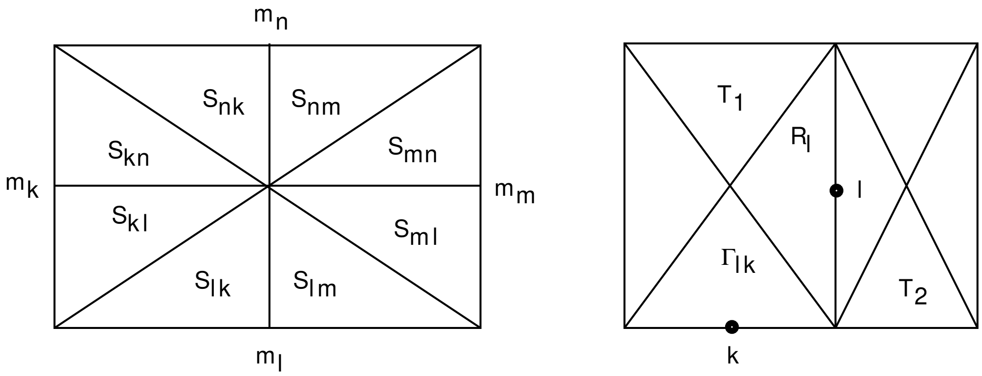


Abbildung 3.14: Baryzentrische Fragmente S_{ij} von T und das Lumpinggebiet R_l um die Kante/den Mittelpunkt l

Bezeichnet man mit $\Gamma_{lk} := \partial S_{lk} \cap \partial S_{kl}$ die inneren Kanten der baryzentrischen Fragmente der Elemente, dann kann man den Rand des Gebietes R_l schreiben als

$$\partial R_l = \bigcup_{k \in \Gamma_l} \Gamma_{kl}. \tag{3.24}$$

Wir erhalten damit eine neue, kantenorientierte Zerlegung des Gebietes, nämlich

$$\bigcup_{T \in T_h} \bar{T} = \bar{\Omega} = \bigcup_{l} \bar{R}_l \tag{3.25}$$

Als nächstes definieren wir den stückweisen Lumping-Operator durch:

$$L_h \mathbf{v}_h(x) = \mathbf{v}_h(m_l)\,, \,\forall\, x \in R_l\,. \tag{3.26}$$

Die Trilinearform $n_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)$ schreiben wir nun als Summe $n_h = n_h^1 + n_h^2$ mit

$$\begin{aligned} n_h^1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) &:= \sum_{T \in \mathbf{T_h}} \int_T \frac{\partial u_{h,i} v_{h,j}}{\partial x_i} w_{h,j}\, dx\,, \\ n_h^2(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) &:= -\sum_{T \in \mathbf{T_h}} \int_T \frac{\partial u_{h,i}}{\partial x_i} v_{h,j} w_{h,j}\, dx\,, \end{aligned}$$

In diesen beiden Termen kann man nun die Größen ohne Ableitung durch die entsprechenden gelumpten ersetzen, also

$n_h^1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)$ durch $n_h^1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, L_h\mathbf{w}_h)$, und $n_h^2(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)$ durch $n_h^2(\mathbf{u}_h, L_h\mathbf{v}_h, L_h\mathbf{w}_h)$.

Den Term n_h^1 modifizieren wir, wie in [36] beschrieben, zu einer 'Upwind-Form', indem wir $\mathbf{v}_h$ durch ein noch zu definierendes $\mathbf{v}_h^{lk}$ und erhalten, nach Anwendung des Satzes von Gauß, die Ausdrücke:

$$\tilde{n}_h^1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) := \sum_l \sum_{k \in \Lambda_l} \oint_{\Gamma_{lk}} (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{lk}) \mathbf{v}_h^{lk}\, d\gamma\, \mathbf{w}_h(m_l)\,, \tag{3.27}$$

$$\tilde{n}_h^2(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) := -\sum_l \sum_{k \in \Lambda_l} \oint_{\Gamma_{lk}} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{lk}\, d\gamma\, \mathbf{v}_h(m_l) \mathbf{w}_h(m_l)\,. \tag{3.28}$$

$\mathbf{v}_h^{lk}$ ist dabei ein gewichtetes Mittel der Geschwindigkeitswerte auf den Kantenmitten m_k und m_l, also

$$\mathbf{v}_h^{lk} := \lambda_{lk} \mathbf{v}_h(m_l) + (1 - \lambda_{lk}) \mathbf{v}_h(m_k)\,, \tag{3.29}$$

wobei die Funktionen λ_{lk}

$$\lambda_{lk} = 1 - \lambda_{kl} \quad , \quad |\lambda_{lk}| \le 1 \tag{3.30}$$

erfüllen.

Damit können wir nun die neue, diskrete Form $\tilde{n}_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)$ wie folgt definieren:

$$\tilde{n}_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) := \sum_l \sum_{k \in \Lambda_l} \oint_{\Gamma_{lk}} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{lk}\, d\gamma\, (1 - \lambda_{lk}(\mathbf{u}_h))(\mathbf{v}_h(m_k) - \mathbf{v}_h(m_l)) \mathbf{w}_h(m_l)\,. \tag{3.31}$$

Bei der Wahl der λ_{lk} hat man gewisse Freiheiten. Wir verwenden die beiden folgenden Varianten:

1.) **Einfaches UPWIND** $\quad \lambda_{lk}(\mathbf{u_h}) = \begin{cases} 1 & : \; x(\mathbf{u_h}) \ge 0 \\ 0 & : \; \text{sonst} \end{cases}\,,$

2.) **(gewichtetes) Samarskij UPWIND** [46] $\quad \lambda_{lk}(\mathbf{u_h}) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{2} + \delta^* x}{1 + \delta^* x} & : \; x(\mathbf{u_h}) \ge 0 \\ \frac{1}{2(1 - \delta^* x)} & : \; \text{sonst} \end{cases}\,.$

Dabei bezeichnet $x := \frac{1}{\nu}\int_{\Gamma_{lk}} \mathbf{u_h}\cdot\mathbf{n_{lk}}\, d\gamma$ ein Maß für die lokale Reynoldszahl.

δ^* ist ein zusätzlicher Dämpfungsparameter, der frei gewählt werden kann. Für $\delta^* \to \infty$ erhält man das einfache Upwindverfahren; die klassische Wahl ist $\delta^* = 1$.

Das Upwind-stabilisierte, diskrete Problem hat also die Gestalt:

Finde $\{\mathbf{u}_h, p_h\} \in H_h \times L_h$, so daß

$$\begin{aligned} \nu a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \tilde{n}_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(p_h, \mathbf{v}_h) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \qquad &\forall\, \mathbf{v}_h \in H_h \quad (3.32)\\ b_h(q_h, \mathbf{u}_h) &= 0 \qquad &\forall\, q_h \in L_h\,. \quad (3.33)\end{aligned}$$

Für die Analyse der obigen Verfahren verweisen wir auf [48] für das einfache Upwind bzw. [46] für das gewichtete Upwind. Das einfache Upwind, das der Verwendung von Rückwärtsdifferenzen entspricht, ist von erster Ordnung Genauigkeit. Es gilt das folgende

Lemma 7. *(siehe [48])*

Für $\nu^{-2}\|\mathbf{f}\|_{-1}$ hinreichend klein, sind die Lösungen $\{\mathbf{u}, p\}$, bzw., $\{\mathbf{u}_h, p_h\}$, eindeutig bestimmt. Wenn zusätzlich $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathbf{H}^2(\Omega) \times \mathrm{H}^1(\Omega)$, dann gilt

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_h + \|p - p_h\|_0 \le ch|\log h|\,. \tag{3.34}$$

Bemerkung 8. *Bei der gewichteten Variante des Upwind Verfahrens kann in einer Raumdimension gezeigt werden (siehe [46]), daß die resultierende Diskretisierung von zweiter Ordnung ist.*

Somit haben wir gesehen, wie ein Upwind-Verfahren für die rotiert-bilinearen Elemente formuliert werden kann. Das einfache Verfahren führt dabei auf M-Matrizen ([36]), so daß auch Standardkomponenten im Rahmen eines Mehrgitterverfahrens eingesetzt werden können. Allerdings ist die Diskretisierung lediglich von erster Ordnung Genauigkeit. Wie in Kapitel 5 beschrieben, eignet es sich daher eher als Vorkonditionierer im Rahmen eines Defektkorrekturverfahrens. Das Samarskij-Upwind verspricht, eine höhere Approximationsordnung zu haben, was durch numerische Tests bestätigt wird. Da sich diese Stabilisierung auch in Hinblick auf die Wahl des Parameters δ^* als sehr robust erwiesen hat, kann es bei den meisten Anwendungen (noch) als 'erste Wahl' gelten. Tests zur Auswirkung der verschiedenen Stabilisierungsvarianten sind in Abschnitt 5.1.1 dargestellt.

3.2.2 Stromlinien-stabilisiertes Galerkinverfahren

Während das oben beschriebenen Upwind-Verfahren eher im Bereich eines Differenzenverfahrens anzusiedeln ist, handelt es sich bei der Stromliniendiffusion um einen Galerkinansatz. Diese Methode wurde ursprünglich von Hughes und Brooks [21] vorgeschlagen. Da an dieser Stelle wieder nur eine kurze Vorstellung des Verfahrens erfolgen kann, sei für eine eingehendere Analyse sowie technische Details auf die Arbeiten von Johnson ([25], [26]), Lube [32] und Zhou [54] verwiesen. Die Stromliniendiffusion für nichtkonforme Elemente, insbesondere das rotiert-bilineare Viereckselement, wurde in jüngster Zeit von Matthies und Tobiska [35] untersucht.

Bei der Darstellung folgen wir dem Zugang von [32] bzw. [35] und verwenden die Stromliniendiffusion in einem 'Least-Squares'-Sinne.

Mit dem Operator

$$N(\mathbf{a};\mathbf{u},p) := -\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p \tag{3.35}$$

kann man die inkompressiblen, stationären Navier-Stokes-Gleichungen wie folgt formulieren:

$$N(\mathbf{u};\mathbf{u},p) = f, \qquad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{3.36}$$

Das diskrete Problem, das es zu lösen gilt, hat die in (3.22) angegebene Gestalt:

Finde ein Paar $\{\mathbf{u_h}, p_h\} \in H_h \times L_h$, so daß

$$\begin{array}{rcll} \nu a_h(\mathbf{u_h},\mathbf{v_h}) + n_h(\mathbf{u_h},\mathbf{u_h},\mathbf{v_h}) + b_h(p_h,\mathbf{v_h}) & = & (f,\mathbf{v_h}) & \forall \mathbf{v_h} \in H_h \\ b_h(q_h,\mathbf{u_h}) & = & 0 & \forall q_h \in L_h. \end{array}$$

Eine der möglichen Formen einer Least-Square Stromliniendiffusion ist es nun, die Form

$$B_G(\mathbf{a};\mathbf{u_h},p_h,\mathbf{v_h}) := \nu a_h(\mathbf{u_h},\mathbf{v_h}) + n_h(\mathbf{a},\mathbf{u_h},\mathbf{v_h}) + b_h(p_h,\mathbf{v_h}) \tag{3.37}$$

elementweise zu erweitern zu

$$B_{SG}(\mathbf{a};\mathbf{u_h},p_h,\mathbf{v_h},q_h) := B_G(\mathbf{a};\mathbf{u_h},p_h,\mathbf{v_h}) + \sum_{K\in\mathbf{T_h}} (N(\mathbf{a};\mathbf{u_h},p_h),\psi(\mathbf{a},\mathbf{v_h},q_h))_K, \tag{3.38}$$

und mit der modifizierten rechten Seite

$$L_{SG}(\mathbf{a};\mathbf{v},q) := (\mathbf{f},\mathbf{v}) + \sum_{K\in\mathbf{T_h}} (\mathbf{f},\psi(\mathbf{a},\mathbf{v},q))_K \tag{3.39}$$

das folgende Problem zu lösen:

Finde $(\mathbf{u_h},p_h) \in \mathbf{H_h} \times L_h$, so daß

$$\begin{array}{rcll} B_{SG}(\mathbf{u_h};\mathbf{u_h},p_h,\mathbf{v_h},q_h) & = & L_{SG}(\mathbf{u_h};\mathbf{v_h},q_h) & \forall \mathbf{v_h} \in H_h \\ b_h(q_h,\mathbf{u_h}) & = & 0 & \forall q_h \in L_h \end{array} \tag{3.40}$$

Dabei sind die $\psi(\mathbf{a},\mathbf{v},q)$ geeignet zu wählende, modifizierte Testfunktionen aus $\mathbf{H_h}$.

Die Änderung des Problemes ist konsistent, da für die exakte Lösung von (3.36) die neu hinzugekommenen Terme identisch sind, also die Differenz

$$(N(\mathbf{u};\mathbf{u},p) - \mathbf{f},\psi(\mathbf{u},\mathbf{v},q))_K \tag{3.41}$$

verschwindet. Weitere Least-Square Terme für die Kontinuitätsgleichung oder Sprungterme, die aus unstetigen Druckapproximationen herrühren, können noch addiert werden. Für weitere Informationen sei hier auf die schon mehrfach zitierte Literatur verwiesen, besonders [32], aber auch Becker [6].

Bei der Wahl von ψ folgen wir wieder [32] bzw. [42] und setzen:

$$\psi(\mathbf{a}, \mathbf{v}, q)|_K := \delta_K \left((\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \nu\Delta\mathbf{v} + \nabla q\right)_K \quad \forall K \in \mathbf{T_h} \tag{3.42}$$

mit einem elementweise definierten Parameter δ_K, der noch zu bestimmen ist.

Bei den verwendeten nichtparametrischen rotiert-bilinearen Viereckselementen mit stückweise konstanter Druckapproximation vereinfachen sich diese Terme, da auf jedem Element $\Delta\mathbf{v_h} = \nabla q_h = 0$ gilt. Somit bleiben von der Stabilisierung lediglich zwei Terme übrig, nämlich

$$\delta_K \left((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}\right)_K , \tag{3.43}$$

sowie die Modifikation der rechten Seite

$$\delta_K(\mathbf{f}, (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v})_K. \tag{3.44}$$

In den meisten praktischen Anwendungen verschwindet allerdings der Kraftterm, das heißt $\mathbf{f} \equiv 0$. Daher werden wir im folgenden diesen Teil der Stabilisierung bei der Analyse sowie bei den Tests zur Parameterwahl vernachlässigen. Die von uns verwendete und untersuchte Stromlinien-Stabilisierung besteht somit einzig aus dem Term (3.43). Wenn im Folgenden also davon die Rede ist, daß Stromliniendiffusion verwendet wurde, ist das folgende stabilisierte Problem gemeint:

Finde ein Paar $\{\mathbf{u_h}, p_h\} \in \mathbf{H_h} \times L_h$, so daß

$$\begin{array}{rcll} \nu a_h(\mathbf{u_h}, \mathbf{v_h}) + \tilde{n}_h(\mathbf{u_h}, \mathbf{u_h}, \mathbf{v_h}) + b_h(p_h, \mathbf{v_h}) & = & (f, \mathbf{v_h}) & \forall \mathbf{v_h} \in \mathbf{H_h} \\ b_h(q_h, \mathbf{u_h}) & = & 0 & \forall q_h \in L_h, \end{array} \tag{3.45}$$

wobei

$$\tilde{n}_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) := n_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + \sum_{K \in \mathbf{T_h}} \delta_K(\mathbf{u}_h \cdot \nabla\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h \cdot \nabla\mathbf{w}_h)_{|K} . \tag{3.46}$$

Die Modifikation des Problemes kann man auch als elementweise Stabilisierung durch einen zusätzlichen, anisotropen Diffusionsterm der Gestalt

$$-\delta_K(u_1^2\mathbf{u_{xx}} + 2u_1u_2\mathbf{u_{xy}} + u_2^2\mathbf{u_{yy}}) \tag{3.47}$$

interpretieren. Dies unterscheidet die Stromliniendiffusion vom UPWIND-Verfahren, von dem man zeigen kann, daß dies der Addition einer 'homogenen' künstlichen Diffusion entspricht.

Zur Lösung der nichtlinearen Probleme wird ein Newton-artiges Iterationsverfahren angewandt, bei dem in jedem Iterationsschritt die linearisierten Navier-Stokes-Gleichungen zu lösen sind (Die nichtlinearen Lösungsmethoden werden in Kapitel 5 detailliert behandelt, daher soll an dieser Stelle darauf nicht weiter eingegangen werden). Bei der Analyse können wir also $\mathbf{a}$ als gegeben voraussetzen. (Im Falle der einfachen Fixpunktiteration ist es z.B. gerade die Iterierte aus dem vorhergehenden Schritt). Schreiber [42] hat die obige Methode analysiert. Wir wollen hier lediglich die wichtigsten Resultate zitieren. Dazu definieren wir zuerst eine dem Problem angepaßte Norm durch

$$|||\mathbf{u_h}|||^2 := \nu\|\nabla\mathbf{u_h}\|^{\mathbf{2}}_{\mathbf{h}} + \sum_{\mathbf{K}\in\mathbf{T_h}} \delta_{\mathbf{K}}\|(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{u_h}\|^{\mathbf{2}}_{\mathbf{K}}. \tag{3.48}$$

Damit gilt mit $\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}} := (\mathbf{v_h}, q_h) \in \mathbf{H_h} \times L_h$:

Zitat 9. *Für $\delta_K C^2 \nu \leq h^2$ (mit einer gitterabhängigen Konstante C), ist die Bilinearform $B_{SG}(\mathbf{a};\cdot,\cdot)$ positiv definit, d.h.:*

$$B_{SG}(\mathbf{a};\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}},\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}}) \geq \frac{1}{2}|||\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}}|||^2, \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}} \in \mathbf{H_h} \times L_h. \tag{3.49}$$

Dieses Ergebnis führt dann zu der folgenden Fehlerabschätzung:

Zitat 10. *Unter den Bedingungen von Zitat 9 gelten für die stabilisierte Galerkinmethode mit dem nichtkonformen rotiert-bilinearen Element die folgenden Fehlerabschätzungen für Druck und Geschwindigkeiten ($\delta := \max\{\delta_K\}$):*

$$\begin{aligned}
|||\mathbf{u}-\mathbf{u_h}||| &\leq C\left(\nu h + \nu^{1/2}h + \delta^{-1/2}h^2 + \delta^{1/2}h\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}_\infty} + \nu\delta^{\mathbf{1/2}}\right)\|\nabla^2\mathbf{u}\| \\
&\quad + C\left(h + \min\{\delta^{1/2}, \delta\nu^{-1/2}\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}_\infty}\}\right)\|\nabla p\| \\
\|p-p_h\| &\leq C\left(\nu h + h^2\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}_\infty} + \delta\mathbf{h}\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}_\infty}\right)\|\nabla^2\mathbf{u}\| \\
&\quad + C\left(h + \delta\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}_\infty}\right)\|\nabla p\| + C\left(h + \delta\|\mathbf{a}\|^{\mathbf{2}}_{\mathbf{L}_\infty}\right)|||\mathbf{u}-\mathbf{u_h}|||.
\end{aligned}$$

Für den Fall konvektionsdominierter Probleme mit $\nu \leq h_K$ und mit $\delta_K \sim h_k$ ergibt sich daraus ein Fehlerverhalten in der 'Stromliniennorm' von $O(h^{3/2})$.

Eine entscheidende Größe für die Effizienz der Stromliniendiffusion ist, wie auch die numerischen Tests zeigen werden, die Wahl des Parameters δ_K. Ein üblicher Ansatz, der z.B. in [32] gefunden werden kann, geht von der sogenannten *lokalen Reynoldszahl* aus, also

$$Re_K = \frac{||u||_K \cdot h_K}{\nu}. \tag{3.50}$$

$||u||_K$ ist hier die gemittelte Geschwindigkeit über das Element K, h_K die "lokale Gitterweite", die wir, besonders im Hinblick auf stark anisotrope Gitter, weiter unten noch eingehender diskutieren werden. Damit definieren wir den lokalen Gewichtsfaktor δ_K durch

$$\delta_K = \delta^* \cdot \frac{h_K}{||u||_\Omega} \cdot \frac{2Re_K}{1+Re_K}, \quad \delta^* \in \mathbb{R}^+. \tag{3.51}$$

Diese Definition von δ_K hat Ähnlichkeiten mit der Definition des Samarskij-Upwind, das wir im vorherigen Abschnitt vorgestellt hatten. Auch in diesem Fall wird, wenn die lokale Reynoldszahl groß wird, eine künstliche Diffusion der Größenordnung $O(h)$ addiert. In Regionen jedoch, in denen die Strömung nicht so sehr konvektionsdominiert ist, also Regionen, in denen $Re_K \to 0$, nimmt die Stabilisierung immer mehr ab, so daß man im Grenzfall die unstabilisierte Diskretisierung 2. Ordnung erhält.

Für dieses Stromlinienverfahren kann man erwarten, daß es im Falle kleiner Reynoldszahlen, wo es ja nahezu der zentralen Diskretisierung 2. Ordnung entspricht, eine Konvergenzordnung der Größenordnung $O(h^2)$ zeigen wird. Für konforme Elemente zeigt die Analyse (siehe z.B. Johnson ([25], [26]), Lube [32] und Zhou [54]) auch tatsächlich, zumindest für uniforme Gitter, eine zu erwartende Konvergenzordnung zwischen $O(h^2)$ und $O(h^{3/2})$ für konvektionsdominierte Probleme. Ob vergleichbare Resultate auch für nichtkonforme Elemente gelten, ist zur Zeit noch ein offenes Problem. Tobiska und Matthies [35] zeigen, daß die für den Beweis im konformen Fall essentiellen Superkonvergenzeigenschaften im Falle der nichtkonformen Elemente selbst auf Tensorproduktgittern nicht gelten. John et al [23] benötigen zum Beweis ihrer Stabilitäts- und Konvergenzaussagen noch die Hinzunahme von gewissen Sprungtermen in die Bilinearform, während Stynes und Tobiska [43] zeigen können, daß man zumindest auf regelmäßigen Gittern auch ohne diese Sprungterme die Stabilität der Methode sowie eine Konvergenzordnung $O(h^{3/2})$ in der Stromliniennorm erhält.

Trotzdem ist die Methode dem Upwindverfahren potentiell überlegen, das im schlechtesten Fall lediglich die Genauigkeit $O(h)$ hat. Allerdings ist bei der praktischen Anwendung der Stromliniendiffusionsmethode die Wahl der Größen δ^* sowie h_K von großer Bedeutung. Gerade bei den stark anisotropen Gittern, denen wir hier auch besondere Aufmerksamkeit widmen, ist es nicht von vornherein klar, was die angemessene lokale Gitterweite ist. Für die folgenden Tests haben wir h_β, eine "Gitterweite in Strömungsrichtung" gewählt, das heißt, für eine elementweise gemittelte Strömung u_K wird ermittelt, welche Strecke ein Teilchen mit dieser Bewegungsrichtung in dem Element zurücklegt (siehe dazu Abb. 3.15).

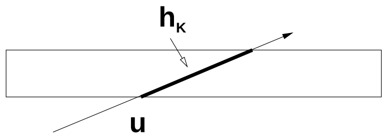


Abbildung 3.15: Bestimmung von h_β als lokale Gitterweite h_K

Somit wird der Verzerrung eines Elementes in Richtung der Strömung Rechnung getragen. Als Alternativen bieten sich noch an, die maximale oder minimale Verbindungslänge zweier gegenüberliegender Seitenmitten (h_{max}, h_{min}), oder die Wurzel aus der Elementfläche $(\sqrt{AREA})$ zu wählen. Am Ende des folgenden Abschnittes werden wir anhand numerischer Tests zeigen, daß sich vor allem die letzten beiden Strategien zur Wahl von h negativ auf die Approximationsgüte auswirken und die lokale Wahl h_β vorzuziehen ist.

Übrig bleibt noch der globale Parameter δ^*. Dieser Parameter hat einen stärkeren Einfluß auf das Verfahren als der gleichnamige Parameter beim Upwind. Während beim Samarskij-Upwind für $\delta^*(UPW) \to \infty$ das Verfahren auf das einfache Upwind führt, führt bei der Stromliniendiffusion eine immer weitere Erhöhung von δ^* zu einer immer größeren Überstabilisierung und damit zu einer geringeren Genauigkeit. Für $\delta^* \to 0$ erhalten wir wieder die zentrale Diskretisierung, also gar keine Stabilisierung. Bei praktisch relevanten Strömungen wird man den Wert von δ^* also in einem Korridor zwischen "zu viel" und "zu wenig" Stabilisierung wählen müssen. Der Bereich, in dem sich der Parameter üblicherweise bewegt, ist nach unserer Erfahrung $\delta^* \in [0.1, \ldots, 2]$.

Im nächsten Abschnitt widmen wir uns einem Vergleich der beiden Methoden in puncto Genauigkeit, aber auch mit besonderem Augenmerk auf dem Aspekt der Robustheit

3.2.3 Numerischer Vergleich

Zum Abschluß des Kapitels über Stabilisierung wollen wir die beiden Verfahrensklassen an einem realistischen Beispiel miteinander vergleichen. Es handelt sich um eine 2d-Konfiguration der Umströmung eines Zylinders, wie in dem DFG-Benchmark von 1995 (siehe [38]). Einige der Ergebnisse können auch in [49] nachgelesen werden. Das Grobgitter 'Level 1' ist in Abbildung 3.16 zu sehen, alle weiteren Gitter entstehen durch regelmäßige Verfeinerung. Es wurden Rechnungen für zwei verschiedenen Reynoldszahlen, nämlich $Re = 20$ und $Re = 50$ durchgeführt. Die Reynoldszahl von ungefähr 50 ist die obere Grenze, bei der die Strömung noch stationär bleibt.

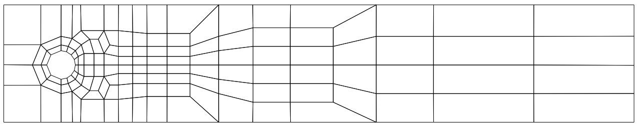


Abbildung 3.16: Grobgitter für die Umströmung eines Zylinders

Die Tabellen 3.1 und 3.2 zeigen den $l2 - Fehler$, wobei die Lösung auf dem Level 7 (entspricht ca. 3 Millionen Unbekannten) als "exakte" Referenzlösung genommen wurde. α bezeichnet die numerisch gemessene Konvergenzordnung $O(h^\alpha)$. Die Werte von α beim Druckfehler sind fast durchweg größer als 1, obgleich lediglich ein stückweise konstanter Ansatz für den Druck verwendet wurde. Dieser Superaproximationseffekt entsteht dadurch, daß wir den Druck für das Postprocessing auf die Knoten des Gitters interpoliert haben. Weitere Modifikationen des Druckes wurden nicht vorgenommen (siehe dazu auch [49]).

Verglichen wurden dabei das Samarskij-Upwind sowie die Stromliniendiffusion für verschiedene Parameter δ^*, einschließlich der Grenzfälle UPW-∞, also dem einfachen UPWIND, sowie der zentralen Diskretisierung C, also dem Fall SD-0.

Bei beiden Verfahren sieht man den großen Einfluß, den der Parameter δ^* auf das Ergebnis hat, ebenso wirkt sich in beiden Verfahren eine Vergrößerung des Parameters negativ auf die globale Approximationsgüte aus. Das Stromliniendiffusionsverfahren liefert bei optimaler Parameterwahl bessere Approximationen als das 'optimale' UPWIND-Verfahren. Jedoch unterscheiden sich diese Werte nur relativ wenig, und bei der Wahl eines 'schlechten' Parameters δ^* kann die Stromliniendiffusion schnell schlechtere Ergebnisse liefern als das 'optimale' UPWIND UPW-0.1 (siehe dazu besonders Tabelle 3.1). Während sich aber bei allen Test die Wahl von $\delta^* = 0.1$ als ideal für das Upwind erwiesen hat, ist die Bestimmung des optimalen δ^* für die Stromliniendiffusion schwieriger, und ist vor allem von Problem zu Problem verschieden. Die zentrale Diskretisierung liefert auf groben Gittern schlechtere Resultate, als beispielsweise die optimale Stromliniendiffusion. Bei $Re = 50$

		$l_2(\mathbf{u})$	α	$l_2(p)$	α
UPW-0.1	2	$2.81 \cdot 10^{-2}$		$8.00 \cdot 10^{-3}$	
	3	$9.21 \cdot 10^{-3}$	1.61	$3.10 \cdot 10^{-3}$	1.37
	4	$3.31 \cdot 10^{-3}$	1.48	$9.72 \cdot 10^{-4}$	1.68
	5	$8.83 \cdot 10^{-4}$	1.91	$2.58 \cdot 10^{-4}$	1.92
UPW-1.0	2	$3.82 \cdot 10^{-2}$		$1.67 \cdot 10^{-2}$	
	3	$2.15 \cdot 10^{-2}$	0.83	$8.60 \cdot 10^{-3}$	0.96
	4	$1.03 \cdot 10^{-2}$	1.06	$4.01 \cdot 10^{-3}$	1.10
	5	$4.30 \cdot 10^{-3}$	1.26	$1.59 \cdot 10^{-3}$	1.33
UPW-∞	2	$4.41 \cdot 10^{-2}$		$2.21 \cdot 10^{-2}$	
	3	$2.92 \cdot 10^{-2}$	0.59	$1.29 \cdot 10^{-2}$	0.78
	4	$1.75 \cdot 10^{-2}$	0.74	$7.37 \cdot 10^{-3}$	0.81
	5	$9.74 \cdot 10^{-3}$	0.85	$4.09 \cdot 10^{-3}$	0.85
SD-0.2	2	$8.97 \cdot 10^{-3}$		$5.32 \cdot 10^{-3}$	
	3	$3.64 \cdot 10^{-3}$	1.31	$2.14 \cdot 10^{-3}$	1.32
	4	$1.36 \cdot 10^{-3}$	1.43	$7.46 \cdot 10^{-4}$	1.53
	5	$4.57 \cdot 10^{-4}$	1.58	$2.31 \cdot 10^{-4}$	1.70
SD-1.0	2	$1.53 \cdot 10^{-2}$		$8.08 \cdot 10^{-3}$	
	3	$8.80 \cdot 10^{-3}$	0.80	$4.32 \cdot 10^{-3}$	0.91
	4	$4.59 \cdot 10^{-3}$	0.94	$1.95 \cdot 10^{-3}$	1.15
	5	$2.03 \cdot 10^{-3}$	1.18	$7.62 \cdot 10^{-4}$	1.36
C	2	$1.06 \cdot 10^{-2}$		$7.27 \cdot 10^{-3}$	
	3	$3.62 \cdot 10^{-3}$	1.56	$2.66 \cdot 10^{-3}$	1.46
	4	$9.85 \cdot 10^{-4}$	1.88	$7.91 \cdot 10^{-4}$	1.76
	5	$2.35 \cdot 10^{-4}$	2.07	$2.17 \cdot 10^{-4}$	1.87

Tabelle 3.1: Approximationsverhalten bei $Re = 20$

		$l_2(\mathbf{u})$	α	$l_2(p)$	α
UPW-0.1	2	$1.23 \cdot 10^{-1}$		$9.53 \cdot 10^{-2}$	
	3	$6.01 \cdot 10^{-2}$	1.04	$4.73 \cdot 10^{-2}$	1.00
	4	$2.42 \cdot 10^{-2}$	1.32	$1.90 \cdot 10^{-2}$	1.32
	5	$8.76 \cdot 10^{-3}$	1.47	$6.10 \cdot 10^{-3}$	1.64
UPW-1.0	2	$1.73 \cdot 10^{-1}$		$1.45 \cdot 10^{-1}$	
	3	$1.14 \cdot 10^{-1}$	0.60	$8.55 \cdot 10^{-1}$	0.76
	4	$6.20 \cdot 10^{-2}$	0.88	$4.79 \cdot 10^{-2}$	0.84
	5	$2.80 \cdot 10^{-2}$	1.14	$2.29 \cdot 10^{-2}$	1.06
UPW-∞	2	$1.80 \cdot 10^{-1}$		$1.61 \cdot 10^{-1}$	
	3	$1.31 \cdot 10^{-1}$	0.46	$1.02 \cdot 10^{-1}$	0.66
	4	$8.42 \cdot 10^{-2}$	0.64	$6.38 \cdot 10^{-2}$	0.68
	5	$4.82 \cdot 10^{-2}$	0.81	$3.79 \cdot 10^{-2}$	0.75
SD-0.3	2	$3.75 \cdot 10^{-2}$		$3.11 \cdot 10^{-2}$	
	3	$1.29 \cdot 10^{-2}$	1.54	$1.47 \cdot 10^{-2}$	1.08
	4	$5.56 \cdot 10^{-3}$	1.22	$5.99 \cdot 10^{-3}$	1.30
	5	$2.21 \cdot 10^{-3}$	1.34	$2.08 \cdot 10^{-3}$	1.53
SD-1.0	2	$2.46 \cdot 10^{-2}$		$4.72 \cdot 10^{-2}$	
	3	$2.70 \cdot 10^{-2}$		$2.76 \cdot 10^{-2}$	0.78
	4	$1.48 \cdot 10^{-2}$	0.87	$1.36 \cdot 10^{-2}$	1.02
	5	$7.15 \cdot 10^{-3}$	1.05	$5.90 \cdot 10^{-3}$	1.21
C	2	div.		div.	
	3	$3.72 \cdot 10^{-2}$		$2.65 \cdot 10^{-2}$	
	4	$1.11 \cdot 10^{-2}$	1.80	$1.22 \cdot 10^{-2}$	1.12
	5	$2.67 \cdot 10^{-3}$	2.06	$4.04 \cdot 10^{-3}$	1.60

Tabelle 3.2: Approximationsverhalten bei $Re = 50$

konvergiert das Verfahren auf Level 3 noch nicht einmal. Wenn die Gitterweite h sowie die Reynoldszahl groß sind, ist also eine Stabilisierung stets vorteilhaft. Aufgrund der höheren Ordnung (asymptotisch $O(h^2)$) liefert die zentrale Diskretisierung ab einer gewissen Gitterfeinheit die genauesten Lösungen. Die zentrale Diskretisierung läßt sich hierbei allerdings stets nur im Rahmen eines Defektkorrekturverfahrens einsetzen, bei dem als Vorkonditionierer eine entsprechende Stabilisierung verwendet wird (siehe [49]). Direkt mit Hilfe eines Mehrgitterverfahrens lassen sich die Gleichungssysteme aus der zentralen Diskretisierung nicht lösen.

Nach diesem Vergleich bezüglich globaler Approximationsgüten wollen wir noch den Einfluß der verschiedenen Stabilisierungen auf gewisse lokale Größen untersuchen, und zwar die Lift- und Drag-Koeffizienten, also den Auftrieb und den Widerstandsbeiwert, für die ausschließlich Größen an der Kontur des Zylinders abgegriffen werden. Wie man in Tabelle 3.3 erkennen kann, bleiben die Ergebnisse, die wir aus dem Verhalten der globalen Fehler gewonnen haben, auch hier richtig. Allerdings sieht man, daß hier das UPW-0.1, im Gegensatz zum globalen l_2-Fehler sogar häufig bessere Ergebnisse liefert, als die SD-Varianten. Lediglich bei sehr feinen Gittern liefern die besten Stromliniendiffusionsvarianten und auch die zentrale Diskretisierung etwas bessere Werte.

Bisher waren die von uns verwendeten Gitter alle vergleichsweise regelmäßig und enthiel-

	δ^*	Level 3	Level 4	Level 5	Level 6	Level 7	Referenz
	Drag für $Re = 20$						
UPW	0.1	5.5810	5.5608	5.5657	5.5718	5.5755	**5.576**
	1.0	6.0199	5.7054	5.6011	5.5793	5.5771	**5.576**
	∞	6.4863	6.0203	5.7802	5.6717	5.6230	**5.576**
SD	0.2	5.6770	5.6299	5.5953	5.5821	5.5787	**5.576**
	1.0	6.3836	5.9674	5.7269	5.6282	5.5931	**5.576**
C		5.5549	5.5638	5.5677	5.5724	5.5756	**5.576**
	Drag für $Re = 50$						
UPW	0.1	3.9213	3.7387	3.6958	3.6915	3.6924	**3.69**
	1.0	4.3140	3.8904	3.7308	3.6939	3.6908	**3.69**
	∞	4.5370	4.0750	3.8503	3.7585	3.7221	**3.69**
SD	0.3	3.9764	3.8409	3.7521	3.7137	3.7000	**3.69**
	1.0	4.4380	4.0945	3.8705	3.7617	3.7168	**3.69**
C		3.9356	3.7700	3.7111	3.6966	3.6939	**3.69**
	Lift für $Re = 20$						
UPW	0.1	0.00487	0.00913	0.01014	0.01043	0.01054	**0.0106**
	1.0	-0.00280	0.00647	0.00993	0.01058	0.01063	**0.0106**
	∞	-0.00235	0.00673	0.01040	0.01128	0.01119	**0.0106**
SD	0.2	0.00613	0.00796	0.00949	0.01014	0.01045	**0.0106**
	1.0	-0.00117	0.00434	0.00779	0.00944	0.01016	**0.0106**
C		0.00538	0.00803	0.00973	0.01031	0.01052	**0.0106**
	Lift für $Re = 50$						
UPW	0.1	-0.01353	-0.01013	-0.01018	-0.01060	-0.01072	**-0.0108**
	1.0	-0.02223	-0.01367	-0.01051	-0.01014	-0.01043	**-0.0108**
	∞	-0.02414	-0.01606	-0.01245	-0.01113	-0.01074	**-0.0108**
SD	0.3	-0.01098	-0.01154	-0.01122	-0.01099	-0.01085	**-0.0108**
	1.0	-0.01652	-0.01362	-0.01194	-0.01127	-0.01098	**-0.0108**
C		-0.00844	-0.01109	-0.01109	-0.01090	-0.01083	**-0.0108**

Tabelle 3.3: Drag und Lift Koeffizienten für $Re = 20$ and $Re = 50$

ten keine besonders stark verzerrten Elemente. Abschließend wollen wir auch noch das Verhalten der verschiedenen Stabilisierungen auf Gitter mit stark anisotropen Elementen untersuchen. Die Geometrie ist ähnlich wie bisher, allerdings wird nun ein Quader umströmt. Um das Hindernis herum, sowie im Nachlauf enthält das Grobgitter langgestreckte Elemente. Abbildung 3.17 zeigt das Grobgitter 'ANISO S1', mit einem maximalen Seitenverhältnis von etwa 10. Die Gitter 'ANISO S2' sowie 'ANISO S3' haben dieselbe Struktur, jedoch wird durch das Verschieben der innersten Gitterlinie in Richtung des Quaders ein Seitenverhältnis von etwa 10^3 (beim Gitter S2) beziehungsweise etwa 10^5 (beim Gitter S3) erzeugt.

Die Ergebnisse sind in den Tabellen 3.4 bis 3.6 dargestellt. Der Referenzwert wurde durch Rechnung auf einem einmal verfeinerten Gitter sowie geeigneter Extrapolation gewonnen. Wieder sieht man deutlich, daß die zentrale Diskretisierung auf den gröberen Gitterleveln nur schlechte oder gar keine Ergebnisse liefert. Selbst auf dem feinsten hier gerechneten Level sind die Werte der zentralen Diskretisierung teilweise noch merklich schlechter als bei den besten stabilisierten Verfahren, wie beispielsweise der 'Lift', also der Auftriebs-

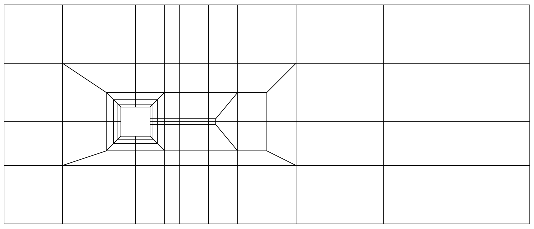


Abbildung 3.17: Grobgitter S1 für die Umströmung eines Quaders

wert für $Re = 20$. Bei der Stromliniendiffusion erkennt man, daß nicht nur die Wahl des Parameters δ^* einen großen Einfluß auf das Ergebnis hat, sondern auch in starkem Maße die Berechnung der Gitterweite h. Die Wahl $h := h_{min}$ oder $h := \sqrt{AREA}$ liefern hierbei durchweg schlechtere, und teilweise sogar deutlich schlechtere Ergebnisse, als $h := h_{max}$ bzw. $h := h_\beta$. Letztere liefern in etwa vergleichbare Werte, wobei besonders bei der höher-

	δ^*	Level 3	Level 4	Level 5	Level 6	**Referenz**
	Drag für Re=20					
UPW-0.1		4,6521	4,6079	4,6334	4,6693	**4,71**
SD-0.2	h_β	4,7064	4,6702	4,6651	4,6814	**4,71**
	$\sqrt{AREA}$	4,6883	4,6611	4,6606	4,6795	**4,71**
	h_{min}	4,6712	4,6472	4,6536	4,6768	**4,71**
	h_{max}	4,7392	4,7014	4,6832	4,6889	**4,71**
C		2,2272	2,3386	4,6374	4,6707	**4,71**
	Drag für Re=50					
UPW-0.1		3,6175	3,3147	3,2228	3,2195	**3,24**
SD-0.3	h_β	3,4837	3,3355	3,2586	3,2374	**3,24**
	$\sqrt{AREA}$	3,4599	3,3278	3,2555	3,2363	**3,24**
	h_{min}	3,4587	3,3101	3,2405	3,2288	**3,24**
	h_{max}	3,5167	3,3983	3,3059	3,2632	**3,24**
C		–	1,3510	0,8640	3,2205	**3,24**
	Lift für Re=20					
UPW-0.1		0,002924	-0,002248	-0,002504	-0,002012	**-0,0013**
SD-0.2	h_β	-0,012949	-0,006465	-0,003384	-0,002063	**-0,0013**
	$\sqrt{AREA}$	-0,023674	-0,013299	-0,006984	-0,003706	**-0,0013**
	h_{min}	-0,031076	-0,017159	-0,008871	-0,004491	**-0,0013**
	h_{max}	-0,011192	-0,006219	-0,003333	-0,002055	**-0,0013**
C		-0,341680	0,122131	-0,005065	-0,002653	**-0,0013**
	Lift für Re=50					
UPW-0.1		-0,017433	-0,012856	-0,006232	-0,002768	**-0,0020**
SD-0.3	h_β	-0,020174	-0,010768	-0,005881	-0,003120	**-0,0020**
	$\sqrt{AREA}$	-0,025466	-0,013096	-0,006786	-0,003441	**-0,0020**
	h_{min}	-0,032648	-0,015255	-0,007267	-0,003577	**-0,0020**
	h_{max}	-0,016377	-0,009672	-0,005593	-0,003094	**-0,0020**
C		–	-0,601230	-0,05725	-0,002578	**-0,0020**

Tabelle 3.4: Gitter ANISO S1

	δ^*	Level 3	Level 4	Level 5	Level 6	**Referenz**
	Drag für Re=20					
UPW-0.1		4,7867	4,6923	4,6843	4,7007	**4,71**
SD-0.2	h_β	4,7880	4,7464	4,7175	4,7141	**4,71**
	$\sqrt{AREA}$	4,7706	4,7348	4,7114	4,7113	**4,71**
	h_{min}	4,7530	4,7221	4,7049	4,7088	**4,71**
	h_{max}	4,8147	4,7697	4,7311	4,7199	**4,71**
C		4,7185	4,6859	4,6862	4,7025	**4,71**
	Drag für Re=50					
UPW-0.1		3,6922	3,3930	3,2716	3,2467	**3,24**
SD-0.3	h_β	3,5016	3,4092	3,3187	3,2744	**3,24**
	$\sqrt{AREA}$	3,4802	3,3910	3,3077	3,2688	**3,24**
	h_{min}	3,4682	3,3753	3,2964	3,2631	**3,24**
	h_{max}	3,5387	3,4453	3,3448	3,2889	**3,24**
C		3,5688	–	3,2650	3,2469	**3,24**
	Lift für Re=20					
UPW-0.1		0,003279	-0,001787	-0,002166	-0,001699	**-0,0013**
SD-0.2	h_β	-0,013064	-0,006289	-0,003103	-0,001839	**-0,0013**
	$\sqrt{AREA}$	-0,023359	-0,012925	-0,006657	-0,003459	**-0,0013**
	h_{min}	-0,030708	-0,016792	-0,008556	-0,004254	**-0,0013**
	h_{max}	-0,010907	-0,005846	-0,002996	-0,001809	**-0,0013**
C		-0,038793	-0,012323	-0,004739	-0,002407	**-0,0013**
	Lift für Re=50					
UPW-0.1		-0,017270	-0,012075	-0,005804	-0,002595	**-0,0020**
SD-0.3	h_β	-0,016976	-0,009303	-0,005369	-0,002873	**-0,0020**
	$\sqrt{AREA}$	-0,023272	-0,011839	-0,006140	-0,003144	**-0,0020**
	h_{min}	-0,028367	-0,013283	-0,006413	-0,003236	**-0,0020**
	h_{max}	-0,015371	-0,009221	-0,005324	-0,002939	**-0,0020**
C		-0,063812	–	-0,003916	-0,002425	**-0,0020**

Tabelle 3.5: Gitter ANISOS2

en Reynoldszahl das lokale h_β etwas besser ist. Dies rechtfertigt die bereits weiter vorne beschriebene Wahl von h_β als bevorzugten Schrittweitenparameter. Bei alledem fällt auf, daß zumindest in diesem Beispiel der maximale Aspect-Ratio des Gitters keine Rolle für die Genauigkeit des Ergebnisses spielt. Die Gitter S2 und S3 liefern aufgrund der bessern Auflösung in der Nähe des Hindernisses bessere Werte, als das isotrope Gitter S1.

Auch auf die Upwind-Stabilisierung $UPW - 0.1$ hat der Aspect-Ratio keinen negativen Einfluß. Und wie auch schon bei der DFG-Benchmark-Konfiguration (Abbildung 3.16) liefert das Verfahren für die lokalen Größen bessere Approximationen, als die Stromlinienstabilisierungen. Im Gegensatz zur zentralen Diskretisierung sind mit dieser Upwind-Stabilisierung schon auf gröberen Leveln akzeptable Resultate zu erzielen.

Eine eingehende Analyse der Stabilisierungsverfahren war nicht das Ziel dieser Arbeit. Daher kann an dieser Stelle nicht abschließend das eine oder andere Verfahren als das überlegene gewertet werden. Die Stromliniendiffusion hat aufgrund der theoretisch höher-

	δ^*	Level 3	Level 4	Level 5	Level 6	**Referenz**
	Drag für Re=20					
UPW-0.1		4,8448	4,7403	4,7079	4,7070	**4,71**
	h_β	4,7885	4,7471	4,7138	4,7148	**4,71**
SD-0.2	$\sqrt{AREA}$	4,7706	4,7355	4,7122	4,7121	**4,71**
	h_{min}	4,7539	4,7229	4,7057	4,7096	**4,71**
	h_{max}	4,8151	4,7038	4,7319	4,7206	**4,71**
C		2,2846	2,4404	4,6870	4,7024	**4,71**
	Drag für Re=50					
UPW-0.1		3,6922	3,3930	3,2716	3,2467	**3,24**
	h_β	3,5016	3,4092	3,3187	3,2744	**3,24**
SD-0.3	$\sqrt{AREA}$	3,4802	3,3910	3,3077	3,2688	**3,24**
	h_{min}	3,4683	3,3753	3,2964	3,2631	**3,24**
	h_{max}	3,5387	3,4455	3,3448	3,2889	**3,24**
C		–	3,3791	3,2641	3,2469	**3,24**
	Lift für Re=20					
UPW-0.1		0,003953	-0,001287	-0,001873	-0,001669	**-0,0013**
	h_β	-0,013098	-0,006246	-0,003114	-0,001836	**-0,0013**
SD-0.2	$\sqrt{AREA}$	-0,023372	-0,012932	-0,006665	-0,003463	**-0,0013**
	h_{min}	-0,030724	-0,016804	-0,008559	-0,004266	**-0,0013**
	h_{max}	-0,010923	-0,005889	-0,003007	-0,001801	**-0,0013**
C		-0,300970	-0,099173	-0,004739	-0,002407	**-0,0013**
	Lift für Re=50					
UPW-0.1		-0,017269	-0,012075	-0,005802	-0,002595	**-0,0020**
	h_β	-0,016976	-0,009270	-0,005345	-0,002882	**-0,0020**
SD-0.3	$\sqrt{AREA}$	-0,023267	-0,011846	-0,006101	-0,003154	**-0,0020**
	h_{min}	-0,028367	-0,013317	-0,006494	-0,003249	**-0,0020**
	h_{max}	-0,015373	-0,009227	-0,005322	-0,002943	**-0,0020**
C		–	0,07228	-0,006161	-0,002431	**-0,0020**

Tabelle 3.6: Gitter ANISOS3

en Konvergenzordnung sicher ein sehr großes Potential. Allerdings erweisen sich zum derzeitigen Zeitpunkt die Probleme des richtigen 'Feintunings' als sehr hinderlich. Da wir in dieser Arbeit das Augenmerk darauf gerichtet haben, ein robustes Verfahren zur Lösung der stationären Navier-Stokes Gleichungen zu präsentieren, ziehen wir (noch) das Samarskij-Upwind mit $\delta^* = 0.1$ jeder Stromliniendiffusionsmethode vor.

In jüngster Zeit wurden von Kuzmin und Turek sehr vielversprechende Stabilisierungsmethoden, sogenannte Flux Correction Tools (FCT) sowie Total Variation Diminishing (TVD) Verfahren entwickelt, die direkt an der Matrix der zentralen Diskretisierung ansetzen (siehe [28] und [30], sowie [29] für TVD). Diese Methoden sind parameterfrei und könnten in Zukunft eine Alternative zu Upwind- und Stromliniendiffusion darstellen. Die Entwicklung ist noch relativ am Anfang, verspricht aber, ein großes Potential zu haben.

Kapitel 4

Das lineare Mehrgitterverfahren

Durch die Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen wird die approximative Lösung des Problems überführt in die Lösung großer (nicht-)linearer Gleichungssysteme. Wegen der Größe dieser Systeme scheidet bei der Lösung die Verwendung von direkten Lösern, wie dem Gaußschen Algorithmus, aus. Dabei fällt sowohl der größere numerische Aufwand ins Gewicht, als auch die Tatsache, daß durch solche direkten Verfahren in der Regel auch der besonderen Besetzungsstruktur der Matrix keinerlei Rechnung getragen wird. Matrizen, die aus einer Finite-Elemente Diskretisierung entstehen, sind in der Regel dünnbesetzte Matrizen, bei denen neben der Hauptdiagonalen nur wenige Bänder von null verschiedene Einträge haben. Die Gaußsche Elimination würde zwischen diesen Bändern jedoch auch einen sogenannten 'Fill-In' erzeugen, was zu einem immensen Anstieg des Speicherbedarfes führen würde.

Somit gilt bei der Lösung der Gleichungssysteme das Augenmerk den iterativen Verfahren. Hier kommen zwei Klassen in Betracht; Krylov-Raum Verfahren und Mehrgittermethoden. Unsere Erfahrung zeigt, daß Krylov-Raum Verfahren, wie z.B. BICGSTAB oder GMRES bei Problemgrößen deutlich über 10 000, wie sie in praktischen Rechnungen gang und gäbe sind, dem Mehrgitterverfahren unterlegen sind. Aus diesem Grund werden wir uns in dieser Arbeit lediglich auf das Mehrgitterverfahren zum Lösen der linearen Probleme konzentrieren. Dies ist eine Klasse von Verfahren, die, im Hinblick auf den numerischen Aufwand "optimal" sind, das heißt bei denen der Aufwand zur Berechnung der Lösung des Gleichungssystems lediglich wie die Zahl der Unbekannten wächst (siehe dazu [20] und [49]).

Die Idee hinter dem Mehrgitterverfahren beruht auf der Beobachtung, daß viele der klassischen Iterationsverfahren, wie Jacobi- oder Gauß-Seidel, die stark oszillierenden Anteile des Fehlers sehr rasch reduzieren. Die weniger stark oszillierenden, 'glatteren' Anteile lassen sich aber gut genug auch auf einem gröberen Gitter dämpfen. Damit das Vefahren überhaupt konvergiert, müssen sowohl die Basisiteration als auch die Matrizen A_k auf den groben Gittern gewisse Bedingungen erfüllen (man spricht von "Glättungseigenschaft" und "Approximationseigenschaft"). Für eine genaue theoretische Herleitung des Mehrgitterverfahrens sei hier auf das klassische Buch von Hackbusch [20] verwiesen. Wir geben an dieser Stelle das Verfahren lediglich schematisch an.

Der Aufbau eines Mehrgitterverfahrens ist wie folgt. Zu lösen ist das lineare System

$$A_N x_N = f_N.$$

Weiterhin existiere eine Hierarchie von Leveln $i, i = 1, \ldots, N$, die zum Beispiel von einer Gitterweite h_i abhängen können. Auf jedem dieser Level müssen wir in der Lage sein, Matrizen A_i sowie rechte Seiten f_i zu definieren. Dann schreibt man einen Schritt des N-Level Algorithmus $MG(N, \cdot, \cdot)$ mit einer Anfangsnäherung u_N^0 als

$$MG(N, u_N^0, f_N) = u_N^{m+n+1} \tag{4.1}$$

mit der neuen Approximierten u_N^{m+n+1}.

Die allgemeine k-Level Iteration zur Lösung des Systems $A_k x_k = f_k$ ausgehend von einer Startiterierten u_k^0 kann wie folgt beschrieben werden:

Falls $k = 1$ ist $MG(1, u_1^0, f_0)$ die exakte Lösung, also $MG(1, u_1^0, f_0) = A_1^{-1} f_1$

Falls $k > 1$ führt man 4 Schritte aus:

(1) Vorglättung. Mit m Schritten einer Basisiteration ("Glätter") wird u_k^0 in u_k^m überführt.

(2) Grobgitterkorrektur: Der Defekt $d_k = f_k - A_k u_k^m$ wird auf den Level $k-1$ restringiert:

$$f_{k-1} = I_k^{k-1} d_k,$$

und mit dieser rechten Seite sowie der Startnäherung $u_{k-1}^0 = 0$ führt man $p \geq 1$ Schritte der $k-1$-Level Iteration durch:

$$u_{k-1}^i = MG(k-1, u_{k-1}^{i-1}, f_{k-1}),\ 1 \leq i \leq p,\ u_{k-1}^0 = 0 \tag{4.2}$$

(3) Schrittweitenkontrolle der Grobgitterkorrektur. Die unter (2) gewonnene Korrektur wird auf den Level k prolongiert und auf u_k^m addiert:

$$u_k^{m+1} = u_k^m + \alpha_k I_{k-1}^k u_{k-1}^p. \tag{4.3}$$

Dabei kann der Parameter α_k entweder fest gewählt sein, oder adaptiv angepaßt werden, so daß der Fehler in einer geeigneten Norm minimal wird. Die diskrete Energienorm wird zum Beispiel minimiert durch die Wahl

$$\alpha_k = \frac{(f_k - A_k u_k^m, I_{k-1}^k u_{k-1}^p)_k}{(A_k I_{k-1}^k u_{k-1}^p, I_{k-1}^k u_{k-1}^p)_k}$$

(4) Nachglättung. Wie in (1) wendet man n Schritte eines Glätters auf u_k^{m+1} an und erhält u_k^{m+n+1}.

Die "richtige" Wahl der Komponenten des Mehrgitterverfahrens hat, wie die Praxis zeigt, einen großen Einfluß auf die Güte des gesamten Verfahrens. Besonders wichtig wird das, wenn das zugrundeliegende Problem zum Beispiel Anisotropien im verwendeten Rechengitter aufweist. In diesem Fall können sich die Glättungseigenschaften der klassischen Verfahren wie Jacobi- oder Gauß-Seidel sehr verschlechtern, was dazu führen kann, daß man die Zahl der Glättungsschritte stark erhöhen muß und selbst das in extremen Fällen nicht mehr zum Erfolg führt. In den folgenden Abschnitten werden nun die einzelnen Komponenten genauer untersucht und Methoden entwickelt, die sich sehr robust gegenüber "Störungen des Problems" verhalten.

4.1 Allgemeine Mehrgitterkomponenten

4.1.1 Restriktion und Prolongation

Zwei der wichtigen Komponenten beim Mehrgitterverfahren sind die Gittertransferoperatoren (I_k^{k-1} bzw. I_{k-1}^k). Diese "überführen" den Koeffizientenvektor (und somit die Finite-Elemente Funktionen bzw. -residuen) von einem gegebenen Gitter auf ein gröberes bzw. feineres. Im ersten Fall spricht man von Restriktions- im zweiten Fall von Prolongationsoperatoren.

Sei nun T_{2h} ein Gitter, sowie T_h das daraus durch einmaliges Verfeinern enstandene, feinere Gitter. Die zugehörigen Finite-Elemente Räume werden mit H_{2h} bzw. H_h bezeichnet. Der Prolongationsoperator $I_{2h}^h : H_{2h} \to H_h$ wird Gegenstand unserer näheren Untersuchung sein. Der Restriktionsoperator $I_h^{2h} : H_h \to H_{2h}$ (korrekterweise ein Operator zwischen den Dualräumen der angegebenen Räume, die wir hier aber identifizieren können) ist allgemein definiert als der zu I_{2h}^h adjungierte Operator und ergibt sich somit automatisch aus der Wahl von I_{2h}^h. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß bei den nichtkonformen, rotiert-bilinearen Finite-Elemente Ansatzräumen, wie sie in Abschnitt (3.1) beschrieben werden, *nicht* der gröbere Raum in dem feineren enthalten ist. Somit kann nicht einfach die triviale Einbettung von v_{2h} in den H_h als Prolongation verwendet werden. Im folgenden verwenden wir die bekannte Notation $(\cdot,\cdot)_h$ für das diskrete Skalarprodukt, $|||\cdot|||_n$, $n = 0 \ldots 2$ für die diskrete L^2-, H^1 oder H^2-Norm (siehe [49]).

Für die Konstruktion eines Prolongationsoperators gibt es typischerweise zwei verschiedene Zugänge: mittels Interpolation oder mittels einer (diskreten) L^2-Projektion. Bei der Projektion wird der Operator $I_{2h}^h := I_{2h}^{h,P}$ definiert über die Beziehung

$$(I_{2h}^{h,P} v_{2h}, v_h)_h = (v_{2h}, v_h)_h \quad \forall v_h \in H_h,\ \forall v_{2h} \in H_{2h} \tag{4.4}$$

Das führt zu der Matrizenbeziehung

$$M_h \tilde{V}_h = N_{h,2h} V_{2h}, \tag{4.5}$$

bzw.

$$\tilde{V}_h = M_h^{-1} N_{h,2h} V_{2h} =: I_{2h}^{h,P} V_{2h}. \tag{4.6}$$

Dabei ist $N_{h,2h}$ eine rechteckige Matrix mit den Skalarprodukten der Basisfunktionen aus H_h und H_{2h} als Einträgen, und M_h ist eine Massematrix. Wählt man für das Aufstellen der Massematrix eine spezielle Quadraturformel ("Auswertung in den Freiheitsgraden als Quadraturpunkten"), so kann man erreichen, daß M_h Diagonalgestalt hat (das sogenannte Masse-Lumping gemäß den Freiheitsgraden). Die Einträge m_h^i korrespondieren zu der Größe des Trägers der i-ten Basisfunktion. Damit kann der Prolongationsprozeß elementweise durchgeführt werden. Der Unterschied zu dem Interpolationszugang, den wir gleich noch etwas eingehender betrachten wollen, besteht in der Gewichtung der einzelnen Elementeinträge durch die Elemente der gelumpten Massematrix M_h. In etlichen Fällen (konstante, lineare oder quadratische Elemente auf isotropen Gittern) sind die beiden Zugänge äquivalent [49]. Der (makroelementweise) Interpolationsoperator $I_{2h}^{h,I}$ ordnet den Knotenfunktionalen des feinen Gitters die interpolierten Werte der Grobgitterfunktionen zu. Man hat hierbei grundsätzlich die Wahl zwischen der vollen Interpolation, d.h. der Interpolation mit rotiert-bilinearen Funktionen, oder einer einfachen, konstanten Interpolation. Die Definition im einzelnen:

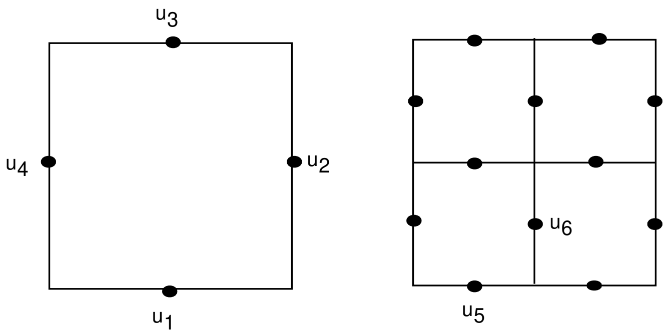


Abbildung 4.1: Makroelement in T_{2h} sowie die daraus entstehenden Elemente in T_h

Der makroelementweise Interpolationsoperator für rotiert bilineare Elemente

1. Auf dem Makroelement ist eine Funktion $u_{2h} \in H_{2h}$ bestimmt durch die vier Koeffizienten u_1, u_2, u_3, u_4. Daraus lassen sich die Koeffizienten der Feingitterfunktion linear kombinieren (hier nur exemplarisch für u_5, u_6). Die Faktoren vor den u_i erhält man einfach dadurch, daß man die entsprechenden (Grobgitter-)Basisfunktionen an den (Feingitter-)Knoten u_5, u_6 etc. auswertet. Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß die Vorfaktoren sich bei stark gestörten Gittern von den hier angegebenen leicht unterscheiden können. Diese Unterschiede machen sich jedoch kaum bemerkbar, so daß wir durchgehend mit den hier angegebenen Werten rechnen.

   - volle Interpolation für $H_h = H_h^a$ (Ansatzraum mit den Integralmittelwerten als Freiheitsgraden)

   $$u_5 = u_1 - \frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{4}u_4, \quad u_6 = \frac{5}{8}u_1 + \frac{1}{8}(u_2 + u_3 + u_4)$$

   - volle Interpolation für $H_h = H_h^b$ (Ansatzraum mit den Funktionswerten in den Kantenmitten als Freiheitsgraden)

   $$\begin{aligned} u_5 &= \frac{15}{16}u_1 - \frac{3}{16}u_2 - \frac{3}{16}u_3 + \frac{5}{16}u_4, \\ u_6 &= \frac{9}{16}u_1 + \frac{3}{16}u_2 + \frac{1}{16}u_3 + \frac{3}{16}u_4 \end{aligned}$$

   - Konstante Interpolation ($H_h = H_h^{(a,b)}$)

   $$u_5 = u_1, \quad u_6 = u_1$$

2. Die Werte, die auf Kanten liegen, welche auch schon Kanten von T_{2h} sind, werden durch den obigen Prozeß zweimal 'angefaßt'. Für diese setzt man das Mittel aus beiden Werten; entweder ungewichtet, oder gewichtet mit den Größen der beiden Makroelemente als Gewichtungsfaktoren.

Bei der Gewichtung mit der Größe der Makroelemente sieht man auch den Zusammenhang zur oben beschriebenen Projektionsmethode. Dies ist nämlich eng verwandt mit der Multiplikation mit den entsprechenden Einträgen der Massematrix. Man wird geneigt sein, bei den oben dargestellten Interpolationsvarianten der vollen Interpolation den Vorzug zu geben. Die entspricht auch der Regel, daß der Grad von Restriktion und Prolongation zusammen mindestens der Ordnung des zugrundeliegenden Differentialoperators entsprechen soll [49]. Mit der konstanten Interpolation ist dies offensichtlich nicht erfüllt. Allerdings werden spätere Tests zeigen, daß der lokale Einsatz der konstanten Interpolation, abhängig von der Größe und Verzerrung der Elemente, durchaus von Vorteil sein kann. So kann vermieden werden, daß in die Interpolation auch Beiträge von Freiheitsgraden eingehen, die geometrisch "sehr weit" entfernt sind. Daher definieren wir folgende adaptive Variante des Prolongationsoperators:

Adaptive Prolongation für rotiert bilineare Elemente

1. Man berechnet die Interpolationswerte der Feingitterfunktion aus den Koeffizienten u_1, u_2, u_3, u_4 der Grobgitterfunktion v_{2h}. Die Wahl der Interpolation wird durch die Streckung (Aspect-Ratio, AR) oder das Verhältnis der Größen des Makroelements und seiner Nachbarzellen (size ratio, SR) gesteuert.

2. Liegen diese Werte unter einer vorgegebenen Schranke, dann führt man die volle, rotiert bilineare Interpolation durch:

   - volle Interpolation für $H_h = H_h^a$ (Ansatzraum mit den Integralmittelwerten als Freiheitsgraden)

   $$u_5 = u_1 - \frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{4}u_4, \quad u_6 = \frac{5}{8}u_1 + \frac{1}{8}(u_2 + u_3 + u_4)$$

   - volle Interpolation für $H_h = H_h^b$ (Ansatzraum mit den Funktionswerten in den Kantenmitten als Freiheitsgrade)

   $$\begin{aligned} u_5 &= \frac{15}{16}u_1 - \frac{3}{16}u_2 - \frac{3}{16}u_3 + \frac{5}{16}u_4, \\ u_6 &= \frac{9}{16}u_1 + \frac{3}{16}u_2 + \frac{1}{16}u_3 + \frac{3}{16}u_4 \end{aligned}$$

3. Überschreiten diese Werte auf einem Makroelement die Schranke, führt man auf diesem Element lokal die konstante Interpolation durch:

   $$u_5 = u_1, \quad u_6 = u_1$$

4. Die Werte, die auf Kanten liegen, welche auch schon Kanten von T_{2h} sind, werden durch den obigen Prozeß zweimal 'angefaßt'. Für diese setzt man das Mittel aus beiden Werten; entweder ungewichtet, oder gewichtet mit den Größen der beiden Makroelemente als Gewichtungsfaktoren.

Für den stückweise konstanten Druck verwenden wir die einfache, konstante Interpolation, das heißt, wir verwenden auf den Zellen des feinen Gitters jeweils den Druckwert der 'Mutterzelle' auf dem groben Gitter. Eine Alternative ist es, stattdessen den Druck zu einer Funktion aus $\tilde{Q}_1$ zu machen. Die Werte auf dem Kanten berechnet man hierbei durch Mittelung aus des Druckes der anliegenden Elemente. Auf die so entstandene Funktion läßt sich die oben beschriebene, adaptive Prolongation anwenden. Daraus erzeugt man sich schließlich die stückweise konstante Interpolierende auf dem feinen Gitter. Da die einfache Interpolation des Druckes jedoch sehr gute Ergebnisse liefert, haben wir diese alternative Interpolation nicht näher untersucht.

Numerische Tests, die in Kapitel 4.1.4 nachzulesen sind, zeigen, daß bei moderaten AR's bis zu der Größenordnung 10-100 die volle Interpolation sehr gute Ergebnisse liefert. Bei stärkeren Verzerrungen des Gitters jedoch konvergiert das Mehrgitterverfahren mit der vollen Interpolation nicht mehr, während das elementweise Umschalten auf die konstante Interpolation ein sehr gutes Konvergenzverhalten zeigt. Ein guter Wert für den Schwellenparameters, bei dem die Umschaltung erfolgt, wurde in den obenangegebenen Tests mit 50 ermittelt. Das Verfahren reagiert auf moderate Variationen dieses Wertes allerdings nicht sehr sensibel, so daß Werte zwischen 20 und 100 vergleichbar gute Resultate liefern. Diese Ergebnisse wurden in Zusammenarbeit mit Stefan Turek [49] ermittelt.

4.1.2 Behandlung der Grobgittermatrix

Beim Aufbau der Matrizen A_{h_i} auf einem groben Gitter T_{h_i} stehen wieder prinzipiell zwei verschiedene Wege zur Verfügung, nämlich der standard Finite-Elemente Ansatz oder der sogenannte Galerkin-Zugang. Beim Finite-Elemente Zugang verwendet man auf dem Gitter T_{h_i} den zugehörigen Finite-Element Raum H_{h_i} mit den Basisfunktionen $\varphi^j_{h_i}$, $j = 1, \dots N(i)$. Die Einträge $A^{\xi,\eta}_{h_i}$ der Steifigkeitsmatrix A_{h_i} bestimmt man dann wie die Einträge der Steifigkeitsmatrix auf dem feinsten Gitter über

$$A^{\xi,\eta}_{h_i} := a_{h_i}(\varphi^{\xi}_{h_i}, \varphi^{\eta}_{h_i}), \tag{4.7}$$

wobei $a_{h_i}(\cdot,\cdot)$ die diskrete Bilinearform zu dem kontinuierlichen Operator ist.

Der sogenannte 'Galerkin-Zugang' geht von der Matrix auf dem feinen Gitter aus und "transportiert" sie auf die groben Level. Mit den Bezeichnungen P^h_{2h} für den Prolongationsoperator und die damit assoziierte Prolongationsmatrix und R^{2h}_h für die Restriktion erhält man die Grobgittermatrix A_{2h} aus A_h durch

$$A_{2h} := R^{2h}_h A_h P^h_{2h}. \tag{4.8}$$

Dieser Prozeß kann wiederum lokal, das heißt elementweise durchgeführt werden. (Für eine effektive Implementationen sei auf das Programmpaket FEATFLOW verwiesen, siehe [49] oder `www.featflow.de`).

Wie bei der Prolongation/Restriktion sind beide vorgestellten Zugänge in einigen Fällen identisch, so z.B. bei (bi-)linearen, konformen Finiten Elementen und Problemen mit konstanten Koeffizienten. Bei den hier verwendeten, nichtkonformen Finite-Elemente Räumen (siehe Kapitel 3.1) jedoch führen diese beiden Varianten zu vollkommen unterschiedlichen Ergebnissen. Verwendet man bei dem Galerkin-Zugang den vollen Interpolationsoperator

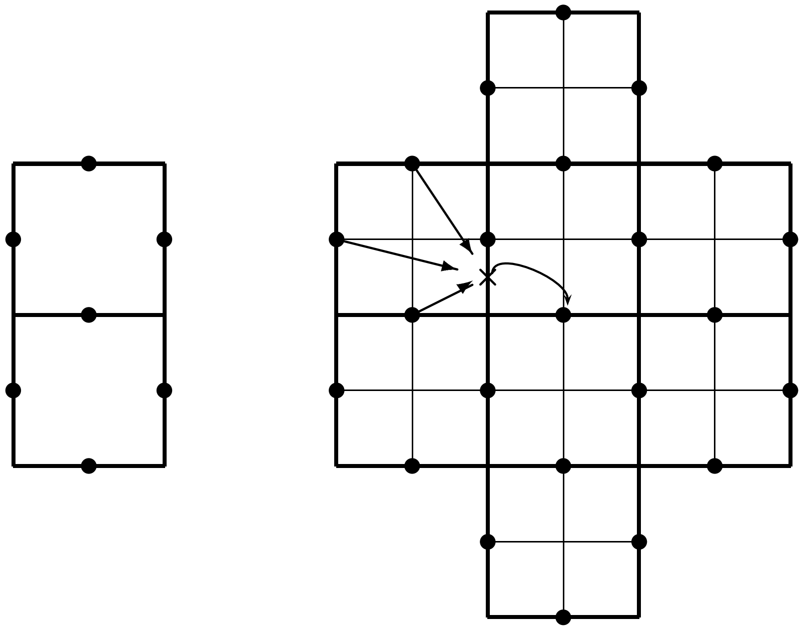


Abbildung 4.2: Wachsender Matrizenstern durch Interpolationsoperator

aus dem vorangegangenen Abschnitt, so führt dieser Konstruktionsprozeß zu einer Vergrößerung des Matrizensternes (siehe Abbildung 4.2). Mit dem zentralen Freiheitsgrad werden statt der 7 Einträge der direkt benachbarten Elemente über die Interpolation auch noch Einträge aus den Nachbarzellen gekoppelt. Der Effekt wird noch dadurch vergrößert, daß der Prozeß ja rekursiv über alle Level hinweg durchgeführt wird. Dadurch gehen große Teile der dünnen Besetzungsstruktur der Matrix verloren. Wenn man für den Gittertransfer den Interpolationsoperator zweiter Ordnung benutzen will, ist man also auf den "Finite-Elemente Zugang" zur Erzeugung der Grobgittermatrizen angewiesen.

Jedoch zeigt sich auch hier, wie bei den Gittertransferoperatoren, daß die Mehrgitterkonvergenz bei starken Anisotropien des Gitters leidet. Und ebenso wie beim Gittertransfer erweist sich auch hier eine adaptive Steuerung des Matrixaufbaus als sehr hilfreich. Dabei werden die Einträge der Matrix grundsätzlich gemäß der Beziehung (4.7) bestimmt. Diejenigen Zeilen allerdings, welche mit Kanten korrespondieren, die an ein gestörtes Element grenzen (d.h. ein Element, dessen Aspect-Ratio über einem vorgegebenen Toleranzwert liegt), werden mit dem Galerkin-Ansatz berechnet, allerdings unter Verwendung des konstanten Interpolationsoperators.

Die Abbildung 4.3 zeigt die Form des Matrizensternes (auf kartesischen Gittern) bei den verschiedenen Zugängen. Das linke Bild zeigt, daß bei dem Finite-Elemente Ansatz auf alle Knoten der benachbarten Elemente zugegriffen wird, während der Galerkin-Ansatz mit dem konstanten Interpolationsoperator zu einem "Fünf-Punkte-Stern" führt, bei dem die gegenüberliegenden Kanten ohne Einfluß bleiben. Die Wahl des konstanten Zuganges bei langgestreckten Elementen läßt sich wiederum durch die sehr heuristische Überlegung motivieren, daß bei diesen Elementen die gegenüberliegende Kante sehr weit entfernt ist, und daß es nicht sinnvoll erscheint, daß diese Kante einen großen Einfluß auf den Freiheitsgrad hat. Daher verspricht die oben beschriebene adaptive Steuerung der Grobgittermatrix auf stark gestreckten Gittern günstigere Eigenschaften zu haben, als der reine Finite-Elemente Zugang.

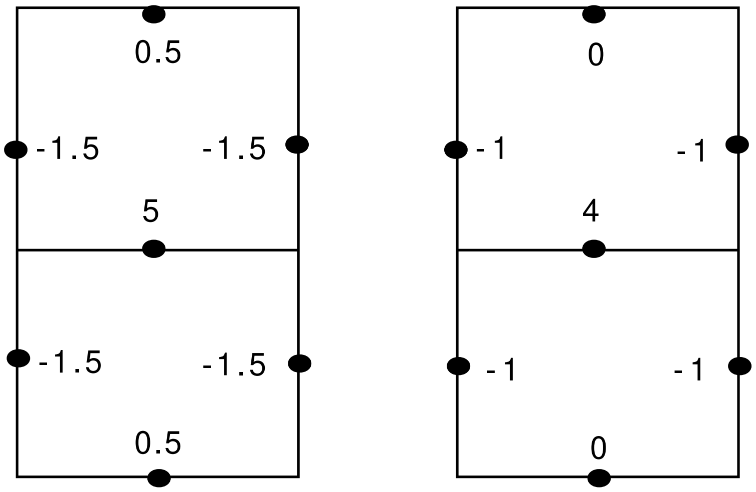


Abbildung 4.3: Kanonischer und modifizierter Matrizenstern

Die Verfahren der beiden letzten Abschnitte zusammen, also die adaptive Steuerung zwischen rotiert-bilinearer und konstanter Interpolation, sowie die analogen Modifikationen beim Aufbau der Grobgittermatrizen liefern sehr gute Ergebnisse und garantieren die typische Mehrgittereffizienz auch auf stark gestörten Gittern (siehe dazu Abschnitt 4.1.4). Bevor die numerischen Tests angegeben werden, wollen wir aber noch kurz auf eine weitere Modifikation des Mehrgitterverfahrens eingehen.

4.1.3 Adaptive Steuerung bei der Grobgitterkorrektur

Bei der Korrektur der alten Iterierten mit der (interpolierten) Grobgitterlösung besteht die Freiheit, diese Grobgitterkorrektur mit einem Faktor α_k zu gewichten:

$$u_k^{m+1} = u_k^m + \alpha_k I_{k-1}^k u_{k-1}^p \tag{4.9}$$

Im Falle von konformen Finiten Elementen weiß man, daß aufgrund der Galerkinorthogonalität der Lösung die Wahl $\alpha_k = 1$ das beste Ergebnis liefert; zumindest in der Theorie des 2-Gitter-Verfahrens mit exakter Grobgitterlösung. In den hier betrachteten, nichtkonformen Räumen gilt aber für die Lösung nicht die klassische Galerkin-Orthogonalität. Daher erlauben wir für diesen Parameter auch Werte $\alpha_k \neq 1$ und bestimmen diesen Wert so, daß die entstehende Näherungslösung in einem geeigneten Sinne *optimal* ist. Dieses Vorgehen kann sich auch im Falle konformer Finite-Elemente als sinnvoll erweisen, wenn nämlich die Grobgitterprobleme nur approximativ gelöst werden und dadurch auch die Orthogonalitätsbeziehung nicht mehr exakt erfüllt wird.

Die Wahl von α_k kann entweder so erfolgen, daß u_k^{m+1} bezüglich der Energienorm bei symmetrisch positiv definiten Probemen minimal wird, oder man kann darauf zielen, die l^2-Norm des Defektes zu minimieren. In beiden Fällen ergibt sich α_k durch ein einfaches, eindimensionales Minimierungsproblem:

"Energieoptimales" α_k:

$$\alpha_k = \frac{(f_k - A_k u_k^m, I_{k-1}^k u_{k-1}^p)_k}{(A_k I_{k-1}^k u_{k-1}^p, I_{k-1}^k u_{k-1}^p)_k} \tag{4.10}$$

"Defektoptimales" α_k:

$$\alpha_k = \frac{(f_k - A_k u_k^m, A_k I_{k-1}^k u_{k-1}^p)_k}{(A_k I_{k-1}^k u_{k-1}^p, A_k I_{k-1}^k u_{k-1}^p)_k} \tag{4.11}$$

Mit $(\cdot,\cdot)_k$ ist hier das euklidische Skalarprodukt auf dem Level k bezeichnet. Aus den theoretischen Überlegungen ist die Energieminimierung auf symmetrische, positiv definite Matrizen beschränkt, während die Defektminimierung so für (nahezu) beliebige Matrizen anwendbar ist. Jedoch scheinen die numerischen Resultate zu belegen, daß das lineare Mehrgitterverfahren die Energieminimierung erfordert. Selbst bei Konvektions-Diffusions-Problemen mit hochgradig unsymmetrischen Matrizen A_k führt die Verwendung von Formel (4.10) zu besseren Resultaten, obgleich ihre Herleitung sich theoretisch nicht mehr rechtfertigen läßt.

4.1.4 Numerische Tests

Im Folgenden bezeichnet **MAT(*TOL*)** den adaptiv gesteuerten Grobgitteroperator, mit Schwellenwert *TOL*. Bei Kanten, bei denen ein benachbartes Element ein Seitenverhältnis hat, das größer als *TOL* ist, wird zur Berechnung der entsprechenden Zeile der Grobgittermatrix die konstante Interpolation benutzt, ansonsten kommt der klassische Finite-Elemente Zugang zum Tragen.

Die verschiedenen Varianten der Interpolation werden mit **INT**(*typ*)(*TOL*) bezeichnet. Auch hier ist *TOL* wieder der Wert, jenseits dessen von der rotiert-bilinearen zur konstanten Interpolation gewechselt wird. Damit beschreibt dann **INT**(*typ*)(*0*) die stückweise konstante Interpolation. Weiterhin betrachten wir noch zwei verschiedene Typen der Interpolation. *typ=m* bezeichnet die Variante, bei der die Werte auf den Kanten durch einfache Mittelung der beiden Beiträge entstehen, während bei *typ=g* eine gewichtete Mittelung gemäß der Elementgrößen erfolgt, was einer diskreten L_2-Projektion der Werte entspricht.

Für die Tests wurden Gitter des in Abbildung 4.4 dargestellten Typs verwendet.

Level	Elemente	Kanten
1	86	190
3	1,448	2,824
4	5,504	11,152
5	22,016	44,320

Tabelle 4.1: Geometriedaten der Gitter auf den verschiedenen Verfeinerungsebenen

Dies ist ein prototypisches Grobgitter für eine Kanalströmung um ein quadratisches Hindernis, das durch Verschieben der innersten Linie am Hindernis verändert werden kann, um beliebig verzerrte Gitter zu erzeugen. Das Gitter in Abbildung 4.4 (S1) hat einen maximalen Aspect-Ratio (AR) von 10, weiterhin wurden Gitter mit $AR = 10^3$ (S2) und $AR = 10^5$ (S3) verwendet.

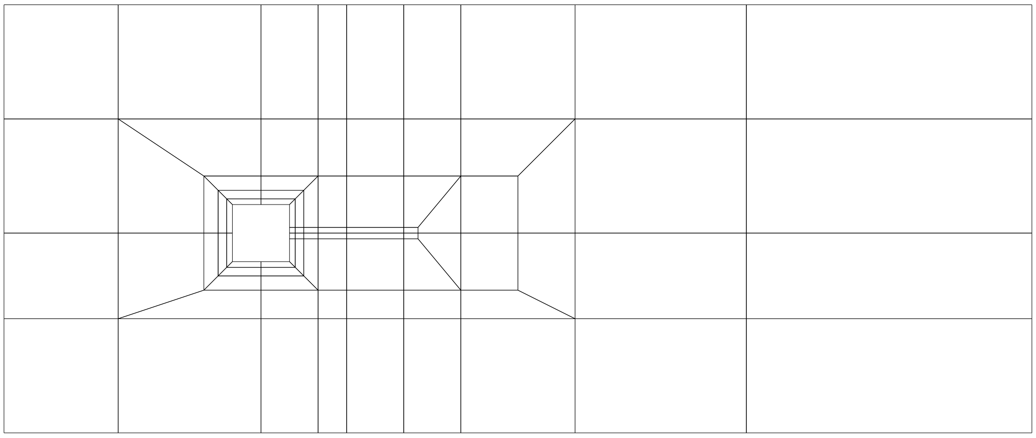


Abbildung 4.4: Typisches Grobgitter (hier S1) für die Mehrgittertests

Die folgenden Tests für die bisher dargestellten Mehrgitterkomponenten wurden nicht für die vollen, gekoppelten Navier-Stokes Gleichungen durchgeführt, sondern für skalare Poissongleichungen bzw. Konvektions-Diffusions-Gleichungen (siehe [49]). Da es sich beim Gittertransfer und der Grobgittermatrix um allgemeine Mehrgitterkomponenten handelt, ist dies vertretbar, und der Aufwand für die Tests ließ sich so deutlich reduzieren. Am Ende dieses Abschnittes werden die Ergebnisse noch exemplarisch an der voll gekoppelten Gleichung verifiziert werden. In den skalaren Beispielen wurde als Glätter ein robustes ILU-Verfahren mit einer angepaßten Numerierung der Gitterpunkte verwendet ("Left to Right" im ersten Beispiel, Cuthill-McKee [15] im zweiten Beispiel).

Bereits in Tabelle 4.2 sieht man die Bedeutung, die die richtige, adaptive Steuerung der Interpolation und des Aufbaus der Grobgittermatrix hat. Die volle rotiert-bilineare Interpolation (entspricht in der Tabelle dem Parameter ∞), welche man a priori favorisieren würde, erweist sich dabei als völlig unzulänglich. Aber auch die ausschließliche Verwendung der konstanten Interpolation liefert auf diesem extremen Gitter inakzeptable Mehrgitterkonvergenzraten. Weiterhin zeigen die Zahlen, daß Interpolation und Grobgittermatrix zusammenspielen müssen. Die Modifikation nur einer der beiden Komponenten führt hier nicht zum Ziel. Die Wahl des Schwellenparameters scheint in gewissen Grenzen nicht besonders kritisch zu sein. Werte zwischen 20 und 100 lieferten vergleichbar gute Resultate.

INT(g)()

	INT(0) MAT(0)	INT(5) MAT(5)	INT(50) MAT(50)	INT(∞) MAT(50)	INT(50) MAT(∞)	INT(∞) MAT(∞)
3	0.67	0.49	**0.23**	0.92	0.92	0.92
4	0.80	0.68	**0.23**	0.97	0.98	0.98
5	0.83	0.77	**0.24**	0.91	0.99	0.99

Tabelle 4.2: Vergleich verschiedener adaptiver Steuerungen; Poissongleichung auf S3

In Tabelle 4.3 sind die Auswirkungen der verschiedenen möglichen Schrittweiten der Grobgitterkorrektur dargestellt. Hier sieht man zweierlei. Der Vergleich zwischen *typ g* und *typ m* zeigt, daß das Verfahren mit der gewichteten Mittelung durchweg deutlich besser ist, als das mit der einfachen Mittelung. Bei festen Schrittweiten für die Korrektur ist es sogar schwierig, das Verfahren *typ m* überhaupt zur Konvergenz zu bringen. Die adaptive Schrittweitenkontrolle liefert ein konvergentes Verfahren, jedoch mit Konvergenzraten jenseits der 0.9. Bei der gewichteten Mittelung *typ g* erkennt man, daß die adaptive (energieoptimale) Wahl von α_k zu einem Verfahren führt, das levelunabhängig zufriedenstellende Mehrgitterraten liefert. Diese sind zwar nicht besser, als bei einer optimalen, konstanten Wahl von α_k, jedoch ist der Unterschied vergleichsweise klein. Die optimale Schrittweite ist im Allgemeinen jedoch a priori gar nicht bekannt. Wie die Rechnungen (auch die rechte Seite von Tabelle 4.3) zeigen, kann aber eine schlechte konstante Wahl von α_k zu einer deutlichen Verschlechterung des Konvergenzverhaltens sogar bis hin zum völligen Versagen führen. Das adaptive Verfahren jedoch liefert ohne die a priori Kenntnis eines optimalen α ein robustes Verfahren. Diese Beobachtungen werden im folgenden auch durch alle weiteren Tests belegt werden.

	INT(g)(50) MAT(50) CORR()					**INT(m)(50) MAT(50) CORR()**				
	(adapt)	(1.4)	(1.2)	(1.0)	(0.8)	(adapt)	(1.4)	(1.2)	(1.0)	(0.8)
3	0.23	0.33	0.20	0.09	0.21	0.93	0.93	0.81	0.71	0.58
4	0.23	0.31	0.19	0.12	0.26	0.95	–.–	0.82	0.50	0.42
5	0.24	0.28	0.17	0.18	0.31	0.91	–.–	–.–	0.85	0.48

Tabelle 4.3: Poissongleichung auf S3, Wahl von α_k

Somit lassen die ersten Rechnungen die Kombination aus adaptiver Interpolation sowie Grobgittermatrix (mit Schwellenparameter 50) mit der adaptiven Schrittweitensteuerung und gewichteter Mittelung auf den inneren Kanten

INT(g)(50)MAT(50)CORR(adapt)

als die stabilste und effizienteste erscheinen. Die nächsten Tests belegen, daß sich damit auch auf den weniger gestörten Gittern S2 und S1 sehr gute Resultate erzielen (Tabelle 4.4).

Gitter S2: INT()()-CORR(adapt)

	INT(g)(0) MAT(0)	INT(g)(50) MAT(50)	INT(g)(∞) MAT(∞)	INT(m)(0) MAT(0)	INT(m)(50) MAT(50)	INT(m)(∞) MAT(∞)
3	0.69	0.21	0.90	0.69	0.33	0.91
4	0.81	0.23	0.91	0.81	0.29	0.91
5	0.86	0.25	0.94	0.86	0.29	0.93

Gitter S1: INT()()-CORR(adapt)

	INT(g)(0) MAT(0)	INT(g)(50) MAT(50)	INT(g)(∞) MAT(∞)	INT(m)(0) MAT(0)	INT(m)(50) MAT(50)	INT(m)(∞) MAT(∞)
3	0.69	0.23	0.23	0.69	0.23	0.23
4	0.81	0.25	0.25	0.81	0.25	0.25
5	0.86	0.31	0.31	0.86	0.31	0.31

Tabelle 4.4: Ergebnisse für das Poisson Problem auf den Gitter S1 und S2

Man kann erkennen, daß bei moderaten Verzerrungen (S2, AR $\leq$ 1000) der Typ der Mittelung keine so große Rolle mehr spielt; *typ m* und *typ g* liefern nahezu identische Ergebnisse. Die "richtige" Interpolation/Grobgittermatrix ist aber weiterhin essentiell für die Konvergenzgeschwindigkeit. Erst bei dem nahezu isotropen Gitter S1 arbeitet auch die volle rotiert-bilineare Interpolation und der unmodifizierte Ansatz für die Grobgittermatrix gut (In diesem Beispiel ergeben **INT(g)(50) MAT(50) CORR(adapt)** und **INT(g)(∞) MAT(∞) CORR(adapt)**) dasselbe Verfahren, da der Schwellenwert 50 vom Aspect-Ratio auf keinem Element überschritten wird). Lediglich die konstante Interpolation liefert gitterunabhängig schlechte Konvergenzraten.

Als nächstes soll untersucht werden, ob sich diese Ergebnisse auch auf Konvektions-Diffusions-Probleme übertragen lassen. Dazu betrachten wir ein Problem der Form

$$-\nu\Delta u + \mathbf{U} \cdot \nabla u = f. \tag{4.12}$$

Wir wählen wieder für die rechte Seite $\mathbf{f} \equiv 0$. Um durch diese Tests Aussagen für den Einsatz der Mehrgitterkomponenten in physikalisch relevanten Strömungssimulationen gewinnen zu können, setzen wir für die "Transportrichtung" $\mathbf{U}$ ein "realistisches" Vektorfeld, nämlich die Lösung eines Stokes-Problemes auf dem Gitter S3, die in einer Vorlaufrechnung gewonnen wurde. Da sowohl $\mathbf{U}$ als auch der Durchmesser des Gebietes von der Größenordnung eins sind, kann ν mit dem Kehrwert der Reynoldszahl identifiziert werden. Die Stabilisierung des Konvektionsterms erfolgte mit dem Samarskij-Upwind (siehe 3.2.1).

Gitter S3: $1/\nu = 10^4$ **INT()()-CORR(adapt)**

	INT(g)(0) MAT(0)	INT(g)(50) MAT(50)	INT(g)(∞) MAT(∞)	INT(m)(0) MAT(0)	INT(m)(50) MAT(50)	INT(m)(∞) MAT(∞)
3	0.09	0.04	0.18	0.09	0.20	0.18
4	0.32	0.10	0.61	0.32	0.53	0.61
5	0.52	0.10	0.68	0.52	0.19	0.68

Tabelle 4.5: Ergebnisse für ein Konvektions-Diffusions-Problem auf dem Gitter S3

	INT(g)(50) MAT(50) CORR()					**INT(m)(50) MAT(50) CORR()**				
	(adapt)	(1.4)	(1.2)	(1.0)	(0.8)	(adapt)	(1.4)	(1.2)	(1.0)	(0.8)
3	0.04	0.08	0.04	0.01	0.02	0.20	0.23	0.21	0.18	0.16
4	0.10	0.20	0.10	0.03	0.09	0.53	div	0.53	0.24	0.20
5	0.10	0.24	div	0.06	0.15	0.19	div	div	0.92	0.31

Tabelle 4.6: Konvektions-Diffusions-Gleichung auf S3, Wahl von α_k

Die Zahlen bestätigen völlig die Ergebnisse, welche aus der Berechnung des Diffusionsproblemes gewonnen wurden. Ohne die adaptiven Anpassungen bei der Interpolation und den Grobgittermatrizen können keine zufriedenstellenden Mehrgitterkonvergenzraten erzielt werden. Auch die adaptive Steuerung der Grobgitterkorrektur liefert wieder ohne weitere vorherige Kenntnisse Resultate, die nur wenig schlechter als die optimalen sind.

Somit ist die Stärke der Kombination **INT(g)(50) MAT(50) CORR(adapt)** nahezu unabhängig von den betrachteten Differentialoperatoren im Rahmen der Navier-Stokes-Gleichungen nachweisbar.

An dieser Stelle soll, wie bereits eingangs erwähnt, gezeigt werden, daß die an den skalaren Gleichungen gewonnenen Resultate auch auf Systeme übertragen werden können.

Tabelle 4.7 zeigt Konvergenzraten für eine Stokes-Rechnung beziehungsweise eine Oseen-Rechnung mit $1/\nu = 500$. Als Glätter wurde dabei ein Block-Gauß-Seidel-artiges Verfahren verwendet, wie es in Abschnitt 4.2 beschrieben wird.

	Gitter S2			
	unmodifiziert		optimiert	
	Stokes	Oseen	Stokes	Oseen
3	0,01	0,07	0,06	0,07
4	0,02	div	0,04	0,05
5	0,03	div	0,06	0,05

	Gitter S3			
	unmodifiziert		optimiert	
	Stokes	Oseen	Stokes	Oseen
3	0,06	div	0,20	0,10
4	0,60	div	0,33	0,18
5	0,38	div	0,40	0,38

Tabelle 4.7: Wirksamkeit der modifizierten Mehrgitterkomponenten bei gekoppelten Systemen

Man erkennt sehr deutlich, daß auch bei diesen gekoppelte Systemen die modifierten Mehrgitterkomponenten unabdingbar sind. Die Kombination **INT(g)(50) MAT(50) CORR(adapt)** liefert wieder zuverlässig ein konvergentes Verfahren mit guten Mehrgitterraten. Ohne diese Modifikationen konvergiert der lineare Löser für die Oseen-Gleichungen überhaupt nicht mehr und selbst beim Stokes-Problem können Schwierigkeiten auftreten, wie der deutlich schlechtere Wert von 0,6 auf dem Gitter S3 zeigt. Die modifizierten Mehrgitterkomponenten üben also wie erwartet bei diesen gekoppelten Systemen denselben, positiven Einfluß auf die Konvergenz des Verfahrens aus, wie in den bisher untersuchten skalaren Gleichungen.

Um weiterhin auszuschließen, daß die beobachteten Effekte auf Besonderheiten des verwendeten Kanalgitters beruhen, wurden als letzter Test die verschiedenen Verfahren auf eine Triangulierung des Einheitsquadrates angewendet, wie sie bei der Berechnung von Driven-Cavity Problemen auftritt. Abbildung 4.5 zeigt ein Gitter, bei dem normal zu den Wänden hin stark verfeinert wurde. Das hier gezeigte Gitter hat einen maximalen AR von 10. Durch Verschieben der Punkte in der randnächsten Schicht erhält man ein Gitter D1 mit einem AR von 10^4, auf dem die Rechnungen durchgeführt wurden.

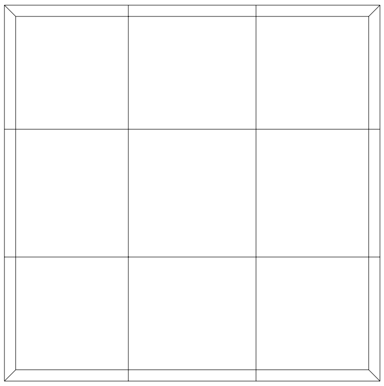


Abbildung 4.5: Gitter D0: AR =10

Das verwendete Vektorfeld **U** ist das Strömungsprofil einer Driven-Cavity Rechnung, also eine rotierende Strömung ohne ausgezeichnete Richtung. Die einzige Änderung zu den vorherigen Rechnungen besteht darin, daß für den ILU-Glätter ein andere Numerierung gewählt wurde (nach Cuthill-McKee [15]).

Level	Elemente	Kanten
1	21	48
3	336	696
4	1,344	2,736
5	5,376	10,848

Tabelle 4.8: Geometriedaten der Gitter auf den verschiedenen Verfeinerungsebenen

Gitter D1: $1/\nu = 10^4$ **INT()()-CORR(adapt)**

	INT(g)(0) MAT(0)	INT(g)(50) MAT(50)	INT(g)(∞) MAT(∞)	INT(m)(50) MAT(50)
3	0.29	0.18	0.63	0.60
4	0.33	0.18	0.85	0.60
5	0.31	0.17	0.87	0.45

Tabelle 4.9: Ergebnisse für ein Diffusions-Problem auf dem Gitter D1

Gitter D1: $1/\nu = 10^4$ **INT()()-CORR(adapt)**

	INT(g)(0) MAT(0)	INT(g)(50) MAT(50)	INT(g)(∞) MAT(∞)	INT(m)(50) MAT(50)
3	0.01	0.01	0.09	0.06
4	0.09	0.05	0.55	0.14
5	0.03	0.07	0.63	0.08

Tabelle 4.10: Ergebnisse für ein Konvektions-Diffusions-Problem auf dem Gitter D1

Auch für dieses Gitter findet man wieder die Wichtigkeit der adaptiven Steuerung der Mehrgitterkomponenten bestätigt. Somit kann man abschließend feststellen, daß zum einen die gewichtete Mittelung (*typ g*) der ungewichteten (*typ m*) in jedem Falle vorzuziehen ist. Ebenso bestätigen auch die Tabellen 4.9 und 4.10 die Notwendigkeit der adaptiv gewählten Mehrgitterkomponenten mit einem Schwellenparameter TOL in der Gegend von 50. Lediglich bei dem Konvektions-Diffusions-Problem auf der Driven-Cavity Geometrie ist die konstante Interpolation in etwa gleichwertig. Bei den anderen betrachteten Beispielen waren allerdings auch für diese Konfiguration die Konvergenzraten zum Teil deutlich schlechter.

Daher wird im Folgenden, falls nicht ausdrücklich anders gekennzeichnet, ausschließlich mit der für "optimal" befundenen Konfiguration gerechnet:

$$\boxed{\textbf{INT(g)(50) MAT(50) CORR(adapt)}}$$

4.2 Der Glätter

Neben den oben beschriebenen Komponenten ist die richtige Wahl des Glättungsverfahren von entscheidender Bedeutung für die Leistungsfähigkeit des Mehrgitterverfahrens. Häufig verbraucht der Glättungsprozeß über 90 % der Rechenzeit. Aus diesem Grunde soll auf die "richtige" Wahl des Glätters ein besonderes Augenmerk gerichtet werden.

4.2.1 Der Schur-Komplement Ansatz

Wie in Kapitel 2 gesehen, treten bei der Behandlung der Navier-Stokes Gleichungen lineare, gekoppelte Probleme der Gestalt

$$N(\tilde{\mathbf{u}})\mathbf{u} + Bp = \mathbf{f} \quad , \qquad B^T\mathbf{u} = 0 \tag{4.13}$$

mit gegebenem $\tilde{\mathbf{u}}$ auf. Hierfür gilt die folgende alternative Darstellung für die Lösungen $\mathbf{u}$ und p.

Proposition 11 (Schur-Komplement Darstellung).
Wenn der Operator $N^{-1} = N(\tilde{\mathbf{u}})^{-1}$ existiert, dann ist das Ausgangsproblem (4.13) äquivalent zu der Schur-Komplement Formulierung für den Druck p:

$$B^T N^{-1}(Bp - \mathbf{f}) = 0. \tag{4.14}$$

Ist der Druck p bekannt, so erfüllt die zugehörige Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ die Beziehung

$$\mathbf{u} = N^{-1}(\mathbf{f} - Bp). \tag{4.14*}$$

(Siehe dazu auch [49] und die darin zitierte Literatur)

Schur-Komplement Techniken dieser Art sind in der Numerik weit verbreitet, besonders, wenn ein Teil der Unbekannten formal eliminiert werden kann. Dieselben Techniken können, wie wir in Kapitel 6 noch sehen werden, auch auf temperaturgetriebene Strömungen angewendet werden (Boussinesq-Approximation). Selbst bei *"Low Reynolds number $k-\varepsilon$ Turbulenzmodellen"* (siehe [33] und [12]) ist ihr Einsatz theoretisch möglich.

Formal hat man nun das gekoppelte, vektorwertige System geändert hin zur Lösung eines skalaren Problemes für den Druck p, aus dem sich dann die Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ bestimmen läßt. Es bleibt allerdings zu beachten, daß die (lineare) Schur-Komplement Matrix

$$B^T N^{-1} B$$

in der Regel voll besetzt ist und zum Aufbau dieser Matrix die Inverse N^{-1} benötigt wird, welche man in der Regel nicht exakt berechnen kann oder möchte. Somit beschränkt sich der Einsatz der Schur-Komplement Formulierung auf kleine bis moderate Problemgrößen, oder auf eine Verwendung als iteratives Verfahren ohne expliziten Aufbau der Matrizen N^{-1} und $B^T N^{-1} B$.

Wir wollen diesen Zugang im Rahmen eines Glätters im Mehrgitterverfahren einsetzen. In dem Fall wird die Schur-Komplement Formulierung auf lokale Teilprobleme angewandt, die dieselbe Struktur wie (4.13), jedoch eine deutlich kleinere Dimension besitzen. Bei der folgenden Definition des Glätters folgen wir den in [49] unter dem Namen *LPSC Glätter* (local pressure Schur complement) vorgestellten Methoden.

4.2.2 Das klassische Vanka-Verfahren (SCGS-Methode)

Bei der Lösung von Problemen, die von stationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen herrühren, werden sehr häufig Glätter eingesetzt, wie das von S.P.Vanka [52] beschriebene SCGS (Symmetrical Coupled Gauß-Seidel) Verfahren - oder kurz 'Vanka-Glätter'. Hierbei werden in jeder Zelle der Druck und die Geschwindigkeiten simultan neu berechnet.

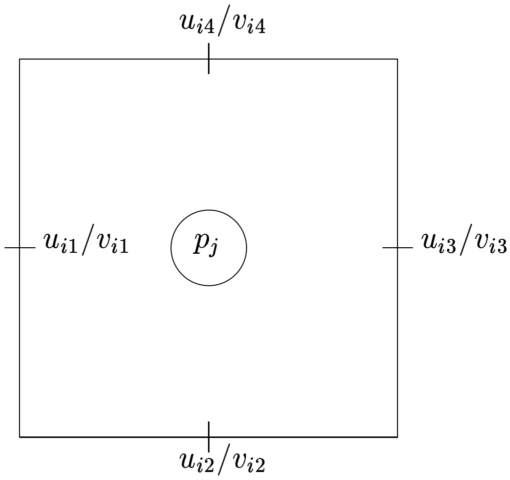


Abbildung 4.6: Freiheitsgrade auf einem Viereckselement

Abbildung 4.6 zeigt die Druck- und Geschwindigkeitsfreiheitsgrade auf einem Viereckselement. Auf jedem Element sucht man aus der globalen Steifigkeitsmatrix S die Einträge zu den Indizes $i_1, \ldots, i_4$ sowie j und löst das (im 2d-Fall) 9×9 Gleichungssystem

$$A_{lokal} \quad x_{lokal} = \mathrm{def}_{lokal}, \tag{4.15}$$

$$S_{lokal} := \begin{bmatrix} s_{i_1,i_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{i_2,i_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{i_3,i_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{i_4,i_4} \end{bmatrix} \quad B1_{lokal} := \begin{bmatrix} b1_{i_1,j} \\ b1_{i_2,j} \\ b1_{i_3,j} \\ b1_{i_4,j} \end{bmatrix} \quad B2_{lokal} := \begin{bmatrix} b2_{i_1,j} \\ b2_{i_2,j} \\ b2_{i_3,j} \\ b2_{i_4,j} \end{bmatrix}$$

$$A_{lokal} := \begin{bmatrix} S_{lokal} & 0 & B1_{lokal} \\ 0 & S_{lokal} & B2_{lokal} \\ B1^T_{lokal} & B2^T_{lokal} & 0 \end{bmatrix}$$

wobei die $k-$te Komponenten des lokalen 'Defekts' bestimmt wird durch

$$\mathrm{def}_{lokal,k} = f_k - \sum_{i \neq k} s_{k,i} x_i. \tag{4.16}$$

Dieses System läßt sich mit dem Schur-Komplement Ansatz (siehe Abschnitt 4.2.1) sehr einfach direkt lösen. Die Schur-Komplement Matrix $B^T_{lokal} S^{-1}_{lokal} B_{lokal}$ ist lediglich ein Skalar, und S^{-1}_{lokal} erhält man durch einfaches Skalieren mit den Hauptdiagonalelementen. Dieser Glätter von Block Gauß Seidel Typ kommt ohne zusätzliche Vektoren aus und hat den Vorteil, daß sich die lokalen Probleme sehr einfach und schnell lösen lassen. Im folgenden werden wir dieses Verfahren mit **Vanka(1)** bezeichnen.

An dieser Stelle erkennt man auch einen großen Vorteil des nichtkonformen $\tilde{Q}_1/Q_0$ Elementes gegenüber beispielsweise dem konformen Q_1/Q_1 Ansatz. Wie in Abbildung 4.6 gesehen, koppelt ein Druckfreiheitsgrad mit den vier umliegenden Druckfreiheitsgraden, welche gerade mit den über eine Kante benachbarten Elementen korrespondieren. Bei Verwendung von Q_1/Q_1 Elementen hat man nicht nur mehr Druckfreiheitsgrade, nämlich einen pro Ecke. Wie in [6] und [44] ausgeführt, hat man eine Kopplung mit allen Knoten der dem Druckknoten benachbarten Elemente. Bei einem regelmäßigen, kartesischen Gitter sind das neun, bei weniger strukturierten Gittern können es aber auch beliebig mehr Kopplungen sein, je nach dem, wieviele Elemente an einem Knoten zusammenstoßen. Schon bei dem regelmäßigen Gitter führt dies zu mehr als einer Verdopplung des Matrizensternes. Dieser geringere Aufwand -der in drei Dimensionen noch stärker zutage tritt- macht das $\tilde{Q}_1/Q_0$ Element so attraktiv gerade auch in Kombination mit dem Vanka-Glätter. Dieser Vorteil vergrößert sich sogar noch im Hinblick auf die später beschriebenen geblockten Varianten des Vanka-Glätters.

Die oben geschilderte **Vanka(1)** Methode ist, wie auch die weiter unten angegebenen Zahlen zeigen, sehr anfällig für Störungen des Operators oder auch des Gitters. Als erstes Mittel zu einer möglichen Stabilisierung kann das Verfahren dahingehend geändert werden, daß man statt der Diagonalelemente $s_{i,i}$ nun alle Elemente $s_{l,s}, \quad l,s \in \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ mit in die Matrix S_{lokal} aufnimmt:

$$S_{lokal} := \begin{bmatrix} s_{i_1,i_1} & s_{i_1,i_2} & s_{i_1,i_3} & s_{i_1,i_4} \\ s_{i_2,i_1} & s_{i_2,i_2} & s_{i_2,i_3} & s_{i_2,i_4} \\ s_{i_3,i_1} & s_{i_3,i_2} & s_{i_3,i_3} & s_{i_3,i_4} \\ s_{i_4,i_1} & s_{i_4,i_2} & s_{i_4,i_3} & s_{i_4,i_4} \end{bmatrix}$$

und dementsprechend der 'Defekt' gegeben ist durch:

$$\mathrm{def}_{lokal,k} = f_k - \sum_{i \notin \{i_1,i_2,i_3,i_4\}} s_{k,i} x_i. \tag{4.17}$$

Dieser Glätter wird mit **Vanka(2)** bezeichnet werden. Auch Schieweck [39] und John [22] verwenden im Falle anisotroper Gitter eine ähnliche Modifikation des Vanka Glätters für Crouzeix-Raviart-Dreieckselemente [14]. Der numerische Aufwand ist bei dieser Variante etwas höher, da auf jedem Element statt einer bloßen Skalierung nun eine 4×4 Matrix invertiert werden muß. Allerdings erreicht man dadurch neben der Druck-Geschwindigkeits-Kopplung auch eine zusätzliche höhere Kopplung der Geschwindigkeiten untereinander.

Dies schlägt sich in einer erhöhten Stabilität und im Allgemeinen auch einer höheren Konvergenzgeschwindigkeit des Mehrgitterverfahrens nieder. In Tabelle 4.11 sind die Ergebnisse einer typischen Driven-Cavity Simulation mit $Re = 1000$ zu sehen. Die linke Zahl gibt die Anzahl der Iterationen einer äußeren, nichtlinearen Iteration an, die rechten Zahlen zeigen die durchschnittliche Anzahl der linearen Iterationen pro nichtlinearem Schritt zur Reduktion des Defektes um den Faktor 10^{-2}. Mit dem **Vanka(2)** Glätter benötigt man erwartungsgemäß durchweg weniger Mehrgitterschritte als mit dem einfacheren Glätter, wobei der Vorteil mit steigender Anzahl von Glättungsschritten (NSM) und feinerem Gitterlevel abnimmt.

NSM =	8		32	
Level	Vanka(1)	Vanka(2)	Vanka(1)	Vanka(2)
4	36/5.8	36/4.8	36/3.8	36/2.9
5	18/5.0	18/4.4	18/3.4	18/2.7
6	17/5.6	17/4.8	17/3.9	17/3.5

Tabelle 4.11: Vergleich von **Vanka(1)** und **Vanka(2)** bei Re=1000

Weitaus gravierender wirkt sich der Vorteil der stärkeren Kopplung jedoch aus, wenn die numerischen Eigenschaften der Iterationsmatrix schlechter werden. Bei den Untersuchungen in Kapitel 5 werden wir sehen, daß es sich für die nichtlineare Iteration als sehr vorteilhaft erweist, größere Teile der Fréchetableitung in die Iterationsmatrix zu integrieren. Dadurch läßt sich aber nicht mehr garantieren, daß diese Matrix weiterhin eine M-Matrix bleibt. In Tabelle 4.12 sieht man die Ergebnisse einer Driven Cavity Rechnung bei $Re = 5000$, wobei der Paramter $\delta, 0 \leq \delta \leq 1$ angibt, wie stark die Matrix durch die zusätzlichen Terme der Jacobimatrix gestört wird (siehe dazu auch Abschnitt 5.2.2).

$\delta =$	0		0.5		0.75	
Level	Vanka(1)	Vanka(2)	Vanka(1)	Vanka(2)	Vanka(1)	Vanka(2)
4	72/4.9	72/4.5	21/5.5	21/5.2	–/–	15/7.3
5	62/4.7	62/4.0	17/10.0	17/5.1	12/23.5	12/6.1
6	45/5.2	45/4.4	13/10.0	13/5.2	9/11.4	9/6.7

Tabelle 4.12: Vergleich von **Vanka(1)** und **Vanka(2)** bei Re=5000

Hier zeigt sich, daß bereits bei einem moderaten Wert von $\delta = 0.5$ der **Vanka(1)**-Glätter deutliche Probleme hat, und etwa doppelt soviele Iterationen benötigt, wie **Vanka(2)**. Bei stärkerer Störung der Matrix ist man mit dem einfachen Glätter auf den groben Gittern sogar gar nicht mehr in der Lage, die entstehenden Gleichungssysteme zu lösen.

Ein weiterer Vorteil der Variante **Vanka(2)** ist die Tatsache, daß sie sehr einfach auch auf Probleme erweitert werden kann, bei denen die einzelnen Komponenten (u, v) bzw. (u, v, w) der Geschwindigkeit stark miteinander gekoppelt sind. Bei Problemen zum Beispiel, die aus der Deformationstensor-Formulierung stammen (siehe Kapitel 1), hat in dem oben beschriebenen Zugang die lokale Matrix die Gestalt

$$A_{lokal} := \begin{bmatrix} S11_{lokal} & S12_{lokal} & B1_{lokal} \\ S21_{lokal} & S22_{lokal} & B2_{lokal} \\ B1^T_{lokal} & B2^T_{lokal} & 0 \end{bmatrix}.$$

In diesem Fall sind die Matrizen Sij_{lokal} nicht mehr gleich, und auf den Nebendiagonalblöcken stehen von Null verschiedene Einträge. Dadurch entsteht eine weitere, starke Kopplung der Geschwindigkeitskomponenten untereinander. In einem **Vanka(1)**-artigen Zugang würden diese Einträge lediglich in den Defektvektor integriert und die Kopplung damit weitgehend vernachlässigt. Bei dem zweiten Zugang wird die volle (lokale) Schurkomplement Matrix aufgebaut, wodurch diese Kopplung erhalten bleibt. Zur Aufstellung der Schur-Komplement Matrix ist in diesem Fall pro Element die Invertierung einer (in 2 Dimensionen) 8x8 Matrix, statt einer 4x4 Matrix vonnöten, was den Aufwand noch einmal etwas erhöht. Auf ganz analoge Art kann man so auch einen Glätter entwickeln, mit dem sich direkt auch z.B. Boussinesq-Approximationen oder Mehrgleichungsturbulenzmodelle gekoppelt behandeln lassen. Numerische Resultate hierzu sind in Kapitel 6 zusammengestellt.

Alles in allem ist die **Vanka(2)** Variante flexibler als die klassische Form **Vanka(1)**, einfach auf weitere Problemklassen erweiterbar und verspricht ein stabileres Verhalten und so auch für Konfigurationen eingesetzt werden zu können, in denen **Vanka(1)** versagt. Bei "unproblematischen" Konfigurationen kann es, wie wir an den Zahlen in Tabelle 4.11 gesehen haben, möglich sein, daß die Ersparnis an Lösungsschritten durch den Einsatz von **Vanka(2)** sehr gering ausfällt, so daß in diesen Fällen **Vanka(1)** durch den geringeren Rechenaufwand pro Iterationsschritt vorteilhafter da schneller sein kann. Im Allgemeinen jedoch ziehen wir die robustere Variante **Vanka(2)** vor.

Im nächsten Abschnitt wird nun, ausgehend von der Variante **Vanka(2)**, der Vankaglätter mit dem Ziel einer erhöhten Stabilität weiter verallgemeinert.

4.2.3 Der erweiterte Vanka-Glätter (LMPSC Methode)

Bei dem oben beschriebenen Block-Gauß-Seidel Verfahren ist die Wahl eines einzelnen Elementes als Blockgröße zwar sehr intuitiv, allerdings keinesfalls zwingend. Auf dieselbe Weise kann man eine beliebige Anzahl von Elementen als einen 'Block' auffassen, und das Gauß-Seidel-artige Verfahren analog auf diesen Blöcken definieren. Der Extremfall wäre ein Block, der aus sämtlichen Elementen des Gebietes besteht, was dann einem direkten Lösen des Gleichungssystems entspricht. Die beiden oben beschriebenen, klassischen Varianten des Vanka Glätters haben den Vorteil, sehr kostengünstig zu sein, scheitern allerdings in vielen praxisrelevanten Anwendungen, wie z.B. bei langgestreckten Gittern. Beispielhaft hierfür sind in Tabelle 4.13 die Konvergenzraten des **Vanka(2)** Glätters für eine Driven Cavity Konfiguration auf dem Einheitsquadrat angegeben (Level 6 hatte hierbei rund 40000 Unbekannte). Bei AR32 und AR64 hat etwa die Hälfte der Gitterzellen einen AR von 32 bzw. 64, während bei AR1 alle Elemente isotrop sind. Die Ergebnisse in 4.2.4 werden dieses Verhalten auch noch einmal deutlich belegen.

	AR1	AR32	AR64
Lev 4	0,25	0,40	0,58
Lev 5	0,35	0,63	0,95
Lev 6	0,43	0,62	div

Tabelle 4.13: Mehrgitterkonvergenzraten für den Glätter **Vanka(2)**

Das andere Extrem der totalen Blockung, also die direkte Lösung des gesamten Systems, liefert zwar auf sehr stabile Weise immer das Ergebnis, ist aber wegen des immensen Aufwandes an Rechenzeit und Speicherplatz für praktische Anwendungen nicht geeignet. Die Idee ist nun, daß ein quasi 'interpolierendes' Verfahren, mit einer Blockungsgröße zwischen einer und allen Zellen, genug Stabilitätseigenschaften für die jeweils zu untersuchende Konfiguration aufweist, aber dennoch mit vertretbarem Aufwand zu lösen ist.

Für diesen **LMPSC**-genannten Glätter (Local Multilevel Pressure Schur Complement) definieren wir sogenannte *Patches* Ω_i. Dies sind Teilgebiete von Ω, bestehend aus einem oder mehreren (benachbarten) Elementen. Diese Patches sollen sich nicht überlappen, das heißt, die Schnittmenge zweier verschiedener Ω_i ist entweder leer, oder besteht nur aus Kanten oder Punkten.

$$\Omega_i = \bigcup_{j \in I(i)} T_j, \quad \Omega = \bigcup_{i=1}^{NP} \Omega_i, \tag{4.18}$$

NP ist hier die Anzahl der Patches und die Menge $I(l)$ enthält die Indizes der Elemente, welche zu dem Patch l gehören.

Auf den einzelnen Patches werden explizit die lokalen Unterprobleme mit der lokalen Steifigkeitsmatrix A_i gelöst:

$$A_i = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{|\Omega_i} & 0 & B1_{|\Omega_i} \\ 0 & \tilde{S}_{|\Omega_i} & B2_{|\Omega_i} \\ B1^T_{|\Omega_i} & B2^T_{|\Omega_i} & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.19}$$

Die Matrixeinträge werden aus den globalen Matrizen übernommen. Die Bezeichnung $\tilde{S}|_{\Omega_i}$ bedeutet hier, daß man aus der globalen Matrix diejenigen Einträge herausnimmt, welche zu den Freiheitsgraden im Patch Ω_i gehören. $\tilde{S}$ bedeutet, daß entweder die komplette Geschwindigkeitsmatrix genommen wird, oder nur Teile davon, z.B.: der Diagonalteil *diag*(S). (Beispiele hierfür im Falle von $\Omega_i = T_i$ sind die Glätter **Vanka(1)** und **Vanka(2)**).

Zum Zwecke der größeren Allgemeingültigkeit wollen wir wieder die Annahme fallen lassen, daß für beide Geschwindigkeitskomponenten die Steifigkeitsmatrix gleich ist. Zudem sei auch noch eine zusätzliche Kopplung der beiden Geschwindigkeitsgleichungen erlaubt. Bei der Verwendung des Newton-Verfahrens zur Behandlung der Nichtlinearität (Abschnitt 5) erweist sich dies als unabdingbar. Daher lautet der allgemeinere Ansatz für die Matrix A_i

$$A_i = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11|\Omega_i} & \tilde{S}_{12|\Omega_i} & B1_{|\Omega_i} \\ \tilde{S}_{21|\Omega_i} & \tilde{S}_{22|\Omega_i} & B2_{|\Omega_i} \\ B1^T_{|\Omega_i} & B2^T_{|\Omega_i} & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.20}$$

Diese lokalen Teilprobleme sollen mit einem direkten Löser exakt invertiert werden, und zwar wieder über die Schur-Komplement Formulierung mit der Schur-Komplement-Matrix

$$P_i := B^T_{|\Omega_i}\tilde{S}^{-1}_{|\Omega_i}B_{|\Omega_i} = [B1^T_{|\Omega_i}, B2^T_{|\Omega_i}] \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11|\Omega_i} & \tilde{S}_{12|\Omega_i} \\ \tilde{S}_{21|\Omega_i} & \tilde{S}_{22|\Omega_i} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B1_{|\Omega_i} \\ B2_{|\Omega_i} \end{bmatrix}. \tag{4.21}$$

Solange die Anzahl der Elemente im Patch Ω_i nicht zu groß wird, bleibt die Druckmatrix P_i moderat groß. Nachdem auf diese Weise lokal der Druck bestimmt wurde, erhält man damit wie in Kapitel 4.2.1 beschrieben das zugehörige Geschwindigkeitsfeld.

Um schließlich die Konvergenz des Verfahrens gegen die Lösung des vollen Problemes

$$S\mathbf{u} + Bp = \mathbf{f}, \quad B^T\mathbf{u} = 0 \tag{4.22}$$

sicherzustellen, wird der lokale Lösungsschritt in eine äußere Jacobi- oder Gauß-Seidel Iteration eingebunden. Im Jacobi Fall läßt sich die Basisiteration einfach in der folgenden, suggestiven Form schreiben:

Gegeben seien $\mathbf{u^{l-1}}, p^{l-1}$. Die nächste Iterierte $\mathbf{u^l}, p^l$ erhält man durch den Relaxationsschritt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u^l} \\ p^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u^{l-1}} \\ p^{l-1} \end{bmatrix} - \omega^l \sum_{i=1}^{NP} \begin{bmatrix} \tilde{S}_{|\Omega_i} & B_{|\Omega_i} \\ B^T_{|\Omega_i} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} S & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u^{l-1}} \\ p^{l-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Praktisch wird man so vorgehen, daß man sukzessive den globalen Defekt für $\mathbf{u^{l-1}}, p^{l-1}$ auf dem Patch Ω_i berechnet

$$\begin{bmatrix} \mathbf{defu^{l-1}} \\ defp^{l-1} \end{bmatrix} |_{\Omega_i} = \left(\begin{bmatrix} S & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u^{l-1}} \\ p^{l-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{bmatrix} \right)\Bigg|_{\Omega_i} \tag{4.23}$$

und das lokale Problem

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_{|\Omega_i} & B_{|\Omega_i} \\ B^T_{|\Omega_i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v_i^l} \\ q_i^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{defu_i^{l-1}} \\ defp_i^{l-1} \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

löst. Schließlich erhält man die neue Iterierte $\mathbf{u^l}|_{\Omega_i}, p^l|_{\Omega_i}$ (mit einem Relaxationsparameter ω^l) durch

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u^l}|_{\Omega_i} \\ p^l|_{\Omega_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u^{l-1}}|_{\Omega_i} \\ p^{l-1}|_{\Omega_i} \end{bmatrix} - \omega^l \begin{bmatrix} \mathbf{v_i^l} \\ q_i^l \end{bmatrix}. \tag{4.25}$$

Diese Prozedur wird nun sukzessive für alle Patches durchgeführt.

An den Teilgebietsgrenzen tritt wieder der Fall auf, daß Geschwindigkeitskomponenten der Lösung zweimal relaxiert werden. Um eine global definierte Lösung zu erhalten, hat man auch hier wieder die Möglichkeit, einfach den Wert aus dem zuletzt behandelten Patch zu verwenden, oder aber ein Mittel aus den beiden Werten.

So haben wir nun eine einfache Block-Jacobi Iteration für das gekoppelte Problem (4.22) erhalten. Wie üblich in der numerischen linearen Algebra kann dieses Verfahren einfach verbessert werden, indem man die Defektberechnung (4.23) modifiziert. Anstatt ausschließlich die Werte $\mathbf{u^{l-1}}, p^{l-1}$ aus der vorhergehenden Iteration zu benutzen, bezieht man die neuen Iterierten $\mathbf{u^l}, p^l$ auf den bereits behandelten Patches mit ein. Dieses als Block-Gauß-Seidel Verfahren interpretierbare Vorgehen hat üblicherweise eine bessere Effizienz und zeigt sich robuster als die Block-Jacobi Methode, und das bei fast gleichem numerischen Aufwand. Daher verwenden wir im folgenden ausschließlich die Gauß-Seidel Variante des Verfahrens.

Die Idee hinter diesem Ansatz ist die folgende: Wie bereits erwähnt sind Jacobi- bzw. Gauß-Seidel Iterationen sehr effizient, solange die Anisotropien in den Matrixeinträgen klein sind. Auf Triangulierungen allerdings, die Elemente mit großen Verzerrungen (*Aspect-Ratios*) enthalten, zum Beispiel langgezogene Zellen zum Auflösen von Randschichten oder komplexen Geometrien, oder auch große Sprünge in der Größe zweier benachbarter Zellen, verschlechtert sich die Konvergenzrate dieser Verfahren drastisch. In dem oben beschriebenen Ansatz versucht man nun, die Elemente der Triangulierung so zu gruppieren, daß die entstehenden Patches alle in etwa dieselbe "Größe und Form" besitzen. Die störenden Anisotropien sind dann in den Patches versteckt. Auf diesen Patches werden die lokalen Gleichungssysteme mit einem direkten Verfahren gelöst, wobei keinerlei Probleme durch die Anisotropien entstehen. Somit wird das Konvergenzverhalten der äußeren Jacobi/Gauß-Seidel Iteration zufriedenstellend sein, die schlecht konditionerten lokalen Unterprobleme sind aber üblicherweise klein genug, daß die komplette Inverse in den Arbeitsspeicher und oft sogar in den Prozessorcache paßt, so daß schnelle direkte Löser verwendet werden können. Als Konsequenz sollten sich Konvergenzraten beobachten lassen, welche unabhängig von den Gitterstörungen sind und die dieselbe Qualität haben, wie jene auf regelmäßig strukturierten Gittern.

Neben Störungen durch das Gitter können die numerischen Eigenschaften der Steifigkeitsmatrix aber auch durch störende Terme im diskretisierten Operator selbst begründet liegen. So kann z.B. die Diskretisierung eines anisotropen Diffusionsproblems

$$-\varepsilon u_{xx} - u_{yy} = f \tag{4.26}$$

zum Versagen der Standardverfahren führen. Dies versteht man, wenn man bedenkt, daß die Steifigkeitsmatrix, die aus der Diskretisierung dieses Problems entsteht, der Matrix entspricht, die bei der Diskretisierung des Laplace-Operators auf einem verzerrten Gitter entsteht, bei dem die Gitterweite h_y in y-Richtung das ε-fache von h_x ist. Im Gegensatz zu den Gitteranisotropien, die sehr einfach mittels Geometriebetrachtungen zu bestimmen sind, verwenden wir zur Zeit leider noch kein Verfahren, mit dem wir solche 'Anisotropien aus dem Operator' anhand der Matrixeinträge automatisch erkennen. Vergleichsweise einfach ist hierbei noch die Situation, bei der Störungen im Operator durch eine räumlich sehr stark variierende Viskosität verursacht werden. Die Lage der Viskositätssprünge läßt sich ermitteln, und bei den entsprechenden Elementen können wieder Modifikationen an den Mehrgitterkomponenten vorgenommen werden. Erste vielversprechende Resultate hierzu können in Abschnitt 4.3 nachgelesen werden.

In Kapitel 5 beschäftigen wir uns auch eingehend mit der Wirkung des LMPSC-Glätters bei den Problemen, die aus der Verwendung der vollen Jacobimatrix im Newton-Verfahren entstehen. Es zeigt sich, daß sich bei Problemen dieser Art mit einer einfachen, nicht speziell angepaßten Blockung sehr gute Resultate in puncto Stabilität des Verfahrens erzielen lassen.

Eine weitere wichtige Annahme für das erwartete numerische Verhalten ist, daß sich die Konvergenzrate mit steigender Größe der lokalen Probleme verbessert, jedoch begrenzt bleibt für eine steigende Anzahl von Patches. Insbesondere der zweite Punkt steht im Kontrast zu einigen Gebietszerlegungsverfahren, bei denen die Konvergenzrate oft von der Anzahl der Teilgebiete sowie der Größe des Überlapps derselben abhängt. Unser Zugang kommt formal ohne jede Überlappung aus, da in (4.18) die direkte Summe genommen wird. Er kann aber auch als Gebietszerlegungsverfahren interpretiert werden, wobei die Überlappung der Größe eines Elementes der Gitterweite h entspricht (siehe dazu Kilian [27]).

Offensichtlich strebt die Konvergenzrate der Basisiteration gegen 0, wenn die Anzahl der Patches gegen 1 strebt (in diesem Fall verwenden wir einen exakten Löser), da wir jedoch diesen modifizierten Gebietszerlegungsansatz lediglich als Glätter in einem typischen, globalen Mehrgitterkontext verwenden, können wir zusätzlich sicherstellen, daß die Konvergenzraten von 1 weg beschränkt bleiben, obwohl die Größe der Überlappung von der aktuellen Gitterweite h abhängig ist. Als Erklärung hierfür sei angefügt, daß wir im Extremfall, daß die Zahl der Teilgebiete der Zahl der Elemente entspricht, einfach ein (für den Druck) punktweise arbeitendes Mehrgitterverfahren erhalten. Somit ergeben sich im 'schlimmsten' Fall die typischen Konvergenzraten eines punktweise arbeitenden Mehrgitterverfahrens, welche mit steigender Größe der Patches weiter verbessert werden können.

4.2.4 Numerische Resultate

Bei den bisherigen Ausführungen zur LMPSC-Methode wurde noch nicht näher darauf eingegangen, wie die Patches Ω_i im einzelnen zu wählen sind, und welchen Einfluß diese Wahl auf das Konvergenzverhalten des Verfahrens hat. Wir werden zwei grundsätzlich verschiedene Ansätze untersuchen, nämlich den (Grob-)gitterorientierten und den (lokal) adaptiven. Bei dem gitterorientierten wählt man einen relativ groben Gitterlevel k_0 und faßt auf allen folgenden Verfeinerungstufen diejenigen Elemente, welche durch die Verfeinerung eines Elementes T_i aus k_0 entstanden sind, zu dem Patch Ω_i zusammen. Dadurch wird der Aspect-Ratio des Patches Ω_i der für das Block-Gauß-Seidel-Verfahren "sichtbare", und somit auch der für die Konvergenz bestimmende Anisotropiegrad. Dieses Vorgehen verspricht vor allem dann von großem Nutzen zu sein, wenn die Verfeinerung der Elemente, etwa zur Auflösung von Randschichten, nicht gleichmäßig, d.h. durch Verbinden der Seitenmitten erfolgt, sondern in eine Richtung stark anisotrop ist.

Auch die lokaladaptive Blockungsmethode zielt darauf ab, anisotrope Elemente zu isotropen Blöcken zusammenzufassen. Dabei prüft man auf jedem Verfeinerungslevel alle Elemente. Findet man ein Element, dessen Seitenverhältnis einen vorgegebenen Toleranzwert überschreitet, dann versucht man, es mit einem oder ggf. mehreren Nachbarelementen so zusammen zu gruppieren, daß die Geometrie des entstehenden Patches wieder isotrop ist. Dieser Prozeß der Patchbildung ist zwar aufwendiger als der gitterorientierte. Da das Patchen aber nur einmal am Anfang der Berechnung durchgeführt wird, fällt dieser

Mehraufwand kaum ins Gewicht.

Wir wollen nun an einigen Beispielen die Wirkung verschiedener Blockungen auf die Konvergenzraten des linearen Mehrgitterverfahrens untersuchen.

Als erstes Testbeispiel wurde auf dem Gitter in Abbildung 4.7 ein Driven-Cavity Problem mit der Viskosität $\nu = 1/5000$ gerechnet. Die gestreckten Randelemente des Grobgitters haben ein Seitenverhältnis von 1:20. Als Schwellenwert für die Blockung der Elemente wurde bei allen Rechnungen ein AR von 15 gewählt. Aus den bereits in Abschnitt 3.1.3 gezeigten Stabilitätsgründen verwenden wir nur die nichtparametrische Version des rotiert-bilinearen Elementes.

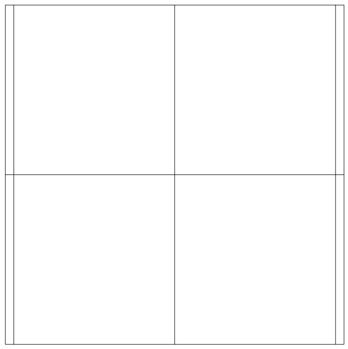


Abbildung 4.7: Grobgitter 1-20

In den Abbildungen 4.8 bis 4.10 sind drei mögliche Blockungsmethoden dargestellt. Abbildung 4.10 zeigt die adaptive Blockung, wobei die Regionen, in denen überhaupt nicht geblockt wird rosa, eingefärbt sind. In Abbildung 4.9 ist jede Zelle des Grobgitters 'Mutterzelle' eines Blockes, das heißt, alle Elemente, die durch Verfeinerung aus derselben Grobgitterzelle entstehen, werden zusammengefaßt. Dies entspricht dem gitterorientierten Blocken mit $k_0 = 1$, also dem Grobgitter als Startlevel. Das '4×2' genannte Verfahren geht noch darüber hinaus. Man faßt, wie in Abbildung 4.8 zu sehen, jede der anisotropen Grobgitterzellen mit der jeweils benachbarten zusammen, und blockt beim Verfeinern alle aus diesen Paaren entstehenden Elemente. Als viertes Blockungsverfahren haben wir noch ein gitterorientiertes Verfahren gewählt, bei dem allerdings der Startlevel k_0 von dem jeweils gerechneten feinsten Gitterlevel abhängig ist. Bei dem hier getesteten 'GG: 64' ist $k_0 = Level_{max} - 3$, so daß auf dem feinsten Level die Blöcke aus jeweils 64 Elementen bestehen.

Tabelle 4.14 zeigt die Konvergenzraten des Mehrgitterverfahrens ($\rho(MG)$) und die Patchgrößen auf dem feinsten Level (PG) für diese vier Blockungsstrategien, dazu noch die Zahlen für den unmodifizierten Vanka(2) (bei jeweils 8 Vor- und Nachglättungsschritten).

Level	Vanka(2)		adaptiv		GG: 64		GG: 8×1		GG: 4×2	
	ρ(MG)	PG	ρ(MG)	PG	ρ(MG)	PG	ρ(MG)	PG	ρ(MG)	PG
3	0,16	1	**0,06**	**5**	–	64	$2 \cdot 10^{-3}$	16	$6 \cdot 10^{-5}$	32
4	0,28	1	**0,16**	**9**	0,02	64	0,02	64	$5 \cdot 10^{-3}$	128
5	0,57	1	**0,20**	**17**	0,34	64	0,06	256	0,05	512
6	0,99	1	**0,17**	**33**	0,35	64	0,10	1024	0,07	2048

Tabelle 4.14: Vanka auf Gitter 1-20, NSM=8

Man sieht sofort, daß die unmodifizierte Variante Vanka(2) besonders auf den feineren Gittern nicht mehr akzeptabel konvergiert. Die gitterorientierte Variante GG: 64 bringt eine deutliche Verbesserung. Da allerdings auch bei diesem Ansatz ein großer Teil der entstehenden Patches konstruktionsbedingt selbst anisotrop sind, bleiben die Konvergenzraten mit ~ 0.35 deutlich hinter denen auf einem völlig isotropen Gitter zurück. Der höhere Aufwand, den man dadurch betreibt, daß man auch die isotropen Elemente zusammengrup-

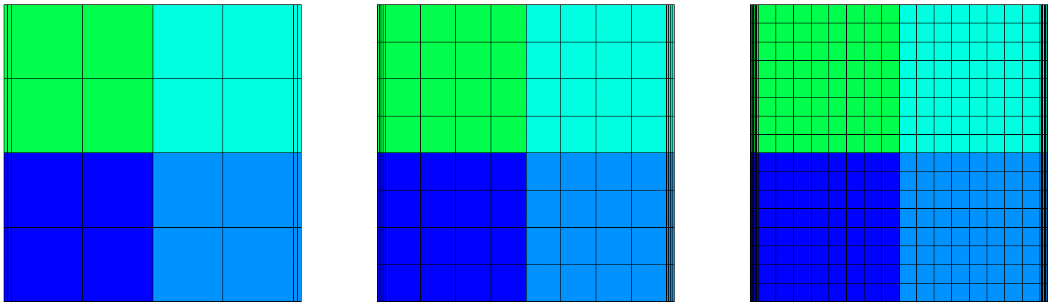


Abbildung 4.8: Blockung '4 × 2'

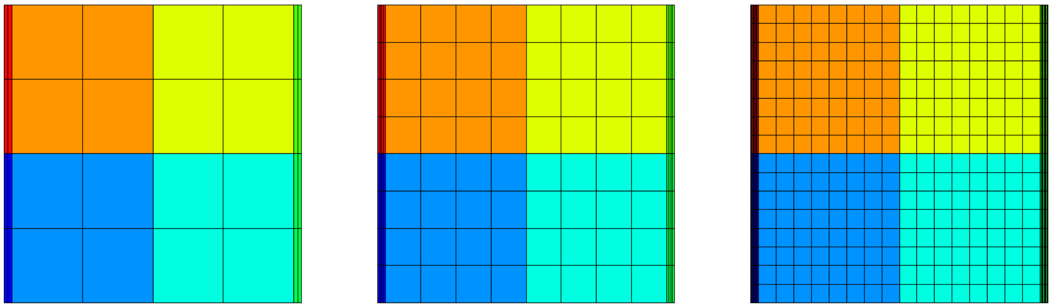


Abbildung 4.9: Blockung '8 × 1'

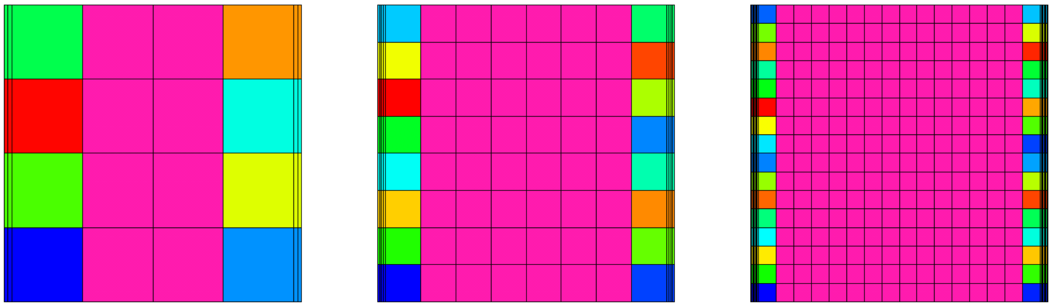


Abbildung 4.10: Adaptive Blockung

piert, wird hierbei nicht angemessen belohnt. Durchweg hervorragende Konvergenzraten haben die beiden "brutalen" Blockungsstrategien GG: 8 × 1 und GG: 4 × 2. Die Werte liegen auch bei weiteren Verfeinerungen um $\rho \sim 0.1$. Jedoch ist der hierfür erforderliche Aufwand immens. Auf dem feinsten Level bestehen die Blöcke aus 1024 bzw. sogar 2048 Elementen. Während des Glättungsprozesses müssen also vollbesetzte Gleichungssysteme in dieser Größe gelöst werden. Als Königsweg erweist sich in diesem Beispiel der Glätter mit der adaptiven Blockung. Die Konvergenzraten sind gitterunabhängig und nur wenig schlechter, als die Werte bei GG: 8 × 1 und GG: 4 × 2. Dieses Konvergenzverhalten wird jedoch mit einem Bruchteil des Aufwandes erzielt. Selbst auf dem feinsten Gitter ist kein Block größer als 33 Elemente. Der größte Teil der isotropen Elemente ist überhaupt nicht geblockt. Aufschlußreich ist auch der direkte Vergleich mit GG: 64. Obwohl bei der adaptiven Glättungsvariante sowohl die Anzahl als auch der Umfang der Blöcke kleiner ist, erreicht man damit trotzdem eine signifikant besseres Konvergenzverhalten. Hieran erkennt man noch einmal sehr deutlich, daß nicht alleine die Anzahl oder die Größe der Blöcke ausschlaggebend ist, sondern daß diese Blöcke weitgehend isotrop sind.

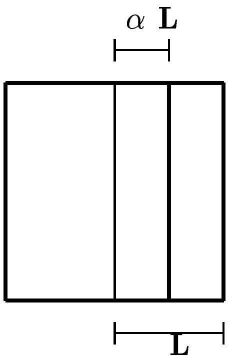


Abbildung 4.11: Verfeinerung zur Wand

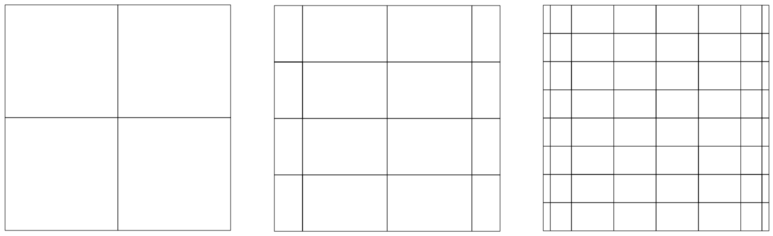


Abbildung 4.12: Grobgitter und 2 Verfeinerungen mit $\alpha = 0.5$

Eine weitere Strategie zur Auflösung von Randschichten ist es, ausgehend von einem weitgehend isotropen Grobgitter in Richtung einer Wand lokal anisotrop zu verfeinern. In dem folgenden Beispiel haben wir wieder eine Driven Cavity Konfiguration mit $1/\nu = 5000$ gerechnet. Als Grobgitter wurde diesmal ein Einheitsquadrat verwendet, das in 4 gleiche, isotrope Quadrate unterteilt ist (siehe Abbildung 4.12). Das Gitter wurde derart verfeinert, daß die Elemente, die an der rechten bzw. linken Wand (d.h. $x \equiv 0$ oder $x \equiv 1$) liegen, nicht gleichförmig, sondern in Richtung dieser Wand unterteilt werden. Der Parameter α, $0 \leq \alpha \leq 1$ gibt an, wie stark die Abweichung von der gleichförmigen Verfeinerung ist (Abbildung 4.11). Bei $\alpha = 0.5$ verdoppelt sich also der 'Aspect-Ratio' der wandnahen Elemente in jedem Verfeinerungsschritt. Der Vorteil hiervon ist, daß sich dadurch Randschichten sehr fein auflösen lassen, und trotzdem die Gitter auf den gröberen Leveln vergleichsweise isotrop bleiben.

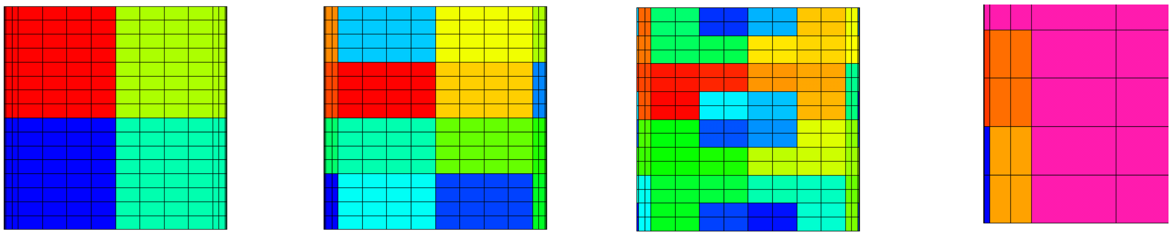
		AR	Vanka(2)	GG: 4	GG: 16	GG: 64	adaptiv
$\alpha = 0.0$	5	1	0.41	0.36	0.32	0.21	0.41
	6	1	0.18	0.18	0.18	0.16	0.18
	7	1	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21
$\alpha = 0.5$	5	16	0.21	0.15	0.11	0.05	0.21
	6	32	0.21	0.16	0.12	0.10	0.21
	7	64	0.21	0.17	0.15	0.14	0.17
$\alpha = 0.66$	5	75	0.44	0.42	0.31	0.19	0.42
	6	220	0.42	0.40	0.31	0.22	0.40
	7	650	0.36	0.36	0.31	0.22	0.22
$\alpha = 0.75$	5	256	0.28	0.20	0.16	0.10	0.22
	6	1024	0.26	0.18	0.14	0.05	0.16
	7	4096	div	div	0.20	0.19	0.20

Tabelle 4.15: Anisotrope Verfeinerung zum Rand: Konvergenzraten des Mehrgitterverfahrens für verschiedene Blockungssstrategien

Tabelle 4.15 zeigt wieder die Konvergenzraten für verschiedene α und die unterschiedlichen Blockungsstrategien. GG: 4 sowie GG:16 sind dabei analog zum bereits oben erklärten GG: 64 definiert. Die Zahl gibt dabei jeweils die Größe der Blöcke auf dem feinsten Gitter an. Auf dem isotropen Gitter $\alpha = 0$ bringt eine Erhöhung der Patchgröße auf den gröberen Gitterleveln eine sichtbare Verbesserung der Konvergenzrate, die allerdings auf den feineren nicht mehr so ins Gewicht fällt. Beim adaptiven Blockungsalgorithmus wird der Schwellenwert von 15 von keinem Element überschritten, daher entspricht das Verfahren in diesem Beispiel gerade dem unmodifizierten Vanka.

Bei nicht zu extremer Verzerrung der Elemente erzielt man durch das gitterorientierte Blocken eine moderate Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit, die alleine allerdings die Notwendigkeit des aufwendigeren Glätters nicht begründen würde. Bei der extremen Verzerrung mit Seitenverhältnissen von über 4000 sieht man jedoch die Bedeutung des geblockten Glätters. Mit dem klassischen Vankaverfahren als Glätter konvergiert das Mehrgitterverfahren auf diesem Gitter überhaupt nicht mehr. Bei Blockung mit Blockgrößen von 16 oder mehr hingegen erzielt man mit dem Mehrgitterverfahren ohne sonstige Änderungen, wie z.B. der Erhöhung der Zahl der Glättungsschritte, weiterhin gute Konvergenzraten im Bereich von 0.2, denselben Konvergenzraten im übrigen, wie wir sie für diese Verfahren auch auf den isotropen Gittern gemessen haben.

Auch in diesem Beispiel erweist sich das lokal-adaptive Verfahren als ausgesprochen robust. Zwar sind die gemessenen Konvergenzraten etwas schlechter als die der stark geblockten Verfahren, allerdings bleiben sie nahezu konstant im Bereich um 0.2. Auch kommt das Verfahren sehr gut mit den sehr stark gestreckten Elementen zurecht. Außerdem ist bei alledem immer zu bedenken, daß die adaptive Blockung mit in der Regel deutlich geringerem Aufwand auskommt, da nur in den anisotropen Regionen geblockt wird, während die Elemente in den isotropen Regionen unberührt bleiben.



$l_{start} = k_0$ AR Patch=1 | $l_{start} = k_0 - 1$ AR Patch=4 | $l_{start} = k_0 - 2$ AR Patch=16 | Zoom

Abbildung 4.13: Verschiedene Blockstrategien, AR-Zelle=64

Nun sind wir bei dem letzten Beispiel zwar von einem isotropen Grobgitter ausgegangen, haben aber mit der gitterorientierten Blockung jeweils auf einem späten Level k_0 begonnen, so daß die Verzerrung der Blöcke selbst schon sehr groß war. Diese Tatsache haben wir bisher stets für das vergleichsweise unbefriedigende Konvergenzverhalten bei der gitterorientierten Blockung verantwortlich gemacht. Um dies noch einmal explizit zu untersuchen, führen wir erneut Rechnungen auf der obigen Konfiguration durch, beginnen mit der anisotropen Verfeinerung des Gitters aber jeweils erst auf Level $l_{start} := (k_0 - i), i = 0, \ldots, 3$. Die so entstehenden Blockungen sind beispielhaft für einen maximalen AR von 64 bei den randnahen Zellen in Abbildung 4.13 angegeben.

In Tabelle 4.16 sieht man, daß das gitterorientierte Blocken sehr wohl eine signifikante Verbesserung der Konvergenzraten bringen kann, wenn die Verzerrung der Blöcke nur klein bleibt. Bei der ungeblockten Variante, bei der einzelne (einelementige) Patches einen Verzerrungsgrad von 64 aufweisen ist die Konvergenzrate etwa fünfmal schlechter, als bei der Variante, bei der alle Blöcke Quadrate sind (entspricht einer Patchgröße von 64).

	$\alpha = 0.75$	l_{start} (AR des Patches)			
	AR-Zelle	$k_0 - 3$ (64)	$k_0 - 2$ (16)	$k_0 - 1$ (4)	k_0 (1)
6	64	0.14	0.11	0.05	0.02
7	64	0.13	0.09	0.04	0.03
8	64	0.14	0.18	0.04	0.04

	$\alpha = 0.85$	l_{start} (AR des Patches)			
	AR-Zelle	$k_0 - 3$ (244)	$k_0 - 2$ (39)	$k_0 - 1$ (6)	k_0 (1)
6	244	0.94	0.88	0.80	0.18
7	244	0.81	0.88	0.18	0.15
8	244	0.52	0.50	0.14	0.05

Tabelle 4.16: Verzerrung der Blöcke: $\alpha = 0.75/0.85$

Wenn man noch stärker anisotrop verfeinert, also α weiter vergrößert, wird der Effekt noch deutlicher. Bei $\alpha = 0.85$ erhält man nach drei Verfeinerungsschritten Elemente mit einem Seitenverhältnis von etwa 244. Hier sieht man zwischen dem klassischen Vanka(2) und dem 'voll-geblockten' eine Verbesserung der Konvergenzrate um den Faktor 10.

Aus den bisherigen Tests auf verzerrten Tensorproduktgittern können wir also folgende Ergebnisse ableiten: Das einfache Vanka-Verfahren, auch in der stabilisierten Variante Vanka(2), ist sehr anfällig gegenüber Verzerrungen des Gitters. Dabei spielt einerseits der Grad der Verzerrung, andererseits aber auch die Anzahl der gestörten Elemente eine Rolle. Im Falle einer isotropen Verfeinerung eines bereits gestörten Grobgitters, einer Konfiguration also, bei der eine große Zahl gestreckter Elemente auftritt, liefert das Verfahren bereits bei einem Aspect-Ratio von 20 Konvergenzraten von 0.99, während bei der anisotropen Verfeinerung auf einem Gitter mit vergleichbarer Anzahl von Elementen, und Verzerrungen bis zu 650 bei derselben Anzahl von Glättungsschritten (in dem Fall jeweils 8 Vor- und Nachglättungschritte) noch Konvergenzraten von 0.36 gemesen werden konnten. Das LMPSC Verfahren mit einer geeigneten Blockung kommt mit beiden Situationen jedoch sehr gut zurecht. Bei der Blockung ist nicht nur die Größe oder die Anzahl der Blöcke für die Konvergenzraten entscheidend, sondern maßgeblich auch der Verzerrungsgrad der Blöcke selbst. Besonders bei Problemen, bei denen schon das Grobgitter starke Verzerrungen aufweist, ist es ratsam, statt der einfachen, gitterorientierten Blockbildung ein Verfahren zu verwenden, das ein möglichst gleichmäßiges Seitenverhältnis der entstehenden Blöcke gewährleistet. Dieses Vorgehen hat sich als sehr robust erwiesen und liefert auch auf solchen Konfigurationen noch gute Konvergenzraten, auf denen der Vanka(2), aber auch die LMPSC-Methode mit zu kleiner Blockung, überhaupt nicht mehr zur Konvergenz führen.

An dieser Stelle sei erwähnt, daß für alle Rechnungen in diesem Abschnitt die in Kapitel 4.1 beschriebenen, modifizierten Prolongations-/Restriktionsoperatoren, sowie die entsprechende Behandlung der Grobgittermatrix verwendet wurden, genauer das Standardverfahren **INT(g)(50)MAT(50)**. Dies ist auch bei der Verwendung des LMPSC-Glätters weiterhin unabdingbar. Tabelle 4.17 zeigt für den Fall der anisotropen Verfeinerung zum Rand mit $\alpha = 0.66$ die Zahlen aus Tabelle 4.15 im Vergleich zu Rechnungen, die mit der vollen, bilinearen Interpolation durchgeführt wurden. Verwendet man die feste Grobgit-

	$\alpha = 0.66$, L7, AR=650				
	Vanka(2)	GG: 4	GG: 16	GG: 64	adaptiv
adaptive Interpolation	0.36	0.36	0.31	0.22	0.22
bilineare Int., adapt. GG-Korrektur	0.96	0.94	0.90	0.65	0.96
bilineare Int., fixe GG-Korrektur	div	div	div	div	div

Tabelle 4.17: Notwendigkeit der modifizierten Mehrgitterkomponenten

terkorrektur mit $\alpha_k = 1$, so divergiert der lineare Löser auch mit den geblockten Glättern. Bei Verwendung der adaptiven Grobgitterkorrektur konvergiert der Löser immerhin. Man kann erkennen, daß das Blocken hierbei das Konvergenzverhalten in ähnlichem Maß beeinflußt, wie bei der adaptiven Interpolation. So verringert sich die Konvergenzrate bei Blockgröße 64 etwa auf 2/3 des Wertes des ungeblockten Vanka(2). Jedoch sind diese Werte etwa dreimal so groß, wie bei der 'optimalen' adaptiven Variante. Somit kann die Blockung beim Glätten die Modifikationen der übrigen Mehrgitterkomponenten nicht ersetzen, sondern ergänzt diese. Auffallend bei diesen Zahlen ist, daß die lokal-adaptive Blockung offenbar viel sensibler auf die verschiedenen Interpolationsvarianten reagiert. Ist sie bei der adaptiven Interpolation so gut wie die grobgitterorientierte mit Blockgröße 64, so ist sie bei der vollen bilinearen Interpolation so schlecht wie der ungeblockte Vanka. Dies ist ein weiteres Indiz dafür, wie wichtig die richtige Abstimmung sämtlicher Mehrgitterkomponenen aufeinandner ist.

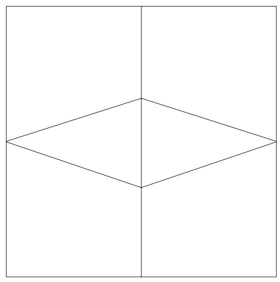


Abbildung 4.14: Grobgitter

Bisher haben wir ausschließlich das Mehrgitterverhalten auf gestörten Tensorproduktgittern untersucht. In Abschnitt 3.1.5 hatten wir im Zusammenhang mit der Qualität verschiedener Diskretisierungen Konfigurationen betrachtet, bei denen einzelne Viereckselemente zu Dreiecken degeneriert sind. Wir hatten in dem oben erwähnten Abschnitt gesehen, daß auf derartigen Gittern bei Verwendung der nichtparametrischen Version des rotiert-bilinearen Viereckselementes die Qualität der Lösung gut bleibt. Für die bekannte Driven Cavity Konfiguration auf dem Grobgitter aus Abbildung 4.14 sind die Konvergenzraten des Mehrgitterverfahrens für die verschiedenen Glätter- bzw. Blockungsvarianten in Tabelle 4.18 zusammengestellt. Abbildung 4.15 zeigt die Blöcke, die bei der adaptiven Blockung (bei der Wahl von 15 als Schwellenwert) entstehen. Die rosafarbenen Zellen bleiben ungeblockt. Man sieht sehr gut, daß die Blockung nur in einem sehr geringen Teil der Elemente greift.

	AR	Vanka(2)	GG: 4	GG: 16	GG: 64	adaptiv
5	50	0.21	0.17	0.13	0.11	0.18
6	98	div	div	0.20	0.14	0.21
7	190	div	div	div	div	0.16
8	355	div	div	div	div	0.18

Tabelle 4.18: $\rho(MG)$ für verschiedene Blockungen bei entarteten Elementen

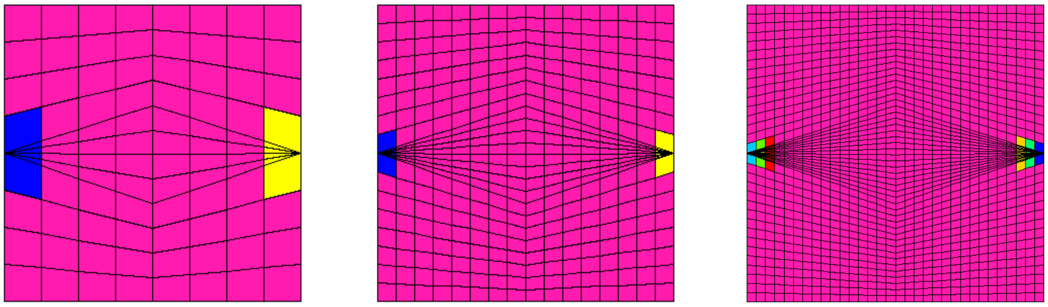


Abbildung 4.15: Adaptive Blockung, Level 3 - 5

Diese Zahlen zeigen, daß hier bei zunehmender (isotroper) Gitterverfeinerung die gitterorientierten Blockungsverfahren völlig versagen. Das Problem bei diesem Grobgitter ist, daß sich der 'Aspect-Ratio' der (quasi)dreieckigen Zellen bei der Verfeinerung vergrößert. Der Aspect-Ratio ist hier definiert als das Verhältnis der Längen der Verbindungsstrecken gegenüberliegender Seitenmitten. In Abbildung 4.16 sieht man, daß sich dieses Verhältnis bei einem Verfeinerungsschritt gerade verdoppelt. Im Grobgitter ist das Verhältnis Breite Höhe b/h. In dem verfeinerten Dreieck ist die Breite $\sim b/2$, die Höhe jedoch $h/4$, woraus sich ein Verzerrungsverhältnis von $\sim \frac{b}{2h}$ ergibt. Die Abweichungen auf dem feineren Gitter, die man in Tabelle 4.18 erkennt, kommen daher, daß es sich bei den Elementen um keine exakten Dreiecke handelt, sondern die beiden Punkte in der "Dreiecksspitze" einen endlichen Abstand voneinander haben. Wir haben hier also wieder einen ähnlichen Fall, wie bei der anisotropen Verfeinerung. Bei der gitterorientierten Blockung sind, zumindest bei den hier untersuchten Blockgrößen, die Blöcke selbst wieder zu anisotrop, als daß das Block-Gauß-Seidel Verfahren konvergieren könnte. Das adaptive Verfahren jedoch hat auch mit derartig gestörten Gittern keine Schwierigkeiten. Die Konvergenzraten bleiben bei zunehmender Verfeinerung sogar nahezu konstant. In Abbildung 4.15 sieht man sehr schön, daß das adaptive Blockungsverfahren diese wachsenden Aspect-Ratios erkennt, und z.B. auf Level 5 zusätzliche Elemente zu neuen Blöcken zusammenfaßt.

Auch dieser Test bestätigt unsere obige Behauptung, daß das LMPSC-Verfahren mit der lokal adaptiven Blockung ein sehr robuster Glätter für das lineare Mehrgitterverfahren ist, wenn die Geometrie der Gitter starke Verzerrungen aufweist. Die Blockung der Elemente erfolgt nur lokal, und es werden auch nur soviele Elemente zusammengefaßt, wie

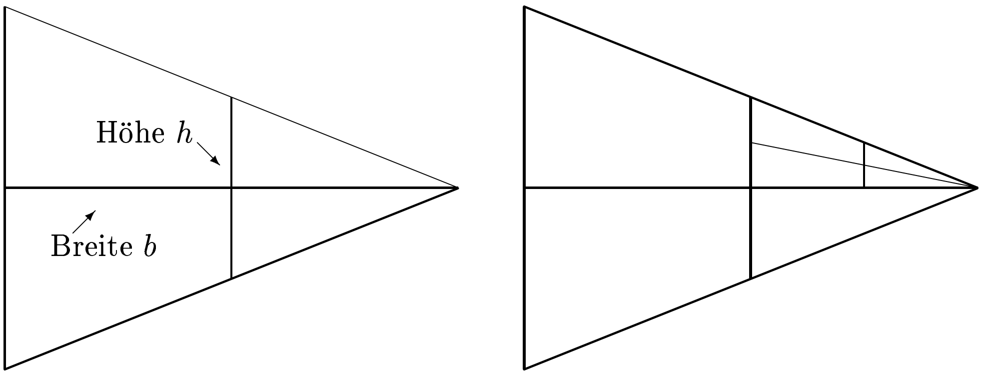


Abbildung 4.16: Steigende Verzerrung beim Verfeinern der 'Dreieckselemente'

zur Erreichung einer bestimmten Isotropie des Blockes nötig ist. Dies ist vor allem im Hinblick auf den numerischen Aufwand zur Lösung der entstehenden Gleichungssysteme von großer Bedeutung. Die gitterorientierte Blockung ist 'teuer' in dem Sinne, daß auch in völlig isotropen Regionen des Gitters geblockt wird und so ein gesteigerter numerischer Aufwand entsteht. Allerdings haben die Tests gezeigt, daß sich dieser Aufwand nicht entsprechend in einem verbesserten Konvergenzverhalten niederschlägt, es sei denn, man kann erreichen, daß die Blöcke isotrop bleiben, während die Gitterzellen stark gestreckt sind. Dies ist allerdings selten zu erreichen, wenn man nicht sehr große Blöcke in Kauf nehmen möchte. Aber auch in dem Fall ist der Gewinn gegenüber der lokal-adaptiven Variante nicht signifikant, wie die Rechnungen bei anisotroper Verfeinerung zum Rande hin gezeigt haben. Den freien Parameter bei der adaptiven Blockung haben wir bei den Rechnungen auf 15 gesetzt gehabt. Die Erfahrung hat gezeigt, daß, abhängig auch von der Anzahl der nichtisotropen Elemente in einem Gitter, Werte bis maximal 20 zu akzeptablen Ergebnissen führen.

4.2.5 Aufwandsbetrachtung und effiziente Implementation

Eine Betrachtung der Effizienz des geblockten Vanka-Glätters ist nicht komplett ohne eine Untersuchung des zusätzlichen Aufwandes, der bei diesem Glätter im Gegensatz zu dem einfachen Vanka(2) getrieben werden muß. Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist der Nachweis der Robustheit der verwendeten Verfahren. Im Hinblick auf die von Becker et. al. ([4] , [5]) entwickelten hocheffizienten, hardwareoptimierten Implementierungsstrategien können diese Glätter auch mit relativ großen Blockgrößen noch sehr schnell gelöst werden. Wichtig hierzu ist es lediglich, daß die zu lösenden Probleme lokal bleiben und jeweils noch auf einem Prozessor gelöst werden können. Deshalb ist natürlich, auch für den Einsatz der Glätter in einem seriellen Programm, die Untersuchung des Aufwandsverhaltens von großer Bedeutung.

Im Folgenden soll nun der Einfluß der Patchgröße auf die Rechenzeit untersucht sowie einige Strategien zur Reduktion des numerischen Aufwandes vorgestellt werden. Dazu untersuchen wir den Fall einer gitterorientierten Blockung, bei der das Gebiet in eine Anzahl gleich großer Patches unterteilt wird. Es sei:

N	Größe der Patches, d.h. Elemente pro Patch
k	Anzahl der Patches
NEL	$=k \cdot N$ Gesamtanzahl der Elemente
E	$=2 \cdot N$ approx. Anzahl der Kanten im Patch

Auf jedem Patch müssen Schur-Komplement Probleme der Gestalt gelöst werden:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} A\mathbf{u} & + & Bp & = & \mathbf{f} \\ B^T\mathbf{u} & + & & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} p & = & (B^TA^{-1}B)^{-1}\,B^TA^{-1}\mathbf{f} \\ \mathbf{u} & = & A^{-1}(\mathbf{f}-Bp) \end{array} \tag{4.27}$$

Somit fallen pro Glättungsschritt auf jedem Patch die folgenden wesentlichen Arbeitsschritte an:

1	Erstellen der LU-Zerlegung von A	$A = LU$
2	Aufbau der Matrix durch N-maliges Rückwärtseinsetzen	$A^{-1}B$
3	Multiplikation mit dünn besetzter Matrix B^T	$B^TA^{-1}B$
4	LU Zerlegung der Schurkomplementmatrix	$(B^TA^{-1}B) = LU$
5	Aufbau der rechten Seite	$A^{-1}f$
6	Lösen der Schurkomplementgleichung (Rückwärtseinsetzen)	$(B^TA^{-1}B)^{-1}$

Bei einem 'naiven Vorgehen', bei dem man keinerlei Informationen über die Struktur der Matrix A benutzt, würde man ein Standardverfahren zur Bestimmung der LU Zerlegung verwenden. Die Matrix A hat (in 2D) die Dimension $2E \times 2E$, daher benötigt die Zerlegung größenordnungsmäßig $O(E^3) = O(N^3)$ arithmetische Operationen. Der zweite Schritt besteht aus dem N-maligen Lösen eines E-dimensionalen Gleichungssystems, wobei $O(N \cdot E^2) = O(N^3)$ arithmetische Operationen anfallen. Schritt 4 besteht wieder aus einer LU-Zerlegung, jedoch hat die Matrix nur die Dimension N. Als Aufwand fallen somit wieder $O(N^3)$ arithmetische Operationen an. Die beiden Schritte 3 und 5 und 6 können demgegenüber mit $O(N^2)$ Operationen vernachlässigt werden.

Diesen Aufwand muß man für jeden Glättungsschritt auf allen k Patches eines Levels betreiben, so daß dabei insgesamt $O(k \cdot N^3)$ Operationen getätigt werden müssen.

Möchte man nun zur Verbesserung der Stabilität des Verfahrens die Patchgröße um den Faktor α erhöhen, so steigt der totale numerische Aufwand gemäß

$$\frac{1}{\alpha}k \times (\alpha N)^3 = \alpha^2 \cdot kN^3$$

um den Faktor α^2.

In einem ersten Schritt zur Reduktion des Aufwandes verwendet man die Tatsache, daß während eines nichtlinearen Schrittes auf jedem Patch dasselbe Problem mehrfach mit verschiedenen rechten Seiten, aber den gleichen Matrizen gelöst werden muß. Speichert man die LU-Zerlegungen der Matrix A und der Schurkomplementmatrix ab bzw. behält diese im Arbeitsspeicher, erspart man sich in den folgenden Glättungsschritten die 'teueren' $O(N^3)$-Operationen. Der Aufwand pro Patch –unter Vernachlässigung der Zugriffszeiten auf das Speichermedium und dem einmaligen Aufbau der Zerlegungen– wird dann im Wesentlichen bestimmt durch die Schritte 5 und 6, also das Rückwärtseinsetzen mit $O(N^2)$ arithmetischen Operationen.

Erhöht man hier nun die Patchgröße um den Faktor α, so steigt der Aufwand für das Glätten 'nur' um α, statt um α^2 wie oben:

$$\frac{1}{\alpha}k \times (\alpha N)^2 = \alpha \cdot kN^2.$$

Bei der Matrix A handelt es sich um eine dünn besetzte Matrix und sie besitzt eine Bandstruktur. Daher liegt der Gedanke nahe, die LU-Zerlegung von A unter Verwendung dieser Bandstruktur zu erstellen. Damit dies effektiv möglich ist, bedarf es allerdings zweier lokaler Umnumerierungen bzw. Umstrukturierungen. Als erstes gilt es, die Gitterpunkte im Patch so zu numerieren, daß die Bandbreite der lokalen Matrix möglichst klein wird. Mit einem Algorithmus wie z.B. dem von Cuthill-McKee [15] erhalten wir eine Bandbreite

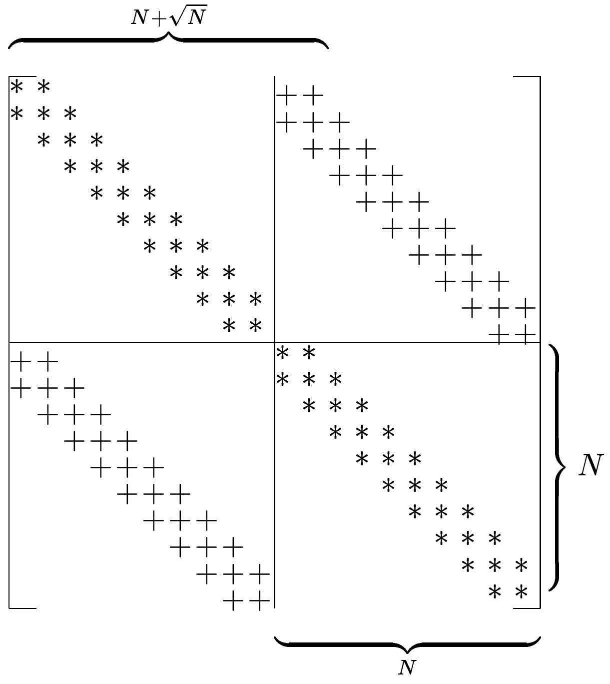


Abbildung 4.17: Struktur der Matrix bei 'naiver' Sortierung

der Matrix in der Größenordnung von $O(\sqrt{N})$. Hierbei muß man aber die Struktur der Matrix A beachten. Sie besteht aus (in 2 Dimensionen) 4 Blöcken, die alle dieselbe Struktur aufweisen. Durch eine Umnumerierung der Knoten kann man zwar in jedem einzelnen dieser Blöcke die Bandbreite auf $O(\sqrt{N})$ senken, für die Gesamtmatrix ist das aber nicht ausreichend. Schematisch hat die Iterationsmatrix nach der Knotensortierung nämlich die in Abbildung 4.17 gezeigte Gestalt.

Da jeder der Blöcke der Matrix die Bandbreite $\sqrt{N}$ hat, ergibt sich für die Gesamtmatrix immer noch eine Bandbreite von $N + \sqrt{N}$. Somit bringt diese Art der Matrixsortierung nur wenig Vorteile. Der Schlüssel zu einer weiteren, effektiven Reduktion der Bandbreite liegt in einer Umsortierung der Variablen. Statt im Lösungsvektor erst die Komponenten von u, und danach v anzuordnen, ordnet man direkt gemäß der Knotennumerierung. Also

$$(u_1, u_2, \ldots, u_N, v_1, v_2, \ldots, v_N)^T \to (u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_N, v_N)^T$$

Dementsprechend ordnet man die Zeilen und Spalten der Matrix um. Schematisch ist das Vorgehen in Abbildung 4.18 dargestellt. Die so entstehende Matrix hat nun nur noch die Bandbreite $2\sqrt{N}$. Unter Ausnutzung dieser Struktureigenschaften reduziert sich der Aufwand für die Schritte 1 und 2 auf lediglich $O(N^{5/2})$ Operationen. Leider ist die Schurkomplementmatrix im allgemeinen eine vollbesetzte Matrix, deren LU-Zerlegung (Schritt 4) weiterhin $O(N^3)$ Operationen benötigt. Jedoch hat diese Matrix die Dimension N, statt $2E \approx 4N$ (bzw 9N in drei Dimensionen), wie die Matrix A. Daher kann man erwarten, daß bei moderaten Patchgrößen N der benötigte Aufwand dominiert wird durch

$$\frac{1}{\alpha} k \times (\alpha N)^{5/2} = \alpha^{3/2} \cdot k N^3.$$

Die numerischen Tests bestätigen dies (siehe Tabelle 4.19 und 4.20).

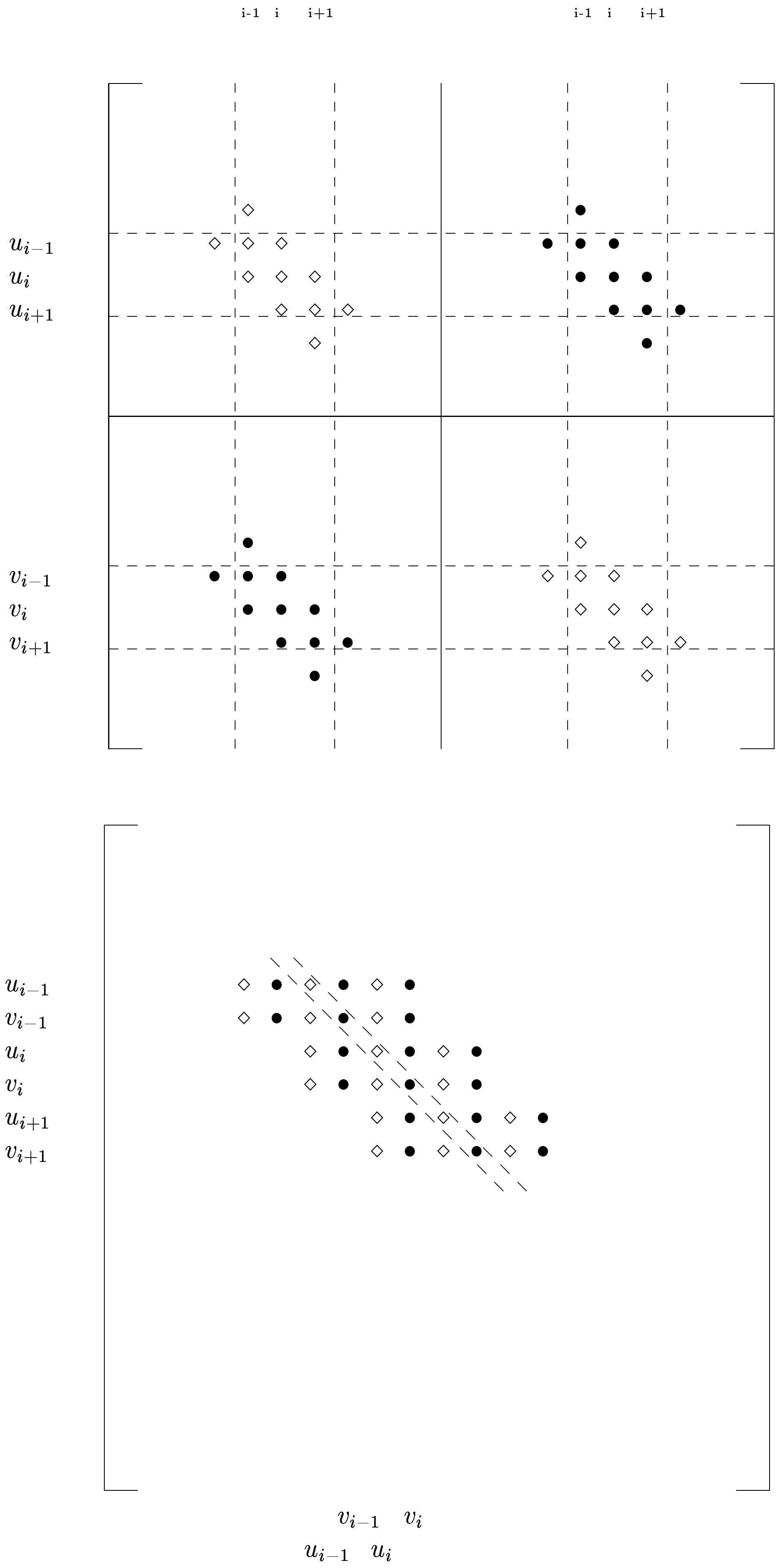


Abbildung 4.18: Matrixstruktur bei vollständig knotenorienter Ordnung

Als letztes wollen wir eine Kombination der beiden Methoden betrachten, also die Ausnutzung der Matrixstruktur und das Abspeichern der LU-Zerlegungen von A und $B^T A^{-1} B$. Pro Glättungsschritt bleiben hier wieder lediglich die Schritte 5 und 6 abzuarbeiten. Die Berechnung von $A^{-1} f$ mittels Rückwärtseinsetzens läßt sich aufgrund der Struktur von A in $O(N^{3/2})$ Schritten erledigen, was ein Aufwandsverhalten von

$$\frac{1}{\alpha} k \times (\alpha N)^{3/2} = \alpha^{1/2} \cdot k N^{3/2}.$$

bedeuten würde, während das Lösen der Schurkomplementgleichung wieder ein voller $O(N^2)$-Prozess ist, allerdings mit einem kleineren System. Daher ist auch hier wieder ein Vorteil bei moderaten Patchgrößen zu erwarten.

Zur Demonstration der obigen Effekte wurde eine Driven Cavity Rechnung für Re=3000 durchgeführt. Alle Patches eines Levels waren gleich groß.

Dabei bedeuten:

N	:	Patchgröße
k	:	Anzahl der Patches, also NEL/N
BF	:	Blas Routinen für beliebige Matrizen zum Invertieren
BB	:	Blas Routinen unter Ausnutzung der Bandstruktur
BU	:	Baut die Matrizen jedesmal neu auf
IN	:	Baut die Matrizen pro nichtlinearem Schritt *einmal* auf, liest sie dann in jedem linearen Schritt ein

N	k	BF-BU	BF-IN	BB-BU	BB-IN
16	400	31/ —/—	36/ —/—	28/ —/ —	32/ —/ —
64	100	287/ 9.3/16	102/2.9/ 4	103/ 3.7/8-16	67/2.1/2-4
256	25	3638/12.7/16	402/4.0/ 4	1105/10.7/8-16	185/2.8/2-4

Tabelle 4.19: **CPU-Zeit für Level 5 - 6400 Elemente**

N	k	BF-BU	BF-IN	BB-BU	BB-IN
16	1600	145/ —/—	174/ —/—	130/ —/ —	161/ —/ —
64	400	1142/ 7.9/16	429/2.5/ 4	428/ 3.3/8-16	287/1.8/2-4
256	100	14560/12.8/16	1617/3.8/ 4	4268/10.0/8-16	754/2.6/2-4

Tabelle 4.20: **CPU-Zeit für Level 6 - 25600 Elemente**

Die Tabellen zeigen die benötigte Zeit für einen linearen Schritt bei der jeweiligen Patchgröße, das reale sowie das erwartete Anwachsen des Aufwandes. Die angegebenen Zahlen bezeichnen:

i die benötigte Rechenzeit

ii das gemessene Anwachsen der Rechenzeit gegenüber der vorherigen Patchgröße

iii der theoretisch erwartete Wert α für das Anwachsen des Aufwandes.

Zum Invertieren der voll besetzten Matrizen wurden Standard BLAS (Basic Linear Algebra Soubroutines `http://www.netlib.org/blas`) Routinen verwendet (siehe auch [31], [17]). Von diesen gibt es für alle namhaften Rechnerplattformen auf die Hardware angepaßte und optimierte Versionen. Die Verwendung dieser optimierten Routinen ist unbedingt anzuraten. Die hier angegebenen Programmlaufzeiten wurden auf einem einfachen PC mit 750 MHz Taktfrequenz gemessen.

Betrachten wir die letzte Zeile der Tabelle 4.20, so sehen wir, daß der gemessene Aufwand beim "naiven" Zugang BF-BU auf den untersuchten Patchgrößen nahezu so schlecht ist, wie theoretisch vermutet. Der Aufwand bei einer Vervierfachung der Patchgröße wächst etwa um den Faktor 13. Ersetzt man die wiederholte Invertierung der Matrix durch das Einlesen von einem Speichermedium (BF-IN), so zeigt sich wie erwartet, daß der Aufwand ziemlich genau um den Faktor 4 wächst. Weiterhin sieht man den positiven Einfluß der Ausnutzung der Bandstruktur der Matrix A. Betrachtet man die Zahlen zu BB-IN so sieht man, daß der Aufwand bei diesem Verfahren tatsächlich von dem "günstigen", $O(\sqrt{\alpha})$-Prozeß des Berechnens von $A^{-1}f$ dominiert wird, und nicht von dem "teuren" Lösen der Schurkomplementgleichung.

Nun wollen wir noch die absoluten Rechenzeiten der beiden extremen Varianten vergleichen. Gegenüber dem naiven Zugang mit einer Rechenzeit von 14560 [s] läßt sich mit dem optimalen BB-IN eine Beschleunigung um etwa den Faktor 20 erzielen. Dieser Gewinn an Performance läßt sich ohne große Änderung der Programmstruktur erreichen und beruht alleine auf der Analyse der beim Verfahren durchgeführten Rechenschritte.

Abschließend soll hier noch angemerkt werden, daß in der praktischen Realisierung selbstverständlich das Einlesen der Matrizen von der Festplatte immer noch eine signifikantlange Zeit beansprucht. Wie allerdings schon an mehreren Stellen erwähnt, zielt die Entwicklung der numerischen Verfahren in dieser Arbeit zu einem großen Teil auch auf die Anwendung in der Parallelisierung hin. In diesem Fall wird man in der Lage sein, dieser Matrizen während der Rechnung im Hauptspeicher des jeweiligen Prozessors zu halten. Dadurch fallen Verzögerungen durch Festplattenzugriffe weg, und man wird noch eine weitere Verbesserung der Verfahren mit Matrixspeicherung gegenüber dem wiederholten Aufbau der Matrizen beobachten können. Diese hardwareoptimierten, parallelen Verfahren [5] sind bereits sehr weit entwickelt und erste Ergebnisse sind verfügbar.

Im vorausgegangenen Abschnitt haben wir eingehend die einzelnen Komponenten eines linearen Mehrgitterverfahrens im Hinblick auf Effizienz und Robustheit gegenüber Störungen des Gitters untersucht. Es hat sich gezeigt, daß für eine gute Performance, ja sogar für die Erzielung von Konvergenz auf stark anistropen oder verzerrten Gittern, Anpassungen an allen Komponenten des Mehrgitterverfahrens vorgenommen werden müssen. Als optimal hat sich nach unseren Untersuchungen die Verwendung der adaptiven Prolongation/Restriktion zusammen mit der adaptiven Modifikation der Grobgittermatrix erwiesen. Der Toleranzparameter, also der Grad an Anisotropie, bei dem zwischen konstanter und rotiert-bilinearer Interpolation gewechselt wird, sollte im Bereich zwischen 20 und 100 liegen; 50 hat sich sehr gut bewährt. Als Ergänzung hierzu kommt noch die adaptive Grobgitterkorrektur, die zwar nicht immer optimale Konvergenzresultate liefert, allerdings ohne a priori Kenntnis des optimalen Gewichtungsfaktors α_K auskommt. Dies ist insofern von Bedeutung, da wir gesehen haben, daß eine falsche Wahl dieses Parameters zur Divergenz des Verfahrens führen kann, und der Parameterbereich, in dem Konvergenz erzielt wird, relativ klein sein kann. In der Notation von 4.1 heißt das optimale Verfahren **INT(g)(50)MAT(50)CORR(adapt)**. Im Kapitel 4.2 haben wir gesehen, daß bei der Anwendung des Mehrgitterverfahrens auf gekoppelte Probleme von der Form der stationären Navier-Stokes Gleichungen Glätter von der Art, wie sie Vanka [52] beschrieben hat, bei Gitterverzerrungen sehr schnell nicht mehr einsetzbar sind. Jedoch läßt sich mit dem LMPSC (Linear Multilevel Pressure Schur Complement)-Ansatz, also einer geblockten Version des Vanka-Glätters, zusammen mit den oben erwähnten Komponenten, ein sehr robustes Mehrgitterverfahren erzeugen. Bei der Blockung ist darauf zu achten, daß die entstehenden Patches möglichst isotrop sind. Unser Favorit ist hier ein lokal-adaptives Blockungsverfahren, das im Falle, daß ein Element eine größere Anisotropie aufweist, als eine vorgegebenene Toleranz, solange benachbarte Elemente zu einem Patch zusammenfaßt, bis der Anisotropiegrad des Patches selbst kleiner als der Toleranzwert ist. Für diese Toleranz hat sich ein Wert von 15 als sehr effektiv erwiesen. Die gitterorientierte Blockungsstrategie hat sich im Falle stark verzerrter Gitter meist als unterlegen erwiesen, da die so entstehenden Blöcke oft selbst zu anisotrop sind.

In Kapitel 5 werden wir allerdings sehen, daß diese Blockungsmethode durchaus ihre Anwendungsgebiete hat, nämlich dann, wenn die Probleme in der Matrix nicht durch Gitteranisotropien verursacht sind, sondern von 'schlechten' Einträgen aus dem Operator selbst herrühren.

4.3 Mehrgitterverfahren bei Problemen mit stark variierender Viskosität

Im Gegensatz zu den bisher beschriebenen geometrischen Anisotropien sind algebraische Anisotropien im Operator schwieriger zu detektieren. Eine umfassende Behandlung derartiger Phänomene kann im Rahmen dieser Arbeit nicht geleistet werden. Auf eine Klasse solcher algebraischer Anisotropien soll hier jedoch noch kurz eingegangen werden, da sie sich mit relativ geringen Abänderungen des bisher entwickelten Instrumentariums behandeln lassen. Es sind dies in physikalischen Anwendungen häufig auftretende Strömungsprobleme mit räumlich sehr stark variierender Viskosität oder Dichte. Ein Beispiel hierfür sind temperaturbehaftete Strömungen mit sehr heißen sowie sehr kalten Regionen und einer stark temperaturabhängigen Viskosität. Eine solche Konfiguration wird beispielweise in [55] untersucht.

Bei der Verwendung des Mehrgitterverfahrens mit den klassischen Komponenten treten bei derartigen Konfigurationen sehr schnell Probleme auf, wie das folgende Testproblem belegt. Auf dem Einheitsquadrat werden die Stokes-Gleichungen, also eine einfache, viskose Kanalströmung berechnet. Die Viskosität beträgt $\nu_1 = 1$, lediglich in einem kleinen Quadrat im Inneren ist sie $\nu_2 \gg \nu_1$ (siehe Abbildung 4.19). Tabelle 4.21 zeigt die linearen Konvergenzraten bei Verwendung des oben vorgestellten Mehrgitterverfahrens. Als Glätter wurde der einfache Vanka(2) mit 8 Glättungsschritten benutzt.

An diesen Zahlen kann man ablesen, daß ein Viskositätssprung von $\Delta\nu = 10^3$ noch so moderat ist, daß der lineare Löser damit keine Probleme hat. Dies ändert sich aber deutlich bei noch größeren Viskositätsunterschieden. Die in Abschnitt 4.1 entwickelten adaptiven Mehrgitterkomponenten greifen bei dieser Art Problemen jedoch nicht. Da das zugrunde

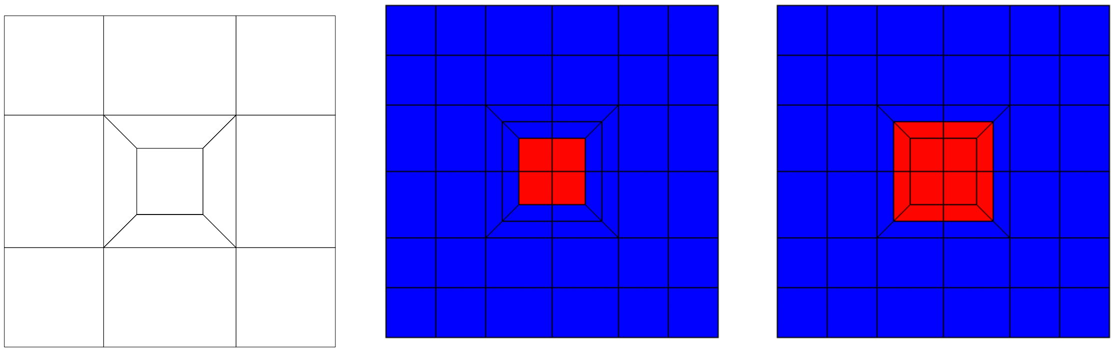


Abbildung 4.19: Einheitsquadrat mit unterschiedlichen Viskositäten ν_1, ν_2

	Sprung 1		Sprung 2	
	$\nu_2 = 10^3$	$\nu_2 = 10^6$	$\nu_2 = 10^3$	$\nu_2 = 10^6$
3	0,05	0,17	0,14	0,99
4	0,05	0,37	0,12	0,99
5	0,06	0,21	0,08	0,97
6	0,06	0,30	0,07	0,95

Tabelle 4.21: Konvergenzraten für Stokes bei nichtangepaßtem Mehrgitter

liegende Gitter nahezu isotrop ist, werden selbst bei größten Sprüngen in der Viskosität stets die unmodifizierten Komponenten wie z.B. die volle, bilineare Interpolation verwendet (siehe 4.1.1). Dadurch werden auch Knoten, die entfernt von dem Sprung in der Region mit ν_1 sich befinden, direkt von solchen beeinflußt, die sich in ν_2 befinden. Dieser Einfluß ist allerdings nicht physikalisch, sondern lediglich ein numerischer Defekt. Der Ansatz zu einer Behebung dieses Problemes ist es, die adaptiven Gittertransferoperatoren so zu erweitern, daß die adaptive Umschaltung auf die stückweise konstante Interpolation auch dann erfolgt, wenn sich die (pro Element gemittelte) Viskosität über eine Elementkante um mehr als einen bestimmten Schwellenwert ändert.

Betrachtet man in Tabelle 4.21 die Ergebnisse zur Konfiguration Sprung 2, so erkennt man, daß diese bei steigendem $\Delta\nu$ radikal schlechter werden, während bei Sprung 1 nur eine vergleichsweise moderate Verschlechterung der Konvergenzraten zu beobachten ist. Bei Konfiguration 2 geht der Viskositätssprung nicht entlang einer Grobgitterkante, sondern mitten durch einige Grobgitterelemente. Bei der Grobgitterkorrektur kommt es somit zu einem Verschmieren des Viskositätssprunges. Bei dem Grobgitterproblem, welches dann gelöst wird, sind plötzlich Knoten, die ein ganzes Stück von dem Sprung entfernt liegen, Teil eines Elementes mit hoher Viskosität (siehe Abbildung 4.20). Die Zahlen deuten an, daß dies die Qualität der Grobgitterkorrektur stark verschlechtern kann, was sich in schlechten Mehrgitterraten niederschlägt. Da es sich in praktisch relevanten Anwendungen nicht gewährleisten läßt, daß entlang der Sprünge immer Gitterkanten liegen, wird versucht werden, mithilfe des geblockten Vanka-Glätters durch Patchen entlang der Sprünge wieder ein zufriedenstellendes Konvergenzverhalten zu erzielen.

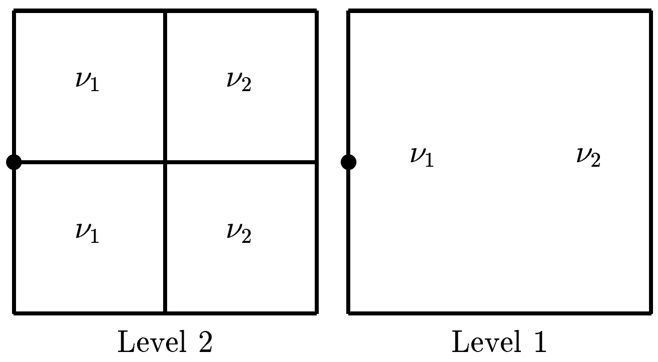


Abbildung 4.20: Viskositätssprung durch eine Gitterzelle

Wir definieren, analog zu Abschnitt 4.1.1 den ν-adaptiven Interpolationsoperator wie folgt:

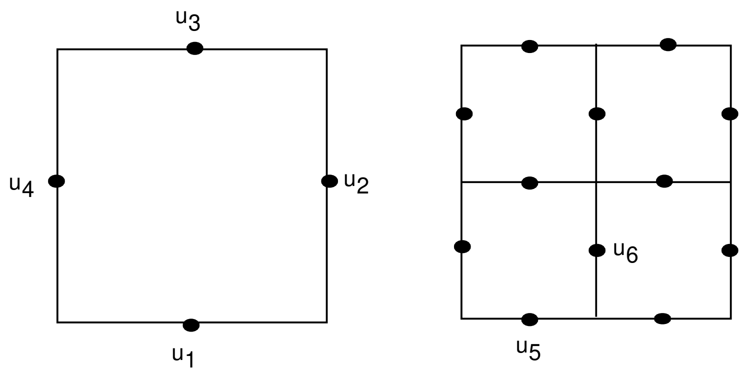


Abbildung 4.21: Makroelement in T_{2h} sowie daraus entstehende Elemente in T_h

ν-adaptive Prolongation für rotiert bilineare Elemente

1. Man berechnet die Interpolationswerte der Feingitterfunktion aus den Koeffizienten u_1, u_2, u_3, u_4 der Grobgitterfunktio v_{2h}. Die Wahl der Interpolation wird durch das Verhältnis der (gemittelten) Viskostät des Makroelements und seiner Nachbarzellen (viscosity ratio, VR) gesteuert.

2. Liegen diese Werte unter einer vorgegebenen Schranke, dann führt man die volle, rotiert bilineare Interpolation durch:

   - volle Interpolation (exemplarisch für $H_h = H_h^a$)

   $$u_5 = u_1 - \frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{4}u_4, \quad u_6 = \frac{5}{8}u_1 + \frac{1}{8}(u_2 + u_3 + u_4)$$

3. Überschreiten diese Werte auf einem Makroelement die Schranke, führt man auf diesem Element lokal die konstante Interpolation durch:

   $$u_5 = u_1, \quad u_6 = u_1$$

4. Die Werte, die auf Kanten liegen, welche auch schon Kanten von T_{2h} sind, werden durch den obigen Prozeß zweimal 'angefaßt'. Für diese setzt man das Mittel aus beiden Werten. Hierbei hat man die Möglichkeit, entweder ein ungewichtetetes Mittel, ein Mittel gewichtet mit den Größen der beiden Makroelemente als Gewichtungsfaktoren oder ein Mittel zu verwenden, das mit dem Produkt aus Elementgröße und Viskosität gewichtet. Letzteres führt an den Viskostitätsübergängen dazu, daß nahezu nur das Element mit der größeren Viskosität einen Beitrag liefert.

Im folgenden bezeichnen wir die gitter-adaptive Interpolation mit *INT=2*, die ν-adaptive mit der Mittelung bezüglich Elementgrößen als *INT=4*, sowie die ν-adaptive mit der Mittelung bezüglich des Produktes aus Elementgröße und Viskosität als *INT=5*.

Verwenden wir diese an den Viskositätssprüngen orientierten Interpolationsoperatoren bei den obigen Testproblemen 'Sprung 1' und 'Sprung 2', so stellen wir sofort eine signifikante Verbesserung der Mehrgitterkonvergenz fest. Bei der einfacheren Konfiguration Sprung 1 (Tabelle 4.22) erzielt man so Konvergenzraten, die um den Faktor 4-5 besser sind, als mit der 'klassischen' Interpolation. Die Wahl der Mittelung scheint wenig bis gar keinen Einfluß auf das Verhalten des Verfahrens zu haben.

Bei der Konfiguration Sprung 2 mit dem etwas größeren Gebiet hoher Viskosität ist der Effekt sogar noch eklatanter. Mit der klassischen Interpolation konvergierte das Verfahren so gut wie überhaupt nicht mehr, während die ν-adaptiven Interpolationen auf feineren Gittern wieder dasselbe Konvergenzverhalten ermöglichen, wie bei Sprung 1 (Tabelle 4.23, linke Seite). Auf den gröberen Leveln macht sich hier der bereits oben erwähnte Effekt bemerkbar, daß auf dem Grobgitter der Viskositätssprung mitten durch einige Elemente geht, und dadurch ein Verschmieren des Viskositätssprunges auf diesem Level entsteht.

Wenn wir dieselbe Konfiguration rechnen, aber dabei nicht das Gitter aus Abbildung 4.19

	INT=			
Level	4	5	2	4*
3	0,05	0,05	0,17	div
4	0,05	0,05	0,37	div
5	0,06	0,06	0,21	div
6	0,05	0,05	0,30	div

Tabelle 4.22: $\rho(MG)$ bei Verwendung verschiedener Interpolationsoperatoren zusammen mit dem Vanka(2)-Glätter für die Konfiguration **Sprung 1** mit $\Delta\nu = 10^6$

als Grobgitter nehmen, sondern das einmal verfeinerte, treten in der gesamten Mehrgitterhierarchie keine Elemente mehr auf, durch die ein Viskositätssprung geht. Diese Ergebnisse sehen wir auf der rechten Seite der Tabelle 4.23. Hier zeigen die Interpolationsvarianten INT=4 und INT=5 auch auf dem groben Level dieselben guten Konvergenzeigenschaften, wie vorher schon auf den feineren. Bei dem klassischen INT=2 hingegen bleibt die Konvergenz schlecht.

	INT=							
	GG= Lev 1				GG = Lev2			
Level	4	5	2	4*	4	5	2	4*
3	0,33	0,39	0,99	0,31	0,09	0,08	0,99	div
4	0,13	0,10	0,99	div	0,06	0,06	0,99	div
5	0,05	0,05	0,97	div	0,05	0,05	0,97	div
6	0,15	0,15	0.98	div	0,15	0.15	0.97	div

Tabelle 4.23: $\rho(MG)$ bei Verwendung verschiedener Interpolationsoperatoren zusammen mit dem Vanka(2)-Glätter für die Konfiguration **Sprung 2** mit $\Delta\nu = 10^6$

Bemerkung: Für den Druck haben wir bisher die konstante Interpolation hauptsächlich deshalb benutzt, weil sie gut funktionierte und deshalb kein Bedarf an einer Modifikation bestand. Bei Problemen der hier behandelten Art mit stark springenden Viskositäten scheint sie jedoch ein Muß! In den Tabellen 4.22 und 4.23 sind in der Spalte INT=4* die Ergebnisse angegeben, wenn man den in Abschnitt 4.1.1 erwähnten Zugang wählt, und den Druck zuerst auf die Kanten interpoliert, und dann die rotiert-bilinearen Gittertransferoperatoren darauf anwendet. Mit diesem Vorgehen läßt sich selbst bei der relativ einfachen Konfiguration Sprung 1 kein konvergentes Mehrgitterverfahren mehr erzeugen.

Wie oben bereits angedeutet wird die Situation komplizierter, wenn es nicht mehr einfach möglich ist, die Grobgitterkanten entlang der Sprünge auszurichten. Um dies zu demonstrieren, modifizieren wir das obige Problem dahingehend, daß wir nun einen kreisförmigen Viskositätssprung berechnen wollen. Das Grobgitter ist in Abbildung 4.22 dargestellt, daneben in Abbildung 4.23 die Position der Region mit $\nu = \nu_2$.

Auch mit dem ν-adaptiven Gittertransfer konvergiert der einfache Vanka(2) hier nicht mehr. Es zeigt sich, daß bei der geblockten Variante eine Blockung entlang der Sprungkante von ν ausreichend zu sein scheint. Die Abbildung 4.24 zeigt 3 verschiedene Varianten entlang des gesamten Sprunges, während in Abbildung 4.25 jeweils nur stückweise entlang

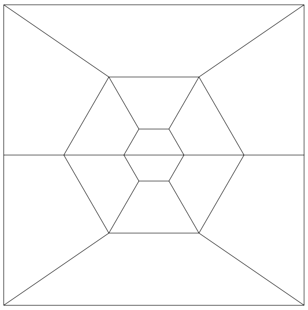


Abbildung 4.22: Grobgitter HEX 1

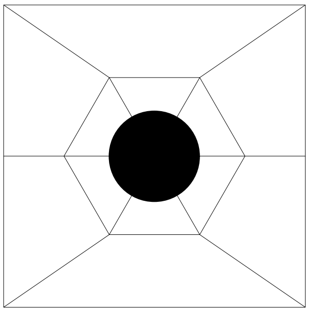


Abbildung 4.23: Viskositätssprung

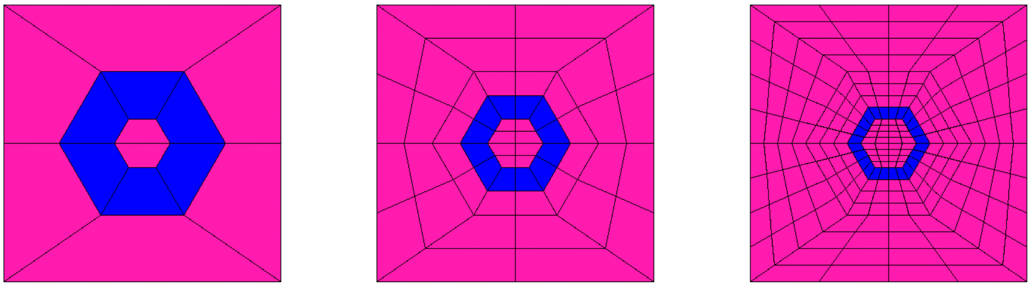


Abbildung 4.24: Blockungsvarianten 1 - 3

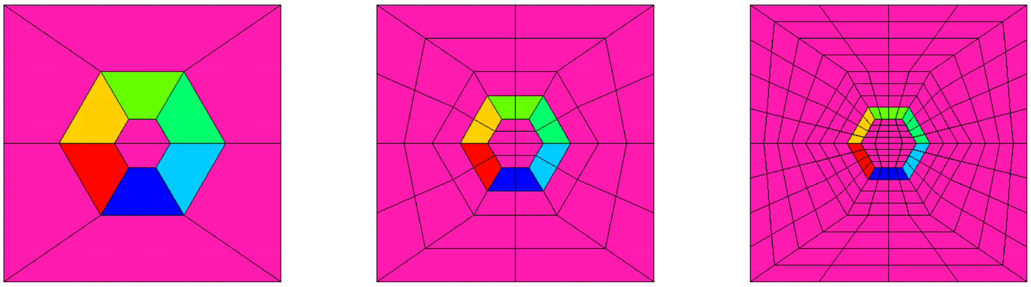


Abbildung 4.25: Blockungsvarianten 4 - 6

der Sprungkante geblockt wurde. (In dieser Darstellung sind die rosafarbenen Regionen ungeblockt, ansonsten entspricht jede Farbe einem Block). Die Anzahl der Elemente pro Block halbiert sich jeweils von Variante zu Variante.

Die gemessenen Konvergenzraten in Tabelle 4.24 belegen, daß mit Hilfe der Blockung entlang der Sprungkante ein effektiver Glätter für Probleme mit starken Sprüngen in der Viskosität konstruiert werden kann. Diese ersten Zahlen deuten darauf hin, daß man bei einer adaptiven Bestimmung des Sprunges beziehungsweise der zu blockenden Elemente einige Dinge beachten muß. Es ist vorteilhaft, entlang des gesamten Sprunges zu blocken, anstatt nur stückweise, auch wenn dies bei praktischen Anwendungen mit möglicherweise langen Sprunglinien selten zu gewährleisten sein wird. Obendrein muß der Patch um den Sprung herum eine gewisse Mindestbreite haben. Dies fällt besonders bei der stückweisen Blockung auf, bei der die Variante 4 noch vergleichsweise gute Resultate liefert, während die beiden 'sparsameren' Blockungen 5 und 6 gar nicht mehr, bzw. nur noch auf feinen Gittern konvergieren. Die Tatsache, daß die Konvergenzraten auf feineren Gittern besser werden, obwohl die geometrische Größe der Blöcke sich nicht ändert, legt die Vermutung

Intpol					Intpol			
-4	Blockung				-4	Blockung		
Level	Var 1	Var 2	Var 3	keine	Level	Var 4	Var 5	Var 6
3	0,26	0,49	–	div	3	0,88	div	–
4	0,19	0,21	0,25	div	4	0,28	div	div
5	0,10	0,13	0,35	div	5	0,20	0,34	div

Tabelle 4.24: Mehrgitterkonvergenzraten mit dem LMPSC-Glätter bei verschiedenen Blockungsvarianten

nahe, daß für die Performance des Glätters weniger die Geometrie der Patches ausschlaggebend ist, als vielmehr die Anzahl der Elemente, die diesseits und jenseits des Sprunges zusammengefaßt werden.

Dieser kurze Abschnitt sollt zeigen, daß die in dieser Arbeit entwickelten Methoden durchaus auch erfolgreich auf Problemstellungen mit algebraischen Anisotropien angewendet werden können. Auch hierbei zeigt sich noch einmal deutlich, daß für die optimale Konvergenz des Mehrgitterverfahrens alle Komponenten angepaßt werden müssen. Ohne die adaptiven Gittertransferoperatoren INT=4 bzw. INT=5 waren in diesem Beispiel keine guten Resultate zu erzielen. Dabei scheint es unerheblich, für welche der beiden Varianten man sich entscheidet. In allen untersuchten Beispielen waren die gemessenen Konvergenzraten nahezu identisch. Die angestellten Untersuchungen für Konfigurationen mit einem großen Sprung in der Viskositat erheben nicht den Anspruch, vollständig zu sein, sondern stellen den Ausgangspunkt für weitere Forschung dar. Besonders an der optimalen Ausgestaltung des Glätters ist noch einige Arbeit zu leisten, sowie auch der Einfluß, den der Konvektionsterm samt Stabilisierung auf das Konvergenzverhalten ausüben.

Kapitel 5

Die Behandlung der Nichtlinearität

In den bisherigen Betrachtungen haben wir uns ausschließlich auf Untersuchungen der Komponenten des linearen Lösers konzentriert. Durch den Konvektionsterm werden die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen aber zu einem System nichtlinearer Gleichungen. Bei nichtnewtonschen Fluiden können noch weitere Nichtlinearitäten auftreten. Verwendet man im Falle von instationären Gleichungen ein voll implizites, A-stabiles Zeitschrittverfahren von 2. Ordnung, wie z.B. das Fractional-Step-θ-Verfahren (siehe [48]), so erlaubt dies die Verwendung großer Zeitschritte. Diese großen Zeitschritte führen dazu, daß auch bei instationären Problemen die Nichtlinearitäten signifikant werden.

Eine vernünftige Behandlung der Nichtlinearität ist in diesen Fällen für die schnelle und stabile Konvergenz des Verfahrens von entscheidender Bedeutung. Wie so häufig führt das Streben nach Geschwindigkeit auch hier zu einem Verlust an Robustheit, während die stabilen Verfahren sehr aufwendig und damit langsam sein können. Mit den Ergebnissen dieser Arbeit haben wir, im Zusammenspiel mit dem in Kapitel 4 entwickelten Mehrgitterkomponenten ein Verfahren gefunden, das beiden Ansprüchen weitgehend gerecht wird.

5.1 Herleitung der nichtlinearen Iterationsverfahren

In Kapitel 2 wurde bereits das Prinzip der Defektkorrekturmethode geschildert, die die Grundlage der nichtlinearen Iteration bildet. Der Vollständigkeit halber soll das an dieser Stelle noch einmal wiederholt werden.

Das nichtlineare Problem, das es zu lösen gilt, hat die Gestalt:

$$\begin{bmatrix} S(\mathbf{u_h}) & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u_h} \\ p_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f_h} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

Hierbei ist der nichtlineare Operator im Fall der Navier-Stokes Gleichungen

$$\begin{aligned} S(\mathbf{u}) :=& \quad \nu L + K(\mathbf{u}) \\ \sim& \quad -\nu\Delta \cdot + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\cdot \end{aligned} \tag{5.2}$$

beziehungsweise

$$
\begin{aligned}
S(\mathbf{u}) := &\quad \alpha M + \nu L + K(\mathbf{u}) \\
\sim &\quad \alpha \cdot -\nu\Delta \cdot + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\cdot,
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

wenn eine Diskretisierung der instationären Navier-Stokes Gleichungen zugrunde liegt, mit der Summe aus dem diffusiven (Laplace-) L und dem konvektiven Teil $K(\mathbf{u})$ des Operators, plus der Massematrix M als Diskretisierung der Identität im Falle der instationären Gleichungen, während

$$
B \sim \nabla, \quad B^T \sim \nabla\cdot \tag{5.4}
$$

eine Diskretisierung des Gradienten bzw. der Divergenz darstellen.

Für den Deformationstensoransatz mit einer Viskosität, die auch von der Lösung selbst abhängt, erhält man ein Problem derselben Struktur, lediglich der Operator $S(\mathbf{u})$ ändert sich zu der Diskretisierung des entsprechenden, nichtlinearen Operators

$$
S(\mathbf{u}) \sim -\nabla\cdot\nu(\mathbf{u})(\nabla\cdot + \nabla\cdot^T) + \mathbf{u}\cdot\nabla\cdot\ . \tag{5.5}
$$

Zur Lösung von Systemen dieser Art wird eine nichtlineare oder auch 'äußere' Iteration verwendet, die sich algebraisch schreiben läßt als:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{u^{l+1}} \\ p^{l+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{u^l} \\ p^l \end{bmatrix} - \omega^{l+1} \begin{bmatrix} N(\mathbf{u^l}) & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{def^l_u} \\ \mathrm{def}^l_p \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \mathbf{def^l_u} \\ \mathrm{def}^l_p \end{bmatrix} &:= \begin{bmatrix} S(\mathbf{u^l}) & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u^l} \\ p^l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

sowie einem Dämpfungsparameter ω^l. Der Operator

$$
\begin{bmatrix} N(\mathbf{u^l}) & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}
$$

ist ein Vorkonditionierer, auf den später noch näher eingegangen wird.

Proposition 12. *Unabhängig von der Wahl des Vorkonditionieres und von ω^l gilt: Wenn die Iteration in (5.6) konvergiert, so konvergiert sie gegen die Lösung des Problems (5.1)*

Beweis
Dies sieht man sofort aus (5.6), denn für einen Fixpunkt $(\mathbf{u}, p)$ gilt dann

$$
0 = -\omega \begin{bmatrix} N(\mathbf{u}) & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{def_u} \\ \mathrm{def}_p \end{bmatrix}. \tag{5.7}
$$

Im Fixpunkt verschwindet also der Defekt und somit löst $(\mathbf{u}, p)$ das Ausgangsproblem. □

5.1.1 Wahl der Vorkonditionierer

Bei der Wahl des Vorkonditioniereres hat man also erhebliche Freiheit. Da die Genauigkeit der Lösung $(\mathbf{u}, p)$ nur durch die zur Berechnung des Defektes gewählte Diskretisierung bestimmt wird, kann man sich bei der Wahl des Vorkonditionierers ganz darauf konzentrieren, eine möglichst gute numerische Performance zu erzielen.

Durch den oben beschriebenen Defektkorrekturansatz ist es beispielsweise möglich, für die Berechnung des Defektes und für den Aufbau des Vorkonditionierers unterschiedliche Diskretisierungen des Differentialoperators zu verwenden. So kann man, wenn das zugrunde liegende Problem dies zuläßt, zur Erzielung einer höheren Approximationsgüte den Defekt mit einer numerisch sehr aufwendigen, aber hochgenauen Stabilisierung des Konvektionsterms berechnen (sogar zentrale Differenzen sind möglich), für den Vorkonditionierer dann allerdings ein robustes Upwind- oder Stromliniendiffusionsverfahren verwenden. In [49] wurden hierzu ausgiebige Testergebnisse angegeben. Zur Demonstration wollen wir an dieser Stelle nur ein Beispiel angeben, nämlich die schon mehrfach erwähnte DFG-Benchmark Konfiguration [38] des umströmten Zylinders. Die Tabelle 5.1 zeigt die Anzahl der nichtlinearen Iterationen (NL) und die insgesamt benötigten Mehrgitterschritte (MG) für die Reynoldszahlen 20 und 50 und verschiedene Dämpfungsparameter ω. Man sieht, daß auch für die höhere Reynoldszahl die zentrale Diskretisierung zur Konvergenz gebracht werden kann. Hier erweist es sich, daß die genaueren Diskretisierungen als Vorkonditionierer nicht so effektiv sind, wie z.B. das $UPW - 1.0$. Dabei ist der Aufwand zur Lösung des Systems, gemessen in benötigten Mehrgitterzyklen, vergleichbar, in machen Fällen sogar kleiner, als bei Verwendung einer Diskretisierung mit Stabilisierung.

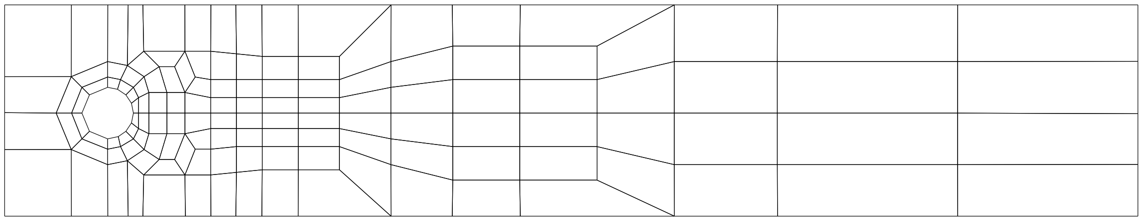


Abbildung 5.1: Grobgitter für die Umströmung eines Zylinders

Zur Definition einer weiteren Klasse von möglichen Vorkonditionierungsoperatoren gehen wir zurück auf das kontinuierliche Problem (2.1). Dieses läßt sich in ein Nullstellenproblem umformulieren, und zwar:

Finde $\mathbf{u}, p$, so daß

$$F(\mathbf{u}, p; f) := \begin{bmatrix} S(\mathbf{u})\mathbf{u} & + & \nabla p - \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} & & \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \tag{5.8}$$

wobei

$$S(\mathbf{u}) := -\nu\Delta + \mathbf{u} \cdot \nabla. \tag{5.9}$$

Von dem so definierten Operator F kann man nun die Fréchet-Ableitung bestimmen. Diese hat die Gestalt:

LEV	$Re = 20$ ω=adaptiv NL / **MG**	$Re = 20$ ω=1.0 NL / **MG**	$Re = 20$ ω=0.8 NL / **MG**	$Re = 50$ ω=adaptiv NL / **MG**	$Re = 50$ ω=1.0 NL / **MG**	$Re = 50$ ω=0.8 NL / **MG**
	Diskretisierung UPW-1.0 – Vorkonditionierer UPW-1.0					
3	5 / **15**	5 / **15**	7 / **22**	8 / **25**	8 / **30**	11 / **41**
4	5 / **15**	6 / **18**	7 / **21**	10 / **29**	10 / **29**	12 / **35**
5	5 / **14**	6 / **17**	8 / **23**	11 / **32**	10 / **29**	13 / **38**
	Diskretisierung UPW-0.1 – Vorkonditionierer UPW-1.0					
3	5 / **15**	6 / **18**	8 / **24**	11 / **36**	11 / **42**	14 / **54**
4	6 / **18**	6 / **18**	8 / **24**	12 / **36**	11 / **33**	14 / **42**
5	6 / **18**	7 / **21**	8 / **24**	13 / **38**	11 / **32**	14 / **41**
	Diskretisierung UPW-0.1 – Vorkonditionierer UPW-0.1					
3	5 / **17**	6 / **20**	7 / **24**	10 / **34**	9 / **32**	12 / **47**
4	5 / **15**	6 / **18**	8 / **24**	11 / **33**	10 / **30**	13 / **39**
5	5 / **15**	6 / **18**	8 / **24**	12 / **35**	11 / **32**	13 / **38**
	Diskretisierung SD-0.25 – Vorkonditionierer SD-1.0					
3	10 / **30**	15 / **46**	19 / **57**	20 / **74**	23 / **70**	30 / **91**
4	9 / **27**	12 / **35**	16 / **48**	20 / **64**	21 / **61**	27 / **78**
5	7 / **21**	9 / **25**	12 / **26**	15 / **46**	17 / **42**	22 / **53**
	Diskretisierung SD-0.25 – Vorkonditionierer SD-0.25					
3	5 / **17**	6 / **22**	8 / **28**	11 / **38**	10 / **35**	13 / **48**
4	5 / **16**	6 / **19**	8 / **24**	14 / **41**	12 / **37**	14 / **44**
5	5 / **14**	6 / **17**	8 / **23**	12 / **35**	11 / **32**	14 / **41**
	Diskretisierung C – Vorkonditionierer UPW-1.0					
3	9 / **27**	11 / **33**	14 / **42**	100 / **302**	– / –	– / –
4	7 / **21**	8 / **24**	10 / **30**	17 / **51**	20 / **59**	24 / **69**
5	6 / **18**	7 / **21**	9 / **27**	13 / **38**	13 / **38**	16 / **47**
	Diskretisierung C – Vorkonditionierer UPW-0.1					
3	7 / **24**	7 / **23**	9 / **29**	– / –	– / –	– / –
4	6 / **18**	7 / **21**	8 / **24**	– / –	– / –	– / –
5	6 / **18**	6 / **18**	8 / **24**	13 / **38**	11 / **32**	14 / **41**
	Diskretisierung C – Vorkonditionierer SD-0.25					
3	8 / **25**	11 / **34**	14 / **43**	25 / **85**	30 / **94**	37 / **116**
4	6 / **19**	7 / **22**	10 / **30**	17 / **51**	19 / **54**	26 / **78**
5	5 / **15**	6 / **18**	8 / **24**	13 / **39**	12 / **35**	17 / **47**

Tabelle 5.1: Nichtlineare Konvergenzergebnisse für den umströmten Zylinder

$$F'_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} -\nu\Delta + \mathbf{u}\cdot\nabla(\cdot) + (\cdot)\cdot\nabla\mathbf{u} & \nabla \\ \nabla\cdot & 0 \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

$$= \begin{bmatrix} -\nu L + K(\mathbf{u}) + R(\mathbf{u}) & \nabla \\ \nabla\cdot & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.11}$$

Dabei wollen wir mit $K(\mathbf{u}) \sim \mathbf{u}\cdot\nabla(\cdot)$ den Term mit Konvektionscharakter und mit $R(\mathbf{u}) \sim (\cdot)\cdot\nabla\mathbf{u}$ den "Reaktionsterm" bezeichnen. Mit diesem Operator läßt sich auf kontinuierlichem Level ein Newtonverfahren formulieren. Ein Schritt dieses Verfahrens lautet

$$F'_{\mathbf{u^n}} \begin{pmatrix} \mathbf{u^{n+1}} \\ p^{n+1} \end{pmatrix} = F'_{\mathbf{u^n}} \begin{pmatrix} \mathbf{u^n} \\ p^n \end{pmatrix} - F(\mathbf{u^n}, p; f). \tag{5.12}$$

Um nun ein Newtonverfahren für das diskrete Problem zu erhalten, kann man von Gleichung (5.12) ausgehen. Eine Diskretisierung dieses Ableitungsoperators -in unserem Fall wieder mit dem nichtkonformen Finite-Elemente Ansatz- liefert den diskreten Operator

$$DF(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} -\nu L + K(\mathbf{u}) + R(\mathbf{u}) & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.13}$$

Hierbei wurden für die diskreten Operatoren L, K und R der Übersichtlichkeit halber dieselben Bezeichnungen verwendet, wie für ihre kontinuierlichen Entsprechungen. Das diskrete Analogon des Termes $F(\mathbf{u}, p; f)$ ist gerade der Defekt $\begin{bmatrix} \mathbf{def_u} \\ \mathrm{def}_p \end{bmatrix}$ (siehe hierzu Beziehung (5.6)). Damit ergibt sich das folgende diskrete Newtonverfahren:

$$DF(\mathbf{u^n}) \begin{pmatrix} \mathbf{u^{n+1}} \\ p^{n+1} \end{pmatrix} = DF(\mathbf{u^n}) \begin{pmatrix} \mathbf{u^n} \\ p^n \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{def_u} \\ \mathrm{def}_p \end{bmatrix}, \tag{5.14}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u^{n+1}} \\ p^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u^n} \\ p^n \end{pmatrix} - DF(\mathbf{u^n})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{def_u} \\ \mathrm{def}_p \end{bmatrix}. \tag{5.15}$$

Somit läßt sich das Newtonverfahren auch in unseren Defektkorrekturansatz (5.6) einordnen, und zwar mit der Wahl von $\omega^n = 1$ und

$$N(\mathbf{u}) := -\nu L + K(\mathbf{u}) + R(\mathbf{u}). \tag{5.16}$$

Hiervon ausgehend verallgemeinern wir den Ansatz und erzeugen so eine ganze Klasse $DF(\mathbf{u^n})^\sigma$ von nichtlinearen Iterationsverfahren. Da der Reaktionsterm die numerischen Eigenschaften des linearen Operators beeinträchtigen kann, definieren wir, mit einem Parameter $\sigma \in [0, 1]$:

$$N(\mathbf{u})^\sigma := -\nu L + K(\mathbf{u}) + \sigma R(\mathbf{u}), \tag{5.17}$$

und damit

$$DF(\mathbf{u})^\sigma = \begin{bmatrix} N(\mathbf{u})^\sigma & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.18}$$

Für $\sigma = 1$ erhält man so wieder das oben definierte Newtonverfahren. Die Wahl $\sigma = 0$ liefert $N^0(\mathbf{u}) := -\nu L + K(\mathbf{u}) = S(\mathbf{u})$, womit das nichtlineare Verfahren zu einer einfachen, klassischen Fixpunktiteration wird. Eine Wahl von $0 < \sigma < 1$ liefert eine Art interpolierendes Verfahren zwischen diesen beiden 'extremen' Methoden. Zwar handelt es sich dabei auch wieder lediglich um eine Fixpunktiterationen, das heißt, es ist nicht das quadratische Konvergenzverhalten des Newtonverfahrens zu erwarten. In den folgenden Abschnitten werden die numerischen Untersuchungen allerdings zeigen, daß die Kontraktionszahlen für Verfahren, die 'nahe' bei dem Newtonverfahren liegen, deutlich besser sind, als diejenigen der einfachen Iteration mit $\sigma = 0$. Leider verhindern die Schwierigkeiten beim Lösen der linearen Probleme mit iterativen Lösungsverfahren oft den Einsatz des Newtonverfahrens. Durch den Reaktionsterm können prinzipiell beliebig große, negative Einträge in die Hauptdiagonale der Matrix gelangen. Mit dem LMPSC-Verfahren (4.2.3) als Glätter eines Mehrgitterverfahrens, sowie den anderen in Kapitel 4 entwickleten Mehrgitterkomponenten ist es jedoch in den meisten Fällen immer noch mit vertretbarem Aufwand möglich, einen 'großen' Parameter σ zu wählen und somit eine drastische Reduktion der benötigen nichtlinearen Iterationsschritte zu erzielen.

5.2 Vergleich des Newtonverfahrens gegen Fixpunktiterationen

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit einer eingehenderen Untersuchung, welchen Einfluß die Wahl des Parameters σ, und damit die Wahl des Verfahrens für die nichtlineare Iteration hat. Es wird sich zeigen, daß für bestimmte Testbeispiele, bei denen bekanntermaßen die Fixpunktiteration mit $\sigma = 0$ Konvergenzraten in der Nähe von eins besitzt -als Beispiel sei hier das schon öfter verwendete Driven-Cavity Problem im Bereich höherer Reynoldszahlen erwähnt-, bereits die Verwendung eines moderat großen Parameterwertes zu einer drastischen Verbesserung des Konvergenzverhaltens führt. Für die linearen Probleme, die in einem solchen Verfahren auftreten, ist allerdings der klassische Vanka-Glätter, selbst auf Gittern, die aus der regelmäßigen Verfeinerung des Einheitsquadrates entstehen, weitgehend ungeeignet. Die LMPSC-Glätter, die ursprünglich für die Lösung von Problemen entwickelt wurden, die aus Gitteranisotropie herrühren, erweisen sich auch in diesem Fall als äußerst stabil und erlauben die Lösung der auftretenden Probleme bereits mit moderaten Blockgrößen. Hierbei finden vor allem die gitterorientierten Blockungsverfahren Verwendung, da eine automatische Detektierung der problematischen Regionen über einfache geometrische Argumente nicht angewendet werden kann. Entsprechende algebraisch orientierte Blockungsmethoden sind bisher noch nicht entwickelt worden.

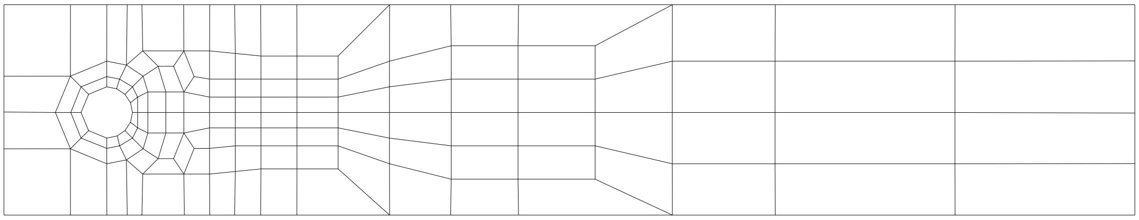


Abbildung 5.2: Grobgitter für den umströmten Zylinder

5.2.1 Verhalten der nichtlinearen Iteration

Als erstes wollen wir ermitteln, wie sich die Wahl des Parameters σ im Vorkonditionierer auf das nichtlineare Konvergenzverhalten auswirkt.

Betrachten wir wieder das Beispiel des umströmten Zylinders, mit dem Gitter in Abbildung 5.2 als Grobgitter. Für die beiden Standardkonfigurationen Reynoldszahl 20 bzw. 50 (siehe [38]) wurden bei Verwendung der zentralen Diskretisierung Rechnungen mit der einfachen Fixpunktiteration sowie mit der vollen Jacobimatrix als Vorkonditionierer durchgeführt. Dabei wurde die zentrale Diskretisierung verwendet, also ohne Stabilisierung des Konvektionstermes. Es zeigt sich hier im übrigen wieder, wie bereits in Abschnitt 3.2 gesehen, daß die zentrale Diskretisierung auf groben Gittern und bei höheren Reynoldszahlen nicht zur Konvergenz gebrach werden kann. Bereits in Tabelle 5.2 läßt sich ablesen, welches Potential in einer guten Wahl des Vorkonditionierers liegt. Man erkennt das theoretisch erwartete quadratische Konvergenzverhalten des Newtonverfahrens. Obendrein ist bei dieser Probemkonstellation die Anzahl der im Newtonverfahren benötigten nichtlinearen Iterationen, im Gegensatz zu denen der einfachen Fixpunktiteration, fast unabhängig von der Reynoldszahl!

	Reynolds 20		Reynolds 50	
Level	σ =0	σ =1	σ =0	σ =1
3	12	3	—	—
4	10	3	26	3
5	8	2	15	2

Tabelle 5.2: Anzahl der nichtlinearen Iterationen

Nun ist der umströmte Zylinder ein relativ einfaches Beispiel, da mehr oder weniger eine Hauptströmungsrichtung vorliegt und der Verlauf der Strömung in diesem stationären Bereich wenig Wirbel oder Rückströmung aufweist. Wir werden aber sehen, daß die an diesem Beispiel gemachten Beobachtungen auch bei 'härteren' Problemen richtig bleiben.

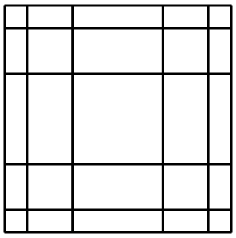


Abbildung 5.3: Grobgitter für Driven Cavity

Zur weiteren Analyse wurden einige Tests für eine Driven Cavity Konfiguration auf dem Einheitsquadrat gerechnet. Eine Driven Cavity Konfiguration als Testbeispiel bietet sich hier besonders an, da die Erfahrung zeigt, daß hier gerade bei höheren Reynoldszahlen und feinen Gittern die einfache Fixpunktiteration nur äußerst langsam konvergiert.

Obendrein ist das wirbelreiche Strömungsfeld ein Härtetest, da der zusätzliche Reaktionsterm im Vorkonditionierer häufig das Vorzeichen wechselt, was die daraus entstehenden numerischen Eigenschaften der Iterationsmatrix schwer vorhersagbar macht.

Das verwendete Grobgitter (Abbildung 5.3) mit 25 Elementen ist relativ isotrop mit einem maximalen Aspect-Ratio von 4. Level 6 entspricht einer Rechnung mit etwa 125.000 Unbekannten. Für $\nu = 10^{-3}$ ist in Tabelle 5.3 jeweils die Anzahl der nichtlinearen Iterationen bis zur Erreichung des Abbruchkriteriums ($\|def\|_0 \leq 10^{-10}$) dargestellt. Schon hier sieht man deutlich die Beschleunigung der nichtlinearen Iteration durch einen geeignet gewählten Vorkonditionierer. Noch deutlicher wird der Effekt allerdings, wenn man sich die Reduktion des Defektes pro nichtlinearem Iterationsschritt anschaut (Tabelle 5.5 bzw. Grafik 5.4). Das volle Newtonverfahren zeigt hier das erwartete quadratische Konvergenzverhalten, die Verfahren für $\sigma = 0.5$ und $\sigma = 0.75$ deutlich verbesserte Kontraktionszahlen. Es fällt auch auf, daß die Konvergenz durch die Wahl eines $\sigma > 0$ gleichmäßiger zu werden scheint. Während bei der einfachen Fixpunktiteration die Kontraktionsszahlen stark schwanken (in dem Fall zwischen 0.4 und 0.9), sind diese für $\sigma = 0.5$ und $\sigma = 0.75$ alle in etwa gleich groß. Dies ist allerdings eine einzelne Beobachtung, die einer eingehenderen Untersuchung bedarf.

	$\sigma=$			
Level	0	0.5	0.75	1
4	21	13	9	5
5	18	12	8	4
6	17	10	7	4

Tabelle 5.3: Nichtlineare Iterationen bei zentraler Diskretisierung

	$\sigma=$			
Level	0	0.5	0.75	1
4	38	19	14	10
5	19	13	10	8
6	17	11	9	6

Tabelle 5.4: Nichtlineare Iterationen mit Stromliniendiffusion

	$\sigma =$			
Iteration	0	0.5	0.75	1
1	$0.53 \cdot 10^{-1}$	$0.54 \cdot 10^{-1}$	$0.54 \cdot 10^{-1}$	$5.4 \cdot 10^{-2}$
2	0.37	0.20	0.14	$2.2 \cdot 10^{-1}$
3	0.36	0.28	0.16	$6.2 \cdot 10^{-2}$
4	0.70	0.43	0.23	$5.4 \cdot 10^{-3}$
5	0.89	0.42	0.27	$5.0 \cdot 10^{-5}$
6	0.55	0.39	0.24	
7	0.58	0.40	0.24	
8	0.37	0.38	0.24	
9	0.54	0.39	0.24	
Rest	$0.4 - 0.6$	0.39		

Tabelle 5.5: Reduktion des Defektes pro Iterationsschritt

Diese ersten Ergebnisse geben Grund zu der Annahme, daß nicht nur die komplette Newton-Matrix, sondern bereits Näherungen dazu einen guten Vorkonditionierer für die Defektkorrektur abgeben. Allerdings haben wir bei dieser Rechnung eine zentrale Diskretisierung gewählt. In praktischen Anwendungen wird man aber nicht ohne Stabilisierungen

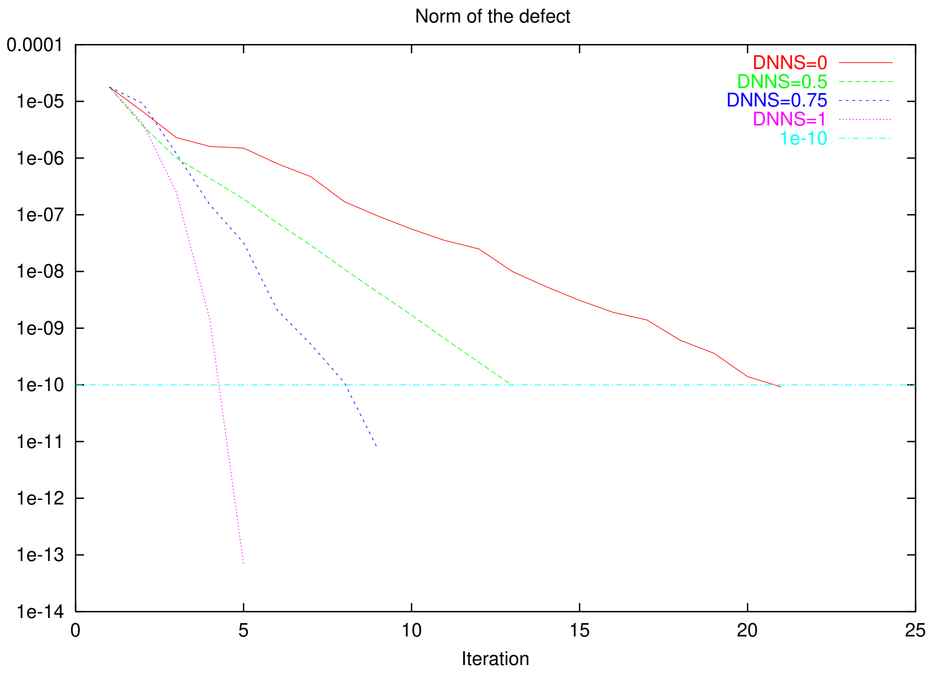


Abbildung 5.4: Reduktions des Defekts für verschiedene Vorkonditionierer

für die Konvektionsterme auskommen. Bei der Stromliniendiffusionsmethode erhält man dadurch einen Zusatzterm der Gestalt

$$\delta(\mathbf{u})(\mathbf{u}\nabla\mathbf{u}, \mathbf{u}\nabla\varphi), \tag{5.19}$$

mit einem δ, das möglicherweise nichtlinear von der Lösung $\mathbf{u}$ abhängt. Die Fréchetableitung hierzu ist im allgemeinen nicht mehr analytisch zu bestimmen. Noch schwieriger ist es im Falle der Upwind-Stabilisierung, bei der man den zugrundeliegenden Operator nicht differenzieren kann. Um aufwändige Verfahren zur numerischen Ableitung zu vermeiden, kann man versuchen, als Vorkonditionierer für das stabilisierte System nur eine unvollständige Jacobimatrix zu verwenden, indem man nur den schon bekannten Reaktionsterm $\sigma R(\mathbf{u})$ hinzu nimmt. Tabelle 5.4 zeigt, daß schon diese Modifikation zu Verbesserungen des nichtlinearen Konvergenzverhaltens führt, die mit denen aus Tabelle 5.3 durchaus vergleichbar ist. Im weiteren werden wir uns daher auf diese Art des "Newton"-Vorkonditionierers für stabilisierte Probleme beschränken.

5.2.2 Lösbarkeit der linearen Probleme

Eine weitere Untersuchung des nichtlinearen Verhaltens ist nicht unabhängig von den Betrachtungen zu den linearen Lösern durchzuführen. In Tabelle 5.6 kann man schon sehen, welche Schwierigkeiten beim Lösen der jeweiligen linearisierten Gleichgungssysteme auftreten. In der Tabelle sind noch einmal dieselben Rechnungen präsentiert, wie im letzten Abschnitt, jedoch diesmal zusammen mit dem verwendeten Glätter im Mehrgitterverfahren. Die linke Zahl gibt jeweils die Anzahl der benötigten nichtlinearen Iterationsschritte an, die Zahl daneben die durchschnittliche Anzahl der linearen Mehrgitterschritte pro nichtlinearem Schritt.

Vanka(2) 64 Glättungsschritte RE=100,

	$\sigma =$			
Level	0	0.5	0.75	1
4	10/1.0	7/1.0	6/1.0	5/1.0
5	9 /1.9	7/1.9	6/1.8	4/2.0
6	9 /2.9	7/2.9	5/2.8	4/3.0

GGPatch 8 Glättungsschritte RE=100,

	$\sigma =$			
Level	0	0.5	0.75	1
4	10/2.0	7/2.0	6/2.0	4/2.0
5	9 /2.0	7/2.3	6/2.5	4/2.3
6	9 /2.9	7/3.1	5/3.2	4/3.3

Vanka(2) 256 Glättungsschritte RE=1000,

	$\sigma =$			
Level	0	0.5	0.75	1
4	—/—	—/—	—/—	—/—
5	—/—	—/—	—/—	—/—
6	—/—	—/—	—/—	—/—

GGPatch 8 Glättungsschritte RE=1000,

	$\sigma =$			
Level	0	0.5	0.75	1
4	21/3.1	13/3.3	9/3.4	5/5.4
5	18/3.0	12/3.7	8/4.4	4/4.3
6	17/3.1	10/4.0	7/4.3	4/4.0

Tabelle 5.6: Nichtlineare Iterationen sowie durchschnittliche Anzahl linearer Mehrgitterschritte pro nichtlinearem Schritt bei zentraler Diskretisierung

Man sieht, daß für die niedrige Reynoldszahl bei Verwendung des einfachen Vanka(2) Glätters (siehe Abschnitt 4.2.2) keinerlei Probleme auftreten. Der Aufwand zur Lösung der Gleichungssysteme, gemessen in benötigten Mehrgitterschritten, steigt zwar mit zunehmender Gitterverfeinerung leicht an, hält sich aber in akzeptablen Grenzen. Bei Erhöhung der Reynoldszahl auf 1000 versagt dieser Glätter jedoch völlig. Selbst mit einer drastischen Erhöhung der Anzahl der Glättungsschritte konnte das Mehrgitterverfahren nicht zur Konvergenz gebracht werden.

An dieser Stelle zeigt sich der Nutzen der grobgitterorientierten Blockungsstrategie beim LMPSC-Glätter. In der rechten Spalte von Tabelle 5.6 sind die entsprechenden Zahlen angegeben, wobei als Startlevel k_0 für die Blockung Level 2 gewählt wurde. Das heißt, die Blockgröße betrug 16 Elemente auf Level 4, 256 auf Level 6. Die Zahl der Glättungsschritte wurde so gewählt, daß die Resultate für $RE = 100$ mit denen des Vanka(2) vergleichbar sind. Während der ungeblockte Vanka bei der Erhöhung der Reynoldszahl scheitert, erweist sich der geblockte als ausgesprochen robust. Ohne weitere Anpassungen konvergiert mit diesem Glätter das Mehrgitterverfahren auch für $RE = 1000$. Für den linearen Löser scheinen die entstehenden Gleichungssysteme auch nicht viel 'schwieriger' geworden zu sein. Die Anzahl der Mehrgitterschritte pro nichtlinearem Schritt steigt nur unwesentlich gegenüber der Rechnung bei niederer Reynoldszahl an. Obendrein ist bemerkenswert, daß diese Zahl nahezu unabhängig von der Gitterweite ist. Hier zeigt sich einmal mehr, daß das Konvergenzverhalten bei den geblockten Glättern von der Struktur der Blöcke stärker bestimmt wird, als von der Struktur des eigentlichen Gitters.

Die Zahlen zeigen auch noch einmal deutlich den Effekt des modifizierten Vorkonditionierers. Das Newtonverfahren liefert die erwartete (fast) quadratische Konvergenz. Wie bereits eingangs am Beispiel des umströmten Zylinders gesehen, ist die Anzahl der nichtlinearen Iterationsschritte dabei aufgrund dieser 'quadratischen' Konvergenz fast unabhängig von der gerechneten Reynoldszahl. Nicht nur das volle Newtonverfahren, sondern auch die modifizierten Fixpunktiterationen führen zu einer signifikanten Reduktion des nume-

2 Glättungsschritte					8 Glättungsschritte				
	$\sigma=$					$\sigma=$			
Level	0	0.5	0.75	1	Level	0	0.5	0.75	1
4	199/8.5	16/10.2	—/—	—/—	4	131/3.0	15/3.1	11/4.0	–/–
5	27 /5.2	13/ 7.6	—/—	—/—	5	27 /2.6	13/3.7	– / –	–/–
6	21 /5.3	12/ 8.0	8 /8.4	—/—	6	21 /2.5	12/3.6	8 /4.1	–/–

Tabelle 5.7: RE=2000, vierfache Blockgröße

rischen Aufwandes. Vergleicht man beispielsweise bei $RE = 1000$ die Ergebnisse für $\sigma = 0$ und $\sigma = 0.75$ so sieht man, daß das Verfahren mit $\sigma = 0.75$ mit etwa 40% der nichtlinearen Iterationen auskommt, der Aufwand für eine solche Iteration jedoch nur etwa 1/3 über dem der unmodifizierten Fixpuktiteration liegt. Der Gesamtaufwand ist also bei $\sigma = 0.75$ nur etwa halb so groß, wie bei der Fixpunktiteration.

Dieses Verhältnis bleibt auch weitgehend konstant, wenn man die Reynoldszahl weiter erhöht. Tabelle 5.2.2 zeigt die Ergebnisse für $RE = 2000$. Hier ist man schon nahe an der Grenze, bis zu der man noch die zentrale Diskretisierung verwenden kann. Mit der Blockung, die wir in den vorherigen Beispielen verwenden hatten, kommt man hier, auch bei einer Erhöhung der Anzahl der Glättungsschritte, nicht mehr zum Ziel. Mit einer Vergrößerung der Blockgröße erhält man aber zumindest für die Fixpunktiterationen wieder eine Lösung. In Tabelle 5.2.2 sieht man, daß die Zahl der Glättungsschritte hierbei gar nicht so wesentlich ist. Selbst mit 2 Vor- und Nachglättungsschritten erreicht man in diesem Fall hinreichend gute Ergebnisse. Man sieht auch hier wieder, daß der Aufwand bei der Verwendung von $\sigma = 0.75$ in etwa halb so groß ist, wie bei der einfachen Fixpunktiteration, und das unabhängig von der Zahl der Glättungsschritte.

Um nun das Verhalten der verschiedenen Löserkomponenten für höhere Reynoldszahlen untersuchen zu können, kommt man ohne eine Stabilisierung des Konvektionstermes nicht mehr aus. Die Zahlen in den Tabellen 5.8 bis 5.10 wurden mit dem in 3.2.2 beschriebenen Stromliniendiffusionsverfahren mit der Parameterwahl $\delta^* = 1$ gerechnet. Rechnungen mit dem Upwindverfahren liefern vergleichbare Resultate.

An diesen Zahlen kann man ablesen, wie sensibel der Vanka(2) Glätter auch mit der Stabilisierung auf die Erhöhung der Reynoldszahl reagiert. Bereits bei $RE = 5000$ muß die Zahl der Glättungsschritte erhöht werden, um das Mehrgitterverfahren zur Konvergenz zu bringen. Bei noch höheren Reynoldszahlen hilft auch das nicht mehr weiter. Selbst mit extremer Glättung erhält man bei keinem der Vorkonditionierer mehr Konvergenz. Man muß hierbei im übrigen zwischen zwei Phänomenen unterscheiden. Die Probleme bei den modifizierten Vorkonditionierern $\sigma \geq 0.5$ sind Probleme des linearen Lösers. Durch die zusätzlichen 'Reaktionsterme' werden die numerischen Eigenschaften der Iterationsmatrix so schlecht, daß der linearen Löser nicht mehr in der Lage ist, die Gleichungssysteme zu lösen. Im Falle von $\sigma = 0$ hingegen konvergiert die nichtlineare Fixpunktiteration, wenn überhaupt, derart langsam, daß die Rechnung nach 200 nichtlinearen Iterationen als 'divergent' abgebrochen wurde.

Das geblockte LMPSC-Verfahren zeigt sich im Gegensatz zum Vanka(2) als vergleichsweise robust. Bei steigender Reyoldszahl ist zwar der Vorkonditionierer $\sigma = 1$ auch nicht mehr zu lösen, aber gerade im Bereich um $\sigma = 0.5$ bleibt das Verfahren ohne weitere

Modifikationen sogar bis Re = 10.000 effizient. Eine Ausweitung des funktionierenden σ-Bereiches kann man, wie erwartet, durch eine Vergrößerung der Blockgröße erzielen.

Vanka(2) 8 Vor/Nachglättungsschritte

	$\sigma =$			
Level	0	0.5	0.75	1
4	38/4.8	19/5.9	14/5.9	10/5.7
5	19/4.4	13/5.2	11/5.5	7 /3.8
6	17/4.8	11/5.3	9 /5.3	7 /5.4

GG: 64 8 Vor/Nachglättungsschritte

	$\sigma =$			
Level	0	0.5	0.75	1
4	38/2.9	19/3.7	14/3.7	10/3.8
5	19/3.1	13/3.2	10/3.3	8 /3.5
6	17/3.5	11/3.5	9 /3.3	6 /3.0

Tabelle 5.8: Driven Cavity, RE=1000, SD, δ^*_{SD}=1

Vanka(2) 8 Vor/Nachglättungsschritte

	$\sigma =$			
Level	0	0.5	0.75	1
4	– / –	21/9.5	– / –	–/–
5	– / –	– / –	12/8.8	–/–
6	42/6.0	14/8.6	9 /8.2	–/–

GG: 64 8 Vor/Nachglättungsschritte

	$\sigma =$			
Level	0	0.5	0.75	1
4	– / –	21/4.5	15/5.5	–/–
5	– / –	17/4.7	12/4.8	–/–
6	41/3.4	13/4.5	9 /4.6	–/–

Vanka(2) 32 Vor/Nachglättungsschritte

	$\sigma =$			
Level	0	0.5	0.75	1
4	– / –	21/6.7	15/6.1	–/–
5	– / –	18/4.9	11/6.6	–/–
6	41/3.5	15/5.3	10/7.0	–/–

Tabelle 5.9: Driven Cavity, RE=5000, SD, δ^*_{SD}=1

Vanka(2) 32 Vor/Nachglättungsschritte

	$\sigma =$			
Level	0	0.5	0.75	1
4	–/–	–/–	–/–	–/–
5	–/–	–/–	–/–	–/–
6	–/–	–/–	–/–	–/–

GG: 64 8 Vor/Nachglättungsschritte

	$\sigma =$			
Level	0	0.5	0.75	1
4	–/–	25/5.6	–/–	–/–
5	–/–	20/6.0	–/–	–/–
6	–/–	18/6.3	–/–	–/–

Vanka(2) 512 Vor/Nachglättungsschritte

	$\sigma =$			
Level	0	0.5	0.75	1
4	–/–	–/–	–/–	–/–
5	–/–	–/–	–/–	–/–
6	–/–	–/–	–/–	–/–

GG: 256 8 Vor/Nachglättungsschritte

	$\sigma =$			
Level	0	0.5	0.75	1
4	–/–	25/5.3	– / –	–/–
5	–/–	21/5.4	13/5.4	–/–
6	–/–	16/4.2	11/4.8	–/–

Tabelle 5.10: Driven Cavity, RE=10000, SD, δ^*_{SD}=1

Die bisherigen Tests bestätigen die starke Beschleunigung der nichtlinearen Iteration durch die Hinzunahme des Reaktionstermes in den Vorkonditionierer. Die Beschleunigung ist auch bei Verwendung einer Stabilisierung der Konvektionsterme zu beobachten, wenn wir im Grenzfall $\sigma = 1$ gar nicht mehr die zu dem Problem gehörige Jacobimatrix haben. Da bei Hinzunahme des Reaktionstermes die M-Matrix Eigenschaft der Iterationsmatrix nicht mehr zu garantieren ist, wird das Lösen der linearen Systeme mit steigender Reynoldszahl und steigendem σ immer schwieriger. Als guter Kompromiß hat sich die Wahl von σ in der Gegend von 0.5 erwiesen.

Abschließend wollen wir noch auf die Frage der optimalen Patchgröße eingehen. Auch wenn wir bei den Betrachtungen immer von der Zielsetzung ausgehen, daß die lokalen Probleme stets relativ klein sind, und mit Blick auf [4] und [5] hocheffizient gelöst werden können ist es doch für die praktische Realisierung des Verfahrens wichtig, zumindest eine ungefähre Kenntnis der benötigten Blockgrößen zu besitzen.

	$\sigma =$		
BG	0.3	0.5	0.75
1	28/6.8	16/7.2	–/–
4	–/–	17/9.1	–/–
16	28/6.8	16/7.3	10/26.7
64	28/5.1	16/5.0	10/7.7
256	28/3.9	16/4.0	10/4.3

Tabelle 5.11: Driven Cavity, RE=5000

	$\sigma =$		
BG	0.3	0.5	0.75
1	35/7.9	17/7.9	–/–
4	35/8.2	17/7.7	–/–
16	35/8.5	17/7.4	–/–
64	35/5.9	17/5.9	–/–
256	35/4.8	17/4.9	13/5.5

Tabelle 5.12: Driven Cavity, RE=7500

Ermittlung optimaler Blockgrößen

Die in Tabelle 5.2.2 zusammengestellten Zahlen zeigen wieder die nichtlinearen Iterationen sowie die Anzahl der linearen Mehrgitterschritte pro nichtlinearem Schritt. *BG* bezeichnet die Blockgröße auf dem feinsten Gitter (Level 5). Dabei wurde auf der Driven-Cavity Konfiguration für zwei verschiedene Reynoldszahlen und verschiedene Werte von σ der Einfluß der Blockgröße auf das lineare Konvergenzverhalten untersucht. Man kann erkennen, daß zu kleine Blockgrößen keinerlei stabilisierende Wirkung haben. Die Blockgröße 4 erweist sich sogar häufig als schlechter als das völlig ungeblockte Verfahren. Dies läßt sich verstehen, wenn man bedenkt, daß bei der Blockgröße 1, also dem Vanka(2) pro Iterationsschritt jeder Freiheitsgrad zweimal upgedatet wird, während bei größeren Blöcken viele Freiheitsgrade nur einmal 'angefaßt' werden. Dieser Effekt überlagert bei geringer Blockung offenbar den positiven Effekt des direkten Lösens der geblockten Elemente. Ein gewisser Bruch zeigt sich zwischen BG=16 und BG=64. Ab 64 Elementen pro Block wird die lineare Konvergenz deutlich besser als die des Vanka(2). Diese Verbesserung steigert sich mit weiterer Vergrößerung der Blöcke. Ab BG=64 lassen sich auch, zumindest im Bereich mittlerer Reynoldszahlen, größere Werte von σ mit vertretbarem Aufwand lösen. Bei höheren Reynoldszahlen muß sogar noch weiter mit der Blockgröße nach oben gegangen werden.

Dieses Ergebnis bleibt auch auf anderen Konfigurationen gültig. In Tabelle 5.13 sehen wir die entsprechenden Zahlen für den umströmten Zylinder bei einer Reynoldszahl von 50. Auch hier erhält man ab einer Patchgröße von 64 Elementen ein befriedigendes lineares Konvergenzverhalten. Es fällt dabei lediglich auf, daß sich im Gegensatz zu 5.2.2 die Konvergenzeigenschaften mit zunehmender Patchgröße kontinuierlich verbessern. Man sieht auch schon für BG=16 eine signifikante Verbesserung gegenüber PG=4. Dies rührt von der wesentlich einfacheren Strömung im Fall des umströmten Zylinders her.

	$\sigma =$		
BG	0.3	0.5	0.75
1	–/–	–/–	–/–
4	11/44	10/43.6	–/–
16	11/13.6	10/16.6	7/13.6
64	11/6.4	10/6.5	7/7.4
256	11/2.9	10/3.0	7/2.9

Tabelle 5.13: Umströmter Zylinder, RE=50

Leider haben wir bisher keine Methode zur adaptiven Bestimmung der optimalen Blockgröße für diese nichtlinearen Iterationen. Eine solche zu entwickeln wird ein Gegenstand der zukünftigen Forschung sein müssen. Im Moment läßt sich nur sagen, daß bei praxisrelevanten Strömungen eine Mindestblockgröße von 64 verwendet werden sollte, um eine signifikante Verbesserung und Stabilisierung des linearen Lösers zu erzielen. Dies ist aber lediglich eine untere Grenze. Im Einzelfall können auch wesentlich größere Blöcke notwendig werden, besonders dann, wenn man zur Beschleunigung der nichtlinearen Iteration größere Werte σ verwenden möchte.

Kapitel 6

Ein voll gekoppelter Ansatz für die Boussinesq-Approximation

Bisher haben wir die Auswirkung der verschiedenen Mehrgitterkomponenten, allen voran des geblockten LMPSC-Glätter anhand der stationären Navier-Stokes-Gleichungen untersucht. Wie bereits eingangs erwähnt, ist dies bei weitem nicht die einzige Anwendungsmöglichkeit dieser Verfahren. Wir wollen zum Abschluß dieser Arbeit beispielhaft noch die Erweiterung auf die Approximation temperaturgetriebener Strömungen mit Hilfe der Boussinesq-Approximation darstellen. Häufig werden derartige Probleme mit Operator-Splitting Ansätzen behandelt. Dabei löst man den Navier-Stokes Teil und den Energieteil der Gleichungen jeweils einzeln, gegebenenfalls zusammen mit einer äußeren Iteration für eine bessere Kopplung. Im Gegensatz dazu lösen wir das Problem direkt als gekoppeltes System. Durch den Defektkorrekturansatz ist es wieder möglich, effektive Newton-artige Vorkonditonierer zu verwenden, die die nichtlineare Konvergenz gegen die Lösung $(\mathbf{u}, p, T)$ des Systems stark beschleunigen. Unter Verwendung des geblockten Glätters können die entstehenden linearen Gleichungssysteme, wie im Falle der reinen Navier-Stokes Gleichungen, effektiv mit einem linearen Mehrgitterverfahren gelöst werden.

6.1 Das Modell und die Diskretisierung

Das hier verwendete Modell für die Berechnung temperaturbehafteter Strömungen, ist die klassische Boussinesq-Approximation [9]. Die Impulsgleichungen erhalten einen zusätzlichen Auftriebsterm, der proportional zur Temperatur ist und in Richtung $\mathbf{j}$ der Gravitationskraft zeigt. Die Energiegleichung ist eine Diffusions-Konvektionsgleichung mit der Strömungsrichtung $\mathbf{u}$ als Konvektionsrichtung (siehe Gleichung (6.1)).

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nu_u \Delta \mathbf{u} - \nabla p - \mathbf{j} T + \mathbf{f} \qquad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ &\mathbf{u} \cdot \nabla T = \nu_T \Delta T + g \end{aligned} \tag{6.1}$$

Dabei ergibt sich, mit der *Prandtlzahl* Pr sowie der *Rayleighzahl* Ra die Viskosität

$$\nu_u = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \tag{6.2}$$

sowie die Wärmeleitfähigkeit

$$\nu_T = \sqrt{\frac{1}{RaPr}}. \tag{6.3}$$

Nach der Diskretisierung ist dann folgendes System zu lösen:

Finde $(\mathbf{u}, T, p)$, so daß

$$\begin{bmatrix} S_u(\mathbf{u}) & \boxed{M_T} & B \\ 0 & S_T(\mathbf{u}) & 0 \\ B^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ T \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ g \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6.4}$$

M_T ist hierbei die Massematrix bezüglich der Temperatur, $S_T(\mathbf{u})$ analog zu $S_u(\mathbf{u})$ wieder die Summe aus diffusivem und konvektivem Teil des Operators:

$$\begin{aligned} S_T(\mathbf{u}) &= \nu_T L + K(\mathbf{u}) && (6.5) \\ &\sim -\nu_T \Delta \cdot + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot && (6.6) \end{aligned}$$

Dieses System lösen wir wieder mit dem bekannten Defektkorrekturansatz. Zur Konstruktion eines effektiven Vorkonditionierers betrachten wir die Fréchetableitung des Operators bzw. deren diskretisierte Form:

$$DF(\mathbf{u}, T) = \begin{bmatrix} \nu_u L + K(\mathbf{u}) + R(\mathbf{u}) & M_T & B \\ R(T) & \nu_T L + K(\mathbf{u}) & 0 \\ B^T & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{6.7}$$

oder, mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 5.1,

$$DF(\mathbf{u}, T) = \begin{bmatrix} N(\mathbf{u}) & M_T & B \\ R(T) & S_T(\mathbf{u}) & 0 \\ B^T & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.8}$$

Dabei ist $R(T) \sim (\bullet \cdot \nabla)T$ ein Reaktionsterm analog zu $R(\mathbf{u})$. Analog zum Vorgehen bei den reinen Navier-Stokes-Gleichungen konstruieren wir daraus ein Klasse von Vorkonditionierern durch die Einführung eines Gewichtungsfaktors σ, $0 \le \sigma \le 1$ vor den Reaktionstermen

$$DF^\sigma(\mathbf{u}, T) = \begin{bmatrix} N^\sigma(\mathbf{u}) & M_T & B \\ \sigma R(T) & S_T(\mathbf{u}) & 0 \\ B^T & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.9}$$

Damit kann man einen Schritt des Defektkorrekturverfahrens schreiben als

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u^{n+1}} \\ T^{n+1} \\ p^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u^n} \\ T^n \\ p^n \end{pmatrix} - \omega DF^\sigma(\mathbf{u^n})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{def_u^n} \\ \mathrm{def}_T^n \\ \mathrm{def}_p^n \end{bmatrix}, \tag{6.10}$$

wobei ω einen optinalen Dämpfungsparameter darstellt.

Wenn man den oben definierten Vorkonditionierer betrachtet, erkennt man, daß die Kopplung von Geschwindigkeit und Temperatur noch über den Auftriebsterm in der Impulsgleichung und die Verwendung von $\mathbf{u}$ als Transportrichtung in der Energiegleichung hinaus geht. Aus der Fréchetableitung entsteht der zusätzliche Reaktionsterm $R(T)$, der die Temperatur noch zusätzlich an die Geschwindigkeit koppelt. Die Einbeziehung dieses Kopplungsterms in das Verfahren verspricht eine beschleunigte nichtlineare Konvergenz. Wie im Beispiel der Navier-Stokes-Gleichungen bleibt jedoch das Problem bestehen, die entstehenden linearen Gleichungssysteme effizient lösen zu können. Zu diesem Zweck werden wir den geblockten LMPSC-Glätter auf natürliche Weise erweitern, damit er für dieses Problem anwendbar wird.

6.2 Die Erweiterung des LMPSC-Glätters

Die Erweiterung des Glätters zur Verwendung in dem gekoppelten System folgt einfach dem in Kapitel 4.2.3 beschriebenen Konstruktionsprinzip.

Das Rechengebiet wird wieder in Teilgebiete oder Blöcke eingeteilt.

$$\Omega_i = \bigcup_{j\in I(i)} T_j, \quad \Omega = \bigcup_{i=1}^{NP} \Omega_i \tag{6.11}$$

Auf diesen Ω_i müssen dann lokale Unterprobleme gelöst werden. Die lokale Steifigkeitsmatrix enthält nun auch die Komponenten der Temperatur und hat die Gestalt

$$A_i = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11|\Omega_i} & \tilde{S}_{12|\Omega_i} & \tilde{S}_{13|\Omega_i} & B1_{|\Omega_i} \\ \tilde{S}_{21|\Omega_i} & \tilde{S}_{22|\Omega_i} & \tilde{S}_{23|\Omega_i} & B2_{|\Omega_i} \\ \tilde{S}_{31|\Omega_i} & \tilde{S}_{32|\Omega_i} & \tilde{S}_{33|\Omega_i} & 0 \\ B1^T_{|\Omega_i} & B2^T_{|\Omega_i} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.12}$$

Wie wir in (6.9) gesehen haben, ist keiner der Blöcke $\tilde{S}_{kl|\Omega_i}$ notwendigerweise gleich null. Wieder ist die Idee bei dem Glätter, auf den Teilgebieten diese Matrizen mit Hilfe eines Schur-Komplement-Ansatzes exakt zu invertieren. Die zugehörige lokale Schur-Komplement-Matrix P_i hat dann folgende Gestalt:

$$P_i := B^T_{|\Omega_i}\tilde{S}^{-1}_{|\Omega_i}B_{|\Omega_i} = [B1^T_{|\Omega_i}, B2^T_{|\Omega_i}, 0] \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11|\Omega_i} & \tilde{S}_{12|\Omega_i} & \tilde{S}_{13|\Omega_i} \\ \tilde{S}_{21|\Omega_i} & \tilde{S}_{22|\Omega_i} & \tilde{S}_{23|\Omega_i} \\ \tilde{S}_{31|\Omega_i} & \tilde{S}_{32|\Omega_i} & \tilde{S}_{33|\Omega_i} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} BT_{|\Omega_i} \\ B2_{|\Omega_i} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6.13}$$

Um pro Block nun die Probleme der Form

$$A_i[\mathbf{u}, T, p]^T = [\mathbf{f}, g, 0]^T \tag{6.14}$$

zu lösen, bestimmt man zuerst den Druck über

$$P_i\, p = B^T_{|\Omega_i} \tilde{S}^{-1}_{|\Omega_i} [\mathbf{f}, g], \tag{6.15}$$

und daraufhin Geschwindigkeit und Temperatur aus

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ T \end{bmatrix} = \tilde{S}^{-1}_{|\Omega_i} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Bp \\ 0 \end{bmatrix} \right). \tag{6.16}$$

Dabei ist $\tilde{S}^{-1}_{|\Omega_i} = \{\tilde{S}_{kl|\Omega_i}\}^3_{k,l=1}$.

Wie im Falle der Navier-Stokes-Gleichungen werden die lokalen Lösungsschritte in eine globale Jacobi- bzw. Gauß-Seidel-Iteration eingebunden. Aus Gründen der einfacheren Notation geben wir hier einen Jacobischritt an. In der Praxis wird dann aber ausschließlich die Gauß-Seidel-Iteration verwendet:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u^l} \\ T^l \\ p^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u^{l-1}} \\ T^{l-1} \\ p^{l-1} \end{bmatrix} - \omega^l \sum_{i=1}^{NP} \begin{bmatrix} \boxed{\tilde{S}_{|\Omega_i}} & B_{|\Omega_i} \\ & 0 \\ B^T_{|\Omega_i} \quad 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} S_u(\mathbf{u}) & M_T & B \\ 0 & S_T(\mathbf{u}) & 0 \\ B^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u^{l-1}} \\ T^{l-1} \\ p^{l-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ g \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Gleichung 6.17: Iterationsschritt $(l-1) \rightarrow l$

Für die Details sei auf Kapitel 4.2.3 hingewiesen.

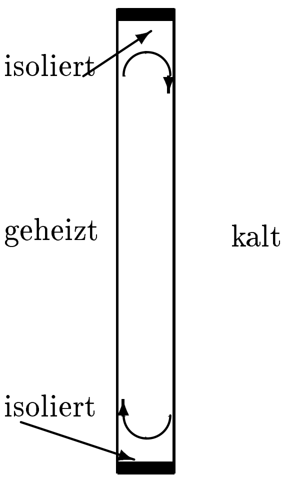


Abbildung 6.1: Geometrie

Als Beispiel für die Leistungsfähigkeit sowohl des Newtonverfahrens, als auch des Glätters haben wir eine modifizierte Konfiguration des MIT-Benchmarks [16] gerechnet. Es handelt sich um eine temperaturgetriebene Strömung in einer relativ stark gestreckten Geometrie. Das Gefäß ist achtmal so hoch wie breit. Boden und Decke sind isoliert, die linke Wand geheizt, die rechte gekühlt (siehe Abbildung 6.1). Das verwendete Grobgitter ist in Abbildung 6.2 zu sehen. Im Gegensatz zur Geometrie ist dieses Grobgitter isotrop gewählt, mit einem maximalen Aspect-Ratio von etwa 3. Da die Lösung des eigentlichen Benchmarkproblemes mit $Ra = 3.4 \cdot 10^5$ und $Pr = 0.71$ instationär ist, haben wir bei den hier angegebenen Beispielen die Rayleighzahl etwas reduziert. Die Tabellen 6.1 bis 6.3 zeigen die Resultate im Bereich $10^4 \leq Ra \leq 3.0 \cdot 10^5$; dies entspricht einer Viskosität von $1.5 \cdot 10^{-3} \leq \nu_u \leq 8.4 \cdot 10^{-3}$. Angegeben sind hier wieder die Anzahl der nichtlinearen Iterationsschritte (um den Defekt auf 10^{-10} zu drücken) sowie die Anzahl der durchschnittlich pro nichtlinearem Iterationschritt benötigten linearen Mehrgitterschritte. *500* nichtlineare Schritte bedeutet in dem Fall, daß die Rechnung hier abgebrochen wurde, ohne die gewünschte Genauigkeit erreicht zu haben.

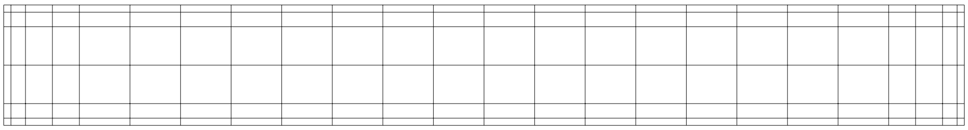


Abbildung 6.2: Isotropes Grobgitter für den MIT-Benchmark (90° gedreht)

Ähnlich wie bei den Driven Cavity Rechnungen in den vorherigen Kapiteln, konvergiert auch hier die einfache Fixpunktiteration $\sigma = 0$ nur sehr langsam. Auf dem feinsten hier gerechneten Gitter mit ca 36.000 Zellen (was insgesamt etwa 250.000 Unbekannten entspricht) benötigt die Fixpunktiteration im optimalen Fall etwa 50 Iterationsschritte. Bei der Verwendung von $\sigma = 1$ kommt man jedoch mit etwa 6-8 Schritten aus. Da der Aufwand zum Lösen der linearen Gleichungssysteme in etwa derselbe ist, benötigt die Fixpunktiteration etwa 7 mal mehr Rechenleistung.

	$\sigma = 0$			$\sigma = 1$
Level	$\omega = 1$	$\omega = 0.7$	$\omega = 0.3$	$\omega = 1$
3	43/1,8	34/ 1,4	90 /1,5	17/1,9
4	52/2,0	42/ 2,0	– / –	12/2,0
5	53/2,0	43/ 2,0	109/1,9	8 /2,1

Tabelle 6.1: 8-1 Geometrie, $Ra = 10^4$

	$\sigma = 0$			$\sigma = 1$
Level	$\omega = 1$	$\omega = 0.7$	$\omega = 0.3$	$\omega = 1$
3	500/1,9	66/ 1,9	165/2,0	11/1,7
4	500/2,0	69/ 2,0	170/2,0	9 /1,4
5	500/2,0	68/ 2,0	– / –	7 /1,8

Tabelle 6.2: 8-1 Geometrie, $Ra = 10^5$

	$\sigma = 0$			$\sigma = 1$
Level	$\omega = 1$	$\omega = 0.7$	$\omega = 0.3$	$\omega = 1$
3	500/2,0	500/2,2	81/ 2,0	14/3,0
4	500/2,1	500/2,8	65/ 2,0	7 /3,6
5	500/2,1	500/2,5	51/ 2,3	6 /3,5

Tabelle 6.3: 8-1 Geometrie, $Ra = 3.0 \cdot 10^5$

Darüber hinaus ist die Fixpunktiteration bei steigender Reynoldszahl nur noch schwer überhaupt zur Konvergenz zu bekommen. Im Falle von $Ra = 3 \cdot 10^5$ konvergiert sie nur noch mit starker Dämpfung der Defektkorrektur, also einer Wahl von $\omega \ll 1$ in (6.10). Die Wahl eines optimalen Dämpungsparameters ist sehr problemabhängig. Man sieht, besonders in Tabelle 6.2, daß es dabei sowohl ein "zu groß", als auch ein "zu klein" geben kann.

Das newton-artige Verfahren mit $\sigma = 1$ (aufgrund der Stabilisierung der konvektionsterme handelt es sich nicht um die vollständige Fréchetableitung) erweist sich hier als sehr robust und kaum von der Wahl der Rayleighzahl (und damit auch der Reynoldszahl) abhängig. Mit zunehmender Gitterfeinheit nimmt zudem die Zahl der benötigten nichtlinearen Schritte ab.

Als Glätter wurde im Mehrgitterverfahren der erweiterte LMPSC-Glätter verwendet, und zwar in der gitterorientierten Variante mit einer Blockgröße von 16 Elementen auf dem feinsten Gitter (GG: 16). Vergleichsrechnungen mit dem Vanka(2) zeigen wie erwartet, daß sich die Zahl der Mehrgitterschritte dadurch spürbar erhöht. So benötigt man etwa bei $Ra = 3.0 \cdot 10^5$ auf Level 5 mit 5,1 statt 2,3 im Durchschnitt mehr als doppelt so viele lineare Mehrgitterschritte. Hierbei ist im übrigen zu beachten, daß der ungeblockte Vanka(2) Glätter auf jedem Element immer noch die Kopplung der Komponenten $\mathbf{u}, p, und\ T$ untereinander berücksichtigt! Dies mag vielleicht auch erklären, warum dieser Glätter hier, wenn auch langsamer, immer noch zu einem konvergenten Verfahren führt.

Nun wollen wir untersuchen, wie sich das Verfahren bei einer Kombination von einem großen σ mit einem verzerrten Gitter verhält. Hierzu rechnen wir noch einmal mit der obigen Konfiguration, allerdings verfeinern wir das Gitter nun nicht mehr gleichmäßig, sondern, wie in Abschnitt 4.2.4 beschrieben, anisotrop in Richtung der beiden geheitzten Wände. Bei den Rechnungen wurde der Paramter $\alpha = 0.6$ gewählt, was auf dem feinsten Gitterlevel zu Zellen mit einem Anisotropiegrad von bis zu 90 führt. Die Resultate für den Vanka(2) sowie den LMPSC-Glätter sind in den Tabellen 6.5 und 6.4 zu sehen.

		$\alpha_{aniso} = 0.6,\ \sigma = 1, \omega = 1$		
Level	AR	$Ra = 10^4$	$Ra = 10^5$	$Ra = 3 \cdot 10^5$
3	15	16/ 2,0	13/ 3,7	div/ div
4	36	12/ 2,5	10/ 2,9	9 / 4,7
5	90	8 / 2,4	8 / 2,5	div/ div

Tabelle 6.4: Vanka(2), 32 Glättungsschritte

		$\alpha_{aniso} = 0.6,\ \sigma = 1, \omega = 1$		
Level	AR	$Ra = 10^4$	$Ra = 10^5$	$Ra = 3 \cdot 10^5$
3	15	16/ 3,0	13/ 2,7	14/ 3,1
4	36	12/ 2,0	9 / 1,9	8 / 2,0
5	90	8 / 2,4	8 / 2,5	7 / 3,4

Tabelle 6.5: LMPSC mit GG: 64 Glätter, 8 Glättungsschritte

Man erkennt, daß im Bereich der niedrigen Rayleighzahlen der Vanka(2) mit dieser Gitterverzerrung noch recht gut zurecht kommt. Steigt die Rayleighzahl jedoch weiter an, so versagt der ungeblockte Glätter völlig. Trotz der im Vergleich zum LMPSC-Glätter deutlich höheren Zahl von Glättungsschritten können die linearen Systeme im Falle $Ra = 3 \cdot 10^5$ nicht mehr zuverlässig gelöst werden. Ganz anders der geblockte Glätter. Mit diesem lassen sich nicht nur die Probleme mit höheren Rayleighzahlen lösen, die gemessenen linearen Konvergenzraten sind auch nahezu unabhängig von der Größe der Rayleighzahl. Die Wahl des Blockungsverfahrens GG: 64, also grobgitterorientierte Blöcke mit 64 Elementen auf dem feinsten Level, führt in diesem Fall sowohl zu einem "Verstecken" der Gitteranisotropie, da die Blöcke selbst nahzu isotrop sind, als auch der Störungen durch den Operator. Während bei den Rechnungen auf dem isotropen Gitter mit einer schwächeren Blockung (GG: 16) (Tabellen 6.1 bis 6.3) für $R = 3 \cdot 10^5$ ein deutlicher Anstieg der Zahl der Mehrgitterschritte pro nichlinearem Schritt zu beobachten war, bleibt dieser Anstieg bei der

Blockung GG: 64 trotz der stärkeren Verzerrung der Elemente, relativ klein. Dies belegt nun auch für das erweiterte System die in Kapitel 4.2.4 gemachte Beobachtung, daß ab einer Blockgröße von 64 Elementen auf dem feinsten Level der Glätter relativ unempfindlich gegen Störungen des zugrundeliegenden Operators ist (vergleiche Tabellen 5.11 und 5.12).

Abschließend soll hier noch angemerkt werden, daß sich mit den geschilderten Beispielen die Anwendungsmöglichkeiten des gekoppelten Zuganges in Kombination mit dem LMPSC-Glätter noch lange nicht erschöpfen. Man denke beispielsweise an die Modellierung von Turbulenzeffekten in Strömungen. Mit einem analogen Vorgehen, wie bei den Boussinesq-Approximationen, kann man sich eine Erweiterung dieses Zuganges beispielsweise auf Zweigleichungs-Turbulenzmodelle wie die $k-\varepsilon$-Modelle (siehe [33]) vorstellen. Dabei werden, zusätzlich zu den Strömungsgleichungen, noch zwei Gleichungen für die turbulente kinetische Energie k, sowie die Dissipation ε berechnet. Diese beiden Werte bestimmen maßgeblich die sogenannte Wirbelviskosität $\nu_t \sim \frac{k^2}{\varepsilon}$. Diese wird zu der kinematischen Viskosität ν addiert und simuliert die Effekte mikroskopischer Strömungsphänomene auf den makroskopischen Strömungsverlauf. Da bei derartigen Konfigurationen die Randschichten in der Nähe fester Wände sehr fein aufgelöst werden müssen, ist man in diesem Bereich meistens zur Verwendung stark anisotroper Elemente gezwungen; obendrein sind die Geschwindigkeitsfreiheitsgrade stark mit den turbulenten Größen gekoppelt. Man hat also genau die Situation, für die die modifizierten Mehrgitterkomponenten und besonders der LMPSC-Glätter entwickelt worden sind.

Eine Anwendung der neu entwickelten Verfahren auf ein $k-\varepsilon$-Modell ist im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt worden. An dieser Stelle werden daher lediglich die zu untersuchenden Gleichungen sowie die Struktur der zu lösenden diskreten Probleme angegeben. Für die genaue Herleitung des Modelles siehe beispielsweise [34].

Die (stationären) Modellgleichungen haben die folgende Form:

$$
\begin{array}{lcll}
-\nabla\cdot((\nu+\nu_t)\nabla\mathbf{u}) & + & \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}+\nabla p & = \ \mathbf{f} \\
-\nabla\cdot((\nu+\nu_t)\nabla k) & + & \mathbf{u}\cdot\nabla k-\frac{1}{2}\nu_t\left|\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^\top\right|^2+\varepsilon & = \ 0 \\
-\nabla\cdot((\nu+\nu_t)\nabla\varepsilon) & + & \mathbf{u}\cdot\nabla\varepsilon-c_1\left|\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^\top\right|^2+c_2\frac{\varepsilon^2}{k} & = \ 0\ ,
\end{array}
$$

$$
\nabla\cdot\mathbf{u} = 0
$$

mit $\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ und gewissen Konstanten c_i. Nach entsprechender Diskretisierung muß das folgende System gelöst werden:

Finde $(\mathbf{u}, k, \varepsilon, p)$, so daß

$$
\begin{bmatrix}
L(k,\varepsilon)+K(\mathbf{u}) & 0 & 0 & B \\
E_1(k,\varepsilon,\mathbf{u}) & L(k,\varepsilon)+K(\mathbf{u}) & M & 0 \\
E_2(\mathbf{u}) & 0 & L(k,\varepsilon)+K(\mathbf{u})+M_1(k,\varepsilon) & 0 \\
B^T & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ k \\ \varepsilon \\ p \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (6.19)
$$

Hierbei ist der Diffusionsoperator L nun nicht mehr linear, da $\nu_t = \nu_t(k,\varepsilon)$, $K(\mathbf{u})$ ist wieder der Konvektionsterm, die neu hinzugekommenen Terme sind

$E_1(k,\varepsilon,\mathbf{u})\mathbf{u} \sim 1/2\nu_t\left|\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^\top\right|^2$, $E_2(\mathbf{u})\mathbf{u} \sim c_1\left|\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^\top\right|^2$, sowie $M_1(k,\varepsilon) \sim c_2\frac{\varepsilon}{k}\cdot id$.

Als äußere, nichtlineare Iteration kann man hier wieder den Defektkorrekturzugang anwenden. Für den Vorkonditionierer ist eine mögliche, sehr suggestive Wahl die Linearisierung

$$\tilde{DF_n} := \begin{bmatrix} L(k^n, \varepsilon^n) + K\mathbf{u^n}) & 0 & 0 & B \\ E_1(k^n, \varepsilon^n, \mathbf{u^n}) & L(k^n, \varepsilon^n) + K(\mathbf{u^n}) & M & 0 \\ E_2(\mathbf{u^n}) & 0 & L(k^n, \varepsilon^n) + K(\mathbf{u^n}) + M_1(k^n, \varepsilon^n) & 0 \\ B^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

oder auch eine bessere Approximation der Fréchetableitung.

Die Defektkorrekturiteration lautet dann (mit einem optionalen Dämpfungsparameter ω^n)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u^{n+1}} \\ k^{n+1} \\ \varepsilon^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbf{u^n} \\ k^n \\ \varepsilon^n \\ p^n \end{bmatrix} - \omega^n \, \tilde{DF_n}^{-1} \begin{bmatrix} def_{\mathbf{u^n}} \\ def_{k^n} \\ def_{\varepsilon^n} \\ def_{p^n} \end{bmatrix}. \tag{6.20}$$

Analog zum Anfang des Abschnitts 6.2 kann man die lokalen Schur-Komplement-Matrizen aufstellen und den LMPSC-Glätter auf diese Klasse von Problemen erweitern.

Bisher werden die $k - \varepsilon$-Modelle meistens mit einem Operator-Splitting Ansatz behandelt, direkt-gekoppelte Ansätze werden kaum verwandt. Der Erfolg der in dieser Arbeit entwickelten Methoden gibt jedoch Grund zu der Hoffnung, daß sich die Verfahren auch auf dem Gebiet der Turbulenzmodellierung erfolgreich einsetzen lassen. Ausgiebige Untersuchungen zu diesem Thema werden Gegenstand der kommenden Forschung sein.

Kapitel 7

Zusammenfassung/Ausblick

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir eingehend die verschiedenen Komponenten untersucht, die in einem Löser von inkompressiblen, stationären Navier-Stokes-artigen Gleichungen auftreten. Das Ziel, ein robustes Verfahren zu finden, das für ein möglichst breites Spektrum von Problemen anwendbar ist, ohne daß eine aufwendige Bestimmung von Parametern, etc. nötig wird, ist weitgehend erreicht worden.

Bei der Diskretisierung hat sich, besonders auf gestörten Gittern, die nichtparametrische Variante des rotiert-bilinearen, nichtkonformen Viereckselementes der parametrischen als überlegen erwiesen. Dieses aus der Theorie bekannte Ergebnis war auch in praktischen Rechnungen deutlich sichtbar. Für die notwendige Stabilisierung des Konvektionsterms ist das Upwind-Verfahren der Stromliniendiffusion (SD) zumindest zur Zeit noch vorzuziehen. Das stützt sich vor allem darauf, daß sich die Bestimmung des Dämpfungsparameters δ^* bei der SD (siehe Kapitel 3.2.2) als schwierig gestaltet und signifikant vom jeweiligen Problem abhängt. Da die Performance des Verfahrens wiederum sehr stark von der Wahl dieses Parameters abhängen kann, ist das Upwind Verfahren aus Sicht der Robustheit vorzuziehen. In jüngster Zeit entstandene Stabilisierungsmethoden, wie zum Beispiel das TVD- oder FCT-Verfahren, arbeiten völlig parameterfrei nur auf Basis der Matrixeinträge. Dies macht solche Verfahren sehr interessant für die Anwendung und die Entwicklung sollte daher aufmerksam verfolgt werden.

Im Mehrgitterverfahren hat es sich gezeigt, daß nahezu alle Komponenten adaptiv angepaßt werden müssen, damit auf stark gestörten Gittern weiterhin eine gute Konvergenz gewährleistet werden kann. Bei den Gittertransferoperatoren sowie beim Aufbau der Grobgittermatrizen wurde eine Methode erfolgreich eingesetzt, bei der adaptiv zwischen der vollen, rotiert-bilinearen Interpolation und der konstanten Interpolation umgeschaltet wird. Als Verzerrungsgrad, bei dem man auf konstant umschalten muß, hat sich ein Wert um 50 als optimal herausgestellt. Weiterhin wird die Grobgitterkorrektur mit einem adaptiv bestimmten Gewichtungsfaktor versehen. Die Tests haben ergeben, daß die gewählten Gewichte zwar nicht immer bessere Verfahren liefern als optimal gewählte konstante Gewichte. Jedoch ist das optimale konstante Gewicht wieder problemabhängig und a priori nicht bekannt, und eine falsche Wahl kann sehr leicht zum völligen Versagen der gesamten Methode führen.

Die Modifikation des Glätters ist ein weiterer entscheidender Faktor. Ausgehend von dem sogenannten Vankaglätter wurde der geblockte LMPSC-Glätter eingeführt, bei dem mehrere Gitterzellen zu sogenannten Patches zusammengefaßt werden, auf denen die lokalen Subprobleme exakt gelöst werden. Regelt man diese Blockung so, daß man stark anisotrope Elemente mit benachbarten Elementen zusammenblockt, bis der resultierende Patch nur noch einen moderaten Aspect-Ratio hat, so ergibt sich, natürlich immer zusammen mit den oben erwähnten Adaptionen, ein lineares Mehrgitterverfahren, das in der Lage ist, weitgehend unabhängig von Störungen im Rechengitter die auftretenden linearen Gleichungssysteme effektiv zu lösen. Natürlich ist der numerische Aufwand im Vergleich zum klassischen Vankaglätter größer, da gegebenenfalls lokale Matrizen mit 100 oder mehr Einträgen direkt invertiert werden müssen. Allerdings ist diese Matrizengröße noch moderat, und das Invertieren der Matrizen ein erträgliches Übel im Vergleich zur völligen Divergenz des Verfahrens. Obendrein darf man die Entwicklung des Glätters auch nicht losgelöst von der Entwicklung hardwareoptimierter Lösungsverfahren betrachten, wie sie im SCARC-Projekt ([4],[5],[27]) entwickelt werden. Hierbei gilt es zu beachten, daß die Größe der Matrizen derart moderat bleibt, daß sie in den schnellen Cache-Speicher moderner Rechnerarchitekturen passen. Damit ist eine schnelle Lösung der lokalen Probleme gewährleistet.

Bei der Behandlung der Nichtlinearität in den Navier-Stokes-Gleichungen kommt es häufig vor, daß die einfachen Fixpunktiterationen äußerst langsam oder gar nicht konvergieren, die Verwendung eines Newtonverfahrens aber ausscheidet, da die numerischen Eigenschaften der entstehenden Iterationsmatrizen einen Einsatz der klassischen Lösungsverfahren verhindern. Der Weg, der sich als erfolgreich erweist, ist die Kombination aus der Addition von lediglich Teilen der Reaktionsterme, sowie dem Einsatz der geblockten Glätters. Dabei sollte der Reaktionsterm mit $\sigma = 0.5$ gewichtet und für den Glätter eine gleichmäßige Größe von mindestens 64 Elementen pro Block auf dem feinsten Gitter gewählt werden. Ersteres führt bereits zu einer signifikanten Beschleunigung der nichtlinearen Konvergenzraten, während letzteres die Lösbarkeit der entstehenden Systeme sicherstellt. Wiederum liefert dies nicht unbedingt die schnellsten Verfahren, jedoch ist die Wahl aus Robustheitssicht als optimal anzusehen. Leider ist es bisher nicht gelungen, die optimale Blockgröße adaptiv, d.h. anhand beispielsweise der Matrixeinträge zu ermitteln. Der Wert 64 ergab sich empirisch aus den gemachten Tests und ist als Richtschnur zu betrachten. Im Einzelfall kann es aber durchaus nötig sein, wenn man beispielsweise einen größeren Parameterwert von σ wählen möchte, Blöcke der Größe 256 oder mehr zu wählen. Bei der Entwicklung einer Methode, um die jeweils optimale Blockgröße zu bestimmen, besteht somit noch Forschungsbedarf für die Zukunft.

Abschließend haben wir gesehen, daß sich die oben gemachten Erkenntnisse problemlos auch auf größere Systeme als die Navier-Stokes-Gleichungen übertragen lassen. Bei der Boussinesqapproximation blieben die im Navier-Stokes Fall gemachten Erkenntnisse weitgehend gültig. Mit Hilfe des LMPSC-Glätters ist es einfach möglich, das System direkt gekoppelt zu lösen. Ausgehend von diesen positiven Ergebnissen kann man daran denken, in der Zukunft auch etwa Mehrgleichungsturbulenzmodelle wie das $k-\varepsilon$-Modell mit einem solchen direkten, gekoppelten Verfahren zu behandeln, oder vergleichbare Konfigurationen, bei denen die Navier-Stokes-Gleichungen mit weiteren Gleichungen gekoppelt sind.

Literaturverzeichnis

[1] Apel, T.: *Anisotropic Finite Elements: Local Estimates and Applications*, Teubner, Stuttgart–Leipzig 1999

[2] Apel, T., Dobrowolski, M.: *Anisotropic interpolation with applications to the finite Element method*, Computing, 47: 277-293 (1992)

[3] Baranger, J., Guillopé, C., Saut, J.-C.: *Mathematical Analysis of Differential Models for Viscoelastic Fluids* In: J-M. Piau, J-F. Saut (editors): *Rheology for Polymer Melt Processings*, Elsevier Science B.V., 1996

[4] Becker, C., Kilian, S.,Turek, S.: *Some Concepts of the Software Package FEAST*, Proceedings VECPAR98, Lecture Notes in Computer Science 1573, 271–284 (1998)

[5] Becker, C., Kilian, S.,Turek, S.: *Consequences of Modern Hardware Design for Numerical Simulations and their Realization in FEAST* , Proceedings EuroPar99, Lecture Notes in Computer Science 1685: 643–650 (1999)

[6] Becker, R.: *An adaptive finite element method for the incompressible Navier–Stokes equations on time–dependent domains*, Dissertation, Universität Heidelberg, 1995

[7] Becker, R., Rannacher, R.: *Finite element solution of the incompressible Navier-Stokes equations on anisotropically refined meshes* , Vieweg, Wiesbaden, Notes Numer. Fluid Mech. 49: 52-62 (1995)

[8] Blum, H., Harig, J., Müller S.: **FEAT** . *Finite element analysis tools. Release 1.1. User Manual*, Technischer Report Nr. 554, SFB 123, Universität Heidelberg, Januar 1990

[9] Boussinesq, J.: *Theorie Analytique de la chaleur*, Gauthier-Villars, Paris, 1903

[10] Buijssen, S.H.M.: *Numerische Analyse eines parallelen 3-D-Navier-Stokes-Lösers*, Diplomarbeit, Universität Heidelberg, 2002

[11] Busse, F.: *Fundamentals in Thermal Convection*, in W.R. Peltier (editor), *Mantle Convection: Plate Tectonics and Global Dynamics*, 23 – 95, Gordon and Breach Science Publishers, New York / London / Paris / Montreux / Tokyo / Melbourne, 1989

[12] Chien, K.-Y.: *Predictions of channel and boundary layer flows with a low-Reynolds-number turbulence model*, AIAA J., 20: 33-38 (1982)

[13] Ciarlet, Ph.G.: *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North–Holland 1976

[14] Crouzeix, M., Raviart, P.A.: *Conforming and non–conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations*, R.A.I.R.O. **R–3**: 77–104 (1973)

[15] Cuthill, E., McKee, J.: *Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices*, in Proc. ACM Nat. Conf., 157–172, New York 1969

[16] Christon, P.A., Gresho, P.M., Sutton, S.B.: *Computational predictability of natural convection flow in enclosures*, In: Computational Fluid and Solid Mechanics, 1465-1468, First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, Elsevier, 2001

[17] Dongarra, J.J., Du Croz, J., Hammarling, S.,Hanson, R.J.: *An extended set of FORTRAN Basic Linear Algebra Subprograms*, ACM Trans. Math. Soft., 14: 1–17 (1988)

[18] Dupont, T., Scott, R.: *Polynomial Approximation of Functions in Sobolev Spaces*, Math. Comput., 34: 441–463 (1980)

[19] Girault, V., Raviart, P.A.: *Finite Element Methods for Navier–Stokes equations*, Springer, Berlin–Heidelberg 1986

[20] Hackbusch, W.: *Multi–Grid Methods and Applications*, Springer, Berlin–Heidelberg 1985

[21] Hughes, T.J.R., Brooks, A.N.: *A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion*, In: Finite element methods for convection dominated flows (Hughes, T.J.R., ed.). New York: ASME 1979.

[22] John, V.: *A comparison of parallel solvers for the incompressible Navier-Stokes equations*, Comput. Visual. Sci. 4: 193–200 (1999)

[23] John, V., Matthies, G., Schieweck, F., Tobiska, L.: *A streamline-diffusion method for nonconforminf finite element approximations applied to convection-diffusion problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 166: 85–97 (1998)

[24] John, V., Tobiska, L.: *A Coupled Multigrid Method for Nonconforming Finite Element Discretizations of the 2D-Stokes Equation*, Computing 64: 307–321 (2000)

[25] Johnson, C.: *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge University Press, 1987

[26] Johnson, C.: *The streamline diffusion finite element method for compressible and incompressible fluid flow*, in "Finite Element Method in Fluids VII", Huntsville, 1989

[27] Kilian, S.: *SCARC Ein verallgemeinertes Gebietszerlegungs-/Mehrgitterkonzept auf Parallelrechnern*, Dissertation, Universität Dortmund, 2001

[28] Kuzmin, D., Turek, S.: *Flux Correction Tools for Finite Elements*, J. Comput. Phys. 175, 2002

[29] Kuzmin, D., Turek, S.: *Finite element discretization and iterative solution techniques for multiphase flows in gas-liquid reactors*, Ergebnisberichte Angewandte Mathematik Nr. 222, Universität Dortmund, 2002

[30] Kuzmin, D., Möller, M., Turek, S.: *Multidimensional FEM-FCT schemes for arbitrary time-stepping*, Ergebnisberichte Angewandte Mathematik Nr. 215, Universität Dortmund, 2002

[31] Lawson, C.L., Hanson R. J., Kincaid D., Krogh F. T.: *Basic Linear Algebra Subprograms for FORTRAN usage*, ACM Trans. Math. Soft., 5: 308–323 (1979)

[32] Lube, G.: Stabilized Galerkin finite element methods for convection dominated and incompressible flow problems., Polish Academy of Sciences, Warszawa, Inst. of Mathematics, Banach Cent. Publ. 29: 85-104 (1994)

[33] Launder, R.E., Spalding, D.R.: *The Numerical Simulation of Turbulent Flows*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 3: 269-289, (1974)

[34] Mohammadi, B., Pironneau, O.: *Analysis of the K-Epsilon Turbulence Model*, Wiley& Sons, 1994

[35] Matthies, G., Tobiska, L.: *The Streamline-Diffusion Method for Conforming and Nonconforming Finite Elements of Lowest Order Applied to Convection-Diffusion Problems*, Computing 66: 343–364 (2001)

[36] Ohmori, K., Ushijima, T.: *A Technique of Upstream Type Applied to a Linear Nonconforming Finite Element Approximation of Convective Diffusion Equations*, R.A.I.R.O. Numer. Anal., 18: 309–332 (1984)

[37] Rannacher, R., Turek, S.: *A simple nonconforming quadrilateral Stokes element*, Numer. Methods Partial Differ. Equations 8, No.2: 97–111 (1992)

[38] Schäfer, M., Turek, S. (with support by F. Durst, E. Krause, R. Rannacher): *Benchmark computations of laminar flow around cylinder*, in E.H. Hirschel (editor), *Flow Simulation with High-Performance Computers II*, Volume 52 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, 547–566, Vieweg, 1996.

[39] Schieweck, F.: *Parallele Lösung der stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen.*, Habilitation, Otto-von-Guericke Universität Magdeburg, Fakutät für Mathematik, 1996

[40] Schieweck, F., Tobiska, L.: *A nonconforming finite element method of upstream type applied to the stationary Navier-Stokes equation*, R.A.I.R.O., Modélisation Math. Anal. Numér. 23, No.4: 627-647 (1989)

[41] Schaeffer, D.: *Instability in the evolution equations describing incompressible granular flow*, J. Diff. Eq., 66: 19–50 (1987)

[42] Schreiber, P.: *A new finite element solver for the nonstationary, incompressible Navier-Stokes equations in three dimensions*, Dissertation, Universität Heidelberg, 1996

[43] Stynes, M., Tobiska, L.: *The streamlinediffusion method for nonconforming Q_1rot elements on rectangular tensor-product meshes*, IMA Journal of Numerical Analysis 21: 123–142 (2001)

[44] Suttmeier, F.-T.: *An Adaptive Displacement/Pressure Finite Element Scheme for Treating Incompressibility Effects in Elasto-Plastic Materials*, Numer. Methods Partial Differential Eq 17: 369-382 (2001)

[45] Temam, R.: *Theory and Numerical Analysis of the Navier–Stokes Equations*, North-Holland, 1977

[46] Tobiska, L.: *Full and weighted upwind finite element methods*, In: Splines in Numerical Analysis, ed. by J.W.Schmidt and H. Späth, Internationales Seminar ISAM 89 in Weissig, Akademie Verlag Berlin, 1989

[47] Turek, S.: *A multigrid Stokes solver using divergence free finite elements*, Technischer Report Nr. 527, SFB 123, Universität Heidelberg, Juli 1989

[48] Turek, S.: *Ein robustes Mehrgitterverfahren zur Lösung der instationären, inkompressiblen 2D Navier-Stokes- Gleichungen mit diskret divergenzfeien finiten Elementen*, Dissertation, Universtiät Heidelberg, 1991

[49] Turek, S.: *Efficient Solvers for incompressible flow problems. An algorithmic and computational approach*, Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Springer, Berlin 1999

[50] Turek, S., Ouazzi, A., Schmachtel, R.: *Multigrid Methods for Stabilized Nonconforming Finite Elemenst for Incompressible Flow involving the Deformation Tensor Formulation*, Journal of Numerical Mathematics, Vol. 10, No3: 235–248 (2002)

[51] Turek, S., Schmachtel, R.: *Fully coupled and operator-splitting approaches for natural convection flow in enclosures*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 40: 1109–1119 (2002)

[52] Vanka, S.P.: *Implicit Multigrid Solutions of Navier–Stokes Equations in Primitive Variables*, J. Comput. Phys., 65: 138–158 (1985)

[53] Wilcox, D.C.: *Turbulence Modeling for CFD*, DCW Industries, La Canada, 1993

[54] Zhou, G.: *How accurate is the streamline–diffusion method?*, Math. Comput. 66: 31–44 (1997)

[55] Ziethe, R., Spohn, T., Turek, S.: *Core Formation: A New Modelling Approach* , 36th ESLAB Symposion Earth-like Planets and Moons, Nordwijk, 2002