Burkhard ALPERS, Aalen

Mathematisches Argumentieren in der Theorieentwicklung der Technischen Mechanik

Einleitung

Mathematisches Argumentieren (im Englischen: „mathematical reasoning“) ist eine mathematische Kompetenz, die auch im Ingenieurbereich als Ausbildungsziel genannt wird (Alpers et al., 2013). Diese Kompetenz soll Studenten unter anderem befähigen, mathematische Argumentationen in theoretischen Herleitungen in Anwendungsfächern zu verstehen. Nun ist allerdings noch wenig erforscht, in welcher Form solche mathematischen Argumentationen auftreten und in welchem Zusammenhang sie mit Argumentationen oder Begründungen aus Anwendungsfächern stehen. Dies soll im vorliegenden Beitrag anhand eines weit verbreiteten Statik-Lehrbuchs (Gross et al., 2016) untersucht werden. Dazu wird zunächst kurz der Begriff des Argumentierens nach Brunner (2014) rekapituliert und auf bisherige Arbeiten eingegangen. Dann werden das eigene Vorgehen und die daraus resultierenden Erkenntnisse vorgestellt.

Theoretischer Hintergrund und bisherige Arbeiten

Brunner (2014) legt dar, dass Begriffe wie (mathematisches) Argumentieren, Begründen und Beweisen in der Literatur in unterschiedlichen Bedeutungen gebraucht und häufig nicht klar gegeneinander abgegrenzt bzw. aufeinander bezogen werden. Sie schlägt als übergeordneten Begriff das „Begründen“ vor und verortet auf dem Begründungskontinuum fortschreitend das „alltagsbezogene Argumentieren“, das „Argumentieren mit mathematischen Mitteln“, das „logische Argumentieren mit mathematischen Mitteln“ und das „formal-deduktive Beweisen“, wie es in der Fachdisziplin Mathematik verwendet wird (S. 31). Dabei umfasst das Argumentieren mit mathematischen Mitteln auch das Durchspielen von Beispielsituationen ohne logische Deduktion, während das logische, aber nicht formale Argumentieren inhaltlich-anschauliche Begriffe und logische Schlüsse sowie ein operatives Vorgehen beinhaltet. Die Fassung der „mathematical reasoning“ Kompetenz nach Niss (siehe Alpers et al., 2013) umfasst die beiden logischen Argumentationen (formal und nicht-formal).

Hochmuth & Schreiber (2016) untersuchen mit Hilfe der Anthropologischen Theorie der Didaktik, wie sich die „Praxeologien“ in Lehrbüchern zur Signal- und Systemtheorie (SST) 4. Semester von denen der Höheren Mathe-

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

matik unterscheiden. Sie stellen fest, dass die Objekte der SST sofort als mathematische Objekte mit Anwendungsbedeutung eingeführt werden, so dass eine Trennung von realer Welt und Mathematisierung, wie sie im Modellierungszyklus vorgenommen wird, nicht adäquat ist. Bei der Einführung und der Betrachtung von Eigenschaften des Dirac-Impulses (mathematisch: δ-Distribution) stellen sie fest, dass zwar eine Plausibilitätsbegründung in Form der Annäherung durch Funktionen und mathematische Eigenschaften des Integrals geboten wird, eine formal korrekte Herleitung unter Nutzung des Distributionsbegriffs aber fehlt. Es wird zwar auf die Mathematik verwiesen, aber auch auf die Anwendungspraxis, die sinnvolle und nützliche Ergebnisse liefert. Letztendlich muss der Student „spezifische Elemente der fachmathematischen Diskurse … vernachlässigen“ (S. 558). Auf dem Brunner’schen Spektrum sind die Begründungen im Bereich des mathematischen Argumentierens mit Plausibilitätsbetrachtungen, graphischer Anschauung und der Nutzung mathematischer Aussagen ohne Voraussetzungsüberprüfung anzusiedeln.

Uhden et al. (2012) untersuchen das Verhältnis zwischen Mathematik und physikalischer Theoriebildung. Sie stellen fest, dass sich letztere nicht über eine spätere „mathematische Modellierung“ von der Mathematik trennen lässt, sondern neben der instrumentellen Rolle der Mathematik bei der Durchführung von Berechnungen eine strukturelle Rolle existiert, da physikalische Prinzipien meist in einem „joint physical-mathematical model“ entwickelt werden (S. 491). Dabei wird die Modellbildung durch immer weitere Mathematisierung und Interpretation der Ergebnisse mathematischen Argumentierens vorangetrieben. Daneben gibt es aber auch einen Bereich rein qualitativer Physik.

Vorgehen und Resultate

Im Maschinenbaustudium spielt die Statik als zentrales Anwendungsfach des 1. Semesters eine wichtige Rolle. Das diesbezügliche Lehrbuch von Gross et al. (2016) ist in Deutschland weit verbreitet (13. Auflage). In diesem Buch wurden die Anfangskapitel „Grundbegriffe“, „Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt“ und „Allgemeine Kraftsysteme und Gleichgewicht des starren Körpers“ anhand folgender Fragen analysiert: Wie werden Begriffe eingeführt (formale Definition, mathematische Darstellung, Exaktheit)? Werden angenommene Eigenschaften (Axiome) angegeben/begründet? Wird zwischen Axiomen und Aussagen unterschieden? Wo auf dem Begründungskontinuum sind die Argumentationen in den Herleitungen von Eigenschaften anzusiedeln? Wird dabei mechanisch und/oder mathematisch argumentiert? Wie werden mathematische Aussagen genutzt (expliziter Verweis oder implizite Annahme)? Im Buch ist auch ein separater mathematischer

Anhang zu finden, in dem „Elemente der Vektorrechnung“ und „Lineare Gleichungssysteme“ behandelt werden.

Der zentrale Begriff der Kraft wird definiert als „physikalische Größe, die sich mit der Schwerkraft ins Gleichgewicht setzen lässt“ (S. 7). Zur weiteren Erläuterung dieses Grundbegriffs werden die geometrisch-anschaulichen Eigenschaften Betrag, Richtung und Angriffspunkt eingeführt und auf den mathematischen Begriff des Vektors verwiesen, der durch Betrag und Richtung bestimmt ist. Damit steht als formale Darstellung die Vektordarstellung in einem Koordinatensystem zur Verfügung. Wie von Uhden et al. (2012) für die Physik allgemein identifiziert, sind hier Mathematik und Anwendung bei der Begriffsentwicklung ineinander verwoben. Es wird allerdings nicht wie in der Signaltheorie (vgl. Hochmuth & Schreiber, 2016) der Begriff unmittelbar als mathematisches Objekt eingeführt. Letzteres lässt sich bei kontinuierlich verteilten Kräften („Linienlast“, „Flächenlast“, „Volumenkräfte“) feststellen, die über Funktionen definiert sind, dabei allerdings auch Dimensionen tragen.

In der Einführung (Vorkapitel) erwähnen die Autoren, dass sich die Mechanik „auf einige wenige Naturgesetze von axiomatischem Charakter“ gründet, die „aus der Erfahrung heraus als richtig angesehen werden“ (S. 1). Ferner wird zwischen den „Naturgesetzen und daraus folgenden Sätzen“ (S. 1) unterschieden. In den inhaltlichen Kapiteln wird aber der Unterschied hinsichtlich der Begriffswahl und einer klaren formalen Trennung im Text verwischt. So wird z. B. beim Axiom zum Kräfteparallelogramm geschrieben: „Diese Erfahrungstatsache kommt im Satz vom Parallelogramm der Kräfte zum Ausdruck. Der Satz besagt, … Wir können dieses Axiom auch folgendermaßen aussprechen: …“ (S. 21). Die Begriffe „Erfahrungstatsache“, „Satz“, „Axiom“ scheinen hier synonym verwendet zu werden (siehe auch S. 28). Es erfolgt auch keine formale oder optische Trennung, als wichtig angesehene Dinge werden – unabhängig vom logischen Status – in farbigen Kästen dargestellt. Der Leser muss sich selbst die Axiome zusammenstellen (Kräfte dürfen auf Wirkungslinie verschoben werden, Parallelgrammaxiom, actio=reactio, Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn sie auf einer Wirkungslinie betragsgleich mit entgegengesetzter Richtung sind). Aussagen ergeben sich in der Regel am Ende von Herleitungen. Nur an zwei Stellen wird zunächst eine Aussage formuliert, die dann nachgewiesen wird (S. 60: „Um diese Aussage beweisen zu können, …“; S. 84: Es gibt einen „ausgezeichneten Bezugspunkt P“, so dass alle Kräfte und Momente zu einer Kraft durch P und einem kollinearen Moment zusammengefasst werden können).

Bei den Argumentationen in den Herleitungen bzw. Nachweisen kann zwischen rein mechanischen, gemischt mechanischen und mathematischen und rein mathematischen unterschieden werden. Die rein mechanischen Argumentationen beziehen sich auf die Axiome der Statik und wenden diese im Anschauungsraum an, wobei mit Pfeilen operiert wird und auch implizit geometrische Axiome wie zum Beispiel das Parallelenaxiom verwendet werden (durch einen Punkt gibt es genau eine Parallele zu einer gegebenen Geraden). Diese Argumentationen können im von Brunner (2014) identifizierten Spektrum den logischen inhaltlich-anschaulichen, operativen Argumenten zugeordnet werden. Man könnte diese Argumente auch formalisieren, indem man den Begriff des gebundenen Vektors mathematisch fasst, wie dies bei Meyberg & Vachenauer (2001) erfolgt. Die mathematischen Argumente sind häufig geometrischer Natur und damit auch noch auf einer inhaltlich-anschaulichen Ebene. Hierbei wird häufig an einer konkreten Skizze argumentiert, ohne dass Überlegungen angestellt werden, ob die Argumente in anderen Konfigurationen auch noch gültig sind (d.h. die „Exemplarität" wird nicht geklärt). Des Weiteren finden rein mathematisch-formale Argumentationen im Rahmen der Gleichungslösung und des Vektorkalküls statt. Es fällt auf, dass kein Unterschied zwischen einer Implikation und einer Äquivalenzbeziehung vorgenommen wird. Dementsprechend sind einige Argumentationen auch nicht logisch korrekt. So wird zum Beispiel bei mathematischen Gleichungsumformungen quadriert, ohne die Lösungen auf Gültigkeit zu prüfen. Bei der Aussage zum „ausgezeichneten Bezugspunkt P" (S. 60, siehe oben) wird angenommen, dass ein solcher existiert, und auf dieser Basis wird der Punkt ermittelt.

Die Untersuchung zeigt im Kernbereich des mathematischen Argumentierens deutliche Unterschiede zwischen Mathematik und Nutzung im Statik-Buch. Dies sollte zur Diskussion zwischen den Disziplinen anregen.

Literatur

Alpers, B. et al. (2013*). A framework for mathematics curricula in engineering education*. Brussels: SEFI.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte*. Berlin-Heidelberg: Springer Spektrum.

Gross, D., Hauger. W., Schröder, J. & Wall, W. A. (2016). *Technische Mechanik 1. Statik*. 13. Auflage, Berlin-Heidelberg: Springer.

Hochmuth, R. & Schreiber, S. (2016). Überlegungen zur Konzeptualisierung mathematischer Kompetenzen im fortgeschrittenen Ingenieurwissenschaftsstudium am Beispiel der Signaltheorie. Hoppenbrock, A. et al. (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase,* (S. 549–566), Wiesbaden: Springer.

Meyberg, K. & Vachenauer, P. (2001). *Höhere Mathematik I*, 6. Aufl., Berlin: Springer.

Uhden, O., Karam, R., Pietrocola, M. & Pospiech, G. (2012). Modelling Mathematical Reasoning in Physics Education. *Science and Education* 21, S. 485–506.