LOMAS, Olga & WESSEL, Lena
Paderborn

Sprachhandlungen und Sprachmittel in der Analytischen Geometrie am Beispiel des Skalarprodukts

Sprache in ihrer Rolle als Lernmedium und Lerngegenstand hat in den letzten Jahren eine große Aufmerksamkeit in empirischen, mathematikdidaktischen Studien erhalten. Dabei stehen vor allem Unterrichtsgegenstände der Primar- oder Sekundarstufe I im Vordergrund. Sprachliche Phänomene in der Mathematik der Sekundarstufe II wurden bislang weniger erforscht (Ausnahmen z. B. Sahin-Gür, 2017; Armbrust, 2022). In der Analytischen Geometrie der Sekundarstufe II stellen das Algebraisieren und Geometrisieren zentrale Prozesse dar, mit denen der Inhaltsbereich auch eine spezifische Komplexität in Darstellungsvielfalt und Sprachebenen erhält: "Die der analytischen Geometrie zugrundeliegende Idee ist es, mit Hilfe von Koordinaten und Vektoren geometrische Sachverhalte algebraisch zu beschreiben und umgekehrt algebraische Sachverhalte geometrisch zu interpretieren" (Tietze, Klika & Wolpers, 2000, S. 2). Für diese Prozesse stellt Wittmann (2003) heraus, dass Lernende dazu neigen "Begriffe wie ‚Vektor', ‚Betrag eines Vektors' oder ‚Skalarprodukt' eher an konkret-gegenständliche geometrische Objekte und damit verbundene Operationen zu knüpfen" (S. 374). Geometrische Objekte und ihre grafische Darstellung in der Ebene und im (koordinatisierten) Raum stellen demnach eine potenzielle Unterstützung beim Vernetzen von Geometrie und vektorieller Algebra dar. Die geometrische Deutung eines Vektors als (Repräsentanten-)Pfeile ermöglicht es, anschaulich Vorstellungen zu Objekten und deren Beziehungen zueinander aufzubauen.

Für das Design von Lernumgebungen im Sinne des Design-Prinzips der Darstellungsvernetzung zur fach- und sprachintegrierten Förderung (Wessel, 2015) ist noch offen, wie die Darstellungsvielfalt mit bspw. Sprachhandlungen genau zusammenspielt, sodass sich ein Bedarf einer gegenstandsbezogenen Spezifizierung ergibt. Frühe sprachliche Differenzierungen (ohne Berücksichtigung der Ebene der Sprachhandlungen) finden sich bei Artmann und Törner (1983, S. 89-90), die eine Unterscheidung zwischen Vektor-, Pfeil- und Punktsprache einführen. Erstere ist den Beweisprozessen vorbehalten und bewegt sich auf einer symbolischen Ebene. Dagegen dienen die Pfeil- und Punktsprache zur Motivierung, Veranschaulichung von Zusammenhängen und beziehen sich auf grafische Darstellungen. Aufbauend auf den Überlegungen von Artmann und Törner (1983) wird in dieser Arbeit die Pfeil- und Punktsprache mit den verschiedenen weiteren, insbesondere grafischen Darstellungen in der *Pfeil-Geometrie* zusammengefasst, die eine not-

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

wendige Brückenfunktion zwischen Geometrie und vektorieller Algebra einnehmen kann. Dabei kann eine Doppelbelegung symbolischer Darstellungen wie z. B. $\overrightarrow{AB}$ als Vektor *und* Pfeil entstehen (Armbrust, 2022, S. 126-128).

Forschungsfragen

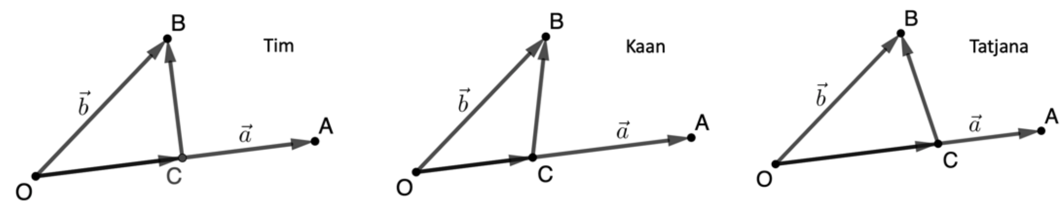
In dem vorliegenden Entwicklungsforschungsprojekt wird sich mit einer fach- und sprachintegrierten Lernumgebung zum verständigen Umgang mit dem Skalarprodukt beschäftigt. In Design-Experimenten im Laborsetting (n = 13 Studierende des Lehramts HRSGe) und Klassensetting (n = 25 Jugendliche aus einem Q2-Grundkurs einer Gesamtschule) konnten erste Einblicke in die Vorstellungsentwicklung und Bewältigung von Sprachhandlungen gewonnen werden. Im Rahmen dieses Beitrags konzentrieren wir uns auf die Forschungsfrage: Wie bewältigen Jugendliche anspruchsvolle Sprachhandlungen des Erklärens zu Zusammenhängen des Skalarprodukts und welche Sprachmittel nutzen sie dabei?

Aufbau und Design der Lernumgebung

Aufbau: Die Lernumgebung zum Skalarprodukt unter Einbezug einer fach- und sprachintegrierten Förderung gliedert sich in einen fünfstufigen Lernpfad. In diesem Beitrag beschränken wir uns auf einen Einblick in Stufe IV: Untersuchung des Zusammenhangs, dass das Skalarprodukt nur vom parallelen Teil des einen Vektors bezogen auf den anderen Vektor abhängt. Dabei beschäftigen sich die Lernenden zunächst mit der Zerlegung eines Vektors in einen orthogonalen und einen parallelen Teil (s. Abb. 1).

Wie kann man den Vektor $\vec{b}$ zerlegen?

Der Vektor $\vec{b}$ soll in zwei Teile zerlegt werden. Wir suchen einen Punkt C auf dem Vektor $\vec{a}$, der den kürzesten Abstand zum Punkt B hat. Tim, Kaan und Tatjana haben jeweils eine Möglichkeit gefunden den Vektor $\vec{b}$ zu zerlegen:



a) Warum handelt es sich bei allen drei Möglichkeiten um Zerlegungen des Vektors $\vec{b}$?
b) Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede haben die Zerlegungen?
c) Welche Zerlegung erfüllt die Bedingung, dass der Punkt C den kürzesten Abstand zu Punkt B haben soll? Warum?

Abbildung 1: Aufgabenauszug zur Vektorzerlegung

Design-Prinzipien: Neben der *Vorstellungsentwicklung durch Darstellungsvernetzung* wird das Prinzip der *reichhaltigen Sprachanregung durch Einfordern der Diskurspraktik des Erklärens* in der Lernumgebung realisiert. Letzteres gilt der Initiierung von Erklärprozessen und orientiert sich an der Typisierung der Erklärformen nach Klein (2009).

Methoden zur Analyse und erste Einblicke in Lernprozesse

In der Erprobung der Lernumgebung im Klassensetting wurden sechs Unterrichtsstunden á 45 Minuten aufgezeichnet (jeweils Plenumsgespräche und zwei Fokusgruppen). Die Daten wurden anschließend transkribiert und deduktiv-induktiv analysiert (Mayring, 2022). Im ersten Schritt wurden die Anforderungen der Erklärformen für die Elementargeometrie, Pfeil-Geometrie und vektorielle Algebra spezifiziert. Daran anschließend erfolgte eine Kodierung der Sprachhandlungen auf Diskursebene (*Erklären-Was: Beschreiben*, *Erklären-Wie: Anleiten*, *Erklären-Warum: Begründen* und *Zusammenhänge erklären)* sowie eine Kodierung auf lexikalischer Ebene zur Rekonstruktion sprachlicher Mittel (*Sprachmittel der Elementargeometrie*, *Sprachmittel der Pfeilgeometrie*, *Sprachmittel der vektoriellen Algebra*, *unpräzise Sprachmittel)*. Zuletzt wurde das Zusammenspiel von Geometrie, Sprachhandlungen und Sprachmittel betrachtet und auf spezifische Auffälligkeiten, Gemeinsamkeiten und Unterschiede analysiert.

Einblicke in Lernprozesse: Bei der Bearbeitung der Aufgabe (s. Abb. 1) fällt auf, dass Lernende an grafischen Darstellungen untereinander im Rahmen des Erklären-Warum (Begründen) eher unpräzise, individuelle Sprachmittel, wie im Beispiel von Nina "*einen Strich ziehen",* nutzen und sich mit deiktischen Mitteln wie "*hier"*, "*da"* und "*der da"* sprachlich entlasten:

Nina: Gut. Warum handelt es sich bei allen drei Möglichkeiten um eine Zerlegung? Ja, weil jeder ja **einen anderen Stricht zieht**. Also/ ... Wisst ihr? **Hier der zieht da einen Strich**. [*zeigt auf den zu $\vec{a}$ orthogonalen Teil von $\vec{b}$ in Tims Zerlegung*]

Bei der Verschriftlichung ihrer Aufgabenbearbeitung möchte sich die Gruppe bzgl. ihrer Erklärung bei der Lehrkraft versichern. Sie nutzen dabei Sprachmittel der Pfeil-Geometrie:

Jana: Äh, kann man hier bei a sagen [...]: Weil die alle, ähm, also **durch die zwei Pfeile zum Punkt gehen**?

Darüber hinaus zeigt sich, dass einige Lernende auch in der grafisch, anschauungsgestützten Situation eher formalere Sprachmittel der vektoriellen Algebra nutzen. Nachdem im Plenum besprochen wurde, wie die Vektoraddition mit der Vektorzerlegung aus der Aufgabe in Abb. 1 zusammenhängt, zeigen sich unterschiedliche Begründungsansätze:

118 *Emma [zu Sarah]*: Ich glaube, sie meint, dass **durch den Weg zwei neue Vektoren entstehen**. Anstatt dass du Vektor b benutzt, dass du halt zwei/ Weißt du? Dass das dann Zerlegungs irgendwie/ [...]

119 *Lehrkraft nimmt Tina dran*

120 *Tina*: **Man addiert Vektor c und d**. [...] Und das erzeugt dann b.

So versucht Emma auf einer vorstellungsorientierten Ebene ihrer Mitschülerin Sarah zu erklären, was unter einer Zerlegung zu verstehen ist, indem sie diese als *Weg, bei dem zwei neue Vektoren entstehen*, beschreibt. Dagegen gebraucht Tina vektoriell-algebraische Sprachmittel, mit denen sie unabhängig von der grafischen Darstellung erklärt, wie der Vektor $\vec{b}$ erzeugt wird.

Zwischenfazit

Die ersten Analysen zeigen, dass Lernende in ihren Erklärhandlungen vielfältige Sprachmittel nutzen. Diese Vielfalt kann als Chance *und* Herausforderung der Pfeil-Geometrie angesehen werden: Grafische Darstellungen mit Pfeilen unterstützen den Vorstellungsaufbau und erleichtern durch Deixis und individuelle Sprachmittel die Kommunikation über Zusammenhänge des Skalarprodukts. Gleichzeitig gelingt es nicht allen Lernenden, elementargeometrische und vektoriell-algebraische Sprachmittel mit der Peil-Geometrie zu vernetzen. Um die Vielfalt als Chance in Lernprozessen zu adressieren, bedarf es gezielter Förderimpulse und (sprachlicher) Unterstützung. Diese müssen für das Abgrenzen und Vernetzen der unterschiedlichen Geometrietypen durch weitere Zyklen empirischer Erprobungen besser verstanden werden.

Literatur

Armbrust, S.-S. (2022). *Sprachsensibler Aufbau des Vektorbegriffs: Eine Entwicklungsforschungsstudie in der Sekundarstufe II*. Springer Spektrum.

Artmann, B., & Törner, G. (1983). *Lineare Algebra. Grund- und Leistungskurs*. Vandenhoeck & Ruprecht.

Klein, J. (2009). Erklären-was, Erklären-wie, Erklären-warum. Typologie und Komplexität zentraler Akte der Welterschließung. In R. Vogt (Hrsg.). *Erklären. Gesprächsanalytische und fachdidaktische Perspektive* (S. 25-36). Stauffenburg.

Mayring, P. (2022). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken* (13. Aufl.). Beltz.

Sahin-Gür, D. (2017). Fach-und sprachintegrierte Förderung am Beispiel der Differentialrechnung. In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 809-812). WTM-Verlag.

Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.) (2000). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II*. Band 2. Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Vieweg & Teubner Verlag.

Wessel, L. (2015). *Fach- und sprachintegrierte Förderung durch Darstellungsvernetzung und Scaffolding. Ein Entwicklungsforschungsprojekt zum Anteilbegriff*. Springer.

Wittmann, G. (2003). Schülerkonzepte zur analytischen Geometrie: mathematikhistorische, epistemologische und empirische Untersuchungen. Franzbecker.