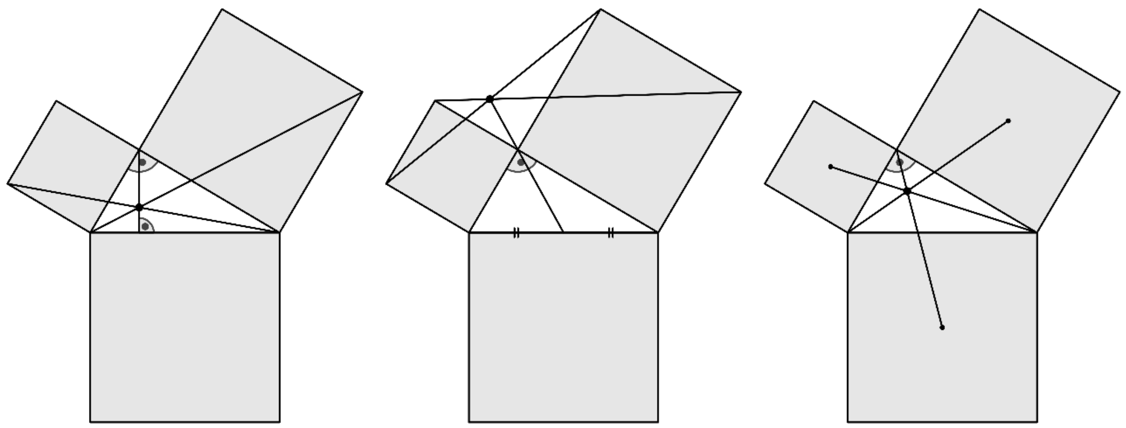
BERENDONK, Stephan
Wuppertal

Mit symmetrischen Formeln drei merkwürdige Punkte der Pythagorasfigur beweisen

Symmetrie ist in gewisser Weise die zentrale Idee der Dreiecksgeometrie. Beispielsweise sind die drei nachfolgend abgebildeten Pythagorasfiguren symmetrisch. Zwar findet man jeweils weder eine Symmetrieachse noch ein Drehzentrum, aber die Figuren sind in Bezug auf die Vertauschung der beiden nicht-rechtwinkligen Ecken des Dreiecks in einer geeigneten Konstruktionsbeschreibung der jeweiligen Figur symmetrisch. Beim Beweisen von elementargeometrischen Sätzen gilt es derartige Vertauschungssymmetrien im Blick zu haben und zu nutzen.

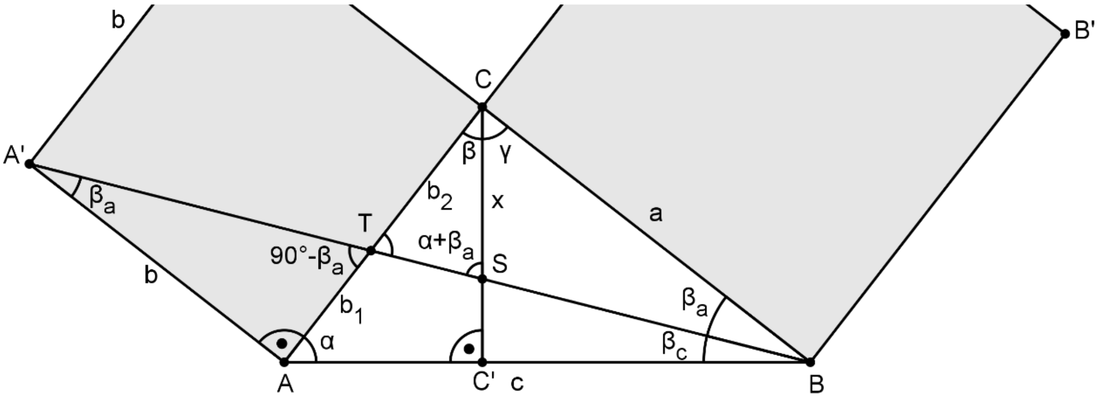


Die drei obigen Figuren sind als "Behauptungen ohne Worte" aufzufassen. Behauptet wird jeweils eine Kopunktalität, nämlich, dass sich eine bestimmte Ecktransversale der rechtwinkligen Ecke des rechtwinkligen Dreiecks (in der linken Figur ist es die Höhe, in der mittleren Figur die Seitenhalbierende und in der rechten Figur die Verbindungsgerade zur Mitte des Hypotenusenquadrats) mit zwei weiteren Geraden in einem Punkt schneidet. Wie weit ist es jeweils vom Scheitel des rechten Winkels bis zum Schnittpunkt der drei Geraden? Als Antwort darf man, da ein rechtwinkliges Dreieck durch seine Kathetenlängen bestimmt ist, jeweils eine Funktion der beiden Kathetenlängen erwarten. Da beim Vertauschen der beiden nicht-rechtwinkligen Ecken im oben beschriebenen Sinne die Ecktransversale jeweils invariant ist und die beiden weiteren Geraden jeweils ineinander überführt werden, muss, damit sich die drei Geraden tatsächlich in einem Punkt schneiden, die gesuchte Funktion symmetrisch bezüglich der Kathetenlängen sein. Die Kopunktalität lässt sich somit algebraisch durch die Symmetrie einer Funktion wahrnehmen. Wir werden uns im Folgenden jeweils diese symmetrische Funktion erarbeiten und dadurch die drei Behauptungen beweisen.

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

Satz: Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C. Seien $CBB'B''$ und $ACA''A'$ Quadrate, sodass A und B'' in verschiedenen Halbebenen bezüglich BC und B und A'' in verschiedenen Halbebenen bezüglich AC liegen. Sei C' der Fußpunkt der Höhe von C auf AB. Dann haben CC', $A'B$ und AB' einen gemeinsamen Schnittpunkt.

Beweis:



Sei S der Schnittpunkt von $A'B$ und CC',
T der Schnittpunkt von $A'B$ und AC,
$x := |SC|$, $b_1 := |AT|$, $b_2 := |TC|$, $\beta_c := \angle TBA$, $\beta_a := \angle CBT$

Aufgrund des Satzes vom Außenwinkel bezogen auf ABT und auf SBC gilt: $\angle STC = \alpha + \beta_c = \alpha + \beta - \beta_a = 90° - \beta_a$ und $\angle CST = \alpha + \beta_a$.

Ferner gilt: $\frac{b_2}{a} = \frac{b}{a+b}$ (2. Strahlensatz). Somit $b_2 = \frac{ab}{a+b}$

und: $b_1 = b - b_2 = b - \frac{ab}{a+b} = \frac{b^2}{a+b}$.

Ferner gilt: $\cot(\beta_a) = \frac{a}{b_2} = \frac{a+b}{b}$.

Aufgrund des Wechselwinkelsatzes gilt: $\angle AA'T = \angle AA'B = \angle CBA' = \beta_a$
Aufgrund des Scheitelwinkelsatzes gilt: $\angle A'TA = \angle STC = 90° - \beta_a$.

Aufgrund des Sinussatzes in TSC und $A'AT$ gilt:

$$\frac{x}{b} = \frac{x}{\sin(90° - \beta_a)} \cdot \frac{\sin(90° - \beta_a)}{b} = \frac{\frac{ab}{a+b}}{\sin(\alpha + \beta_a)} \cdot \frac{\sin(\beta_a)}{\frac{b^2}{a+b}}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin(\beta_a)}{\sin(\alpha + \beta_a)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin(\beta_a)}{\sin\alpha \cdot \cos\beta_a + \cos\alpha \cdot \sin\beta_a}$$

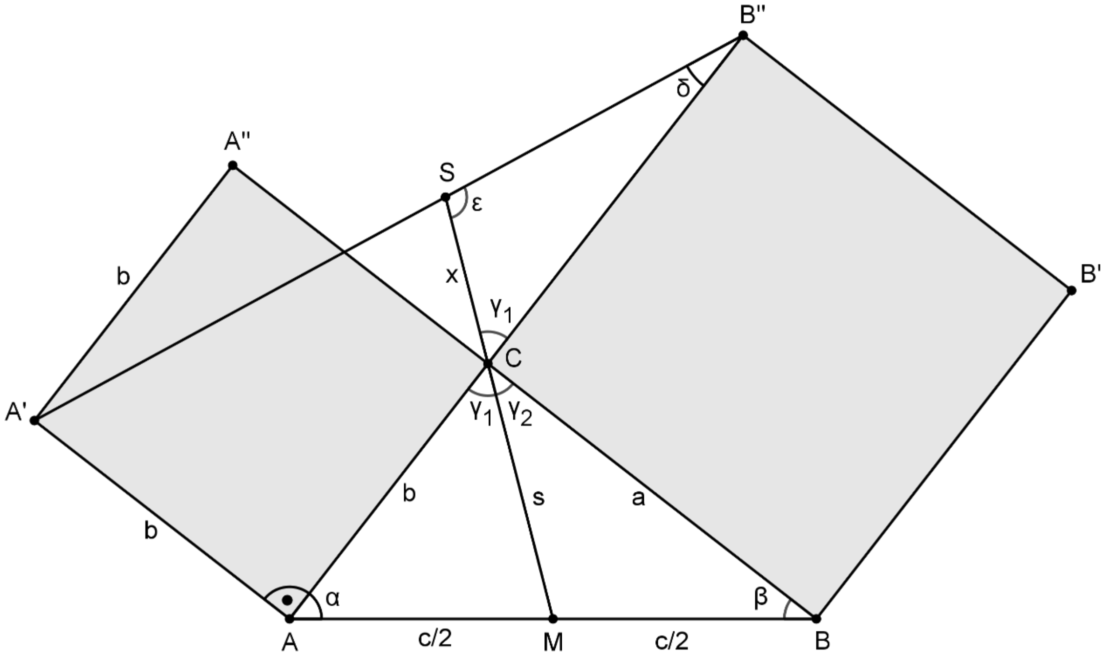
$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cot\beta_a + \cos\alpha} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\sin\alpha \cdot \frac{a+b}{b} + \cos\alpha}$$

$$= \frac{a}{\frac{a}{c} \cdot (a+b) + b \cdot \frac{b}{c}} = \frac{a \cdot c}{a^2 + ab + b^2}.$$ Somit: $x = \frac{a \cdot b \cdot c}{a^2 + ab + b^2}$

Sei S' der Schnittpunkt von $C'C$ und AB'. Sei $x' := |CS'|$.
Da x symmetrisch bezüglich a und b ist, folgt $x' = x$. Somit $S' = S$.

Satz: Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C. Seien $CBB'B''$ und $ACA''A'$ Quadrate, sodass A und B'' in verschiedenen Halbebenen bezüglich BC und B und A'' in verschiedenen Halbebenen bezüglich AC liegen. Sei M die Mitte von A und B. Dann haben MC, $A'B''$ und $A''B'$ einen gemeinsamen Schnittpunkt.

Beweis:



Sei S der Schnittpunkt von MC und $A'B''$,
$x := |SC|$, $s := |MC|$, $\gamma_1 := \angle ACM$, $\gamma_2 := \angle MCB$, $\varepsilon := \angle CSB''$, $\delta := \angle SB''C$.

Aufgrund des Sinussatzes in ABC, AMC und MBC gilt:

$$\frac{\sin\gamma_1}{\frac{a}{b}\sin\beta} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha} = \frac{c/2}{s} = \frac{\sin\gamma_2}{\sin\beta}. \quad \text{Somit: } b\cdot\sin\gamma_1 = a\cdot\sin\gamma_2. \quad (1)$$

In $A'AB''$ gilt: $\cot(\delta) = \frac{a+b}{b}$. $\quad(2)$

Aufgrund des Sinussatzes in $CB''S$ gilt:

$$\frac{x}{a} = \frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon} = \frac{\sin\delta}{\sin(180^\circ-\gamma_1-\delta)} = \frac{\sin\delta}{\sin(\gamma_1+\delta)} = \frac{\sin\delta}{\sin\gamma_1\cdot\cos\delta + \sin\delta\cdot\cos\gamma_1}$$

$$= \frac{1}{\sin\gamma_1\cdot\cot\delta + \cos\gamma_1} \overset{(2)}{=} \frac{1}{\sin\gamma_1\cdot\frac{a+b}{b} + \cos(90^\circ-\gamma_2)} = \frac{1}{\sin\gamma_1\cdot\frac{a+b}{b} + \sin\gamma_2}$$

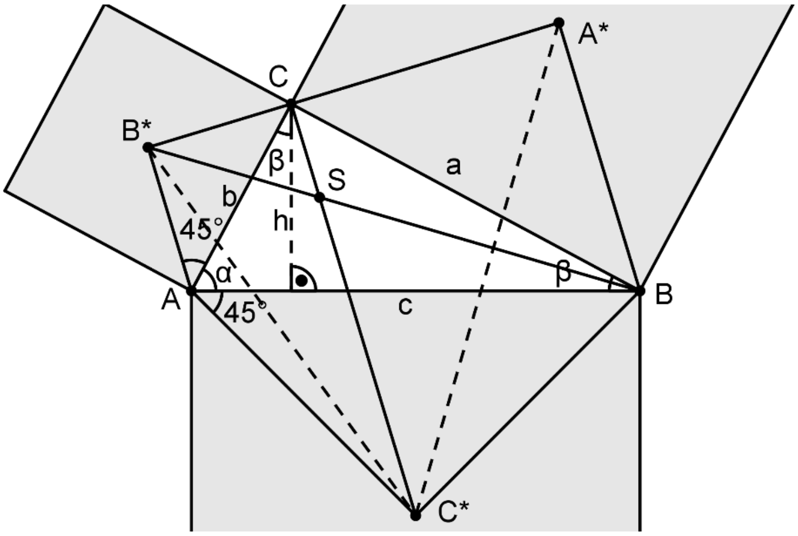
$$= \frac{b}{a\cdot\sin\gamma_1 + \frac{b}{2}\cdot\sin\gamma_1 + \frac{b}{2}\cdot\sin\gamma_1 + b\cdot\sin\gamma_2} \overset{(1)}{=} \frac{b}{a\cdot\sin\gamma_1 + \frac{b}{2}\cdot\sin\gamma_1 + \frac{a}{2}\cdot\sin\gamma_2 + b\cdot\sin\gamma_2}$$

$$= \frac{2b}{(2a+b)\cdot\sin\gamma_1 + (2b+a)\cdot\sin\gamma_2} \quad \text{Somit: } x = \frac{2ab}{(2a+b)\cdot\sin\gamma_1 + (2b+a)\cdot\sin\gamma_2}$$

Sei S' der Schnittpunkt von MC und $A''B'$. Sei $x' := |S'C|$.
Da x symmetrisch bezüglich (a, γ_1) und (b, γ_2) ist, folgt $x' = x$. Somit $S' = S$.

Satz: Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C. Seien A^*, B^* und C^* die Mitten der Quadrate, die nach außen hin auf den Seiten a, b und c des Dreiecks ABC errichtet wurden. Dann schneiden sich AA^*, BB^* und CC^* in einem Punkt.

Beweis:



Sei S der Schnittpunkt von BB^* und CC^* und sei h die Länge der Höhe von C auf AB.

Aufgrund des Kosinussatzes in B^*AC^* gilt:

$$|B^*C^*|^2 - |B^*C|^2 = \left(\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2 - 2\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}b\right)\cdot\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}c\right)\cdot\cos(\alpha+90°)\right) - \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2$$

$$= \frac{c^2}{2} - b\cdot c\cdot\cos(\alpha+90°) = \frac{c^2}{2} + b\cdot c\cdot\cos(90°-\alpha)$$

$$= \frac{c^2}{2} + b\cdot c\cdot\cos\beta = \frac{c^2}{2} + c\cdot h$$

Da diese Formel symmetrisch bezüglich a und b ist, gilt auch:

$$|A^*C^*|^2 - |A^*C|^2 = \frac{c^2}{2} + c\cdot h$$

Somit gilt: $|A^*C^*|^2 - |A^*C|^2 = |B^*C^*|^2 - |B^*C|^2$

Nach dem Lemma von Bottema gilt somit: $CC^* \perp A^*B^*$.

Die Dreiecke B^*CS und B^*A^*B bilden dann aufgrund des Stufenwinkelsatzes eine Strahlensatzfigur, sodass gilt:

$$\frac{|CS|}{|B^*C|} = \frac{|A^*B|}{|B^*A^*|}.$$

Somit gilt:

$$|CS| = \frac{|A^*B|}{|B^*A^*|}\cdot|B^*C| = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a}{\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a\cdot b}{a+b}$$

Sei S' der Schnittpunkt von AA^* und CC^*. Da die Formel für $|CS|$ symmetrisch bezüglich a und b ist, gilt auch:

$$|CS'| = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a\cdot b}{a+b}. \quad \text{Somit } S' = S.$$