

WECHINGER, Wolf
Karlsruhe

Lebesgue in der Schule? - Analyse und Vergleich schuladäquater Konzepte und Konstruktionen des Integralbegriffs.

1. Einleitung

In der aktuellen Schulbuchliteratur und Unterrichtspraxis zur Integralrechnung in der gymnasialen Oberstufe ist das Riemann-Integral vorherrschend, sowohl bei der Begriffsbildung und Definition, bei Argumentationen und Beweisen etwa des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (HDI) als auch in Anwendungen und Sachkontexten. Im Rahmen meines Dissertationsprojektes am KIT wird unter anderem die Frage gestellt, ob und inwiefern man der Integralrechnung in der Schule *stattdessen* das Lebesgue-Integral zugrunde legen und zugänglich machen kann.

Bei der stoffdidaktischen Analyse der fachlichen Inhalte, fachdidaktischer Literatur und etablierten (auch internationalen) Lehrbüchern zeigten sich drei konzeptionelle Zugänge zum Integralbegriff, die auch die historische Entwicklung nachzeichnen: Der geometrische Zugang (Integral als Bilanz von Flächeninhalten), der analytische Zugang (Integral als Grenzwert von Produktsummen mit Treppenfunktionen) und der geometrisch-analytische Zugang (Integral als Grenzwert von Produktsummen mit messbaren Funktionen). Diese sehr grobe Einteilung unterschlägt natürlich Mischformen und Details wie die Art des Grenzprozesses oder die Grundmenge der zu integrierenden Funktionen; sie ist aber, wie im Folgenden aus Platzgründen nur für den geometrischen und den analytischen Zugang gezeigt wird, von einer fachlichen Präzisierung hin zu einer konkreten Integralkonstruktion (zum Beispiel Riemann oder Lebesgue) unabhängig.

Im Schulunterricht zeigt sich der geometrische Zugang vorrangig als Antwort auf das Flächeninhaltsproblem, der analytische Zugang bei Approximationen mit Produktsummen und Treppenfunktionen (siehe auch AUP bei Jones & Ely 2023). Der geometrisch-analytische Zugang findet sich aufgrund seiner Komplexität ausschließlich an der Hochschule, ist dort aber der bevorzugte Zugang zum Lebesgue-Integral. Der in Schulbüchern gängige Einstieg über Bestand und Änderungsrate (AR ebd.) führt auf das Stammfunktionsintegral bzw. ein Euler-Verfahren im Richtungsfeld und wird an dieser Stelle nicht weiter betrachtet. Gerade zum Aufbau reichhaltiger und tragfähiger Vorstellungen zum Integral ist es in der Praxis sinnvoll und etabliert, die konzeptionellen Zugänge zu vernetzen, die im Folgenden voneinander getrennt dargestellt werden.

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

2. Geometrischer Zugang

Im geometrischen Zugang versteht man das Integral einer nichtnegativen Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ als den Inhalt der von ihr mit der x -Achse über $[a, b]$ eingeschlossenen Fläche, bei einer allgemeinen Funktion entsprechend als die Inhaltsbilanz der oberhalb und unterhalb der x -Achse liegenden Teile dieser Fläche. f heißt (geometrisch) messbar, wenn dieser Inhalt bzw. diese Inhaltsbilanz existiert, und integrierbar, wenn dieser Wert sogar endlich ist. Legt man als Inhaltsbegriff einen "naiven" Flächeninhalt zugrunde, wie er aus der Sekundarstufe I bekannt ist, so sind alle "denkbaren" Funktionen messbar und alle beschränkten Funktionen integrierbar. Aus der geometrischen Anschauung lassen sich alle Grundeigenschaften des Integrals herleiten, etwa Additivität, Monotonie oder Linearität (mit dem Prinzip von Cavalieri). Dieses Vorgehen, das bis zum HDI trägt, hat Kirsch bereits 1976 als Vorstufe oder für Grundkurse vorgeschlagen.

Sind alle integrierbaren Funktionen beschränkt? Gibt es nicht integrierbare Funktionen? Ist die Dirichlet-Funktion integrierbar? Die Klasse der integrierbaren Funktionen zu erkunden, kann im Unterricht ein Anlass sein, den Inhaltsbegriff und damit den Integralbegriff fachlich zu präzisieren. Dabei sind verschiedene Ziele und viele Wege dorthin möglich; gemeinsamer Ausgangspunkt ist der Elementarinhalt von endlichen Rechtecksummen (auch Lebesgue'sches Prämaß genannt), also das Integral für Treppenfunktionen.

Von der Flächenmessung am Kreis ist das Prinzip bekannt, krummlinig begrenzte Flächen durch endliche Rechtecksummen immer feiner zugleich auszuschöpfen und zu überdecken und so immer bessere Approximationen an den gesuchten Flächeninhalt zu berechnen. Einer beschränkten Fläche kann sinnvoll ein Inhalt zugeordnet werden (nämlich der Jordan-Inhalt), wenn dieses Verfahren zum Erfolg führt, also die Approximationen von innen (innerer Jordan-Inhalt) und von außen (äußerer Jordan-Inhalt) gegen einen gemeinsamen Wert konvergieren. Ohne Mühe erkennt man, dass dies für monotone oder stetige Funktionen der Fall ist, endlich viele Punkte bei der Integration keine Rolle spielen und etwa die Dirichlet-Funktion nicht messbar ist, da endlich viele Rechtecke einer Gesamtbreite kleiner 1 nie alle rationalen Zahlen überdecken können. Die geometrisch messbaren, beschränkten (und damit integrierbaren) Funktionen sind hier tatsächlich genau die Riemann-integrierbaren Funktionen, ihr Integral das Riemann-Integral; innerer und äußerer Jordan-Inhalt entsprechen dem Darboux'schen Unter- bzw. Oberintegral (siehe auch Bressoud 2008).

Eine andere Möglichkeit zur Präzisierung des Inhaltsbegriffs überdeckt stattdessen mit abzählbaren Rechtecksummen (äußerer Lebesgue-Inhalt) und kann so auch unbeschränkte Flächen messen und einen unendlichen Inhalt

zulassen; anstelle der Ausschöpfung von innen wird (nach der Idee von Carathéodory) auch das Komplement mit dem äußeren Lebesgue-Inhalt gemessen. Der Fläche kann wieder sinnvoll ein Inhalt zugeordnet werden (nämlich das Lebesgue-Maß), wenn beide Verfahren zum gleichen Ergebnis führen. Die Vorstellungen und Beweise unterscheiden sich bei stetigen und monotonen Funktionen nicht vom Jordan-Inhalt; hingegen tragen nun offenbar abzählbar viele Punkte nichts zur Integration bei und die Dirichlet-Funktion ist messbar mit Integral Null. Der geometrische Zugang wurde hier zum Lebesgue-Integral präzisiert, die messbaren Flächen entsprechen genau den messbaren Funktionen im geometrisch-analytischen Zugang. Zusammenfassend ist der geometrische Zugang nicht verfälschend, sondern ermöglicht verschiedene Konstruktionen des Integralbegriffs durch eine Diskussion und Präzisierung des elementaren Flächeninhalts.

3. Analytischer Zugang

Im analytischen Zugang wird das Integral einer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konstruiert, indem man zu einer Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ des Definitionsbereichs in jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ Werte c_i wählt, sodass die Treppenfunktion $\sum_{i=1}^n c_i \chi_{[x_{i-1}, x_i]}$ die Funktion f approximiert. f heißt integrierbar, wenn mit kleiner werdender Feinheit der Zerlegung die Integrale dieser Treppenfunktionen $\sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1})$ gegen einen gemeinsamen Wert konvergieren; dieser heißt dann das Integral von f . Das Integral für Treppenfunktionen ist hier wie im geometrischen Zugang der Ausgangspunkt verschiedener Möglichkeiten der fachlichen Präzisierung; im Unterschied ist jedoch das Zielobjekt $\int_a^b f$ nicht (als naiver Flächeninhalt) präexistent, sondern nur deduktiven Schlussfolgerungen aus der Definition zugänglich. Die Entdeckung und Begründung der obigen Grundeigenschaften bis zum HDI ist daher abstrakter und formal anspruchsvoller als im geometrischen Zugang.

Beim klassischen Riemann-Integral durchlaufen die Werte c_i für alle Zerlegungen alle Funktionswerte $f(\xi_i)$ im Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$; inhaltlich äquivalent kann man sich auf feste Zwischenstellen (etwa $f(x_i)$) oder äquidistante Zerlegungen beschränken (nicht aber beides zugleich, siehe zum Beispiel Tong 2001). Beim Darboux'schen Zugang zum Riemann-Integral werden die Werte c_i als Infimum von f auf dem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ gewählt; mit einer Folge feiner werdender Zerlegungen bilden die zugehörigen Treppenfunktionen dann eine monoton wachsende Folge, die f punktweise in allen Stetigkeitsstellen approximiert. Die Folge der Integrale (Untersummen) konvergiert gegen das Unterintegral von f , das jedoch nicht linear ist

(wie auch der innere Jordan-Inhalt nicht additiv ist); daher wird die Approximation von oben wiederholt und f heißt integrierbar, wenn Unter- und Oberintegral übereinstimmen. Nach dem Lebesgue'schen Integrationskriterium ist das genau dann der Fall, wenn f fast überall stetig ist, die Darboux'schen Treppenfunktionen also fast überall gegen f konvergieren. (Eine Menge heißt Nullmenge, wenn sie für jedes $\varepsilon > 0$ von abzählbar vielen Intervallen der Gesamtlänge $< \varepsilon$ überdeckt werden kann.)

Eine andere Möglichkeit besteht darin, beliebige Werte c_i zuzulassen, sodass bei feineren Zerlegungen die Treppenfunktionen $\sum_{i=1}^n c_i \chi[x_{i-1}, x_i]$ monoton wachsend punktweise fast überall gegen f konvergieren. Existiert eine solche approximierende Folge, so heißt f integrierbar, und die Integrale $\sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1})$ konvergieren gegen immer denselben Wert, das Integral von f . Dieses Integral ist linear (wie auch der äußere Lebesgue-Inhalt auf den Borel-Mengen), aber mit f muss nicht auch $-f$ integrierbar sein; daher setzt man noch $\int_a^b -f := -\int_a^b f$. Die Grundeigenschaften des Integrals und der HDI sind nun leicht zu zeigen; und da die Darboux'schen Treppenfunktionen eine approximierende Folge bilden, ist jede fast überall stetige (etwa monotone) Funktion integrierbar. Auch die Konvergenzsätze von Beppo Levi oder Lebesgue sind nun zugänglich und unbeschränkte Funktionen oder unbeschränkte Definitionsbereiche können einheitlich behandelt werden.

Diese Konstruktion ist ein Spezialfall des Daniell-Integrals und liefert daher einen Integral- und Maßbegriff, der mit Lebesgue übereinstimmt (siehe Weir 1973); er hat aber den entscheidenden Vorteil gegenüber dem geometrisch-analytischen Zugang, dass er eine Konstruktion des Lebesgue-Integrals ermöglicht, die ohne das Lebesgue-Maß auskommt und für den Schulunterricht elementarisierbar ist. Auch der analytische Zugang ermöglicht also verschiedene Konstruktionen des Integralbegriffs je nach Wahl des Approximationsverfahrens mit Treppenfunktionen.

Literatur

- Bressoud, D. M. (2008). *A radical approach to Lebesgue's theory of integration*. Cambridge University Press.
- Jones, S. R., & Ely, R. (2023). Approaches to integration based on quantitative reasoning: Adding up pieces and accumulation from rate. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 9, 8–35.
- Kirsch, A. (1976). Eine „intellektuell ehrliche“ Einführung des Integralbegriffs in Grundkursen. *Didaktik der Mathematik*, 4(2), 87-105.
- Tong, J. (2001). Partitions of the interval in the definition of Riemann's integral. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(5), 788-793.
- Weir, A. J. (1973). *Lebesgue integration and measure*. Cambridge University Press.