DÖGNITZ, Susanne
Leipzig

Arithmetische Basiskompetenzen und Fähigkeiten rechenschwacher Achtklässler*innen bzgl. der gebrochenen Zahlen

Gemeine Brüche ohne Vorstellungen zur Division? Dezimalzahlen ohne Stellenwertverständnis? Wahrscheinlich gibt es kein Schulfach, bei dem Vorwissen eine so entscheidende Rolle für den weiteren Kompetenzaufbau spielt, wie die Mathematik. So konnte bspw. Moser Opitz zeigen, dass mathematische Basisfähigkeiten 52,3% der Mathematikleistung in der achten Klasse erklären (2013, S. 218). Dabei spielen verschiedene Basiskompetenzen unterschiedlich gewichtige Rollen bei der Ausbildung von Grundvorstellungen bzgl. der Zahlbereiche in der Sek. I: Konsens ist (wenn auch stark vereinfacht), dass für die Grundvorstellungen eines Bruchs als Teil eines oder mehrerer Ganzen/r sowie als relativer Anteil vor allem das Verständnis der Division als gleichmächtiges Auf- und Verteilen essenziell ist. Für ein sicheres Arbeiten mit Dezimalzahlen muss hingegen das Stellenwertverständnis ausgebildet sein (z. B. Wehrmann 2011, S. 22). Rechenschwachen Lernenden der Sekundarstufe I fehlt dieses Vorwissen meist, was den Kompetenzaufbau deutlich erschwert. Doch wo liegen ihre Problembereiche bzgl. des Stellenwertverständnisses und der Division genau und erwerben sie trotz allem Fähigkeiten und Fertigkeiten zu den neuen Zahlbereichen? Antworten darauf möchte die hier vorgestellte Studie liefern. Dabei ist es ein Anliegen nicht nur aufzuzeigen, welche Defizite diese Lernenden aufweisen, sondern auch welche Kompetenzen sie erwerben.

Die hier vorgestellte Studie entstand im Rahmen der empirischen Überprüfung des Dyskalkulie-Diagnostikums LeDi-Arithmetik, bei der 399 Schüler*innen der achten Klasse in Sachsen und Mecklenburg-Vorpommern bezüglich ihrer mathematischen Basisfähigkeiten sowie ihrer Fertigkeiten in Bruchrechnung und im Umgang mit ganzen Zahlen untersucht wurden (Dögnitz 2023). Als vermeintlich rechenschwach galten Lernende, die zum einen durch das Testverfahren BADYS 8+ als dyskalkulisch identifiziert wurden und zum anderen im LeDi-Arithmetik den theoretischen und empirischen Grenzwert von 40 Punkten unterschritten. Dies entsprach 20% der Stichprobe (welche die Untersuchungsgruppe darstellt), was ungefähr mit den 21% möglicher Risikoschüler*innen nach PISA 2018 übereinstimmt. Im Folgenden werden die Ergebnisse gebündelt nach Vorwissen und Zahlbereich vorgestellt, wobei aufgrund der vielen Ergebnisse nur ausgewählte Aufgaben oder gemittelte Lösungsquoten beschrieben werden. Die vollständige Aufgabensammlung ist unter *www.mathcs.uni-leipzig.de/math/abteilungen/didaktik-der-mathematik* einsehbar.

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

Ein sicheres Stellenwertverständnis zeigt sich durch die Fähigkeiten Zahlen in unterschiedliche Darstellungsformen umzuwandeln, Stellen zu bündeln und zu entbündeln, Zahlen der Größe nach zu ordnen sowie in Sprüngen zu zählen (Fritz et al. 2018, Häsel-Weide et al. 2017). Sind diese Fähigkeiten sicher ausgebildet, kann davon ausgegangen werden, dass die Idee des dezimalen Stellenwertsystems, bei der immer zehn Einheiten zur nächst größeren Einheit gebündelt und ggf. wieder entbündelt werden, verstanden wurden. Die LeDi-Studie bestätigt bereits bekannte Resultate (wie bspw. Moser Opitz 2013), die zeigen, dass rechenschwache Lernende im Zahlenraum bis 1000 meist sicher agieren können, darüber hinaus die Schwierigkeiten jedoch stetig zunehmen. Das Umwandeln von Zahlen in verschiedene Darstellungsformen (Zahlwort, Ziffernschreibweise, Zahlenstrahl) beherrschen sie mit Lösungsquoten (LQ) über 77% meist sehr sicher. Lediglich das Einzeichnen von Zahlen kleiner 100 auf dem Zahlenstrahl bis 1000 verzeichnete mit 51% eine geringe Lösungsquote (Vergleichsgruppe (VG) 81%). Auch das Ordnen von Zahlen gelang den Lernenden der Untersuchungsgruppe meist problemlos, da 81% alle fünf Zahlen richtig der Größe nach ordnen konnten (VG 92%), wobei die Zahlen so gewählt waren, dass sie die bekannten Fehlertypen beim Ordnen hervorrufen sollten. Deutlich differenzierter fielen die Ergebnisse hingegen beim Zählen in Sprüngen (LQ beim Ergänzen von Zahlenreihen mit Zehner- und Hunderterübergängen im Zahlenraum bis 10 000 bei 45% (VG 84%) bis 100 000 bei 34% (VG 79%)) und beim Entbündeln aus, wobei die Lösungsquoten hier durch die Größe des Zahlenraums und die Anzahl der Entbündelungen beeinflusst wird (1000 – 10 72%, VG 94%, 100 000 – 1000 LQ 29%, VG 92%). Insgesamt zeigte die Untersuchungsgruppe also gute Fähigkeiten bzgl. des Ordnens und des Darstellungswechsels, jedoch nicht bezogen auf das Zählen in Sprüngen und das Entbündeln. Gerade letztere Fähigkeit ist für eine Erweiterung des Zahlbereichs hin zu den Dezimalzahlen essenziell, denn es muss verstanden werden, dass auch Einer in zehn Zehntel entbündelt werden können, diese in zehn Hundertstel usw. Es ist also davon auszugehen, dass Rechenschwache mit diesen Defiziten kaum Verständnis für Dezimalzahlen entwickeln können. Empirische Studien hierzu, genauso wie zu gebrochenen Zahlen im Allgemeinen, gibt es jedoch kaum (siehe hierzu Dögnitz 2023, S. 167 ff.). Bis auf einen einzigen Teilbereich bestätigt die hier vorgestellte LeDi-Studie, dass rechenschwachen Lernenden die Erweiterung des Stellenwertsystems nicht gelungen ist. Denn während die Vergleichsgruppe bei allen Aufgaben Lösungsquoten über 85% aufweist, konnte die Untersuchungsgruppe lediglich die größte unter vier Dezimalzahlen finden 3,545; 3,65; 3,75; 3,7) (LQ 83%). Am schwersten fielen ihnen hingegen Multiplikationen und Divisionen mit Zehnerpotenzen, bei denen die Stellen verschoben werden müssen. Da dieser Aufgabentyp bereits in den natürlichen Zahlen für erhebliche Probleme sorgte, was auch bei Stufenaufgaben deutlich wird (s.u.), ist das schwache Abschneiden mit Lösungsquoten von je 38% wenig überraschend. Auch sind nur 46% der Meinung, dass es zwischen 2,5 und 2,6 weitere Zahlen gibt. Es zeigt sich also, dass die großen Schwächen rechenschwacher Lernender bzgl. des Entbündelns zu Defiziten innerhalb der Dezimalzahlen führen und dabei ein großes Gefälle zwischen rechenschwachen und unauffälligen Lernenden festgestellt werden muss.

Dass die Division, deren Verständnis DIE Voraussetzung für einen sicheren Umgang mit gemeinen Brüchen ist, ein cut-off-Punkt für rechenschwache Lernende darstellt, ist gut bekannt und bestätigt sich auch in der hier vorgestellten Studie. Überprüft wurden einfache Berechnungen des kleinen (z. B. 72:9 LQ 63%, VG 95%) und großen Einmaleins (96:12 LQ 37%, VG 86%), Halbierungen (76 LQ 51%, VG 96%, 336 LQ 33%, VG 86%), Umkehraufgaben (zwei Rechnung zum Ergebnis 9 LQ 55% VG 88%) und Stufenaufgaben. Besonders Stufenaufgaben, die sowohl Fertigkeiten der Division als auch ein sicheres Stellenwertverständnis erfordern, stellten für die Untersuchungsgruppe große Hürden dar. So konnten nur 25% die Aufgabe 450:90 korrekt lösen (VG 70%) und sogar nur 13% den Fehler in der Aufgabe 300:60 = 50 korrigieren (VG 50%). Viele änderten das Ergebnis auch zu 20 ab.

Die Schwierigkeiten bzgl. der Division werden dann auch beim Umgang mit gemeinen Brüchen deutlich – jedoch nicht gleichermaßen in jeder Teildisziplin. So zeigte die Untersuchungsgruppe recht gute Leistungen in Darstellungswechseln, wobei das Identifizieren (Brüche $\frac{7}{12}$ im Rechteck und $\frac{7}{9}$ mit Sternen mit rund 78% (VG je 96%)) besser gelang als das ikonische Realisieren (rund 70%, VG 92%) und das Darstellen am Zahlenstrahl (Bruch $\frac{3}{4}$ am Zahlenstrahl von 0 bis 1, LQ 64%, VG 96%). Der erfolgreiche Darstellungswechsel, der der Untersuchungsgruppe in den natürlichen Zahlen gelang, konnte also auch auf gemeine Brüche übertragen werden. Des Weiteren beherrschen sie einfache Prozeduren wie das Kürzen meist sicher, wenn Zahlen verwendet werden, die aus dem kleinen Einmaleins gut bekannt sind und der Prozess sich lediglich auf das Finden der Kürzungszahl beschränkt. Müssen hingegen mehrschrittige Verfahren, bei denen unterschiedliche Handlungen mit Brüchen nötig sind durchgeführt werden, können rechenschwache Lernende diese Aufgaben kaum noch lösen. Dies betrifft sowohl die Addition und Subtraktion als auch den Größenvergleich oder das Bestimmen von Anteilen mittels von-Ansatzes, wie aus der Tabelle deutlich wird.

Aufgabe	RS (%)	VG (%)	Aufgabe	RS (%)	VG (%)
$\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=$	42	88,8	Vergleich $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$	50	88,8
$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=$	11	66,5	Vergleich $\frac{5}{4}$ $\frac{4}{5}$	34	82,2
$\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=$	43	85,1	$\frac{1}{3}$ von 18	33	85,1
$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=$	15	71,1	$\frac{2}{5}$ von 10	24	78,1

Rechenschwache Schüler*innen lösen Aufgaben zu gemeinen Brüchen anscheinend ausschließlich über syntaktisch-algorithmisches Wissen, scheitern jedoch dabei sehr oft, da sie die einzelnen Schritte der Verfahren nicht verstehen. Deshalb machen sie besonders dann Fehler, wenn der Algorithmus mehrere Teilschritte aufweist.

Gemeine Brüche ohne Vorstellungen zur Division? Dezimalzahlen ohne Stellenwertverständnis? Die Ergebnisse der LeDi-Studie weisen darauf hin, dass es ohne diese Vorwissensbausteine nur schwer möglich ist, typische Aufgaben zu den beiden Arten der Bruchrechnung zu lösen, es auf der anderen Seite jedoch Aufgabentypen gibt, die trotz mangelnder Basisfähigkeiten gelöst werden können. Dies betrifft vor allem Aufgaben zum Darstellungswechsel gemeiner Brüche und den Größenvergleich von Dezimalzahlen. Diese Aufgaben geben damit keine diagnostischen Hinweise auf gut ausgebildete Basiskompetenzen,"[…] die notwendige (aber nicht hinreichende) Voraussetzungen für einen erfolgreichen Aufbau von Grundvorstellungen zu Bruchzahlen [sind]." (Wartha und Güse 2009, 276 f.)

Literatur

Dögnitz, S. (2023). *Diagnostik von besonderen Rechenschwierigkeiten in der Sekundarstufe I.* Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH.

Fritz, A., Ehlert, A. & Leutner, D. (2018). Arithmetische Konzepte aus kognitiv-entwicklungspsychologischer Sicht. *JMD, 39*(1), 7–41.

Häsel-Weide, U. (2016). *Vom Zählen zum Rechnen. Struktur-fokussierende Deutungen in kooperativen Lernumgebungen* (Band 21). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Moser Opitz, E. (2013). *Rechenschwäche / Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern* (Beiträge zur Heil- und Sonderpädagogik, Bd. 31, 2. Aufl.). Bern: Haupt.

Wartha, S. & Güse, M. (2009). Zum Zusammenhang zwischen Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und arithmetischem Grundwissen. *JMD, 30*(3/4), 256–280.

Wehrmann, M. (2011). *Qualitative Diagnostik von Rechenschwierigkeiten im Grundlagenbereich Arithmetik* (2. Aufl.). Berlin: Köster