

EDEL, Petra Carina
Dortmund

Beweisversuche von Lernenden in den Klassenstufen 5 bis 8: Ein Kategoriensystem für eine stärkenorientierte Diagnose

Beweise sind ein Charakteristikum mathematischer Arbeit und auch beim Mathematiklernen von großer Bedeutung (z. B. Heintz, 2000; Hanna et al., 2012). Dementsprechend wird seit vielen Jahren immer wieder untersucht, inwieweit Lernenden Beweise mathematischer Aussagen gelingen (z. B. Healy & Hoyles, 2000). Dabei beziehen sich die meisten Forschungsergebnisse auf Lernende ab der Klassenstufe 7. Zudem stehen in den Studien in der Regel eher die Defizite und Schwierigkeiten von Lernenden im Fokus, weniger mögliche Anknüpfungspunkte für eine Weiterentwicklung der Aufgabenbearbeitungen. Daher wird im Folgenden ein Einblick in ein Kategoriensystem zur Analyse von Beweisversuchen zu einer Allaussage gegeben, das sich insbesondere auch für Beweisversuche junger Lernender eignet und Anknüpfungspunkte für eine Weiterentwicklung der Beweisversuche ausweist. Am Beispiel der Oberkategorien des Kategoriensystems wird exemplarisch aufgezeigt, wie solche Anknüpfungspunkte bei vorliegenden Beweisversuchen herausgearbeitet werden können.

Entwicklung, Skizze und Anwendung des Kategoriensystems

Das Kategoriensystem ist im Rahmen eines Forschungsprojekts zu Beweis-kompetenzen von Lernenden in den Klassenstufen 5 bis 8 entstanden. In diesem Forschungsprojekt wurden insbesondere Beweisversuche zu der Allaus-sage, dass die Summe von vier aufeinanderfolgenden ungeraden positiven Zahlen durch vier (Kl. 5-6) bzw. durch acht teilbar ist (Kl. 7-8) vergleichend untersucht. Ziel war es u. a. herauszufinden, inwieweit in den Beweisversuchen Anknüpfungspunkte für deren Weiterentwicklung zu einem Beweis zu erkennen sind sowie welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede sich dies-bezüglich zwischen den Klassenstufen zeigen. Die Beweisversuche wurden bei einer Regionalrunde der Mathematik-Olympiade in 44 der 55 Regionen NRWs erhoben. Auf diese Weise war es möglich, umfangreiches, authenti-sches und vergleichbares Datenmaterial von Lernenden aus verschiedenen Klassenstufen zu erhalten. Zudem stellen die Teilnehmenden der Mathema-tik-Olympiade mit Blick auf die Nachwuchsförderung im mathematischen Bereich eine sehr interessante Zielgruppe dar.

Die Abbildung 1 zeigt exemplarisch zwei Beweisversuche, die bei der be-schriebenen Datenerhebung entstanden sind. Insgesamt liegen zu der fokus-sierten Allaussage 3400 Beweisversuche aus den Klassenstufen 5 bis 8 vor. Um diese Beweisversuche auszuwerten, wurde das Verfahren der qualitativ-

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.

<https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0>

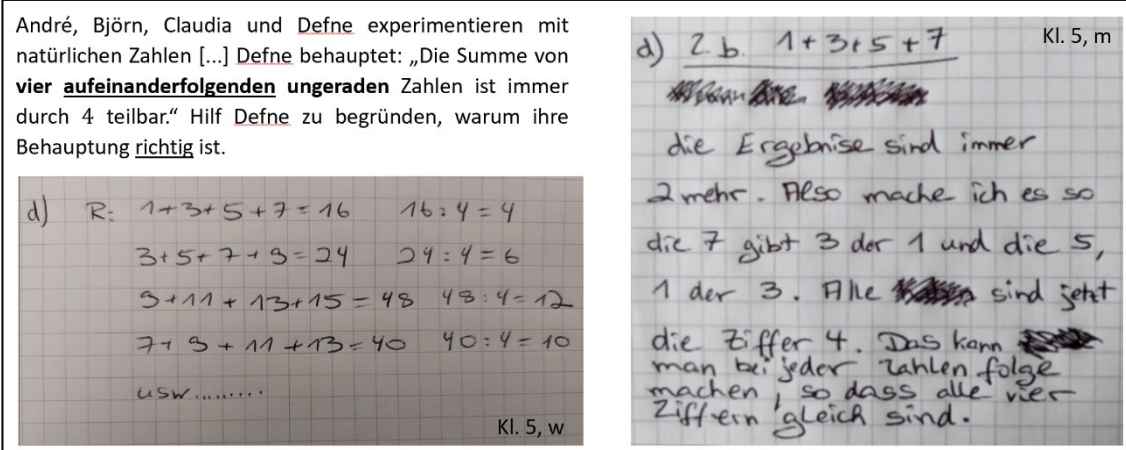


Abb. 1: Zwei Beweisversuche aus der Klassenstufe 5 aus dem Datensatz des Projekts

strukturierenden Inhaltsanalyse nach Schreier (2012, 2014) angewendet. Dabei wurden insgesamt 1155 der 3400 Beweisversuche ausgewählt, mittels einer bewussten Stichprobenziehung (u. a. unter Berücksichtigung des Wettbewerbserfolgs der Lernenden, deren Teilnahme an mathematischen Förderangeboten und des Geschlechts) und mittels einer Zufallsstichprobe, um möglichst gute Einblicke in das Spektrum der Beweisversuche und die Häufigkeitsverteilungen der einzelnen Ausprägungen zu erhalten. Das Kategoriensystem wurde deduktiv-induktiv unter Berücksichtigung der Forschungsfragen, Aufgabenstellungen sowie vorhandener Theorien und Forschungsergebnisse entwickelt, um die Beweisversuche aussagekräftig, präzise und systematisch differenziert zu beschreiben (Edel, 2024).

In dem Kategoriensystem wird grundlegend zwischen Beweisversuchen mit begründendem Ansatz, mit prüfendem Ansatz, mit weder begründendem noch prüfendem Ansatz und mit nicht eindeutig kategorisierbarem Ansatz sowie fehlenden Bearbeitungen differenziert. Mit Blick auf die Beweisversuche aus Abbildung 1 ist die Unterscheidung der Oberkategorien "begründender Ansatz" und "prüfender Ansatz" besonders relevant. Ein Beweisversuch wird der Oberkategorie "begründender Ansatz" zugeordnet, wenn das Argumentgefüge einen Bezug zu der infrage stehenden Aussage aufweist und eine Beweisidee enthält, deren Allgemeingültigkeit oder Verallgemeinerbarkeit in der Bearbeitung explizit angedeutet ist. Ein Beweisversuch wird der Oberkategorie "prüfender Ansatz" zugeordnet, wenn kein begründender Ansatz erkennbar ist, aber ein Beispiel vorkommt, das einen klaren Bezug zu der infrage stehenden Aussage zeigt. Dementsprechend gehört der in Abbildung 1 links zu sehende Beweisversuch der Fünftklässlerin zu der Oberkategorie "prüfender Ansatz". Der rechts zu sehende Beweisversuch des Fünftklässlers fällt in die Oberkategorie "begründender Ansatz". Hier ist der Bezug zu der zu zeigenden Aussage durch die Betrachtung der vier

aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 gegeben. Weiterhin ist im Argumentgefüge insbesondere die Beweisidee, dass die Summe von vier aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen gleich der Summe von vier gleichen Zahlen ist, ausgeführt. Die Verallgemeinerbarkeit dieser Idee ist über den letzten Satz angedeutet.

Die Abbildung 2 zeigt die relativen Häufigkeitsverteilungen der Zuordnungen der Beweisversuche zu den unterschiedenen Oberkategorien. Es wird insbesondere deutlich, dass Beweisversuche mit begründendem Ansatz je Klassenstufe mindestens 45% der Beweisversuche ausmachen. In den Klassenstufen 6 bis 8 sind es jeweils 70% bis 80%. Das heißt, dass ein großer Anteil der Teilnehmenden zumindest versucht hat, allgemeingültige oder verallgemeinerbare Argumente anzugeben, was einen Anknüpfungspunkt für eine Weiterentwicklung von Beweisversuchen zu einem Beweis darstellt.

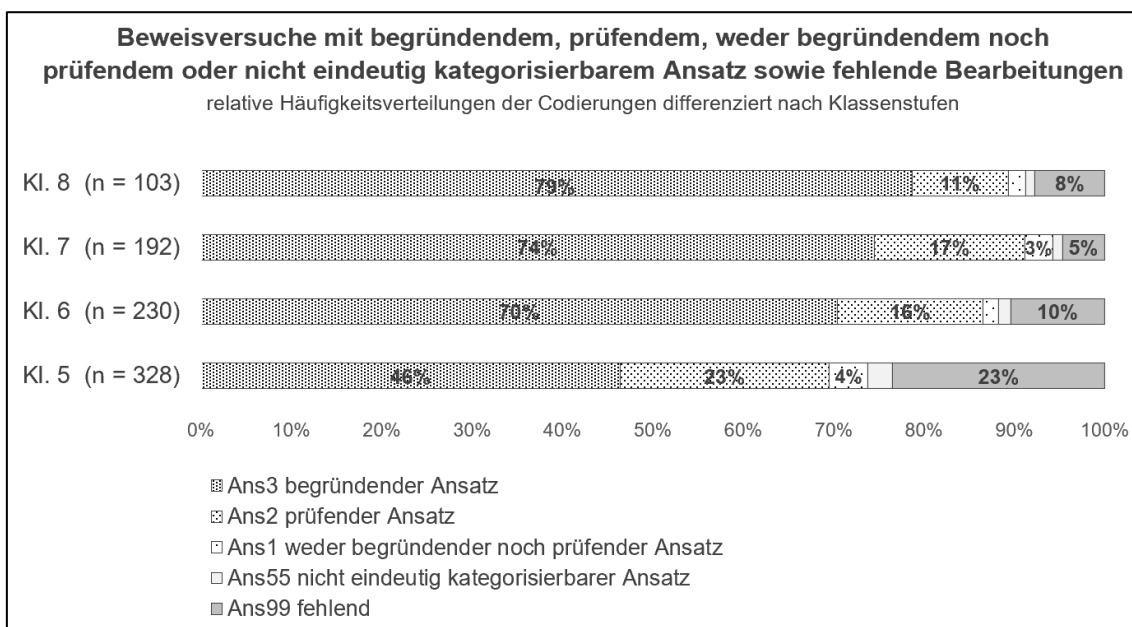


Abb. 2: Beweisversuche mit begründendem, prüfendem, weder begründendem noch prüfendem oder nicht eindeutigem Ansatz sowie fehlende Bearbeitungen. Relative Häufigkeitsverteilungen der Codierungen differenziert nach Klassenstufen

Diskussion und Ausblick

Die skizzierte Einordnung von Beweisversuchen in die Oberkategorien gibt somit einen ersten Einblick, woran sich in der Weiterentwicklung der Beweisversuche zu einem Beweis anknüpfen lässt. Dabei ist zu beachten, dass die Oberkategorien weit gefasst sind. Die Einordnung eines Beweisversuchs in die Kategorie "begründender Ansatz" bedeutet weder, dass das Argumentgefüge durchgehend in allgemeingültiger Form formuliert wurde, noch, dass es korrekt und vollständig ist. Zugleich können andersherum in Beweisversuchen mit prüfendem Ansatz, so wie etwa in der Bearbeitung der

Fünftklässlerin in Abbildung 1, Anknüpfungspunkte für die Entwicklung einer Beweisidee bis hin zu einem korrekten und vollständigen Argumentgefüge erkennbar sein. Dies verdeutlicht, dass es wichtig ist, die Beweisversuche zusätzlich zur Einordnung in eine der Oberkategorien weiter auszuwerten, um ein differenziertes Bild der erkennbaren Anknüpfungspunkte zu erhalten.

Das vollständige Kategoriensystem ermöglicht es, vielfältige Beweisversuche zu einer Allaussage systematisch und stärkenorientiert zu beschreiben und zu vergleichen. Zudem kann die Anwendung des Kategoriensystems eine Grundlage für qualifizierte Rückmeldungen an Lernende und eine gezielte Unterstützung von Lernenden bieten.

Des Weiteren lassen sich die empirischen Ergebnisse der mit dem Kategoriensystem durchgeführten Analyse der Beweisversuche aus den Klassenstufen 5 bis 8 vor dem Hintergrund curricularer Vorgaben und der Ergebnisse anderer Studien diskutieren sowie mit Blick auf Ansatzpunkte für eine Förderung im Führen von Beweisen interpretieren. Wesentliche Limitationen resultieren dabei aus der Positivauswahl der Teilnehmenden der Mathematik-Olympiade und insbesondere der Fokussierung auf Beweisversuche, die keine klare Einsicht in die Beweisprozesse und die den Beweisversuchen zugrundeliegenden Denkweisen geben. Um weitere Einblicke in Ansatzpunkte für eine Förderung im Führen von Beweisen und u. a. in Denkweisen der Teilnehmenden des Projekts zu erhalten, könnten bereits vorhandene Daten genutzt werden (Edel, 2024).

Literatur

- Edel, P. C. (2024). Beweisversuche von Teilnehmerinnen und Teilnehmern der Mathematik-Olympiade: Entwicklung eines Analysemodells und empirische Ergebnisse zu den Klassenstufen 5 bis 8. <https://jpub.uni-giessen.de/bitstreams/4efa2764-4787-40d7-a45c-edaa4a89e681/download>
- Hanna, G., de Villiers, M., Ararello, F., Dreyfus, T., Durand-Guerrier, V., Jahnke, H.-N., Lin, F.-L., Selden, A., Tall, D. & Yeedokimov, D. (2012). ICMI study 19: Proof and proving in mathematics education: Discussion document. In G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study* (S. 443-452). Springer.
- Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396–428.
- Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik: Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Springer.
- Schreier, M. (2012). *Qualitative Content Analysis in Practice*. SAGE.
- Schreier, M. (2014). Varianten qualitativer Inhaltsanalyse: Ein Wegweiser im Dickicht der Begrifflichkeiten. *Forum qualitativer Sozialforschung*, 15(1), 1–27.