KAISER, Svenja; VOGEL, Markus; DÖRING, Leif & MÜNZER, Stefan
Heidelberg, Mannheim

Beweisverständnistraining mit Worked Examples als Starthilfe für Mathematikstudierende

Im Mathematikstudium bereiten insbesondere die Beweise den Studienanfänger:innen Schwierigkeiten, sowohl das eigene Beweisen als auch das Verstehen gegebener Beweise (Neuhaus-Eckhardt, 2022). Diese Studierenden unterscheiden sich in Bezug auf ihr schulisches Vorwissen, ihr akademisches Selbstkonzept und den gewählten Studiengang (Fischer & Biehler, 2011). Die Studienabbruchquote ist dabei wie im gesamten naturwissenschaftlichen Bereich nach wie vor hoch (Blömeke, 2016). Daher wurde im Rahmen einer Förderung durch die Stiftung Innovation in der Hochschullehre (Projekt InnoMA an der Universität Mannheim) ein digitales Beweisverständnistraining auf Basis von Worked Examples entwickelt, mit dem die Studierenden selbstständig arbeiten und ihre Fortschritte überprüfen können.

Beweise als Lerngelegenheit im Mathematikstudium

Beweise haben verschiedene Funktionen sowohl im Mathematikstudium als auch in der mathematischen Forschung (De Villiers, 1990). Ein Beweis dient in beiden Kontexten nicht nur der Verifizierung, sondern ist auch „bearer of mathematical knowledge in the form of methods, tools, strategies and concepts“ (Hanna & Barbeau, 2008, S. 352). Beweise vermitteln auch die mathematische Fachsprache, die eine der Schwierigkeiten beim Übergang von Schule zur Hochschule darstellt (Hefendehl-Hebecker, 2016).

Operationalisierung von Beweisverständnis

In den letzten Jahren wurde dem Lesen und Verstehen von Beweisen vermehrt Aufmerksamkeit gewidmet und mehrere theoretische Modelle wurden für verschiedene Kontexte entwickelt (z.B. Yang & Lin, 2008; Mejia-Ramos, 2012). Neuhaus-Eckhardt (2022) hat mehrere dieser Modelle zusammengeführt und dabei zwischen lokalen (1-4), holistischen (5-7) und über den Beweis hinausgehenden Dimensionen (8-9) unterschieden:

1. Bedeutung von Termen und Aussagen
2. Logischer Status der Aussagen
3. Proof Framework
4. Begründungen von Behauptungen
5. Hauptideen des Beweises
6. Modulare Struktur des Beweises
7. Nützliche Beispiele und Visualisierungen
8. Dargestellte Methoden
9. Reichweite und Grenzen von Methoden

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

Einen Beweis zu verstehen bedeutet demnach ein kohärentes mentales Modell dieses Beweises aufzubauen, das möglichst viele dieser Dimensionen umfasst. Das Endprodukt dieser Prozesse wird als Beweisverständnis bezeichnet (ebd.). Dabei umfasst nicht jeder Beweis alle Dimensionen.

Konzeption von Worked Examples für das Verstehen von Beweisen

Das entwickelte digitale Beweisverständnistraining beruht auf dem Prinzip von Worked Examples (dt. Lösungsbeispiele). Diese erwiesen sich in Kombination mit Übungsaufgaben in verschiedenen Kontexten als besonders lernförderlich (Atkinson, Derry, Renkl, & Wortham, 2000). Worked Examples zeigten sich in Studien von Cooper und Sweller (1987) als effizienter zum Lernen von Problemlösestrategien als das eigenständige Anwenden dieser Strategien. Die Autoren führen das auf eine Reduktion des Cognitive Loads zurück. Der Einsatz von Worked Examples kann auch bewirken, dass Lernende bessere Problemlösestrategien wählen (Atkinson et al., 2000).

Beim Design von Worked Examples sollen Selbsterklärungen gegenüber instruktionalen Erklärungen präferiert werden (Renkl & Schworm, 2002). „Gleichwohl ist festzuhalten, dass ein alleiniges „Bauen“ auf Selbsterklärungsaktivitäten auch etliche Nachteile hat. Es kommt beispielsweise vor, dass die Lernenden sich bestimmte Schritte nicht erklären können oder dass sie falsche Selbsterklärungen geben.“ (Renkl & Schworm, 2002, S.262)

Das Beweisverständnistraining in Form von Worked Examples bietet den Studierenden Schritt für Schritt eine Dekonstruktion der gegebenen Beweise.

Der Aufbau des Lernmaterials orientiert sich an den Dimensionen des Beweisverständnismodells von Neuhaus-Eckhardt (2022). Zunächst wird den Studierenden der korrekte Beweis angezeigt. Im Anschluss können sie zu jeder Dimension Erklärtexte aufrufen. Diese bestehen jeweils aus mehreren Fragen mit Antworten, die die Studierenden in dem digitalen Lernprogramm aktiv aufrufen müssen. So sollen Selbsterklärungen ermöglicht werden, ohne dass die Studierenden auf diese angewiesen sind.

Satz: Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.

Beweis: Seien a und b zwei Grenzwerte einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann existieren für ein gegebenes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $M \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$ und $|a_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq M$. Dann folgt

$$0 \leq |a-b| \leq |a-a_n| + |a_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \text{ für alle } n \geq \max\{N, M\}.$$

Dann gilt auch $0 \leq |a-b| \leq \inf(0,\infty) = 0$. Also ist $|a-b| = 0$ und damit auch $a = b$. $\square$

Abb. 1 Beispielbeweis

Das Lernmaterial zu diesem Beweis stellt beispielsweise folgende Fragen; für die Dimensionen 6 und 7 werden im Lernmaterial Abbildungen gezeigt.

Dimension 1: Was ist eine konvergente Folge? Was bedeutet max $\{N, M\}$?
Dimension 4: Warum gilt $|a - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b|$? Und warum ist $\inf(0, \infty) = 0$?
Dimension 5: Wie lässt sich der Beweis zusammenfassen? Was sind die Hauptideen?
Dimension 8: Welche Tricks und Methoden können wir in diesem Beweis finden?

Die Studierenden können das Material in beliebiger Reihenfolge und wiederholt durchgehen und im Anschluss Multiple-Choice-Fragen beantworten, die sich ebenfalls an den Beweisverständnisdimensionen orientieren. Bei allen Antworten kann nach Bedarf eine Erklärung angezeigt werden.

Die Lernsoftware CoTutor

Das Beweisverständnistraining wurde in die Lernsoftware CoTutor integriert, die an der Universität Mannheim entwickelt wurde (Siebert & Janson, 2018) und dort in verschiedenen Lehrveranstaltungen verwendet wird. In CoTutor können Lerninhalte in Kapiteln angelegt werden, den Kapiteln können Multiple-Choice-Fragen zugeordnet werden, deren Antwortmöglichkeiten von der Software variabel ausgewählt und angeordnet werden. Die Studierenden können ihren Lernfortschritt mittels einer Anzeige verfolgen. Jeder Klick in der Software wird gespeichert und kann ausgewertet werden.

Integration des Trainings in Lehrveranstaltungen

Das Training wurde im Herbstsemester 2023 an der Universität Mannheim (internationale Semesterzeiten) in der Vorlesung Analysis 1 für Erstsemesterstudierende der Studiengänge Wirtschaftsmathematik und Lehramt Mathematik und in der Vorlesung Stochastik 1 für Studierende im dritten Semester angeboten. Über einen Zeitraum von zehn Wochen erhielten die Studierenden wöchentlich digitales Lernmaterial zu einem Beweis aus der Analysisvorlesung. Dabei wurden zehn Beweise gewählt, die jeweils möglichst alle Beweisverständnisdimensionen abbilden sowie insgesamt verschiedene Themen der Analysis und die grundlegenden Beweismethoden abdecken.

Evaluation und Ausblick

Die Studierenden nehmen an Befragungen zu Beginn und am Ende des Semesters teil, die Vorwissen, akademisches Selbstkonzept und die Entwicklung des Beweisverständnisses erfassen. Das Training wurde außerdem vor Beginn der Klausurenphase (Dezember 2023) evaluiert. 35 Studierende gaben an das Training regelmäßig oder gelegentlich genutzt zu haben. Überwiegend sehr gut oder gut bewertet wurden von diesen Studierenden die Benutzerfreundlichkeit (69%), die Umsetzung (77%) und die Verständlichkeit (84%). 61% wollen das Trainingsprogramm auch für die Klausurvorbereitung nutzen (trifft voll zu/trifft eher zu). 54% gaben an ihre Fähigkeit Beweise zu verstehen sei stark gestiegen oder gestiegen. 28 andere Studierende gaben an das Training nur einmal genutzt zu haben, 38 weitere Studierende nutzten es gar nicht. Von diesen Studierenden gaben 53% Zeitmangel als Grund an, 21% hielten das Training nicht für relevant oder hilfreich.

Die Daten aus den Befragungen und den Beweisverständnistests werden nach Ende des Semesters (Januar 2023) zusammen mit den gespeicherten Nutzungsdaten von CoTutor ausgewertet. Es soll außerdem im Frühjahr 2024 eine Laborstudie mit Between-Subject-Design zur Wirksamkeit des Trainings im Vergleich zu herkömmlichen Übungsaufgaben durchgeführt werden.

Literatur

Atkinson, R. K., Derry, S. J., Renkl, A., & Wortham, D. (2000). Learning from Examples: Instructional Principles from the Worked Examples Research. *Review of Educational Research, 70*(2), 181–214.

Blömeke, S. (2016). Der Übergang von der Schule in die Hochschule: Empirische Erkenntnisse zu mathematikbezogenen Studiengängen. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth, & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase: Herausforderungen und Lösungsansätze* (S. 3–14). Springer Spektrum.

Cooper, G., & Sweller, J. (1987). Effects of schema acquisition and rule automation on mathematical problem-solving transfer. *Journal of Educational Psychology, 79*(4), 347–362.

de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24*(1), 17–24.

Fischer, P. R., & Biehler, R. (2011). Über die Heterogenität unserer Studienanfänger: Ergebnisse einer empirischen Untersuchung von Teilnehmern mathematischer Vorkurse. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011*. WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Hanna, G., & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM Mathematics Education, 40*, 345–353.

Hefendehl-Hebecker, L. (2016). Mathematische Wissensbildung in Schule und Hochschule. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth, & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase: Herausforderungen und Lösungsansätze* (S. 15–32). Springer Spektrum.

Mejia-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 79*(1), 3-18.

Neuhaus-Eckhardt, S. (2022). *Beweisverständnis von Studierenden* [Dissertation, Fakultät für Mathematik; Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg]. Waxmann Verlag.

Renkl, A. & Schworm, S. (2002). Lernen, mit Lösungsbeispielen zu lehren. *Zeitschrift für Pädagogik - Beiheft, 45*, 259-270.

Siebert, J., & Janson, M. P. (2018). *CoTutor* [Computer software]. https://www.cotutor.de

Yang, K.-L., & Lin, F.-L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 59–76.