KAENDERS, Rainer
Bonn

Newtonscher Zahlbegriff als Heuristik in der Geometrie

In der Praxis der klassischen Gymnasialmathematik werden die reellen Zahlen durch Gewöhnung eingeführt, ohne dem Begriff der reellen Zahl und ihren Rechenoperationen durch geeignete Grundvorstellungen eine explizite Bedeutung zu verleihen. Anders verhält es sich bei rationalen und negativen Zahlen, die mit entsprechenden Grundvorstellungen gut unterbaut werden und deren arithmetisches Verständnis einen großen Raum im Lehrplan einnimmt. Die Tatsache, dass die gesamte Infinitesimalrechnung, wie sie in der Schule gelehrt wird, ohne einen allgemeinen Begriff der reellen Zahl (mit Vollständigkeit) zusammenbrechen würde, bleibt hinter algebraischen Routinen für Ableitungen, Integralberechnungen und Ähnlichem verborgen.

1. Newtons Konzept des Rechnens mit Proportionen

Isaac Newtons Vorstellung von der Zahl und ihren Operationen ist ein klassisches Denkmodell für die Multiplikation einer Zahl mit einer Größe durch Bestimmung der vierten Proportionalen. Newton (1769, S. 2, vgl. auch Frege, 1884, S. 25; Whistons lateinische Originalausgabe von Newtons Vorlesungsaufzeichnungen aus dem Jahr 1707) macht (wie auch Euler und andere später, vgl. vom Hofe, 1995; S. 19) die explizite Annahme, dass die positiven reellen Zahlen Verhältnisse von Größen gleicher Art sind (geregelt durch das Archimedische Axiom und begrenzt durch die Vollständigkeit):

"By *number* we understand, not so much a Multitude of Unities, as the abstracted Ratio of any Quantity, to another Quantity of the same Kind, which we take for Unity. And this is threefold; integer, fracted, *and* surd: An *Integer* is what is measured by Unity; a Fraction, that which a submultiple Part of Unity measures; and a Surd, to which Unity is incommensurable."

Wie können wir feststellen, ob $a:b = A:B$ gilt, wenn die Größen a und b von einer Art und Größen und einer möglichen anderen Art gegeben sind? Im Fall der rationalen Verhältnisse ist die Antwort einfach. Diese Verhältnisse sind immer gleich, wenn wir zwei natürliche Zahlen p und q finden können, dass $q \cdot a = p \cdot b$ und $q \cdot A = p \cdot B$. Dies ist eine abstrakte Art, Proportionen und Brüche zu beschreiben, wie sie in der Sekundarschule gelehrt werden. Aber was ist mit inkommensurablen Verhältnissen? Die Antwort wurde von Eudoxos (~408 355) gegeben und ist in Euklids Elementen (Def. V, Buch V) zu finden. Anstatt nach geeigneten natürlichen Zahlen p und q zu suchen, um die obige Identität zu erhalten, können wir – insbesondere für inkommensurable Mengen – für alle natürlichen Zahlen p und q drei Fragen an a und b und an A and B stellen: Ist $q \cdot a < p \cdot b$ oder ist $q \cdot a = p \cdot b$ oder ist $q \cdot a > p \cdot b$? Die Antwort muss mit der entsprechenden Antwort für A

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

and B übereinstimmen: Ist $q \cdot A < p \cdot B$ oder ist $q \cdot A = p \cdot B$ oder ist $q \cdot A > p \cdot B$? In Buch VI von Euklid wird diese entscheidende Definition direkt in Prop. 1 u.a. in Bezug auf die Ähnlichkeit von Dreiecken angewandt.

Größenverhältnisse können mit Größen multiplizieren, d.h. ein Verhältnis von Größen (gleicher Art) a and b mit einer Größe C, die von beliebiger Art sein kann, multiplizieren, indem man die Größe X, das Produkt, im Größenbereich von an C so findet, dass das Verhältnis $X: C$ gleich dem Verhältnis $a: b$ ist. Wir schreiben $[a: b] \cdot C$ und postulieren, dass diese Größe immer existiert. Nach dem Axiom von Archimedes ist sie eindeutig. Diese Bestimmung der vierten Proportionalen erlaubt es, jedes Verhältnis von Größen einer Art in ein Verhältnis von Größen einer anderen Art zu übertragen. Newton (1769, S.10) beschreibt diesen Multiplikationsprozess wie folgt:

"*Multiplication*, properly so called, is that which is made by Integer, as seeking a new Quantity, so many Times greater than the Multiplicand, as the Multiplier is greater than Unity. *But, for want of a better Word*, that is also called *Multiplication*, which is made use of in Fractions and Surds, to find a new Quantity in the same *Ratio*, (whatever it be) to the Multiplicand, as the Multiplier has to Unity. *Nor is* Multiplication made *only by abstract Numbers, but also* by concrete Quantities*, as by Lines, Surfaces, Local Motion, Weights,* etc. as far as these being related to some known Quantity of their Kind, as to Unity, may express the Ratios of Numbers, and supply their Place."

Die Addition der Größen induziert eine Addition der Größenverhältnisse. Die Multiplikation der Zahlen wird durch die oben beschriebene Bestimmung der vierten Proportionalität induziert: $[a: b] \cdot [c: d] = [[a: b] \cdot c: d]$. Beide Operationen sind wohldefiniert. Wir sehen, dass Brüche und ihre Operationen auf (positive) reelle Zahlen ausgedehnt werden.

2. Existenz der vierten Proportionalen als tragende Grundvorstellung

In (Kaenders, 2023) wird vorgeschlagen die Existenz der vierten Proportionalen als Grundvorstellung für die Multiplikation reeller Zahlen von Beginn der Sekundarstufe an zu vermitteln. In der Unterrichtspraxis kann der Unterricht zum Messen, zu Maßstäben, zu Proportionalität und auch der Satz von Bayes mittels dieser Grundvorstellung vermittelt werden. Besonders die Geometrie bietet zahlreiche Situationen, in denen diese Grundvorstellung eine fruchtbare Heuristik darstellt, wie wir jetzt illustrieren werden. Ähnlich, wie in (Berendonk, 2016) führt auch hier die Verdopplung des Quadrats durch diese Heuristik zu Beweisen des Pythagoras.

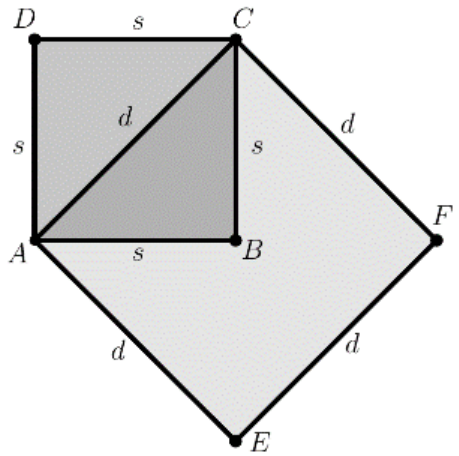

Abb. 1: Berechnung $[d: s]^2 = 2$.

3. Existenz der vierten Proportionalen als Heuristik in der Geometrie

Heuristik zur Multiplikation eines Größenverhältnisses von Längen $[a: b]$ mit einer Länge c in einer Figur: Zeichne eine gestreckte Kopie der Ausgangsfigur so in die gegebene Figur, dass die Streckung von c auf b liegt. Die Strecke, die in der Kopie a entspricht, hat dann die Länge $[a: b] \cdot c$.

Ein Quadrat mit Diagonale d und Seite s repräsentiert ein „taubes" Verhältnis $d: s$, für dessen Quadrat gilt: $[d: s]^2 = \big[[d: s] \cdot d: s\big] = [x: s]$ und x ist die Länge, für die gilt: $x: s = d: s$. Die berühmte Figur aus Platons Menon-Dialog lässt uns diese Länge bestimmen als $x = 2s$. Also ist $[d: s]^2 = \big[[d: s] \cdot d: s\big] = [2s: d][d: s] = [2s: s] = 2$.

Die Ausgangsfigur wurde so vergrößert, dass die vierte Proportionale zu finden ist. Das führt zu einer Heuristik mit überraschenden Ergebnissen.

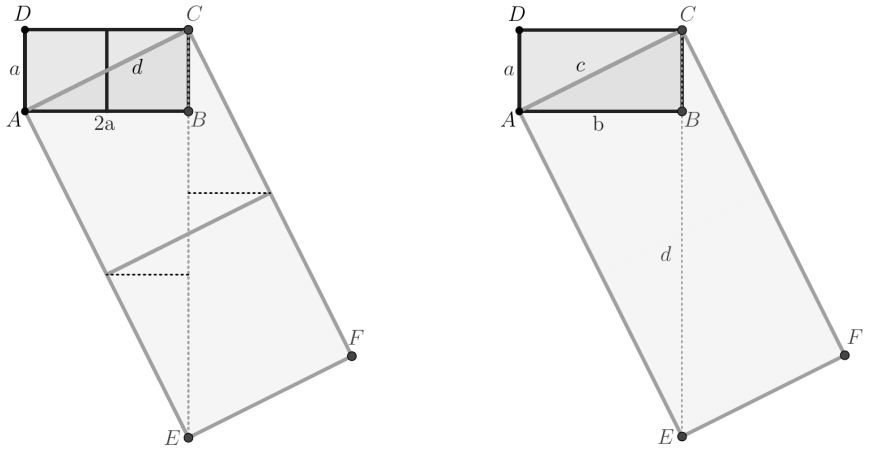

Abb. 2: Links: Berechnung des Quadrates des Verhältnisses von Diagonale und der kurzen Seite eines Rechtecks aus zwei Quadraten: $[d: a]^2 = 5$. Rechts: Beweis des Satzes von Pythagoras: $[c: a]^2 = [d + a: c][c: a] = [d + a: a] = [d: a] + 1 = [d: b][b: a] + 1 = [b: a]^2 + 1$ mit $d \coloneqq |BE|$.

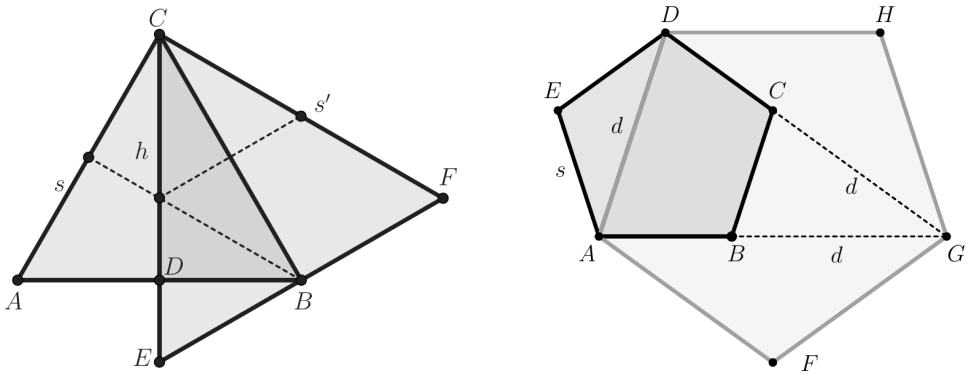

Abb. 3: Links: Berechnung von $[s: h] = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und rechts: $[d: s]^2 = [d: s] + 1$.

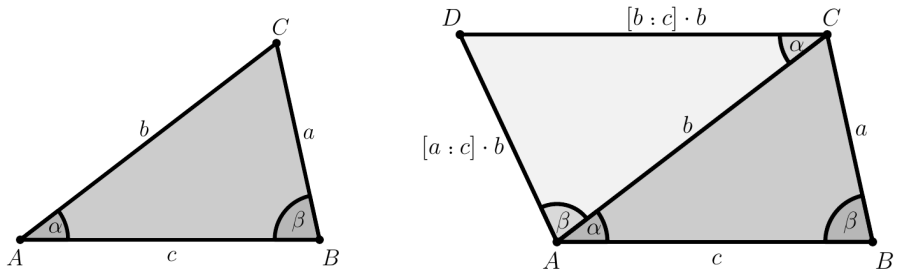

Abb. 4: Streckung einer Seite b mit den Verhältnissen $[a\colon c]$ und $[b\colon c]$.

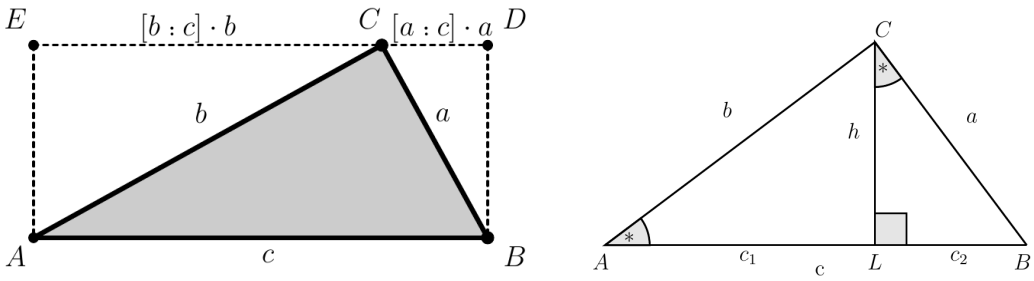

Abb. 5: Links: Pythagoras $[b\colon c]b + [a\colon c]a = c$, rechts: klassischer Beweis.

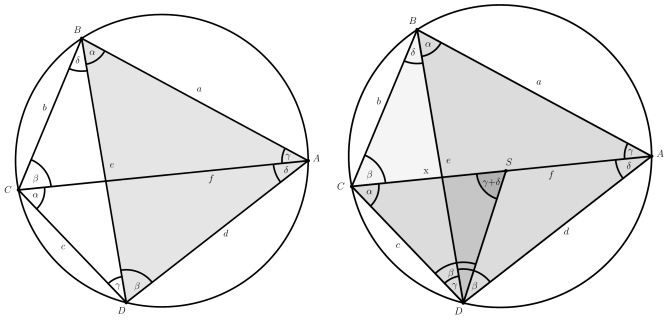

Abb. 6: Entstehung der „mysteriösen“ Hilfslinie beim Satz von Ptolemäus.

An noch vielen weiteren Beispielen (wie den Mesolabium von Eratosthenes, Platons Würfelverdopplung, Belochs Quadrat, logarithmische Spiralen, …) kann man sehen, dass die Existenz der vierten Proportionalen in der Geometrie nicht nur eine geeignete Grundvorstellung zum Umgang mit inkommensurablen Verhältnissen darstellt, sondern dass sie auch als hilfreiche Heuristik zu tiefen Einsichten in der Geometrie führen kann.

Literatur

Berendonk, S. (2016). Mathematik als Prozess - am Beispiel des Pythagoras. In P. Geiss, & R. Issler (Hrsg.), *Fachkulturen in der Lehrerbildung der Reihe Wissenschaft und Lehrerbildung*, V&R unipress GmbH.

Kaenders, R. (2023). Newton's Conception of Calculation with Ratios as a Mental Model for Real Number Arithmetic. Accepted at *ICME 15, Topic Study Group 5.4: The role of the history of mathematics in mathematics education*, Paper ID: 1435.

Newton, I. (1769). *Universal arithmetick: or, A treatise of arithmetical composition and resolution*. S. Cunn (Hrsg.); J. Raphson (Übers.), London: Printed for W. Johnston.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum akademischer Verlag.