Claudia BÖTTINGER, Essen

Komponenten beim Wechsel der Repräsentationsebenen

Im Rahmen der Mathematikdidaktik spielt der Wechsel der Repräsentationsebenen in zwei Bereichen eine besondere Rolle: Aufbauend auf der Arbeit von Bruner (1971), werden handelnde, bildliche und symbolische/ sprachliche Repräsentationsebenen unterschieden. Bruner fasst verschiedene Aspekte von „Bildern“ unter einem Begriff zusammen. Er erläutert am Beispiel „Knoten knüpfen“: *Unter bildhafter Darstellung verstehen wir das Bild des Knotens, seiner Endphase oder einer Zwischenphase oder sogar das Bewegungsbild des Knüpfens.* An dieser Stelle wird Dörfler (1991) präziser: Er differenziert zwischen 4 möglichen Arten von mentalen Bildern, die insbesondere für mathematische Inhalte von Bedeutung sind.

Im Rahmen von Arbeits- und Anschauungsmitteln wird dieser Hintergrund im Mathematikunterricht fassbar. Veranschaulichungen sollen dazu dienen, die mentalen Bilder aufzubauen, die zum Rechnen erforderlich sind, vgl. Lorenz (1992).

E. Söbbeke (2005) konnte mit Hilfe von Interviews ein Spektrum aufzeigen, in dem Kinder Veranschaulichungen deuten. Dieses geht von einer unmittelbaren empirischen Deutung bis hin zu einem beweglichen Nutzen von Relationen und Strukturen.

Zentral ist in diesem Zusammenhang der Wechsel von der bildlichen Darstellung zum symbolischen/ mathematischen Problem.

Der zweite Bereich, in dem der Wechsel der Repräsentationsebene von Bedeutung ist, ist die (math.) Begabung. Aus der Begabungsforschung ist bekannt, dass das Finden geeigneter Repräsentationen für ein Problem ein Merkmal Hochbegabter ist (Sternberg 1981). Genauer: *Intelligenz manifestiert sich in der Fähigkeit, die Komplexität der Muster und der Relationen möglichst effizient in eine einfachere Repräsentation zu transformieren, die nur lösungsrelevante Eigenschaften enthält. Diese sind in der Regel merkmalsärmer und relationsspezifischer.* (Waldmann, Weinert 1990). Kießwetter (1988) hat dies für die Mathemtik weitergeführt. Im Finden geeigneter Repräsentationen für ein Problem – in der Regel sind damit bildliche Darstellungen gemeint wie in Otter, Kießwetter (1993) – sieht er ein Merkmal mathematischer Begabung.

An anderer Stelle definiert Kießwetter (1988) auch im Rahmen von Begabungsmerkmalen den Wechsel der Repräsentationsebene als *das Sehen von Mustern und Gesetzen in anderen Zusammenhängen.* Diese Definition ist (im Gegensatz zur obigen Auffassung) offen in dem Sinne, dass beide Richtungen „vom mathematischen Problem zur bildlichen Darstellung“ und umgekehrt erfasst werden. Für Dritt- und Viertklässler wurde dieses von Käpnick (1998) weitergeführt. Das Fortsetzen von Dreieckszahlen dient ihm als Aufgabe, um die Fähigkeit zum Wechseln der Repräsentationsebenen zu testen. Aus der Aufgabenstellung geht hervor, dass es um den Übergang von einer bildlichen zu einer arithmetischen Darstellung geht.

Offene Fragen

1. Beim Wechsel von der bildlichen Darstellung zur „Mathematik“ gibt es Differenzierungen sowohl theoretischer als auch empirischer Natur. Für die Umkehrung findet man dies eher selten.
2. Bei derartigen Untersuchungen bleibt die Leistungsstärke der Kinder meist unberücksichtigt. In Einzelfällen zeigt sich aber, dass leistungsstarke Kinder nicht immer in der Lage sind, Punktmuster angemessen zu deuten und andererseits auch schwache Kinder zu Strukturierungen fähig sind. Daher muss man beim Begabungsmerkmal „Fähigkeit zum Wechsel der Repräsentationsebene“ genauer schauen, wo die Unterschiede in den Leistungsstärken liegen.
3. Über die Art des Wechsels wird wenig gesagt. In den meisten Arbeiten sind Anfangs- und Endzustand beschrieben, die Art des Übergangs ist offen.

Beobachtungen im Rahmen empirischer Untersuchungen

Beim Übergang von Punktmustern zu arithmetischen Darstellungen findet man insbesondere im Zusammenhang mit der Aufgabe „Fortsetzen von Dreieckszahlen“ (Bilder sind vorgegeben, Anzahlen müssen bestimmt werden) verschiedene Qualitäten beim Wechsel der Repräsentationsebenen:

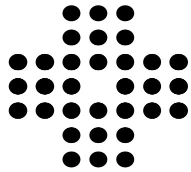
- Anzahlbestimmung über Durchzählen der Punkte in jedem Muster
- Anzahlbestimmung mit Strukturausnutzung, geschicktes Zählen
- Benutzung des Ergebnisses des vorhergehenden Dreiecks
- Erkennen von Aufgaben
- ...

Sucht man Beispiele für den umgekehrten Weg (von der Zahldarstellung zur bildlichen Darstellung), ist man angewiesen auf Beispiele aus dem Bereich der Veranschaulichungsmittel. Lässt man etwa 64-48 mit Hilfe von Material ermitteln, so erhält man ebenfalls unterschiedliche Qualitäten:

- Kein Ergebnis
- Darstellung der Aufgabe

- Darstellung des Kopfrechenweges
- Materialhandlung, die deutlich unabhängig vom Kopfrechenweg ist
- ...

Darüber hinaus macht man eine weitere zentrale Beobachtung: Um etwa die Folge der Dreieckszahlen zu ermitteln, muss man immer wieder vom Bild zur Anzahl (etwa aus einem vorhergehenden Dreieck) wechseln, beim Wechsel handelt es sich nicht um einen Sprung sondern eher um ein Wechselspiel, das im folgenden Beispiel genauer erläutert wird.



Es geht darum die Anzahl der Punkte im folgenden Muster möglichst mit Hilfe einer geeigneten Aufgabe zu bestimmen:

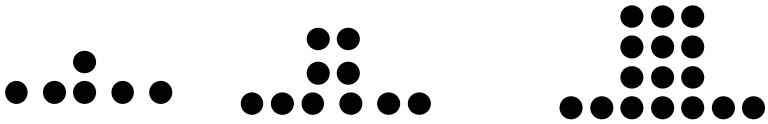
Zuerst wird man sich überlegen, in welche Teile man das „Kreuz" zerlegen kann. Man kann z. B. die 4 herausragenden Äste sehen und feststellen, dass es 4x(3+3) Punkte sind. Dann muss man wieder zum Bild wechseln und das Quadrat in der Mitte betrachten, usw. Insbesondere bei komplexeren Strukturen wird deutlich, dass man zwischen den beiden Darstellungsformen immer wieder hin- und herwechseln muss.

Man kann zusammenfassen, dass man es in beiden Richtungen beim Wechsel der Repräsentationsebenen mit unterschiedlichen Komponenten zu tun hat, die aber nicht hierarchisch zu sehen sind und die jedes Kind aufgabenabhängig erreichen kann. Außerdem kann man davon ausgehen, dass es sich bei dem Wechsel eher um ein Wechselspiel oder um eine Spirale als um einen direkten Wechsel handelt.

Geplantes Forschungsvorhaben

Ziel des Forschungsvorhabens ist es, unter Berücksichtigung der oben angeführten Beobachtungen, die drei angegebenen Fragen zu bearbeiten. Dazu ist vorgesehen, Punktmusterfolgen als Beispiel für bildlich gegebene Darstellungen zu wählen und dual dazu arithmetische Folgen als Beispiel für symbolisch gegebene Darstellungen. Aufgabe der Kinder soll sein, die Anzahl der Punkte geschickt zu bestimmen und möglichst eine geeignete Aufgabe zu suchen, mit der man die Anzahl der Punkte bestimmen kann. Zu den arithmetischen Folgen sollen die Kinder Punktmuster finden, die die arithmetischen Gesetzmäßigkeiten möglichst gut widerspiegeln. Mit Hilfe von Interviews soll herausgearbeitet werden, welche Stufungen auf jeder Seite möglich sind und wie das Wechselspiel zwischen beiden Darstellungen jeweils zu beschreiben ist.

Es ist vorgesehen, diese Aufgaben sowohl mit leistungsstarken als auch eher leistungsschwachen Kindern (Viertklässler) zu bearbeiten, um mögliche Unterschiede auch qualitativ zu beschreiben. Langfristig sollen dann auch ältere und jüngere Kinder berücksichtigt werden.



Vorgesehen ist, Folgen von komplexerer Gestalt zu wählen, etwa das angegebene Muster in Anlehnung an eine Aufgabe von Lorenz (1994). Es lässt verschiedene Möglichkeiten der Deutungen zu, man kann dadurch letztendlich sogar ein einfaches arithmetisches Gesetz ableiten. In allgemeiner Form etwa $n^2+4+n=(n+1)n+4$. Für beide Seiten der Gleichung gibt es analoge geometrische Interpretationen.

Auf Seiten der Zahlenfolgen ist vorgesehen, eine zu wählen, die mehrere Gesetzmäßigkeiten zulässt. Nach den ersten Versuchen erscheint z. B. die Folge 3, 8, 15, 24 zweckmäßig. Als Gesetzmäßigkeiten erhält man: $n^2–1$, $(n-1)x(n+1)$ oder abwechselnd eine Dreier- und eine Achterzahl wie es ein Kind formuliert hat. Zu untersuchen ist, in welcher Weise sich diese arithmetischen Zusammenhänge im Punktmuster wiederfinden und welche Stufungen dabei von Kindern erreicht werden.

Literatur:

Bruner, J. S., Olver R. R., Greenfield, Studien zur kognitiven Entwicklung, Ernst Klett Verlag Stuttgart, 1971

Dörfler, W., Meaning: Image Schemata and Protocols, Proceedings of the 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Hrsg. Furinghetti, Fulvia; Boero, Paolo, 1991, S. 17-32

Käpnick, F., Mathematisch begabte Kinder, Greifswalder Studien zur Erziehungswissenschaft, Bd. 5, Peter Lang Europäischer Verlag der Wissenschaften, Frankfurt (Main), 1998

Kießwetter, K., Das Hamburger Modell und sein mathematikdidaktisches Umfeld, in: Das Hamburger Modell zur Identifizierung und Förderung von mathematisch besonders befähigten Schülern, Hrsg. K. Kießwetter, Berichte aus der Forschung, Heft 2, Universität Hamburg, FB Erziehungswissenschaft 1988, S. 6-34

Lorenz, J. H., Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht – Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung. Göttingen, Hogrefe, 1992

Lorenz, J. H., Arithmetische Anregungen, in: Auch die leistungsstarken Kinder fördern, Hrsg.: R. Christiani, Cornelsen Scriptor, Berlin 1994, S. 89-105

Otter, R., Kießwetter, K. Auch Textaufgaben gewinnen an Attraktivität, wenn man sie in ihre natürliche Vernetzung stellt, Mathematik lehren, Jun. 1993, No. 58, S. 8-10

Söbbeke, E., Building visual structures in arithmetical knowledge – a theoretical characterization of young students´ „visual structurizing ability (VISA)", Cerme 2005, Barcelona

Sternberg, R. J., A componential theory of intellectual giftedness, in: The gifted child quarterly, Heft 25, 1981, S. 86-93

Waldmann, M., Weinert, F. E., Intelligenz und Denken, Hogrefe, Göttingen, 1990