EICHLER, Andreas; KRAUSS, Stefan; KUCH, Selina; RIPS, Matthias;
BÜCHTER, Theresa; STEIB, Nicole; BINDER, Karin,
BÖCHERER-LINDER, Katharina & VOGEL, Markus
Kassel, Regensburg, München, Freiburg, Heidelberg

Training Bayesianischen Denkens - Erkenntnisse aus der Schulung von Studierenden in Medizin und Jura für eine Förderung in der Schule

Mit der Formel von Bayes Hypothesen in unsicheren Situationen bewerten zu können, ist wesentlicher Bestandteil des probabilistischen Denkens (Gal, 2005), das bereits in der Schule angelegt werden soll (KMK, 2015). Daher werden in der Mathematikdidaktik seit Jahrzehnten Ansätze zum Verständnis Bayesianischer Situationen (d.h. Situationen, in denen die Formel von Bayes angewendet werden kann; Büchter et al., 2022) diskutiert (z.B. Riemer, 1991). Über die Schule hinaus ist die Formel von Bayes in vielen Professionen wie Medizin oder Jura sowie im Alltag hoch relevant (Ashby, 2006; Gigerenzer, 2013; Satake & Murray, 2014).

Vielfältige Forschungsergebnisse zeigen allerdings, dass Bayesianische Situationen häufig falsch eingeschätzt werden – selbst von Expert:innen aus Fachbereichen wie Medizin und Jura (McDowell & Jacobs, 2017). Untersucht wurde hier insbesondere die Fähigkeit, mit Hilfe der Formel von Bayes einen positiv-prädiktiven Wert (PPV), d.h. die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(H|I)$, zu bestimmen, wenn Informationen zu einer Basisrate, $P(H)$, zu einer Richtig-Positiv-Rate, $P(I|H)$, und zu einer Falsch-Positiv-Rate, $P(I|\bar{H})$, gegeben sind. H ist hier eine Hypothese wie etwa krank zu sein, und I eine Information wie etwa ein positives Ergebnis in einem Diagnosetest. Die Fähigkeit, den PPV zu bestimmen, wird als Bayesianisches Denken bezeichnet.

Förderung des (erweiterten) Bayesianischen Denkens bei Studierenden von Medizin und Jura im DFG-Projekt TrainBayes

Auf der Basis der Forschungsergebnisse zu den Schwierigkeiten von Expert:innen in Medizin und Jura, Bayesianische Situationen korrekt zu bearbeiten, wurde im bereits abgeschlossenen DFG-Projekt TrainBayes (vgl. www.bayesian-reasoning.de) ein Training zur Förderung des Bayesianischen Denkens entwickelt (Büchter et al., 2022). Dabei wurde ein erweitertes Bayesianisches Denken adressiert, bei dem neben dem Berechnen des PPV (*Calculation*) auch die Fähigkeit, den Einfluss von Änderungen der Parameter $P(H)$, $P(I|H)$ und $P(I|\bar{H})$ auf den PPV einschätzen zu können (*Covariation*), sowie die adäquate Kommunikation (*Communication*; vgl. Büchter et al., 2022; 2024) geschult. Um optimale Aspekte eines Trainings zum

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

Bayesianischen Denken identifizieren zu können, wurden vier konkurrierende Versionen eines Trainings als Bedingungen einer experimentellen Studie sowie eine Kontrollbedingung entwickelt. Die Bedingungen nutzen die beiden aus der Forschung bekannten hilfreichen Strategien im Bayesianisches Denken. Die erste Strategie umfasst die Verwendung natürlicher Häufigkeiten (Gigerenzer & Hoffrage, 1995): Eine Wahrscheinlichkeit wie etwa $P(H)$ wird auf eine imaginäre Stichprobe bezogen und als ein Paar von absoluten Häufigkeiten angegeben. Die Wahrscheinlichkeit $P(H)$ entspricht dann z.B. a Personen aus einer Stichprobe mit b Personen, bei denen die Hypothese H zutrifft (z.B. in einem medizinischen Kontext: 100 von 1000 Personen sind krank; vgl. Krauss et al., 2020). Die zweite Strategie betrifft die Visualisierung der statistischen Information. Hier haben sich der Doppelbaum und das Einheitsquadrat in Verbindung mit natürlichen Häufigkeiten in Studien ohne Training als besonders wirksam erwiesen (Binder et al., 2015; Böcherer-Linder & Eichler, 2019). Daher wurden zwei Optimaltrainings mit Doppelbaum und Einheitsquadrat mit hoher Parallelität entwickelt. Als zusätzliche Trainings mit einer Unterstützungsstrategie wurden ein Training mit natürlichen Häufigkeiten aber ohne Visualisierung und ein Training mit einfachem Baum und Wahrscheinlichkeiten als Informationsformat entwickelt.

Die digitalen Trainings wurden mit 515 Studierenden in Medizin und Jura in einem Pre-Post-Follow-Up-Design durchgeführt. Alle drei Tests enthielten jeweils Aufgaben zur *Calculation, Covariation* und *Communication* in Bayesianischen Situationen. Wesentliche Ergebnisse sind:

- Alle Trainings haben erhebliche Wirkung auf den Aspekt *Calculation*. Das Training mit dem Doppelbaum ist hoch effektiv bezogen auf die kurz- und mittelfristige Leistung zur *Calculation*. Das Optimaltraining mit Einheitsquadrat und die Kontrolltrainings haben ebenfalls kurz- und mittelfristige Wirkung auf den Aspekt *Calculation*, allerdings schwächer als die des Doppelbaumtrainings (Steib et al., 2025). Qualitative Rückmeldungen der Teilnehmenden zeigen, dass das Training mit Einheitsquadrat vor allem deswegen nicht langfristig wirkte, da sich die Teilnehmenden nicht an die genaue Erstellung dieser (neuartigen) Struktur erinnern konnten.
- Unerwartet hat sich die schulcurriculare Umsetzung mit Wahrscheinlichkeiten als Informationsformat statistischer Daten besonders bei Proband:innen mit hoher mathematischen Vorleistung als effektiv erwiesen.
- Die Wirkung der Trainings zum Aspekt *Covariation* war im ersten DFG-Projekt (mit Medizin- und Jurastudierenden) weniger deutlich messbar. Zuwächse beschränken sich hier auf Veränderungen bei der Basisrate.

- Die Wirkung der Trainings ist (abgesehen vom Doppelbaum) stark abhängig von den Eingangsvoraussetzungen, z.B. hinsichtlich der letzten Mathematiknote, wobei sich auch Interaktionen mit den verwendeten Visualisierungen ergeben haben (Steib et al., 2025).

Folgerungen für eine Intervention in der Schule zur Förderung des Bayesianischen Denkens im DFG-Projekt TrainBayesS

Das DFG-Folgeprojekt TrainBayesS hat zum Ziel, möglichst optimale Bedingungen für den Unterricht zum Bayesianischen Denken in der Schule auf der Basis der oben genannten Ergebnisse zu entwickeln und zu erforschen. Der Unterricht soll dabei im Klassenverband, aber digital erfolgen. Aus den Ergebnissen der vorangegangen Trainingsstudie mit Mediziner:innen und Jurist:innen ergeben sich dabei folgende Designanforderungen für die Unterrichtseinheiten:

- Die Bedingung mit dem Einheitsquadrat wird in dem Sinne umgestaltet, dass nicht mehr auf vollständige Parallelität zum Training mit dem Doppelbaum geachtet wird. Beide Bedingungen werden mit natürlichen Häufigkeiten als Optimalbedingungen entwickelt.
- Da die schulcurriculare Bedingung mit Wahrscheinlichkeiten im vorangegangenen Projekt unerwartet effektiv war, werden die Bedingungen mit Doppelbaum und Einheitsquadrat ebenfalls mit Wahrscheinlichkeiten als Informationsformat als Kontrollbedingungen entwickelt.
- Da der Aspekt *Covariation* im vorherigen Projekt nicht zufriedenstellend gefördert werden konnte, wird die Unterrichtseinheit zu *Covariation* stärker zeitlich getrennt. In der ersten Einheit wird auf *Calculation* fokussiert, aber auch der Aspekt der *Covariation* vorbereitet. In der zweiten Einheit wird neben *Covariation* auch der Aspekt *Communication* adressiert.
- Da die Eingangsvoraussetzungen im ersten Projekt mit den Visualisierungsbedingungen interagiert haben, sollen die Eingangsvoraussetzungen der Schüler:innen in TrainBayesS umfangreicher erhoben werden.

Im Vortrag werden die zentralen Ergebnisse aus dem Projekt TrainBayes zusammengefasst und Folgerungen für das Design im Projekt TrainBayesS gezogen (u.a. eine Erweiterung von fünf auf acht Experimentalbedingungen).

Projektförderung: Das vorangegangene Projekt TrainBayes wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) gefördert (EIC773/4-1 und KR2032/6-1). Das aktuelle Projekt TrainBayesS wird von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) gefördert (EIC773/4-2, KR2032/6-2, BI 2335/2-2, VO 2649/2-2).

Literatur

Ashby, D. (2006). Bayesian statistics in medicine: A 25 year review. *Statistics in medicine, 25(21)*, S. 3589–3631. https://doi.org/10.1002/sim.2672

Binder, K., Krauss, S., & Bruckmaier, G. (2015). Effects of visualizing statistical information - an empirical study on tree diagrams and 2 × 2 tables. *Frontiers in Psychology, 6, 1186*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.01186

Böcherer-Linder, K., & Eichler, A. (2019). How to improve performance in Bayesian inference tasks: A comparison of five visualizations. *Frontiers in Psychology, 10, 267*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2019.00267

Büchter, T., Eichler, A., Böcherer-Linder, K., Vogel, M., Binder, K., Krauss, S., & Steib, N. (2024). Covariational reasoning in Bayesian situations. *Educational Studies in Mathematics, 115(3)*, S. 481–505. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10274-5

Büchter, T., Eichler, A., Steib, N., Binder, K., Böcherer-Linder, K., Krauss, S., & Vogel, M. (2022). How to train novices in Bayesian reasoning. *Mathematics, 10(9), 1558*. https://doi.org/10.3390/math10091558

Gal, I. (2005). Towards "Probability Literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. In G. A. Jones (Hrsg.), *Exploring probability in school* (S. 39–63). Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_3

Gigerenzer, G. (2013). How I got started: Teaching physicians and judges risk literacy. *Applied Cognitive Psychology, 28(4)*, S. 612–614. https://doi.org/10.1002/acp.2980

Gigerenzer, G., & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review, 102(4)*, S. 684–704. https://doi.org/10.1037/0033-295X.102.4.684

KMK (2015). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die allgemeine Hochschulreife*. Wolters Kluwer.

Krauss, S., Weber, P., Binder, K., & Bruckmaier, G. (2020). Natürliche Häufigkeiten als numerische Darstellungsart von Anteilen und Unsicherheit – Forschungsdesiderate und einige Antworten. *Journal für Mathematikdidaktik, 41(2)*, S. 485–521. https://doi.org/10.1007/s13138-019-00156-w

McDowell, M., & Jacobs, P. (2017). Meta-analysis of the effect of natural frequencies on Bayesian reasoning. *Psychological Bulletin, 12(143)*, S. 1273–1312. https://doi.org/10.1037/bul0000126

Riemer, W. (1991). *Stochastische Probleme aus elementarer Sicht*. BI-Wiss.-Verl.

Satake, E., & Murray A., V. (2014). Teaching an application of Bayes' rule for legal decision-making: Measuring the strength of evidence. *Journal of Statistics Education, 22(1)*, S. 1–29.

Steib, N., Büchter, T., Eichler, A., Binder, K., Krauss, S., Böcherer-Linder, K., Vogel, M., & Hilbert, S. (2025). How to teach Bayesian reasoning: An empirical study comparing four different probability training courses. *Learning and Instruction, 95, 102032*. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2024.102032