LUNDT, Sarah; DAMRAU, Milena & UFER, Stefan
LMU München

Inwiefern verstehen Schüler*innen die Funktion von Beweisen für die Gültigkeit von Allaussagen?

Eine Besonderheit der Mathematik ist, dass es Aussagen gibt, die für alle, möglicherweise unendlich viele, Elemente einer bestimmten Menge ohne Ausnahme gelten. Diese *Allaussagen* sind von der Form „Für alle Objekte *o* innerhalb einer gegebenen Menge *M* gilt die Eigenschaft *P(o)*.“ (Damrau, 2023). Da gültige Allaussagen für alle Objekte *o* einer gegebenen Menge *M* gelten, gibt es keine Gegenbeispiele zu diesen Aussagen, d.h. keine Objekte *o* der Menge *M*, für die *P(o)* nicht gilt. Die Gültigkeit einer Allaussage ist somit äquivalent zur Nicht-Existenz von Gegenbeispielen.

Dass viele Lernende Schwierigkeiten mit dem Verständnis von dieser Äquivalenz haben, zeigte exemplarisch Chazan (1993) anhand von einzelnen Lernenden, die absolut von der Gültigkeit einer Allaussage überzeugt waren, aber weniger stark überzeugt waren, dass es kein Gegenbeispiel gibt. Ähnliche Resultate berichtete Damrau (2023) für Studienanfänger*innen, diese zeigten in etwa einem Drittel aller Beobachtungen unterschiedlich starke Überzeugungen von der Gültigkeit einer Allaussage und der Nicht-Existenz von Gegenbeispielen. Sie konnte eine gewisse Variabilität dieser Schwierigkeiten auf Eigenschaften verschiedener Allaussagen zurückführen.

Eine Möglichkeit, diesen Schwierigkeiten zu begegnen, wäre, die Funktion von Beweisen für die Gültigkeit von Allaussagen zu betrachten. Um eine Allaussage zu beweisen (Verifikationsfunktion von Beweisen, de Villiers, 1990), wird in der Regel ein festes, aber beliebiges (*generisches*) Objekt aus der Menge *M* ausgewählt und durch eine Variable (z. B. *x*) dargestellt. Mithilfe von vereinbarten Schlussschemata und akzeptierten Aussagen aus einer Rahmentheorie zeigt ein gültiger Beweis (Stylianides, 2007), dass alle Objekte *o*, auf die *x* verweist, die Eigenschaft *P(x)* haben. Da keine spezifischen Eigenschaften eines bestimmten Objekts aus *M* verwendet werden, sondern nur Eigenschaften, die für alle Objekte *o* aus *M* gelten, zeigt der Beweis die Gültigkeit der Allaussage für alle Objekte *o* aus der Menge *M*.

Durch diese Verwendung von Variablen schließt ein Beweis gleichzeitig auch die Existenz von Gegenbeispielen aus. Potentielle Gegenbeispiele, d.h. Objekte *c* aus der Menge *M*, für die man glaubt, dass *P(c)* nicht gilt, können für die Variable *x* in den Beweis eingesetzt werden. Dies führt zu einem konkreten Beweis, der zeigt, dass die Eigenschaft *P(c)* auch für dieses bestimmte Objekt *c* gilt. Objekt *c* ist also kein Gegenbeispiel. Wir fassen diese Konzepte und Beziehungen in dem folgenden konzeptionellen Rahmen zusammen

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

(Abb. 1). Die Gültigkeit des Beweises impliziert die Gültigkeit der Allaussage und die Nicht-Existenz von Gegenbeispielen, aber nicht umgekehrt.

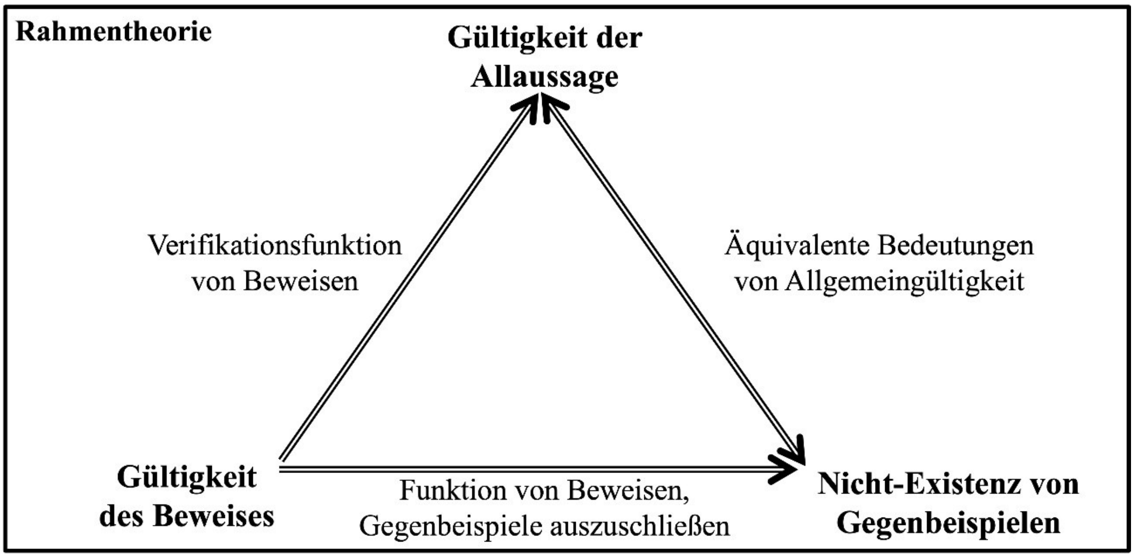

Abb. 1: Konzeptioneller Rahmen

In der vorliegenden Studie wurde untersucht, inwiefern Schüler*innen konsistente Überzeugungen zu der Gültigkeit einer Allaussage, der Nicht-Existenz von Gegenbeispielen und der Gültigkeit des Beweises zeigen.

Methodik

N = 78 Achtklässler*innen bearbeiteten in einer 60-minütigen Datenerhebung Aufgaben zu mindestens einer von zwei Allaussagen: (A) „Die Summe von zwei beliebigen geraden Zahlen ist immer gerade.“, (B) „Für jede natürliche Zahl n ist der Wert des Terms $n^3 - n$ immer durch 6 teilbar.“. Wir nehmen an, dass Aussage A inhaltlich vertrauter und für die Konstruktion oder Untersuchung von Beispielen leichter zugänglich ist. Die Schüler*innen erhielten vorab eine Einführung in die Rahmentheorie beider Aussagen.

Für jede der beiden Aussagen lasen die Schüler*innen zunächst die Allaussage und einen zugehörigen variablenbasierten Beweis, ohne Informationen darüber zu erhalten, ob die Aussage und der Beweis gültig sind. Anschließend gaben die Schüler*innen ihre Überzeugung bezüglich der Gültigkeit der Allaussage, der Nicht-Existenz von Gegenbeispielen und der Gültigkeit des Beweises (Abb. 1) auf einer vierstufigen Skala (absolute und relative Überzeugung dafür oder dagegen) an und wurden gebeten, ihre Antworten schriftlich zu begründen.

Ergebnisse

Für Aussage A war jeweils die Mehrheit der Schüler*innen absolut überzeugt, dass die Allaussage gültig ist, dass es kein Gegenbeispiel gibt und dass der Beweis gültig ist. In Bezug auf Aussage B waren jeweils die meisten Schüler*innen relativ überzeugt, dass die Allaussage gültig ist und dass es kein Gegenbeispiel gibt. Bezüglich des Beweises waren gleich viele Schüler*innen relativ von dessen Gültigkeit bzw. Nicht-Gültigkeit überzeugt.

Vergleicht man die Überzeugung bezüglich der Gültigkeit der Allaussage und der Nicht-Existenz von Gegenbeispielen, so waren bezüglich Aussage A etwa zwei Drittel und bezüglich Aussage B die Hälfte der Schüler*innen gleichermaßen überzeugt. Die übrigen Schüler*innen zeigten unterschiedlich starke Überzeugungen. In Bezug auf Aussage A war die Mehrheit dieser Schüler*innen mehr von der Nicht-Existenz von Gegenbeispielen überzeugt, für Aussage B hingegen mehr von der Gültigkeit der Allaussage.

Bezüglich der Gültigkeit des Beweises und der Gültigkeit der Allaussage war bei beiden Aussagen etwa die Hälfte der Schüler*innen gleichermaßen überzeugt. Jeweils circa ein Drittel der Lernenden war mehr von der Gültigkeit der Allaussage überzeugt. Die übrigen Schüler*innen waren stärker von der Gültigkeit des Beweises überzeugt.

Hinsichtlich der Überzeugung von der Gültigkeit des Beweises und der Nicht-Existenz von Gegenbeispielen war bezüglich beider Aussagen etwa die Hälfte der Schüler*innen gleichermaßen überzeugt. Bezüglich Aussage A waren 40% und bezüglich Aussage B ein Viertel der Schüler*innen mehr von der Nicht-Existenz von Gegenbeispielen überzeugt. Die übrigen Schüler*innen waren stärker von der Gültigkeit des Beweises überzeugt.

Ihre Überzeugung bezüglich der Gültigkeit von Aussage A begründeten die meisten Schüler*innen mit einer Wiederholung beziehungsweise Umformulierung der Aussage oder einem Bezug auf den gegebenen Beweis. Bezüglich Aussage B verwendeten die meisten Schüler*innen einen Bezug auf den gegebenen Beweis oder empirische Argumente in Form von unterstützenden Beispielen. Unter den Schüler*innen, die einen Bezug auf den gegebenen Beweis nutzen, gab es auch Schüler*innen, die die (angenommene) Nicht-Gültigkeit der Allaussage mit der (angenommenen) Nicht-Gültigkeit des Beweises begründeten. Von den Schüler*innen, die von der Gültigkeit des Beweises überzeugt waren, verwendeten nur wenige die Gültigkeit des Beweises, um die Gültigkeit der Allaussage zu begründen.

Die Überzeugung von der Nicht-Existenz von Gegenbeispielen zu Aussage A begründeten die meisten Schüler*innen mit einem Bezug auf den gegebenen Beweis, einer Wiederholung der Aussage oder empirischen Argumenten. Bezüglich Aussage B griffen die meisten Schüler*innen auf empirische Argumente zurück. Insbesondere nannte ein Drittel der Schüler*innen konkrete (vermeintliche) Gegenbeispiele. Diese Gegenbeispiele basierten auf inhaltlichen Fehlern (z.B. 0 sei nicht durch 6 teilbar). Insbesondere waren diese Schüler*innen zum Teil dennoch von der Gültigkeit des Beweises überzeugt.

Diskussion

Der substanzielle Anteil der Antworten, in denen die Gültigkeit der Allaussage bzw. die Nicht-Existenz von Gegenbeispielen mindestens so überzeugend eingestuft wurde, wie die Gültigkeit des Beweises, ist mit einem korrekten Verständnis der Funktionen von Beweisen vereinbar. Stärkere Überzeugungen zur Gültigkeit der Allaussage bzw. der Nicht-Existenz von Gegenbeispielen weisen jedoch darauf hin, dass alternative Evidenzquellen für die Akzeptanz der Aussage herangezogen werden. Ein substanzieller Teil von Antworten bewertete die Gültigkeit des Beweises als überzeugender als die Gültigkeit der Aussage bzw. die Nicht-Existenz von Gegenbeispielen, was auf ein unvollständiges Verständnis der beiden entsprechenden Funktionen von Beweisen hinweist. Wie bei Damrau (2023) ist bei einem Vergleich zwischen den verschiedenen Aussagen zu erkennen, dass bezüglich der bekannteren Aussage mehr Schüler*innen konsistente Überzeugungen zeigen, was bei einer Nutzung übergreifenden Wissens zu Beweisen nicht auftreten sollte.

Zusammenfassend scheint nicht nur die Äquivalenz zwischen der Gültigkeit einer Allaussage und der Nicht-Existenz von Gegenbeispielen Schwierigkeiten zu bereiten. Auch die Funktionen von Beweisen für die Gültigkeit von Allaussagen bzw. dem Ausschließen von Gegenbeispielen bereiten erkennbare Probleme. Die Begründungen der Schüler*innen für die Gültigkeit der Allaussage und der Nicht-Existenz von Gegenbeispielen sprechen dafür, dass die Schüler*innen eher ihr (teilweise lückenhaftes) Verständnis des mathematischen Inhalts der Aussage heranziehen, als sich auf grundlegende Funktionen von Beweisen zu beziehen. Inwiefern hier das objektive und selbsteingeschätzte Verständnis des Beweises sowie die Rolle von Variablen im Beweis relevant sind, soll in weiteren Analysen untersucht werden.

Literatur

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *24(4)*, 359-387.

Damrau, M. (2023). *Understanding the generality of mathematical statements: An experimental study at the transition from school to university*. Springer.

de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, *24*, 17-24.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38(3)*, 289-321.