DÖLLER, Victoria & GÖTZ, Stefan
Wien

Bedingte relative Häufigkeiten in Einheitsquadraten

Motivation

Der neue Lehrplan Mathematik in Österreich für die Sekundarstufe I sieht unter anderem „Darstellen, Ergänzen und Interpretieren von absoluten und relativen Häufigkeiten in Kreuztabellen, insbesondere in Vierfeldertafeln“ vor. Einheitsquadrate sind zentrale Werkzeuge zur Untersuchung von Fragestellungen in diesem Zusammenhang im Unterricht. Dabei spielen bedingte relative Häufigkeiten eine besondere Rolle, sie bereiten bedingte Wahrscheinlichkeiten, den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und das Bayes'sche Theorem vor.

Eine stoffdidaktische Analyse anhand eines Beispiels

Einheitsquadrate sind Veranschaulichungen von Zusammenhängen zweier nominal skalierter Merkmale mit je zwei Ausprägungen, sie besitzen eine hohe Dichte an Informationen. In einer Vierfeldertafel werden üblicherweise entsprechende Daten in übersichtlicher Form festgehalten: Tabelle 1 zeigt ein Beispiel für die Merkmale „Geschlecht“ mit den Ausprägungen „männlich“ und „weiblich“ und „Anstellungsverhältnis“ mit den Ausprägungen „Vollzeit“ und „Teilzeit“ (Statistik Austria: https://www.statistik.at/fileadmin/pages/263/11_Teilzeitarbeit_Teilzeitquote_2022.ods, Tabelle 5).

	männlich (M)	weiblich (W)
Vollzeit (V)	60	99
Teilzeit (T)	23	98

Tabelle 1: Anzahl (in Tausend, gerundet) die voll- und teilzeitbeschäftigten Personen im Bereich Erziehung und Unterricht im Jahr 2022 in Österreich

In Abbildung 1 sind die zwei von der Software *ProVis* generierten zugehörigen Einheitsquadrate zu den Daten in Tabelle 1, links mit dem Geschlecht als dominierendes Merkmal, rechts mit dem Anstellungsverhältnis, zu sehen. Die Konstruktion ist z. B. Eichler & Vogel (2013, S. 81 f.) zu entnehmen: die Flächen der Teilrechtecke entsprechen den konjunktiven (relativen) Häufigkeiten, ihre horizontalen Seitenlängen den relativen Häufigkeiten des jeweils dominierenden Merkmals, die vertikalen den bedingten relativen Häufigkeiten. Es gilt zum Beispiel für das rechte obere Rechteck im rechten Einheitsquadrat von Abbildung 1: $h(M|T) \cdot h(T) = h(M \cap T)$, dabei steht $h(.)$ für eine relative Häufigkeit. In Abbildung 1 rechts erkennen wir konkret $h(M|T) = 0.19 = \frac{h(M \cap T)}{h(T)} = \frac{23}{280} : \frac{121}{280}$. Außerdem sind die Randsummen in

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

Abbildung 1 (links) außerhalb des Quadrats angegeben.

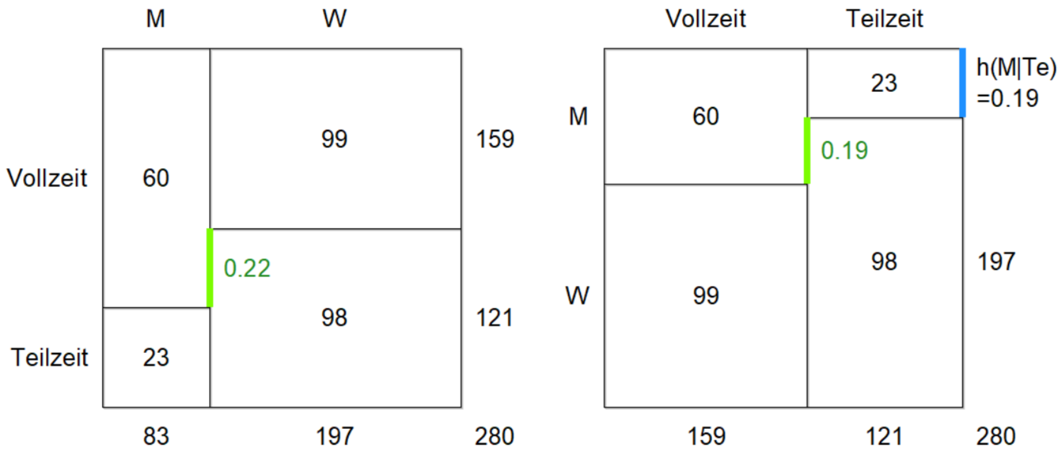

Abbildung 1: Einheitsquadrate zu den Daten aus Tabelle 1

Die zugrundeliegende Idee der Bedingung, nämlich die Einschränkung (im Beispiel Teilzeitbeschäftigte im Bereich Erziehung und Unterricht) der Grundgesamtheit (im Beispiel voll- und teilzeitbeschäftigte Personen im Bereich Erziehung und Unterricht), ist im Einheitsquadrat visuell nachvollziehbar: eine „Spalte“ repräsentiert die neue, eingeschränkte Gesamtheit, auf die man sich bezieht. Die Summe der Flächeninhalte der Teilrechtecke einer „Zeile“ ergibt die (relative) Häufigkeit einer Ausprägung des nicht dominierenden Merkmals. Damit werden das Konzept der bedingten Wahrscheinlichkeit und der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit vorbereitet. Der Satz von Bayes schließlich setzt die Fläche eines Teilrechteckes in Abbildung 1 links ins Verhältnis zur zugehörigen „Zeile“, um eine bedingte relative Häufigkeit in Abbildung 1 rechts zu erhalten: es geht also um einen Flächenvergleich im Einheitsquadrat (Eichler & Vogel, 2013, Abschnitt 3.1).

Für das Experimentieren und Argumentieren bietet das Einheitsquadrat zusätzlich noch eine weitere Besonderheit – ein grafisches Maß für die Abhängigkeit der dargestellten Merkmale A und B, das sogenannte Assoziationsmaß. Dieses ist direkt im Einheitsquadrat am Höhenunterschied der unteren (oder oberen) beiden Rechtecke visuell ablesbar und kann über deren Seitenlängen berechnet werden: $\mathcal{A}_E = h(B_1|A_1) - h(B_1|A_2)$, A_1und A_2 bzw. B_1 und B_2 sind dabei die möglichen Merkmalsausprägungen der Merkmale A und B (Eichler & Vogel, 2013, S. 84). Das Assoziationsmaß kann Werte zwischen -1 und 1 annehmen. Ein Wert nahe bei oder gleich null, bzw. ein besonders geringer oder verschwindender Höhenunterschied der Rechtecke im Quadrat ist ein Indikator für die Unabhängigkeit der Merkmale. In Abbildung 1 links lässt das Assoziationsmaß von $0.22 = h(V|M) - h(V|W)$ auf einen Zusammenhang von Geschlecht und Beschäftigungsausmaß schließen.

Einen weiteren Informationsgewinn bietet die umgekehrte Reihung der Merkmale A und B. Mit den Daten aus Tabelle 1 können durch Transponieren der Matrix zwei unterschiedliche Einheitsquadrate gebildet werden, siehe Abbildung 1. Während im linken Quadrat augenscheinlich ist, dass der Frauenanteil im Bereich Erziehung und Unterricht wesentlich höher ist (rechte Hälfte größer als linke), ist im zweiten ersichtlich, dass mehr Personen in diesem Bereich Vollzeit arbeiten als Teilzeit. Wir nennen dieses zweite Quadrat das transponierte Einheitsquadrat $\hat{E}$ des ursprünglichen Quadrats E. Als komplementierende Darstellungen der gleichen Daten hängen auch die Assoziationsmaße $\mathcal{A}_E$ und $\mathcal{A}_{\hat{E}}$ der beiden Quadrate E und $\hat{E}$ zusammen: $\mathcal{A}_E \cdot h(A_1) \cdot h(A_2) = \mathcal{A}_{\hat{E}} \cdot h(B_1) \cdot h(B_2)$. Für Abbildung 1 ergibt sich $0.22 \cdot h(M) \cdot h(W) = \mathcal{A}_{\hat{E}} \cdot h(V) \cdot h(T)$ und damit $\mathcal{A}_{\hat{E}} = 0.19$.

Bedarf einer Digitalisierung der Darstellungsmethode Einheitsquadrat

Ein Hindernis für den schulischen Einsatz von Einheitsquadraten stellt ihre aufwändige Konstruktion dar. Es müssen mehrere bedingte Häufigkeiten berechnet und diese in ein leeres Quadrat (richtig skaliert) übertragen werden. Böcherer-Linder et al. (2018) untersuchen neben psychologischen und didaktischen Überlegungen auch den praktischen Einsatz von Einheitsquadraten im Unterricht. Es wird dort für eine grobe Skizzierung der Verhältnisse der Flächeninhalte argumentiert. In welchem Ausmaß diese die Schüler:innen wirklich entlasten würde bleibt allerdings offen. Jedenfalls kann mit Hilfe eines digitalen Werkzeugs die Konstruktion von Einheitsquadraten wesentlich effizienter durchgeführt werden. Durch die augenblickliche Visualisierung werden die Schüler:innen zum Experimentieren angeregt und sie können ausprobieren, wie sich einzelne Änderungen in den Daten auf die Flächen und Verhältnisse der Merkmale auswirken. Zum Beispiel kann mit den Daten aus dem vorigen Abschnitt untersucht werden, wie sich die Vollzeit-Quote bei den Frauen bzw. Männern verändern müsste, sodass sich das Assoziationsmaß null annähert und ein Gleichgewicht der (beruflichen) Arbeitsbelastung zwischen den Geschlechtern erreicht wird. Dies stellt bekanntlich eine oft geforderte Voraussetzung für ein Gleichgewicht der privaten, familiären Arbeitsbelastung zwischen den Geschlechtern dar.

Bea & Scholz (1995, S. 306) und auch Eichler & Vogel (2013, S. 210) sehen diese besondere Stärke der numerischen und grafischen Information des Einheitsquadrats für den Verständnisausbau wesentlich gekoppelt an eine dynamische Parameteränderung. Bei Vogel & Eichler (2014, S. 137) wird der computergestützten, dynamischen Darstellung eines Einheitsquadrats darüber hinaus die Unterstützung einer vertieften Begriffsbildung zuerkannt.

ProVis – Probability Visualized

Das Tool *ProVis* – Probability Visualized wurde zur Darstellung von Einheitsquadraten entwickelt (Döller, 2020), um so die oben genannten Vorteile für Schüler:innen niederschwellig zugänglich zu machen. *ProVis* ist eine Software, die eine Modellierungsoberfläche für Einheitsquadrate und Baumdiagramme bietet und unter https://www.omilab.org/activities/projects/details/?id=126 frei heruntergeladen werden kann. Das Tool erlaubt die automatische Generierung eines Einheitsquadrats aus den vier absoluten oder relativen Häufigkeiten einer Vierfeldertafel (um zum Experimentieren anzuregen), die grafische Hervorhebung und rechnerische Kalkulation bestimmter absoluter und relativer (bedingter) Häufigkeiten und des Assoziationsmaßes (Rechenarbeit automatisieren, Abbildung 1) und das Erstellen des zugehörigen transponierten Einheitsquadrats zu einem gegebenen Quadrat (Wissen vernetzen). Außerdem kann das zugehörige Baumdiagramm ebenfalls mit absoluten oder relativen Häufigkeiten generiert werden. Diese auf Klick verfügbaren Darstellungswechsel ergeben eine quasi-simultane Repräsentation aller (relativen) Häufigkeiten, die zu einem Häufigkeits-Doppelbaum und -Netz führen können (Binder et al., 2023).

Literatur

Bea, W. & Scholz, R. (1995). Graphische Modelle bedingter Wahrscheinlichkeiten im empirisch-didaktischen Vergleich. *Journal für Mathematik-Didaktik, 16*, 299–327. https://doi.org/10.1007/BF03338820

Binder, K., Steib, N. & Krauss, S. (2023). Von Baumdiagrammen über Doppelbäume zu Häufigkeitsnetzen – kognitive Überlastung oder didaktische Unterstützung? *Journal für Mathematik-Didaktik, 44*, 471–503. https://doi.org/10.1007/s13138-022-00215-9

Böcherer-Linder, K., Eichler, A. & Vogel, M. (2018). Visualising Conditional Probabilities–Three Perspectives on Unit Squares and Tree Diagrams. In C. Batanero & E. J. Chernoff (Hrsg.), *Teaching and Learning Stochastics: Advances in Probability Education Research* (S. 73–88). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_5

Döller, V. (2020). *ProVis – Probability Visualized: Technologische Unterstützung für den Einsatz von Einheitsquadraten und Baumdiagrammen im Stochastikunterricht*. Universität Wien: Diplomarbeit. https://doi.org/10.25365/thesis.61461

Eichler, A. & Vogel, M. (2013). *Leitidee Daten und Zufall: Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik* (2., aktualisierte Auflage). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-00118-6

Vogel, M. & Eichler, A. (2014). Die computergestützte Leitidee Daten und Zufall. In H.-W. Henn & J. Meyer (Hrsg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 1* (S. 126–138). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-03628-7_10