Gewichts- und Distanzzähler von Codes und Kugelpackungen

Frank Bowert

Dissertation zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

Dem Fachbereich Mathematik der Universität Dortmund
vorgelegt im Dezember 2004

Einleitung

In dieser Arbeit werden Average-Thetareihen von periodischen Punktmengen und Distanzzähler von Codes untersucht. Als Motivation dient dabei das Kugelpackungsproblem, d.h. die Fragestellung, wie dicht man Kugeln gleicher Größe in den n-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ packen kann. Die Lage der Kugeln soll dabei nicht beliebig sein. Es wird verlangt, daß die Kugelmittelpunkte eine periodische Punktmenge $\Lambda = \cup_{j=1}^{M}(u_j + L)$ bilden, d.h. Λ ist eine endliche Vereinigung von Translaten eines festen Gitters L. Dies ist keine wesentliche Einschränkung, da die Dichte jeder beliebigen Kugelpackung durch die Dichten solcher periodischen Kugelpackungen approximiert werden kann.

Die einfachsten periodischen Punktmengen sind Gitter. Einem Gitter L kann seine Abstandsverteilung vom Nullpunkt $(a_j)_{j\in I}$ zugeordnet werden. Dann ist die Reihe

$$\vartheta_L := \sum_{j\in I} a_j q^j$$

eine erzeugende Funktion für diese Abstandsverteilung. Setzt man $q := e^{\pi i z}$, $z \in \mathbb{H}$, so erhält man eine holomorphe Funktion $\vartheta_L(z)$ auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$. Dies ist die Thetareihe des Gitters L.

Thetareihen zu rationalen Gittern $L \subset \mathbb{R}^n$ sind Modulformen vom Gewicht $\frac{n}{2}$ zu gewissen Kongruenzgruppen und Multiplikatoren. Zu gegebener Gruppe Γ und einem geeigneten Multiplikator χ ist der $\mathbb{C}$-Vektorraum der Modulformen vom Gewicht $\frac{n}{2}$, bezeichnet mit $[\Gamma, \frac{n}{2}, \chi]$, endlich dimensional. Unter bestimmten Bedingungen existiert in $[\Gamma, \frac{n}{2}, \chi]$ eine eindeutig bestimmte extremale Modulform

$$f(z) = 1 + \sum_{j\geq d} a_j q^{\alpha j} \in \left[\Gamma, \frac{n}{2}, \chi\right], \quad d = \dim_{\mathbb{C}} \left[\Gamma, \frac{n}{2}, \chi\right], \quad \alpha \in \mathbb{Q} \text{ geeignet},$$

und man kann die Fragestellung untersuchen, ob ein Gitter $L \subset \mathbb{R}^n$ mit $\vartheta_L = f$ existiert. Dieses dann nicht unbedingt eindeutig bestimmte extremale Gitter L hat ein Minimum $\min(L)$, welches größtmöglich bezüglich des Raumes der Modulformen $[\Gamma, \frac{n}{2}, \chi]$ ist. Ein extremales Gitter gibt daher Anlaß zu der Vermutung, daß die zugehörige Kugelpackung besonders dicht ist.

In Analogie zu Thetareihen zu Gittern kann man einer periodischen Punktmenge $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ ihre Average-Thetareihe

$$\Theta_\Lambda := \frac{1}{M} \sum_{k_1,k_2=1}^{M} \vartheta_{u_{k_1}-u_{k_2}+L} = \sum_{j\in I} d_j q^j$$

zuordnen. Diese Reihe ist eine erzeugende Funktion für die Distanzverteilung $(d_j)_{j\in I}$ von Λ, und mit $q = e^{\pi i z}$ ist $\Theta_\Lambda(z)$ unter bestimmten Voraussetzungen ebenfalls eine Modulform vom Gewicht $\frac{n}{2}$ bezüglich einer geeigneten Kongruenzgruppe.

Ausgangspunkt dieser Arbeit ist ein Packungsproblem im 16-dimensionalen Raum. Die Thetareihen ϑ_U zu unimodularen Gittern $U \subset \mathbb{R}^{16}$ sind Modulformen vom Gewicht 8 zur Hecke-Gruppe $G(2)$ und trivialem Multiplikator $\chi \equiv 1$. Im Vektorraum $[G(2), 8] := [G(2), 8, \chi]$ existiert die extremale Modulform

$$\Theta^*(z) = 1 + 7680q^3 + 4320q^4 + 276480q^5 + 61440q^6 + \dots \quad ,$$

und es ist bekannt, daß es kein Gitter $L \subset \mathbb{R}^{16}$ mit $\vartheta_L = \Theta^*$ gibt. Dies führt zu der Frage, ob vielleicht eine periodische Punktmenge $\Lambda \subset \mathbb{R}^{16}$ mit $\Theta_\Lambda = \Theta^*$ existiert. Aus dem Transformationsverhalten der Modulform Θ^* läßt sich schließen, daß eine solche periodische Punktmenge Λ eine besonders dichte Kugelpackung liefern würde.

Um dieses Problem zu untersuchen, werden in dieser Arbeit Average-Thetareihen $\Theta_\Lambda^{(g)}$ von höherem Grad g definiert und bestimmte Eigenschaften dieser Reihen nachgewiesen. Unter der Annahme der Existenz einer periodischen Punktmenge $\Lambda = \cup_{j=1}^{M}(u_j + L)$ mit $\Theta_\Lambda = \Theta^*$ sind die Average-Thetareihen $\Theta_\Lambda^{(g)}$, $g \geq 2$, Siegelsche Modulformen zu bestimmten Gruppen, die von der Stufe des Gitters L abhängen.

Eine übliche Methode bei der Untersuchung analoger Fragestellungen nach der Existenz von extremalen Gittern ist das Berechnen möglichst vieler Fourier-Koeffizienten der (hypothetischen) Grad 2 Thetareihe. Im Fall periodischer Punktmengen erweist sich dies als schwierig, da aus dem Wissen von $\Theta_\Lambda \in [G(2), 8]$ keinerlei Rückschlüsse auf die Stufe des Gitters L gezogen werden können. Daher ist es im Allgemeinen nicht möglich, die Modulgruppe der (hypothetischen) Grad 2 Average-Thetareihe $\Theta_\Lambda^{(2)}$ zu bestimmen. Es wird jedoch ein Verfahren angegeben (Abschnitt 4.4), mit dem man unter gewissen Annahmen Gleichungen in den Fourier-Koeffizienten einer hypothetischen Grad 2 Average-Thetareihe erhält. Eine der Annahmen ist dabei, daß sich auch die Grad 2 Reihe unter der Substitution $Z \mapsto -Z^{-1}$ wie eine Modulform verhält. Um Beispiele für diesen Sachverhalt zu konstruieren, werden binäre Codes herangezogen.

Im ersten Kapitel wird eine Definition für Distanzzähler höheren Grades zu binären Codes angegeben. Es wird gezeigt, daß die schon bekannten höheren Gewichtszähler für (lineare) Codes als Spezialfall der hier neu definierten Distanzzähler auftreten. Desweiteren werden einige Eigenschaften dieser Zähler nachgewiesen. Insbesondere wird gezeigt, daß die für Grad 1 bekannte Beziehung zwischen dem Distanzzähler eines binären Codes C und dem Gewichtszähler der Distanzverteilung D_C auch für die Zähler höheren Grades bestehen bleibt.

Im Gegensatz zu Gewichtszählern linearer Codes erfüllen die Distanzzähler nicht automatisch die MacWilliams-Gleichung. In Abschnitt 1.4 wird bewiesen, daß für die Grad 1 und Grad 2 Distanzzähler von Codes, die ein selbstduales Urbild unter der Gray-Abbildung haben, die MacWilliams-Gleichung gilt. Diese Codes liefern später die Beispiele für periodische Punktmengen, deren Grad 2 Average-Thetareihe sich unter der Substitution $Z \mapsto -Z^{-1}$ wie eine Modulformen verhält.

In Analogie zu den Distanzzählern werden im zweiten Kapitel Average-Thetareihen von höherem Grad zu periodischen Punktmengen definiert. Auch hier zeigt sich, daß diese Reihen eine Verallgemeinerung der Thetareihen zu Gittern darstellen. Es werden die Eigenschaften dieser Reihen untersucht. Desweiteren wird gezeigt, daß Average-Thetareihen zu bestimmten Punktmengen Modulformen sind.

Das dritte Kapitel stellt den Zusammenhang zwischen Average-Thetareihen und Distanzzählern her. Es wird bewiesen, daß die wohlbekannte Beziehung zwischen Gewichtszählern (linearer) Codes und Thetareihen der nach Konstruktion A konstruierten Gitter auch für Distanzzähler und Average-Reihen gilt.

Nach weiteren Betrachtungen zur Extremalität im vierten Kapitel wird im fünften Kapitel schließlich die Anwendung der in den vorangegangenen Abschnitten bereitgestellten Konzepte auf das spezielle Problem der extremalen Modulform $\Theta^* \in [G(2), 8]$ diskutiert.

Ich möchte mich bei all denjenigen bedanken, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben. Vor allem bedanke ich mich bei Herrn Rudolf Scharlau, der die Betreuung dieser Arbeit übernahm, für die Begleitung in den vergangenen Jahren. Er gab den Anstoß für diese Arbeit und stand mir während der gesamten Zeit stets mit Anregungen hilfreich zur Seite. Weiterhin bedanke ich mich bei Frau Christine Bachoc und Herrn Kanat Abdukhalikov, die mir beide wichtige Hinweise zum Hauptresultat des ersten Kapitels gaben. Für interessante Diskussionen danke ich Herrn Nils-Peter Skoruppa.

Besonderer Dank geht auch an das Graduiertenkolleg "Mathematische und ingenieurwissenschaftliche Methoden für sichere Datenübertragung und Informationsvermittlung", ohne dessen finanzielle Unterstützung mir diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis

$\lvert M\rvert$	Anzahl der Elemente einer Menge M
$A[G] = G^T AG$	30
$\lvert B_y\rvert^2$	Transformationskoeffizient, 38
BW_{16}	das 16-dimensionale Barnes-Wall-Gitter, 93
$C^\perp$	der zu C duale Code, 1
$D_C = \frac{1}{\lvert C\rvert} \cdot C^2$	3
$\det L$	Determinante eines Gitters L, 27
$\Delta_{\mathcal{P}}$	Dichte einer (periodischen) Kugelpackung $\mathcal{P}$, 28
$\delta_{\mathcal{P}}$	center-density einer (periodischen) Kugelpackung $\mathcal{P}$, 28
$d_{Ham}(x, y) = wt(x - y)$	Hamming-Metrik auf $\mathbb{Z}_m^n$, 1
$d_{Lee}(x, y)$	Lee-Metrik auf $\mathbb{Z}_m^n$, 1
$Dist_g(C)(X)$	Distanzzähler zu C vom Grad g, 8
$p^s \vert\vert n$	p^s ist ein exakter Teiler von n
$\epsilon(\beta_1, \ldots, \beta_g)$, $\epsilon^{(m,n)}(\beta_1, \ldots, \beta_g)$	4
$\epsilon_a^{(m,n)}(\beta_1, \ldots, \beta_g)$	4
$\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$	Körper mit zwei Elementen
$f_a(Z)$	Thetakonstante, 51
$G(2)$	Hecke-Gruppe, 68
$\Gamma_g(l)$	Hauptkongruenzgruppe der Stufe l, 31
$\Gamma_{g,0}(l)$	31
$\Gamma_{g,1}(l)$	31
$\Gamma_{g,1}^{(2)}(l)$	31
$Gram(L)$	Gram-Matrix eines Gitters L, 27
$\mathbb{C}[\mathbb{Z}_m^n]$	Gruppenalgebra über $\mathbb{Z}_m^n$, 2
$\mathbb{C}[\mathbb{Z}_m^n]^* = \{C \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}_m^n] \mid \lvert C\rvert \neq 0\}$	
$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$	obere Halbebene
$\mathbb{H}_g$	Siegelsche Halbebene, 31
$HD(C)(X_0, X_1)$	Hamming-Distanzzähler von C, 65
$J_{k,m}(\Gamma \ltimes L)$	$\mathbb{C}$-Vektorraum der Jacobiformen vom Gewicht k und Index m zu $\Gamma \ltimes L$, 36
$A \otimes B$	Kroneckerprodukt der Matrizen A und B, 8
$\Lambda = \bigcup_{j=1}^M (u_j + L)$	periodische Punktmenge, 27
$\Lambda^{(k)}$	die an der Stelle k punktierte periodische Punktmenge, 44
$\Lambda_C^{(A)}$	Konstruktion-A-Liftung des Codes C
$\Lambda_C^{(B)}$	Konstruktion-B-Liftung des Codes C
L^*	das zu L duale Gitter, 27

$Lee(x)$	Lee-Gewicht von x, 1
$Lee(C)(X,Y)$	Lee-Gewichtszähler, 23
$\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$	verallgemeinertes Legendre-Symbol
$\min(X)$	Minimum der diskreten Menge $X \subset \mathbb{R}^n$, 28
$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$	Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis n
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$	
$N(x)$	Norm eines Vektors x, 27
NRC_{16}	Nordstrom-Robinson-Code, 12
Ω	Erzeugermatrix eines Gitters
$P_g(C)(X_0, \ldots, X_{m^n-1})$	Gewichtszähler zu C vom Grad g, 4
$P_{C_1,\ldots,C_g}(X)$	gemischter Gewichtszähler, 6
$\mathbb{C}[X_a]_{a \in \mathbb{Z}_m^n}$	Polynomring in den m^n Variablen $X_0, \ldots, X_{m^n-1}$
Φ	Siegelscher Φ-Operator, 34
$P_{2\nu}^{(k-1)}(r,n)$	Gegenbauerpolynom, 72
$\wp(z,x)$	Weierstraß-$\wp$-Funktion, 82
$RM(r,m)$	Reed-Muller-Code r-ter Ordnung der Blocklänge 2^m
$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$	Skalarprodukt auf $\mathbb{Z}_m^n$, 1
$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$	Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, 27
$\mathcal{S}_n$	Symmetrische Gruppe über n Elementen, 2
$\sigma(A) = Spur(A)$	Spur einer Matrix A, 33
$\cdot\|_k$	Slash-Operation, 33
$\cdot\|_{k,m}$	Slash-Operation, 36
$Sp_g(\mathbb{R})$	Symplektische Gruppe über $\mathbb{R}$, 31
$Sp_g(\mathbb{Z})$	Siegelsche Modulgruppe, 31
$St(\Lambda)$	29
$\vartheta_L^{(g)}$	Thetareihe vom Grad g zum Gitter L, 35
ϑ_{u+L}	Thetareihe zur Nebenklasse $u + L$, 37
$\vartheta_{\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_g}$	gemischte Thetareihe, 51
$\vartheta_{A,B}^{(g)}(S,Z)$	Thetareihe in der Bezeichnung von [Frei83], 40
$\vartheta(Z; a, b)$	Thetareihe in der Bezeichnung von [Frei83], 56
$\theta_S(Z; X, Y)$	Thetareihe in der Bezeichnung von [AnMa75], 46
$\Theta_\Lambda^{(g)}$	Average-Thetareihe vom Grad g zur periodischen Punktmenge Λ, 39
Θ^*	extremale Modulform in $[G(2), 8]$, 77
$C' = \frac{1}{\|C\|} \sum_{u \in \mathbb{Z}_m^n} \chi_u(C) \cdot z^u$	Transformierte von C, 3
$T_g^{(m)}$	Matrix der MacWilliams-Transformation, 5
$[\Gamma, k, \chi]$	$\mathbb{C}$-Vektorraum der Modulformen vom Gewicht k bzgl. Γ und χ, 33
$[\Gamma, k, \chi]_0$	$\mathbb{C}$-Vektorraum der Spitzenformen vom Gewicht k

	bzgl. Γ und χ, 34
$wt(x)$	Hamming-Gewicht von x, 1
$(\mathbb{Z}_4, \star)$	$\mathbb{Z}_4$ mit der Struktur der Kleinschen-Vierer-gruppe, 17
$(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$	Restklassenring modulo m
$(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$	Einheitengruppe von $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$
$\zeta_m = e^{2\pi i/m}$	m-te Einheitswurzel

1 Gewichts- und Distanzverteilungen von Codes

1.1 Bezeichnungen

Es werden zuerst ein paar Notationen angegeben, die in dieser Arbeit verwendet werden. Es bezeichnet $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ den *Restklassenring modulo* m und $\mathcal{S}_n$ die *Symmetrische Gruppe* über n Elementen. Für $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ ist $\mathbb{Z}_m^n$ ein $\mathbb{Z}_m$-Modul und $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ definiert eine symmetrische, nicht-ausgeartete Bilinearform auf $\mathbb{Z}_m^n$. $\mathcal{S}_n$ operiert auf $\mathbb{Z}_m^n$ durch Permutation der Koordinaten,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_n \times \mathbb{Z}_m^n & \longrightarrow & \mathbb{Z}_m^n \\ (\sigma, x) & \mapsto & \sigma^{-1}(x) := (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)}) \quad . \end{array}$$

Eine beliebige nicht-leere Teilmenge $C \subset \mathbb{Z}_m^n$ heißt *Code*, und ein Code C heißt *linear* , falls C eine Untergruppe der additiven Gruppe $(\mathbb{Z}_m^n, +)$ ist. In diesem Fall ist C auf kanonische Weise ein $\mathbb{Z}_m$-Modul. Zwei Codes C_1 und $C_2 \subset \mathbb{Z}_m^n$ heißen *permutations-äquivalent*, falls eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ mit $\sigma(C_1) = C_2$ existiert. C_1 und C_2 heißen *äquivalent*, falls es eine Permutaion $\sigma \in \mathcal{S}_n$ und eine Diagonalmatrix $\mathcal{M} = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Z}_m$ quadratische Einheitswurzeln, mit $C_2 = \sigma(C_1) \cdot \mathcal{M}$ gibt.

Für $x \in \mathbb{Z}_m^n$ bezeichnet $wt(x) := |\{j \in [n] \mid x_j \neq 0\}|$ das *Hamming-Gewicht* von x und $d_{Ham}(x, y) := wt(x - y)$ die *Hamming-Metrik* auf $\mathbb{Z}_m^n$. Die *Lee-Metrik* auf $\mathbb{Z}_m^n$ ist durch $d_{Lee}(x, y) := \sum_{j=1}^n d_{Lee}(x_j, y_j)$ mit $d_{Lee}(x_j, y_j) := \min(|x_j - y_j|, m - |x_j - y_j|)$ gegeben, das *Lee-Gewicht* durch $Lee(x) := d_{Lee}(x, 0)$. Die Lee-Metrik $d_{Lee}(x, y)$ ist wohldefiniert, wenn man $\mathbb{Z}_m$ mit der Menge $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ identifiziert. Speziell für $\mathbb{Z}_4$ gilt also $Lee(0) = 0$, $Lee(1) = Lee(3) = 1$ und $Lee(2) = 2$.

Zu einem (linearen) Code $C \subset \mathbb{Z}_m^n$ bezeichnet $C^\perp := \{y \in \mathbb{Z}_m^n \mid \langle y, C\rangle = \{0\}\}$ den zu C *dualen Code*. Für die oben definierten Diagonalmatrizen $\mathcal{M}$ gilt $(C \cdot \mathcal{M})^\perp = C^\perp \cdot \mathcal{M}$, d.h. die Dualbildung kommutiert mit dem Übergang zu einem äquivalenten Code (vgl. [RaS98]). Für einen nicht-linearen Code C und den von ihm erzeugeten linearen Code $\langle C\rangle$ gilt $C^\perp = \langle C\rangle^\perp$, d.h. die dualen Codes von C und $\langle C\rangle$ stimmen überein; sie bieten also keine Unterscheidungsmöglichkeit von C und $\langle C\rangle$. Zu diesem Zweck werden im nächsten Abschnitt Codes als Elemente der Gruppenalgebra betrachtet.

Die *Gewichtsverteilung* eines Codes $C \subset \mathbb{Z}_m^n$ ist die Folge $(A_j)_{j=0,\ldots,n}$ mit $A_j := |\{x \in C \mid wt(x) = j\}|$. Diese ist insbesondere für lineare Codes von Interesse. Für nicht-lineare Codes $C \subset \mathbb{Z}_m^n$ betrachtet man die *Distanzverteilung* $(B_j)_{j=0,\ldots,n}$, $B_j := \frac{1}{|C|}|\{(x, y) \in C^2 \mid d_{Ham}(x, y) = j\}|$. Im Fall eines linearen Codes C stimmen Gewichts- und Distanzverteilung überein. Die im Abschnitt 1.3 angegebenen Gewichts- und Distanzzähler vom Grad 1 sind erzeugende Funktionen für diese Verteilungen.

1.2 Die Gruppenalgebra

Sei $C \subset \mathbb{Z}_m^n$ ein Code der Blocklänge n. Schreibt man C als formale Summe $\mathcal{C} = \sum_{v \in C} z^v$, so kann man C als ein Element der *Gruppenalgebra* $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_m^n] := \mathbb{C}[G_{m,n}]$ bezüglich der multiplikativen Gruppe

$$\begin{gathered} G_{m,n} := \{ \, z^\nu \mid \nu \in \mathbb{Z}_m^n \, \} \\ z^\nu \cdot z^w := z^{\nu + w} \end{gathered}$$

auffassen. Für die Unbestimmte $z = (z_1, \ldots, z_n)$ ist dabei $z^v := z_1^{v_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{v_n}$ gesetzt. Für den binären Fall $m = 2$ siehe [MacWiSlo77]. Im folgenden werden C und $\mathcal{C}$ identifiziert.

Bemerkung 1.1

1. Man erhält einen Gruppenisomorphismus $\mathbb{Z}_m^n \longrightarrow G_{m,n}$, $\nu \mapsto z^\nu$.
2. Sei $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ der Polynomring in den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ und sei I das Ideal $I := (x_j^m - 1 \mid j = 1, \ldots, n)$. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I & \longrightarrow & \mathbb{C}[\mathbb{Z}_m^n] \\ \displaystyle\sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^n} a_\nu x^\nu \mod I & \mapsto & \displaystyle\sum_{\nu \in \mathbb{Z}_m^n} \sum_{\substack{\mu \in \mathbb{N}_0^n \\ \mu \bmod m = \nu}} a_\mu \, z^\nu \end{array}$$

   liefert einen Isomorphismus der Algebren.
3. Für ein Element $\sum_{\nu \in \mathbb{Z}_m^n} a_\nu z^\nu \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}_m^n]$ existiert ein Code $C \subset \mathbb{Z}_m^n$ mit $C = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_m^n} a_\nu z^\nu$ genau dann, wenn $a_\nu \in \{0, 1\}$ für alle $\nu \in \mathbb{Z}_m^n$ gilt.
4. Die *Symmetrische Gruppe* $\mathcal{S}_n$ operiert auf $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_m^n]$ vermöge

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_n \times \mathbb{C}[\mathbb{Z}_m^n] & \longrightarrow & \mathbb{C}[\mathbb{Z}_m^n] \\ \left(\sigma, \displaystyle\sum_{v \in \mathbb{Z}_m^n} a_v z^v \right) & \mapsto & \displaystyle\sum_{v \in \mathbb{Z}_m^n} a_v z^{\sigma^{-1}(v)} \end{array} \quad .$$

Sei nun $\zeta_m := e^{2\pi i/m}$ eine *m-te Einheitswurzel* und $u \in \mathbb{Z}_m^n$. Definiere den Charakter χ_u auf $G_{m,n}$ (vgl. [MacWiSlo77],p. 134;[RaS98], [HaOu99]) durch $\chi_u(z^v) :=$

$\chi_u^{(m)}(z^v) := \zeta_m^{\langle u,v\rangle}$. Dann kann χ_u durch

$$\begin{array}{rcl} \chi_u : \mathbb{C}[\mathbb{Z}_m^n] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \sum\limits_{v\in\mathbb{Z}_m^n} a_v z^v & \mapsto & \sum\limits_{v\in\mathbb{Z}_m^n} a_v \cdot \zeta_m^{\langle v,u\rangle} \end{array}$$

linear auf $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_m^n]$ fortgesetzt werden.

Lemma 1.2 *Sei $C \subset \mathbb{Z}_m^n$ linear und $u \in \mathbb{Z}_m^n$ beliebig. Dann gilt*

$$\chi_u^{(m)}(C) = \begin{cases} |C| & , u \in C^\perp \\ 0 & , u \notin C^\perp \end{cases}$$

Beweis : Es gilt $\chi_u^{(m)}(C) = \sum_{v\in C} \chi_v^{(m)}(z^u)$. Angenommen, es existiert ein $w \in C$ mit $\chi_w^{(m)}(z^u) \neq 1$. Dann gilt

$$\chi_w^{(m)}(z^u)\chi_u^{(m)}(C) = \sum_{v\in C} \chi_{v+w}^{(m)}(z^u) = \sum_{v\in C} \chi_v^{(m)}(z^u) = \chi_u^{(m)}(C)\ ,$$

da $(C,+)$ eine Gruppe ist. Es folgt $(\chi_w^{(m)}(z^u) - 1)\chi_u^{(m)}(C) = 0$, also $\chi_u^{(m)}(C) = 0$. Die Existenz eines $w \in C$ mit $\chi_w^{(m)}(z^u) \neq 1$ ist äquivalent zu $u \notin C^\perp$. □

Definition 1.3 Sei $C = \sum_{v\in\mathbb{Z}_m^n} c_v z^v \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}_m^n]$ beliebig.

1. Die Folge $(A_j)_{j=0}^n$ mit $A_j := \sum_{\nu\in\mathbb{Z}_m^n,\ wt(\nu)=j} c_\nu$ heißt *Gewichtsverteilung von C.*

2. $|C| := \sum_{v\in\mathbb{Z}_m^n} c_v$ heißt die *Anzahl der Elemente von C*. Setze

$$\mathbb{C}[\mathbb{Z}_m^n]^* := \{C \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}_m^n] \mid |C| \neq 0\} \quad .$$

3. Falls $C \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}_m^n]^*$, so heißt

$$C' := \frac{1}{|C|} \sum_{u\in\mathbb{Z}_m^n} \chi_u(C) \cdot z^u$$

die Transformierte von C.

4. *Für $C \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}_m^n]^*$ setze*

$$D_C := \frac{1}{|C|} \cdot C^2.$$

Bemerkung 1.4

1. Es gibt natürlich Elemente $C \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}_m^n]$ mit $C \neq 0$ aber $|C| = 0$.
2. Sei $C \subset \mathbb{Z}_m^n$ ein Code. Dann gilt $|C| > 0$, und falls C linear ist, so stimmt C' mit dem zu C dualen Code $C^\perp$ überein.
3. Für $C \subset \mathbb{F}_2^n$ ist die Gewichtsverteilung von D_C gerade die Distanzverteilung von C.
4. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}^*$ gilt $C' = (\lambda \cdot C)'$.

Die Beweise zur letzten Bemerkung sind trivial, für $m = 2$ vergleiche [MacWiSlo77].

1.3 Zähler vom Grad g

In diesem Abschnitt werden die höheren Gewichtszähler $P_g(C)$ aus [Rung96] für Elemente der Gruppenalgebra $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_m^n]$ definiert, und es wird gezeigt, daß diese Zähler eine MacWilliams-Gleichung erfüllen; vgl. auch die Einleitung in [Rung96]. Für $m = 2$ werden Distanzzähler vom Grad g angegeben und der Zusammenhang zu Gewichtszählern hergestellt. Dies verallgemeinert ein für $g = 1$ bekanntes Resultat, siehe [MacWiSlo77].

Definiere also für $C = \sum_{v \in \mathbb{Z}_m^n} c_v z^v \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}_m^n]$ den *Grad g Gewichtszähler zu C* durch

$$P_g(C)(X) := \quad P_g^{(m)}(C)(X) := \sum_{\beta_1,\ldots,\beta_g \in \mathbb{Z}_m^n} (c_{\beta_1} \cdot \ldots \cdot c_{\beta_g}) \cdot X^{\epsilon(\beta_1,\ldots,\beta_g)} \in \mathbb{C}[X_a]_{a \in \mathbb{Z}_m^g},$$

wobei die folgende Notation benutzt wird (vgl.[Rung96]):

Es ist $X := (X_0, \ldots, X_{m^g-1})$ der Vektor der Variablen. Bei dieser Schreibweise werden die Mengen $I := \{0, 1, \ldots, m^g - 1\}$ und $\mathbb{Z}_m$ gemäß der m-adischen Darstellung der Elemente von I identifiziert, d.h. ein $\sum_{j=0}^{g-1} a_j m^j \in I$ mit $0 \leq a_j < m$ für alle $j = 0, \ldots, g-1$ entspricht dem Tupel $(a_0, \ldots, a_{g-1}) \in \mathbb{Z}_m^g$. Desweiteren ist

$$\epsilon(\beta_1, \ldots, \beta_g) := \epsilon^{(m,n)}(\beta_1, \ldots, \beta_g) := (\epsilon_0^{(m,n)}(\beta_1, \ldots, \beta_g), \ldots, \epsilon_{m^g-1}^{(m,n)}(\beta_1, \ldots, \beta_g))$$

gesetzt, mit $\epsilon_a^{(m,n)}(\beta_1, \ldots, \beta_g) := |\{i \in [n] \mid a = (\beta_{1i}, \ldots, \beta_{gi})\}|$.

Setze abkürzend $\mathbb{C}[X] := \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_{m^g-1}]$ für den Polynomring in den Variablen $X_1, \ldots, X_{m^g-1}$. Die Gruppe $GL_{m^g}(\mathbb{C})$ operiert auf $\mathbb{C}[X]$ durch $(A, p(X)) \mapsto p(X \cdot A^T)$. Es bezeichnet dabei A^T die transponierte Matrix zu A.

Satz 1.5 *(MacWilliams-Gleichung für die $P_g(C)$ auf $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_m^n]$)*
Sei $T_g := T_g^{(m)} := \left(\chi_u^{(m)}(z^v)\right)_{u,v\in\mathbb{Z}_m^g}$, *lexikographisch angeordnet, d.h.*

$$T_g = \begin{pmatrix} \zeta_m^{<v_0,v_0>} & \zeta_m^{<v_0,v_1>} & \zeta_m^{<v_0,v_2>} & \dots & \zeta_m^{<v_0,v_m>} & \dots \\ \zeta_m^{<v_1,v_0>} & \zeta_m^{<v_1,v_1>} & \zeta_m^{<v_1,v_2>} & \dots & \zeta_m^{<v_1,v_m>} & \dots \\ & & & \vdots & & \end{pmatrix}$$

mit $v_0 := (0,\dots,0)$, $v_1 = (1,0,\dots,0),\dots,v_{m-1} = (m-1,0,\dots,0),\dots,$ $v_m = (0,1,0,\dots,0)$, $v_{m+1} = (1,1,0,\dots,0),\dots,v_{2m-1} = (m-1,1,0,\dots,0),\dots,v_{m^g-1} = (m-1,\dots,m-1)$, *und sei* $C := \sum_{v\in\mathbb{Z}_m^n} c_v z^v \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}_m^n]$. *Dann gilt die MacWilliams-Gleichung*

$$P_g(C')(X) = \frac{1}{|C|^g} P_g(C)(X \cdot T_g)\ .$$

T_g *ist das g-fache Kronecker-Produkt von*

$$T_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta_m & \zeta_m^2 & \dots & \zeta_m^{m-1} \\ & & \vdots & & \\ 1 & \zeta_m^{m-1} & \zeta_m^{2(m-1)} & \dots & \zeta_m^{(m-1)^2} \end{pmatrix} ,$$

d.h. $T_g = T_1 \otimes \ldots \otimes T_1$.

Der Beweis des Satzes verläuft völlig analog zum Beweis für Gewichtszähler zu Codes $C \subset \mathbb{F}_2^n$, wie er in [Rung96] skizziert ist. Zuerst zeigt man :

Lemma 1.6 *Sei* $j \in [g]$ *fest. Für* $u, \beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_g \in \mathbb{Z}_m^n$ *gilt*

$$\sum_{\beta_j\in\mathbb{Z}_m^n} \chi_u(z^{\beta_j}) \cdot X^{\epsilon(\beta_1,\dots,\beta_g)} = Y(X;j)^{\epsilon(\beta_1,\dots,\beta_{j-1},u,\beta_{j+1},\dots,\beta_g)}$$

mit

$$
\begin{aligned}
Y(X;j) := \quad & \Bigg(\sum_{a\in\mathbb{Z}_m} \chi_0(z^a) X^{\epsilon^{(m,1)}(0,0,\dots,0,a,0,\dots,0)}, \sum_{a\in\mathbb{Z}_m} \chi_1(z^a) X^{\epsilon^{(m,1)}(1,0,\dots,0,a,0,\dots,0)}, \\
& \dots, \sum_{a\in\mathbb{Z}_m} \chi_{m-1}(z^a) X^{\epsilon^{(m,1)}(m-1,0,\dots,0,a,0,\dots,0)}, \\
& \dots, \\
& \sum_{a\in\mathbb{Z}_m} \chi_0(z^a) X^{\epsilon^{(m,1)}(m-1,\dots,m-1,a,m-1,\dots,m-1,0)}, \\
& \sum_{a\in\mathbb{Z}_m} \chi_1(z^a) X^{\epsilon^{(m,1)}(m-1,\dots,m-1,a,m-1,\dots,m-1,1)}, \\
& \dots, \sum_{a\in\mathbb{Z}_m} \chi_{m-1}(z^a) X^{\epsilon^{(m,1)}(m-1,\dots,m-1,a,m-1,\dots,m-1)} \Bigg)
\end{aligned}
$$

Die a-Einträge in $\epsilon^{(m,1)}(\dots)$ stehen in dieser Notation an der j-ten Stelle.

Beweis : Induktion nach der Blocklänge n. Dabei ist zu beachten, daß aufgrund der Anordnung der Koordinateneinträge in $Y(X;j)$ für $\beta_1,\dots,\beta_{j-1},\beta_{j+1},\dots,\beta_g$, $u\in\mathbb{Z}_m$ die Gleichung

$$
Y(X;j)^{\epsilon^{(m,1)}(\beta_1,\dots,\beta_{j-1},u,\beta_{j+1},\dots,\beta_g)} = \sum_{a\in\mathbb{Z}_m} \zeta_m^{<u,a>} \cdot X^{\epsilon^{(m,1)}(\beta_1,\dots,\beta_{j-1},a,\beta_{j+1},\dots,\beta_g)}
$$

gilt. Damit ist der Induktionsanfang klar. Für den Induktionsschritt von n nach $n+1$ zerlegt man $x\in\mathbb{Z}_m^{n+1}$ in $x=(\tilde{x},x_{n+1})$, $\tilde{x}\in\mathbb{Z}_m^n$. Bezeichne mit $\beta_{i,n+1}$ den $(n+1)$-ten Koordinateneintrag in β_i. Es folgt

$$
\begin{aligned}
& Y(X;j)^{\epsilon^{(m,n+1)}(\beta_1,\dots,\beta_{j-1},u,\beta_{j+1},\dots,\beta_g)} \\
&= Y(X;j)^{\epsilon^{(m,n)}(\tilde{\beta}_1,\dots,\tilde{\beta}_{j-1},\tilde{u},\tilde{\beta}_{j+1},\dots,\tilde{\beta}_g)} \cdot Y(X;j)^{\epsilon^{(m,1)}(\beta_{1,n+1},\dots,\beta_{j-1,n+1},u_{n+1},\beta_{j+1,n+1},\dots,\beta_{g,n+1})} \\
&= \textstyle\sum_{\tilde{\beta}_j\in\mathbb{Z}_m^n} \zeta_m^{<\tilde{\beta}_j,\tilde{u}>} \cdot X^{\epsilon^{(m,n)}(\tilde{\beta}_1,\dots,\tilde{\beta}_g)} \cdot \sum_{\beta_{j,n+1}\in\mathbb{Z}_m} \zeta_m^{<\beta_{j,n+1},u_{n+1}>} \cdot X^{\epsilon^{(m,1)}(\beta_{1,n+1},\dots,\beta_{g,n+1})} \\
&= \textstyle\sum_{\beta_j\in\mathbb{Z}_m^{n+1}} \zeta_m^{<\beta_j,u>} \cdot X^{\epsilon^{(m,n+1)}(\beta_1,\dots,\beta_g)}
\end{aligned}
$$

und damit die Behauptung. □

Dann betrachtet man die Zähler

$$
P_{C_1,\dots,C_g}(X) := \sum_{\beta_1,\dots,\beta_g\in\mathbb{Z}_m^n} \left(\prod_{i=1}^{g} c_{i\beta_i}\right) X^{\epsilon(\beta_1,\dots\beta_g)} ,
$$

wobei $C_i = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}_m^n} c_{i\nu} z^\nu \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}_m^n]$ für $i = 1, \ldots, g$ gesetzt ist. Es gilt

$$C_j' = \frac{1}{|C_j|} \sum_{u\in\mathbb{Z}_m^n} \chi_u(C_j) \cdot z^u = \sum_{u\in\mathbb{Z}_m^n} c_{j,u}' z^u$$

mit

$$c_{j,u}' := \frac{1}{|C_j|} \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_m^n} \chi_u(z^\alpha) \cdot c_{j,\alpha} \quad .$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
P_{C_1,\ldots,C_j',\ldots,C_g}(X) \quad &= \sum_{\beta_1,\ldots,\beta_g\in\mathbb{Z}_m^n} \left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{g} c_{i,\beta_i} \cdot c_{j,\beta_j}' \right) \cdot X^{\epsilon(\beta_1,\ldots,\beta_g)} \\
&= \frac{1}{|C_j|} \sum_{\beta_1,\ldots,\beta_g\in\mathbb{Z}_m^n} \left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{g} c_{i,\beta_i} \right) \cdot \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_m^n} \chi_\alpha(z^{\beta_j}) \cdot c_{j,\alpha} \cdot X^{\epsilon(\beta_1,\ldots,\beta_g)} \\
&= \frac{1}{|C_j|} \sum_{\beta_1,\ldots,\alpha,\ldots,\beta_g\in\mathbb{Z}_m^n} \left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{g} c_{i,\beta_i} \right) c_{j,\alpha} \sum_{\beta_j\in\mathbb{Z}_m^n} \chi_\alpha(z^{\beta_j}) \cdot X^{\epsilon(\beta_1,\ldots,\beta_g)} \\
&= \frac{1}{|C_j|} \sum_{\beta_1,\ldots,\alpha,\ldots,\beta_g\in\mathbb{Z}_m^n} \left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{g} c_{i,\beta_i} \right) c_{j,\alpha} Y(X;j)^{\epsilon(\beta_1,\ldots,\alpha,\ldots,\beta_g)} \quad ,
\end{aligned}$$

wobei $Y(X;j)$ wie im vorigen Lemma zu setzen ist. Damit gilt

$$\begin{aligned}
P_{C_1',\ldots,C_g'}(X) \quad &= \frac{1}{|C_1|} P_{C_1,C_2',\ldots,C_g'}(Y(X;1)) \\
&= \frac{1}{|C_1||C_2|} P_{C_1,C_2,C_3',\ldots,C_g'}(Y(Y(X;1);2)) = \ldots \quad ,
\end{aligned}$$

also

$$P_{C_1',\ldots,C_g'}(X) = \frac{1}{|C_1|\cdot\ldots\cdot|C_g|} P_{C_1,\ldots,C_g}(X \cdot T_g^{(m)}) \quad , \tag{1}$$

und für $C_1 = \ldots = C_g = C$ folgt

$$P_g(C')(X) = \frac{1}{|C|^g} P_g(C)(X \cdot T_g^{(m)}) \quad .$$

Die Aussage über die Matrizen T_g beweist man mit Hilfe vollständiger Induktion nach g unter Berücksichtigung der Definition des *Kroneckerproduktes*

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} Ab_{11} & \dots & Ab_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ Ab_{r1} & \dots & Ab_{rs} \end{pmatrix}, \quad B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,r \\ j=1,\dots,s}} \quad .$$

$\square$

Der *Hamming-Gewichtszähler* $P_1(C)$ ist ein erzeugendes Polynom für die Gewichtsverteilung eines Codes C. Im Fall nicht-linearer Codes ist allerdings die Distanzverteilung von C von Interesse, im binären Fall also die Gewichtsverteilung von D_C. In der folgenden Definition werden Distanzzähler vom Grad g für binäre Codes angegeben. Diese Definition läßt sich in der offensichtlichen Weise für Codes $C \subset \mathbb{Z}_m^n$ bzw. für Codes $C \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}_m^n]^*$ übertragen. In dieser Arbeit wird darauf allerdings verzichtet, da später nur Distanzzähler binärer Codes betrachtet werden.

Definition 1.7 Sei $C \subset \mathbb{F}_2^n$ ein Code. Der *Distanzzähler zu* C *vom Grad* $g \in \mathbb{N}$ ist gegeben durch

$$Dist_g(C)(X) := \frac{1}{|C|^g} \sum_{\substack{\beta_1,\dots,\beta_g \in C \\ \alpha_1,\dots,\alpha_g \in C}} X^{\epsilon(\beta_1-\alpha_1,\dots,\beta_g-\alpha_g)} \quad \in \mathbb{C}[X_a]_{a\in\mathbb{F}_2^g} \ ,$$

wobei wieder $X := (X_0, \dots, X_{2^g-1})$ und
$\epsilon(\beta_1, \dots, \beta_g) := (\epsilon_0(\beta_1, \dots, \beta_g), \dots, \epsilon_{2^g-1}(\beta_1, \dots, \beta_g))$ mit
$\epsilon_a(\beta_1, \dots, \beta_g) = |\{i \in [n] \mid a = (\beta_{1,i}, \dots, \beta_{g,i})\}|$ gesetzt wurde.

Der Distanzzähler $Dist_1(C)$ ist ein erzeugendes Polynom für die Distanzverteilung von C, vgl.[MacWiSlo77]. Weitere Eigenschaften der Distanzzähler vom Grad g sind in der folgenden Bemerkung zusammengefaßt:

Bemerkung 1.8

1. Für jede natürliche Zahl g gilt $Dist_g(C)(X) = P_g(D_C)(X)$.
   Ist $C \subset \mathbb{F}_2^n$ ein linearer Code, so gilt $Dist_g(C)(X) = P_g(C)(X)$.

2. Sei $\mathbb{C}[X_a]_{a\in\mathbb{F}_2^g}$ der Polynomring in den 2^g Variablen $X_0, \dots, X_{2^g-1}$. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{C}[X_a]_{a\in\mathbb{F}_2^g} & \longrightarrow & \mathbb{C}[X_b]_{b\in\mathbb{F}_2^{g-1}} \\ X_j & \mapsto & \begin{cases} 0 & , j \equiv 1(2) \\ X_{j/2} & , j \equiv 0(2) \end{cases} \end{array}$$

   ist ein Homomorphismus, vgl. [Rung96]. Es gilt

(a) Für $C = \sum_{\nu \in \mathbb{F}_2^n} c_\nu z^\nu \in \mathbb{C}[\mathbb{F}_2^n]$ ist $\varphi(P_g(C)) = c_0 \cdot P_{g-1}(C)$. (Analog für Codes $C \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}_m^n]$.)

(b) Für $\emptyset \neq C \subset \mathbb{F}_2^n$ gilt $\varphi(Dist_g(C)) = Dist_{g-1}(C)$.

Würde nun $(D_C)' = \sigma(D_{C'})$ für eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ gelten, so gäbe es ein direktes Analogon zur MacWilliams-Gleichung für Gewichtszähler auch für die Distanzzähler von Codes, denn es gilt

$$\frac{1}{|C|^g} Dist_g(C)(X \cdot T_g) = \frac{1}{|C|^g} P_g(D_C)(X \cdot T_g) = P_g((D_C)')(X) \ . \tag{2}$$

Leider gilt im Allgemeinen die geforderte Gleichung nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1.9

1. Sei $C := \{(1,0),(0,1)\} \subset \mathbb{F}_2^2$. Dann gilt $D_C' = 1 + z^{(1,1)} = D_C$ und $C' = 1 - z^{(1,1)}$. Daher ist also $|C'| = 1 - 1 = 0$, d.h. $D_{C'}$ ist nicht definiert.

2. Sei $C = \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,1)\} \subset \mathbb{F}_2^3$. Notiere die Koeffizienten von $C = z^{(0,0,0)} + z^{(1,0,0)} + z^{(0,1,1)}$ gemäß der Binärzahldarstellung in einem Vektor der Länge 8, d.h. C entspricht dem Vektor $(1,1,0,0,0,0,1,0)$. Dann entspricht C' dem Vektor $\frac{1}{3}(3,1,1,-1,1,-1,3,1)$, und es folgt $|C'| = \frac{8}{3} \neq 0$. D_C ist durch $\frac{1}{3}(3,2,0,0,0,0,2,2)$ bestimmt, $(D_C)'$ durch $\frac{1}{9}(9,1,1,1,1,1,9,1)$ und $D_{C'}$ durch $\frac{1}{3}(3,1,1,-1,1,-1,3,1)$ (siehe Programm `Bsp.mag`) . Es gilt also $D_{C'} = C'$, und da $(D_C)'$ nur positive Koeffizienten hat, existiert keine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_3$ mit $(D_C)' = \sigma(D_{C'})$.

3. Für lineare Codes $C \subset \mathbb{F}_2^n$ gilt natürlich $D_C' = C^\perp = D_{C'}$.

Es kann also nicht erwartet werden, daß die MacWilliams-Transformierte des Grad g Distanzzählers eines Codes $C \subset \mathbb{F}_2^n$ mit dem Grad g Distanzzähler des zu C transformierten Codes C' übereinstimmt. Bei distanzinvarianten Codes ist dies für den Grad-1-Distanzzähler trivialerweise doch der Fall. Für die höheren Distanzzähler ist aber auch hier die Behauptung im Allgemeinen falsch.

Beispiel 1.10 Sei $C \subset \mathbb{F}_2^{10}$ durch die Erzeugermatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & & & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. C ist der in Tabelle 2 in [BeHa01] mit C_5 bezeichnete Code. C ist ein linearer, formal-selbstdualer Code. Insbesondere gilt $Dist_g(C) = P_g^{(2)}(C)$ und

$$Dist_1(C)(X_0, X_1) = \frac{1}{|C|} Dist_1(C)(X_0 + X_1, X_0 - X_1)\,.$$

Eine Computerrechnung (siehe Programm `Distnotinv.mag`) zeigt

$$Dist_2(C)(X) - \frac{1}{|C|^2} Dist_2(C)(X \cdot T_2) \neq 0.$$

Im folgenden wird das Verhalten des Zählers $Dist_g(C_1 \times C_2)$ unter MacWilliams-Transformation untersucht, unter der Voraussetzung, daß die Distanzzähler $Dist_g(C_j)$ der Codes $C_1 \subset \mathbb{F}_2^k$ und $C_2 \subset \mathbb{F}_2^n$ invariant unter MacWilliams-Transformation sind.

Dazu ist zuerst die Notation zu erklären. Zu $v = (v_1, \ldots, v_{n+k}) \in \mathbb{F}_2^{k+n}$ setze $v^{(1)} := (v_1, \ldots, v_k)$ und $v^{(2)} := (v_{k+1}, \ldots, v_{k+n})$. Seien $C_1 \subset \mathbb{F}_2^k$ und $C_2 \subset \mathbb{F}_2^n$ Codes. Setze $\tilde{C}_1 := \sum_{v \in \mathbb{F}_2^k \times 0^n} c_v^{(1)} z^v$ und $\tilde{C}_2 := \sum_{v \in 0^k \times \mathbb{F}_2^n} c_v^{(2)} z^v \in \mathbb{C}[\mathbb{F}_2^{k+n}]$. Dabei sei $c_v^{(j)} \in \{0,1\}$ mit $c_v^{(j)} = 1$ genau dann, wenn $v^{(j)} \in C_j$. Diese $(\tilde{\ })$-Bildung induziert Einbettungen

$$\begin{array}{rcl} (\tilde{\ }) \colon \mathbb{C}[\mathbb{F}_2^k] & \longrightarrow & \mathbb{C}[\mathbb{F}_2^{k+n}] \\ C_1 & \mapsto & \tilde{C}_1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} (\tilde{\ }) \colon \mathbb{C}[\mathbb{F}_2^n] & \longrightarrow & \mathbb{C}[\mathbb{F}_2^{k+n}] \\ C_2 & \mapsto & \tilde{C}_2 \end{array} .$$

Bemerkung 1.11 Betrachte $C_1 \times C_2 \in \mathbb{C}[\mathbb{F}_2^{k+n}]$. Dann gilt

1. $C_1 \times C_2 = \tilde{C}_1 \cdot \tilde{C}_2$
2. $D_{C_1 \times C_2} = D_{\tilde{C}_1} \cdot D_{\tilde{C}_2}$
3. Für $j = 1, 2$: $D_{\tilde{C}_j} = (D_{C_j})\tilde{\ }$
4. $D'_{C_1 \times C_2} = (D'_{C_1})\tilde{\ } \cdot (D'_{C_2})\tilde{\ }$

Beweis : Es ist $C_1 \times C_2 = \sum_{v \in \mathbb{F}_2^{k+n}} c_v z^v$ mit $c_v \in \{0,1\}$ und es gilt $c_v = 1$ genau dann, wenn $v \in C_1 \times C_2$, woraus sofort 1. folgt. Die Gleichung $D_{C_1 \times C_2} = \frac{1}{|C_1 \times C_2|}(C_1 \times C_2)^2 = \frac{1}{|C_1||C_2|}(\tilde{C}_1 \cdot \tilde{C}_2)^2 = D_{\tilde{C}_1} \cdot D_{\tilde{C}_2}$ zeigt 2.. Die Behauptung 3. ist offensichtlich und 4. wird durch

$$\begin{aligned}
(D_{\tilde{C}_1} \cdot D_{\tilde{C}_2})' &= \frac{1}{|D_{\tilde{C}_1} \cdot D_{\tilde{C}_2}|} \sum_{u \in \mathbb{F}_2^{k+n}} \chi_u^{(2)}(D_{\tilde{C}_1} \cdot D_{\tilde{C}_2}) z^u \\
&= \frac{1}{|D_{\tilde{C}_1}||D_{\tilde{C}_2}|} \sum_{u \in \mathbb{F}_2^{k+n}} \chi^{(2)}_{(u^{(1)},u^{(2)})}(D_{\tilde{C}_1}) \cdot \chi^{(2)}_{(u^{(1)},u^{(2)})}(D_{\tilde{C}_2}) \cdot z^{(u^{(1)},0)} \cdot z^{(0,u^{(2)})} \\
&= \frac{1}{|D_{C_1}|} \sum_{u \in \mathbb{F}_2^{k+n}} \chi^{(2)}_{(u^{(1)},0)}(D_{\tilde{C}_1}) z^{(u^{(1)},0)} \cdot \frac{1}{|D_{C_2}|} \sum_{u \in \mathbb{F}_2^{k+n}} \chi^{(2)}_{(0,u^{(2)})}(D_{\tilde{C}_2}) z^{(0,u^{(2)})} \\
&= (D'_{C_1})\tilde{} \cdot (D'_{C_2})\tilde{}
\end{aligned}$$

bewiesen. □

Bemerkung 1.12 Seien $A = \sum_{v \in \mathbb{F}_2^k} a_v z^v \in \mathbb{C}[\mathbb{F}_2^k]$, $B = \sum_{v \in \mathbb{F}_2^n} b_v z^v \in \mathbb{C}[\mathbb{F}_2^n]$ und $\tilde{A} = \sum_{v \in \mathbb{F}_2^k \times 0^n} a_{v^{(1)}} z^v$, $\tilde{B} = \sum_{v \in 0^k \times \mathbb{F}_2^n} b_{v^{(2)}} z^v \in \mathbb{C}[\mathbb{F}_2^{k+n}]$. Dann gilt für den Grad g Gewichtszähler

$$P_g^{(2)}(\tilde{A} \cdot \tilde{B}) = P_g^{(2)}(A) \cdot P_g^{(2)}(B) .$$

Insbesondere gilt für Codes $C_1 \subset \mathbb{F}_2^k$ und $C_2 \subset \mathbb{F}_2^n$

$$Dist_g(C_1 \times C_2) = Dist_g(C_1) \cdot Dist_g(C_2) .$$

Beweis : Es gilt $\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \sum_{v \in \mathbb{F}_2^{k+n}} a_{v^{(1)}} b_{v^{(2)}} z^v$ und daher

$$\begin{aligned}
P_g^{(2)}(\tilde{A} \cdot \tilde{B})(X) &= \sum_{\beta_1,\ldots,\beta_g \in \mathbb{F}_2^{k+n}} \Pi_{j=1}^g (a_{\beta_j^{(1)}} b_{\beta_j^{(2)}}) X^{\epsilon(\beta_1,\ldots,\beta_g)} \\
= \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_g \in \mathbb{F}_2^k} &\left(\Pi_{j=1}^g a_{\alpha_j}\right) X^{\epsilon(\alpha_1,\ldots,\alpha_g)} \cdot \sum_{\gamma_1,\ldots,\gamma_g \in \mathbb{F}_2^n} \left(\Pi_{j=1}^g b_{\gamma_j}\right) X^{\epsilon(\gamma_1,\ldots,\gamma_g)} \quad .
\end{aligned}$$

Desweiteren ist

$$\begin{aligned}
Dist_g(C_1 \times C_2) &= P_g(D_{C_1 \times C_2}) = P_g(D_{\tilde{C}_1} \cdot D_{\tilde{C}_2}) = P_g(\tilde{D}_{C_1} \cdot \tilde{D}_{C_2}) \\
&= P_g(D_{C_1}) \cdot P_g(D_{C_2}) = Dist_g(C_1) \cdot Dist_g(C_2) \quad .
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.13

1. *Seien $C_1 \subset \mathbb{F}_2^k$ und $C_2 \subset \mathbb{F}_2^n$ zwei Codes, deren Grad g Distanzzähler $Dist_g(C_j)$, $j = 1, 2$, unter MacWilliams-Transformation invariant sind. Dann ist auch $Dist_g(C_1 \times C_2)$ invariant unter MacWilliams-Transformation.*

2. *Seien $C_1 \subset \mathbb{F}_2^k$ und $C_2 \subset \mathbb{F}_2^n$ zwei Codes und $\sigma_1 \in \mathcal{S}_k$ und $\sigma_2 \in \mathcal{S}_n$ zwei Permutationen, so daß $D'_{C_1} = \sigma_1(D_{C_1})$ und $D'_{C_2} = \sigma_2(D_{C_2})$ gilt. Dann gilt $D'_{C_1 \times C_2} = \tilde{\sigma}(D_{C_1 \times C_2})$, wobei $\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_{k+n}$ durch $\tilde{\sigma}(j) := \sigma_1(j)$ für $j \in [k]$ und $\tilde{\sigma}(j) := \sigma_2(j-k)$ für $j \in [k+n] \backslash [k]$ definiert ist.*

Beweis : Zu *1.*: Nach Bemerkung 1.12 gilt $Dist_g(C_1 \times C_2) = Dist_g(C_1) \cdot Dist_g(C_2)$ und mit $P_g(D_{C_j})(X) = \frac{1}{|C_j|^g} P_g(D_{C_j})(X \cdot T_g^{(2)})$ für $j = 1, 2$ folgt die Behauptung. Zu *2.*: Nach Bemerkung 1.11 folgt $D'_{C_1 \times C_2} = \widetilde{(D'_{C_1})} \cdot \widetilde{(D'_{C_2})} = \widetilde{(\sigma_1(D_{C_1}))} \cdot \widetilde{(\sigma_2(D_{C_2}))}$ $= \tilde{\sigma}(\widetilde{(D_{C_1})}\widetilde{(D_{C_2})}) = \tilde{\sigma}(D_{\tilde{C}_1} \cdot D_{\tilde{C}_2}) = \tilde{\sigma}(D_{C_1 \times C_2})$. □

Als ein weiteres Beispiel wird abschließend der Nordstrom-Robinson-Code NRC_{16} betrachtet. Dies ist ein nicht-linearer Code der Blocklänge 16, der ein $\mathbb{Z}_4$-lineares Urbild unter der Gray-Abbildung (siehe Abschnitt 1.4) besitzt, und dessen Grad-2-Distanzzähler die MacWilliams-Gleichung erfüllt. Das Transformationsverhalten von Distanzzählern zu Codes, deren Urbild unter der Gray-Abbildung linear ist, wird im nächsten Abschnitt 1.4 genauer untersucht.

Beispiel 1.14 Der $(16, 256, 6)$-*Nordstrom-Robinson-Code* NRC_{16} ist ein binärer, nicht-linearer Code mit Minimaldistanz 6. Dieser Code ist (bis auf Äquivalenz und Translation) eindeutig durch seine Parameter bestimmt (siehe [Pless98], p.128). NRC_{16} ist eine Vereinigung von 8 Translaten des *Reed-Muller-Codes* $RM(1, 4)$. Wählt man als Erzeugermatrix von $RM(1, 4)$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&1&1&0&1&0&1&0&0&1&1&0&1&0&1&0 \\ 0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0 \end{pmatrix}$$

und setzt

$$\begin{aligned} c_1 &:= (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0), \\ c_2 &:= (0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,1,1,0,1,1), \\ c_3 &:= (0,0,0,0,0,1,0,0,1,0,1,0,1,1,0,1), \\ c_4 &:= (0,0,0,0,0,1,0,1,1,1,0,0,0,1,1,0), \end{aligned}$$

$$c_5 := (0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,1,1,0,1,1,0),$$
$$c_6 := (0,0,0,1,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1),$$
$$c_7 := (0,0,0,1,0,1,0,0,1,1,0,1,1,0,0,0),$$
$$c_8 := (0,0,0,1,0,1,0,1,0,1,1,1,1,1,1,1),$$

dann liefert

$$NRC_{16} = \cup_{j=1}^{8} (c_j + RM(1,4))$$

den Nordstrom-Robinson-Code.
(Nachrechnen mit Programm `NRC16Konstruktion.mag`)

Der Nordstrom-Robinson-Code NRC_{16} in obiger Darstellung ist ein distanzinvarianter Code mit $c_1 = 0 \in NRC_{16}$. Daher gilt $Dist_1(NRC_{16})(X_0, X_1) = P_1(NRC_{16})(X_0, X_1)$. Es ist

$$Dist_1(NRC_{16})(X_0, X_1) = \frac{1}{256} Dist_1(NRC_{16})(X_0 + X_1, X_0 - X_1),$$

vgl. [ConSlo99]. Der Grad 2 Distanz- bzw. Gewichtszähler des Nordstrom-Robinson-Codes hat die folgende Form (siehe Programme `Dist2NRC.mag` (bzw. für das Ergebnis `Grad2DistNRC`) und `P2NRC.mag`):

$$\begin{aligned}
Dist_2(NRC_{16}) = \quad & X_0^{16} + 112X_0^{10}X_1^6 + 112X_0^{10}X_2^6 + 28X_0^{10}X_3^6 + 30X_0^8X_1^8 \\
& +1260X_0^8X_1^2X_2^2X_3^4 + 30X_0^8X_2^8 + 30X_0^8X_3^8 \\
& +3360X_0^7X_1^3X_2^3X_3^3 + 112X_0^6X_1^{10} + 5460X_0^6X_1^4X_2^4X_3^2 \\
& +1680X_0^6X_1^4X_2^2X_3^4 + 420X_0^6X_1^4X_3^6 + 1680X_0^6X_1^2X_2^4X_3^4 \\
& +112X_0^6X_2^{10} + 420X_0^6X_2^4X_3^6 + 28X_0^6X_3^{10} + 2016X_0^5X_1^5X_2^5X_3 \\
& +2016X_0^5X_1^5X_2X_3^5 + 2016X_0^5X_1X_2^5X_3^5 + 420X_0^4X_1^6X_2^6 \\
& +1680X_0^4X_1^6X_2^4X_3^2 + 5460X_0^4X_1^6X_2^2X_3^4 + 1680X_0^4X_1^4X_2^6X_3^2 \\
& +840X_0^4X_1^4X_2^4X_3^4 + 1680X_0^4X_1^4X_2^2X_3^6 + 5460X_0^4X_1^2X_2^6X_3^4 \\
& +1680X_0^4X_1^2X_2^4X_3^6 + 1260X_0^4X_1^2X_2^2X_3^8 + 3360X_0^3X_1^7X_2^3X_3^3 \\
& +3360X_0^3X_1^3X_2^7X_3^3 + 3360X_0^3X_1^3X_2^3X_3^7 + 1260X_0^2X_1^8X_2^4X_3^2 \\
& +1680X_0^2X_1^6X_2^4X_3^4 + 1260X_0^2X_1^4X_2^8X_3^2 + 1680X_0^2X_1^4X_2^6X_3^4 \\
& +5460X_0^2X_1^4X_2^4X_3^6 + 2016X_0X_1^5X_2^5X_3^5 + X_1^{16} + 28X_1^{10}X_2^6 \\
& +112X_1^{10}X_3^6 + 30X_1^8X_2^8 + 30X_1^8X_3^8 + 28X_1^6X_2^{10} \\
& +420X_1^6X_2^6X_3^4 + 112X_1^6X_3^{10} + X_2^{16} + 112X_2^{10}X_3^6 + 30X_2^8X_3^8 \\
& +112X_2^6X_3^{10} + X_3^{16}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_2(NRC_{16}) = \quad & X_0^{16} + 112X_0^{10}X_1^6 + 112X_0^{10}X_2^6 + 112X_0^{10}X_3^6 + 30X_0^8X_1^8 \\
& +30X_0^8X_2^8 + 30X_0^8X_3^8 + 6720X_0^7X_1^3X_2^3X_3^3 + 112X_0^6X_1^{10} \\
& +1680X_0^6X_1^4X_2^4X_3^2 + 1680X_0^6X_1^4X_2^2X_3^4 + 1680X_0^6X_1^2X_2^4X_3^4 \\
& +112X_0^6X_2^{10} + 112X_0^6X_3^{10} + 4032X_0^5X_1^5X_2^5X_3 \\
& +4032X_0^5X_1^5X_2X_3^5 + 4032X_0^5X_1X_2^5X_3^5 \\
& +1680X_0^4X_1^6X_2^4X_3^2 + 1680X_0^4X_1^6X_2^2X_3^4 + 1680X_0^4X_1^4X_2^6X_3^2 \\
& +840X_0^4X_1^4X_2^4X_3^4 + 1680X_0^4X_1^4X_2^2X_3^6 + 1680X_0^4X_1^2X_2^6X_3^4 \\
& +1680X_0^4X_1^2X_2^4X_3^6 + 6720X_0^3X_1^7X_2^3X_3^3 + 6720X_0^3X_1^3X_2^7X_3^3 \\
& +6720X_0^3X_1^3X_2^3X_3^7 + 1680X_0^2X_1^6X_2^4X_3^4 + 1680X_0^2X_1^4X_2^6X_3^4 \\
& +1680X_0^2X_1^4X_2^4X_3^6 + 4032X_0X_1^5X_2^5X_3^5 + X_1^{16} + 112X_1^{10}X_2^6 \\
& +112X_1^{10}X_3^6 + 30X_1^8X_2^8 + 30X_1^8X_3^8 + 112X_1^6X_2^{10} \\
& +112X_1^6X_3^{10} + X_2^{16} + 112X_2^{10}X_3^6 + 30X_2^8X_3^8 + 112X_2^6X_3^{10} + X_3^{16}
\end{aligned}
$$

Die beiden Zähler sind also verschieden. Beide Polynome sind invariant unter MacWilliams-Transformation (siehe Abschnitt 1.4). Es gilt also

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{|C|^2} Dist_2(NRC_{16})(X \cdot T_2) = Dist_2(NRC_{16})(X) \\
\text{und} \quad & \frac{1}{|C|^2} P_2(NRC_{16})(X \cdot T_2) = P_2(NRC_{16})(X) \quad .
\end{aligned}
$$

Sei E die $g \times g$-Einheitsmatrix. Setze $W := \frac{1}{\sqrt{2}} T_1^{(2)} \otimes E$ (wie in [Rung96]). Dann ist der Zähler $Dist_2(NRC_{16})$ auch invariant unter W, $P_2(NRC_{16})$ aber nicht (siehe Programm `ZaehlerWinv.mag`,).

1.4 $\mathbb{Z}_4$-lineare Codes

Schreibe $x \in \mathbb{Z}_4$ als $x = 2a + b$ mit eindeutig bestimmten $a, b \in \{0, 1\}$. Die *Gray-Abbildung* $G : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{F}_2^2$ ist dann durch $x \mapsto (a, a + b \mod 2)$ gegeben, und man erhält durch koordinatenweise Fortsetzung eine Abbildung $G : \mathbb{Z}_4^n \longrightarrow \mathbb{F}_2^{2n}$. Genauer gesagt: Für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_j = 2a_j + b_j$ definiere $G(x) := (a_1, \ldots, a_n, a_1 + b_1 \mod 2, \ldots, a_n + b_n \mod 2)$ und setze $G(x)_1 := (a_1, \ldots, a_n)$ und $G(x)_2 := (a_1 + b_1 \mod 2, \ldots, a_n + b_n \mod 2)$. Wählt man auf $\mathbb{Z}_4^n$ die Lee-Metrik und auf $\mathbb{F}_2^{2n}$ die Hamming-Metrik, so ist G eine Isometrie, und das Bild eines $\mathbb{Z}_4$-linearen Codes unter G ist ein binärer distanzinvarianter Code, vgl. [CHKSS94],[Wan97]. Zum Beispiel gilt für den Nordstrom-Robinson-Code aus Beispiel 1.14 $\;NRC_{16} = G(\mathcal{O}_8)$, wobei $\mathcal{O}_8$ den Octacode bezeichnet, welcher durch eine Erzeugermatrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, siehe [ConSlo93].

Wie in Abschnitt 1.1 erläutert, heißen zwei Codes $C_1, C_2 \subset \mathbb{Z}_4^n$ äquivalent, falls sie durch Permutation der Koordinaten und Vorzeichenwechsel in bestimmten Koordinaten aus einander hervorgehen, d.h. falls eine Permutationsmatrix P und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \{1,3\}$ existieren, s.d. $C_1 = C_2 \cdot (Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot P)$ gilt. Falls alle $\lambda_j = 1$ sind, heißen C_1 und C_2 permutations-äquivalent. Sind C_1 und C_2 äquivalent, dann sind auch die binären Codes $G(C_1)$ und $G(C_2)$ äquivalent, denn eine Permutation der Koordinaten j und k in C_2 bewirkt Permutation der Koordinaten j mit k und $n+j$ mit $n+k$ in $G(C_2)$; Multiplikation einer Koordinate j mit 3 in C_2 bewirkt Permutation der Koordinaten j und $n+j$ in $G(C_2)$. Die Umkehrung gilt natürlich nicht, denn sei zum Beispiel $C \subset \mathbb{Z}_4^3$ von $(1,0,2)$ erzeugt und $H \subset \mathbb{F}_2^6$ der binäre Code, den man aus $G(C)$ durch Vertauschen der zweiten und dritten Koordinate erhält, dann ist $G^{-1}(H) = \{(0,0,0),(1,3,1),(2,0,0),(3,3,1)\}$. Insbesondere ist $G^{-1}(H)$ nicht linear und daher auch nicht äquivalent zu C.

Jeder lineare Code $C \subset \mathbb{Z}_4^n$ ist permutations-äquivalent zu einem Code mit Erzeugermatrix

$$\begin{pmatrix} E_{k_1} & \alpha & \beta \\ 0 & 2E_{k_2} & 2\gamma \end{pmatrix}.$$

Dabei ist E_j die $j \times j$-Einheitsmatrix. Die Matrizen α, β haben Einträge in $\mathbb{Z}_4$, und die Einträge in γ sind aus $\{0,1\}$, siehe [ConSlo93]. Ein binärer Code $H \subset \mathbb{F}_2^{2n}$ heißt $\mathbb{Z}_4$-linear, falls ein linearer Code $C \subset \mathbb{Z}_4^n$ existiert, so daß H und $G(C)$ äquivalent sind.

Im folgenden werden selbstduale Codes $C \subset \mathbb{Z}_4^n$ genauer untersucht. Im Gegensatz zu binären Codes existieren über $\mathbb{Z}_4$ selbstduale Codes in beliebigen Blocklängen. Aus einem selbstdualen Code $C \subset \mathbb{Z}_4^n$ kann durch Verkürzen an einer beliebigen Koordinate $j \in [n]$ ein selbstdualer Code $\tilde{C} \subset \mathbb{Z}_4^{n-1}$ konstruiert werden:

Sei $C \subset \mathbb{Z}_4^n$ selbstdual. Bezeichne mit $pr_j : \mathbb{Z}_4^n \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ die Projektion auf die j-te Koordinate, und zu $x \in \mathbb{Z}_4^n$ sei $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$. Falls $pr_j(C) = \{0,2\}$ ist, dann setze $\tilde{C} := \{y \in \mathbb{Z}_4^{n-1} \mid \exists x \in C \text{ mit } \tilde{x} = y \text{ und } pr_j(x) = 0\}$, ansonsten (also falls $pr_j(C) = \mathbb{Z}_4$) setze $\tilde{C} = \{y \in \mathbb{Z}_4^{n-1} \mid \exists x \in C \text{ mit } \tilde{x} = y \text{ und } pr_j(x) \in \{0,2\}\}$. In beiden Fällen ist $\tilde{C}$ ein selbstdualer Codes der Blocklänge $n-1$, vgl. [ConSlo93],[Wan97].

In [ConSlo93] sind die selbstdualen $\mathbb{Z}_4$-Codes bis zur Blocklänge 8 klassifiziert. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß dort in Figure 2 im Baum am Knoten $\mathcal{E}_7^+$ ein Blatt mit der Beschriftung $\mathcal{E}_7^+\mathcal{A}_1$ fehlt. Auf der Internetseite [Fields] und in [FGLP98] findet man die Klassifikation bis zur Blocklänge $n = 15$.

In diesem Abschnitt soll nun untersucht werden, ob die Distanzzähler binärer Codes, die ein selbstduales Urbild unter der Gray-Abbildung haben, invariant unter Mac-Williams-Transformation sind.

Setze die Gray-Abbildung $G : \mathbb{Z}_4^n \longrightarrow \mathbb{F}_2^{2n}$ vermöge

$$\begin{array}{rcl} G : \mathbb{C}[\mathbb{Z}_4^n] & \longrightarrow & \mathbb{C}[\mathbb{F}_2^{2n}] \\ \sum\limits_{v\in\mathbb{Z}_4^n} h_v \tilde{z}^v & \mapsto & \sum\limits_{u\in\mathbb{F}_2^{2n}} h_{G^{-1}(u)} z^u \end{array}$$

auf die Gruppenalgebren fort. Um die Elemente der beiden Algebren besser unterscheiden zu können, wird in $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_4^n]$ die Unbestimmte mit $\tilde{z}$ bezeichnet. Der Zusammenhang zwischen linearen Codes $C \subset \mathbb{Z}_4^n$, ihren Bildern unter der Gray-Abbildung und den entsprechenden Transformierten ist durch das folgende Lemma gegeben.

Lemma 1.15 *Setze für $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_4^n$ $\kappa(\alpha,\beta) := \sum_{j=1}^n \kappa(\alpha_j, \beta_j)$ (die Summe ist in $\mathbb{Z}$ zu berechnen) mit* $\kappa(\alpha_j, \beta_j) := \begin{cases} 1 & ,\alpha_j\beta_j \equiv 1(2) \\ 0 & ,\alpha_j\beta_j \equiv 0(2) \end{cases}$.

1. *Für $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_4^n$ gilt $\chi_\beta^{(4)}(\tilde{z}^\alpha) = i^{-\kappa(\alpha,\beta)} \cdot \chi^{(2)}_{G(\beta)}(z^{G(\alpha)})$.*
2. *Die Diagramme*

a)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[\mathbb{Z}_4^n]^* \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{C}[\mathbb{F}_2^{2n}]^* \arrow[d, "(.)'"] \\ \mathbb{C}[\mathbb{Z}_4^n] \arrow[r, "G"] & \mathbb{C}[\mathbb{F}_2^{2n}] \end{tikzcd}$$

b)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[\mathbb{Z}_4^n]^* \arrow[r, "G"] \arrow[d, "(.)'"'] & \mathbb{C}[\mathbb{F}_2^{2n}]^* \arrow[d, "\psi"] \\ \mathbb{C}[\mathbb{Z}_4^n] \arrow[r, "G"] & \mathbb{C}[\mathbb{F}_2^{2n}] \end{tikzcd}$$

mit

$$\varphi : H = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}_4^n} h_\nu \tilde{z}^\nu \quad \mapsto \quad \frac{1}{|H|} \sum_{\mu\in\mathbb{Z}_4^n} \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}_4^n} i^{\kappa(\nu,\mu)} h_\nu \chi_\mu^{(4)}(\tilde{z}^\nu) \right) \tilde{z}^\mu$$

$$\psi : \tilde{H} = \sum_{u\in\mathbb{F}_2^{2n}} \tilde{h}_u z^u \quad \mapsto \quad \frac{1}{|\tilde{H}|} \sum_{u\in\mathbb{F}_2^{2n}} \left(\sum_{v\in\mathbb{F}_2^{2n}} i^{-\kappa(G^{-1}(u),G^{-1}(v))} \tilde{h}_v \chi_u^{(2)}(z^v) \right) z^u$$

kommutieren.

Beweis: Zu *1.*: Für $n = 1$ gilt $\chi^{(4)}_{\beta}(\tilde{z}^{\alpha}) = \chi^{(4)}_{\alpha}(\tilde{z}^{\beta}) = i^{\alpha\beta}$. Betrachte die Tabelle:

α	β	$\chi^{(4)}_{\beta}(\tilde{z}^{\alpha})$	$G(\alpha)$	$G(\beta)$	$\chi^{(2)}_{G(\beta)}(z^{G(\alpha)})$
0	$*$	1	$(0,0)$	$*$	1
1	1	i	$(0,1)$	$(0,1)$	-1
1	2	-1	$(0,1)$	$(1,1)$	-1
1	3	$-i$	$(0,1)$	$(1,0)$	1
2	2	1	$(1,1)$	$(1,1)$	1
2	3	-1	$(1,1)$	$(1,0)$	-1
3	3	i	$(1,0)$	$(1,0)$	-1

Wie sich aus der Tabelle leicht ablesen läßt, gilt die Behauptung für $n = 1$. Für $n > 1$ folgt

$$\chi^{(4)}_{\beta}(\tilde{z}^{\alpha}) = \Pi^{n}_{j=1}\chi^{(4)}_{\beta_j}(\tilde{z}^{\alpha}_j) = \left(\Pi^{n}_{j=1} i^{-\kappa(\alpha_j,\beta_j)}\right)\cdot\Pi^{n}_{j=1}\chi^{(2)}_{G(\beta_j)}(z^{G(\alpha_j)}) = i^{-\kappa(\alpha,\beta)}\chi^{(2)}_{G(\beta)}(z^{G(\alpha)}) \quad .$$

Zu *2.*: Zeige *a)*: Sei $H = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}_4^n} h_\nu \tilde{z}^{\nu} \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}_4^n]^*$ beliebig. Dann gilt $G(H) = \sum_{u\in\mathbb{F}_2^{2n}} h_{G^{-1}(u)} z^u$ und $G(H)' = \frac{1}{|G(H)|}\sum_{u\in\mathbb{F}_2^{2n}}\left(\sum_{v\in\mathbb{F}_2^{2n}} h_{G^{-1}(v)}\chi^{(2)}_u(z^v)\right) z^u$. Daher

$$\begin{aligned} G(\varphi(H)) \quad &= \frac{1}{|H|}\sum_{u\in\mathbb{F}_2^{2n}}\left(\sum_{v\in\mathbb{F}_2^{2n}} i^{\kappa(G^{-1}(u),G^{-1}(v))} h_{G^{-1}(v)}\chi^{(4)}_{G^{-1}(u)}(\tilde{z}^{G^{-1}(v)})\right) z^u \\ &= \frac{1}{|G(H)|}\sum_{u\in\mathbb{F}_2^{2n}}\left(\sum_{v\in\mathbb{F}_2^{2n}} h_{G^{-1}(v)}\chi^{(2)}_u(z^v)\right) z^u \\ &= G(H)' \end{aligned}$$

Teil *b)* läßt sich analog beweisen. □

Ziel dieses Abschnitts ist der folgende Satz, das Hauptresultat dieses Kapitels:

Satz 1.16 *Sei $C \subset \mathbb{Z}_4^n$ ein $\mathbb{Z}_4$-linearer selbstdualer Code. Dann gilt*

$$Dist_2(G(C))(X) = \frac{1}{|G(C)|^2} Dist_2(G(C))(X \cdot T^{(2)}_2) \qquad .$$

Zum Beweis dieses Satzes ist es notwendig, $\mathbb{Z}_4$ zusätzlich mit der Struktur der Kleinschen-Vierergruppe zu betrachten. Definiere also eine Verknüpfung $\star$ durch die Verknüpfungstafel

$\star$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

und setze die Verknüpfung koordinatenweise auf $\mathbb{Z}_4^n$ fort. Bezüglich dieser Verknüpfung ist $G : (\mathbb{Z}_4^n, \star) \longrightarrow (\mathbb{F}_2^{2n}, +)$ ein Gruppenisomorphismus. Für $x, y \in \mathbb{Z}_4$ gilt $x \star y = x + y + 2xy$. Falls $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_4^n$, setze $\alpha \bullet \beta := (\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n)$. Es folgt $\alpha \star \beta = \alpha + \beta + 2\alpha \bullet \beta$.

Für $C \subset \mathbb{Z}_4^n$ und $\alpha \in \mathbb{Z}_4^n$ definiere $\alpha \star C := \sum_{\beta\in C} \tilde{z}^{\alpha\star\beta} \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}_4^n]$ und $C \star C := \frac{1}{|C|}\sum_{\alpha\in C} \alpha \star C = \frac{1}{|C|}\sum_{\alpha,\beta\in C} \tilde{z}^{\alpha\star\beta}$. Dann gilt $|\alpha \star C| = |C|$ und $|C \star C| = |C|$.

Proposition 1.17 *Sei $C = C^\perp \subset \mathbb{Z}_4^n$ ein selbstdualer Code und sei $\alpha \in C$. Es gilt $(\alpha \star C)' = \alpha \star C$.*

Beweis: Es ist $(\alpha \star C)' = \frac{1}{|\alpha\star C|}\sum_{u\in\mathbb{Z}_4^n} \chi_u^{(4)}(\alpha \star C)\tilde{z}^u$ und

$$\begin{aligned}
\chi_u^{(4)}(\alpha \star C) &= \sum_{\beta\in C} \chi_u^{(4)}(\tilde{z}^{\alpha\star\beta}) = \sum_{\beta\in C} \chi_u^{(4)}(\tilde{z}^{\alpha+\beta+2\alpha\bullet\beta}) \\
&= \chi_u^{(4)}(\tilde{z}^\alpha) \sum_{\beta\in C} \zeta_4^{<u,\beta+2\alpha\bullet\beta>} \\
&= \chi_u^{(4)}(\tilde{z}^\alpha) \sum_{\beta\in C} \zeta_4^{<u+2\alpha\bullet u,\beta>} = \chi_u^{(4)}(\tilde{z}^\alpha) \cdot \chi_{u+2\alpha\bullet u}^{(4)}(C)
\end{aligned}$$

Mit Lemma 1.2 folgt

$$\chi_u^{(4)}(\alpha \star C) = \begin{cases} \chi_u^{(4)}(\tilde{z}^\alpha) \cdot |\alpha \star C| & , u + 2\alpha \bullet u \in C \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} . \tag{3}$$

Behauptung: $u + 2\alpha \bullet u \in C \;\Leftrightarrow\; u \in \alpha \star C$.

Dann folgt die Aussage der Proposition durch Einsetzen in die Gleichung für $(\alpha \star C)'$. Dabei muß man noch berücksichtigen, daß für $u = \alpha \star v$, $v \in C$, der Faktor

$$\chi_u^{(4)}(\tilde{z}^\alpha) = i^{<\alpha\star v,\alpha>} = i^{<\alpha,\alpha>} \cdot i^{<\alpha,v>} \cdot i^{2\sum_{j=1}^n v_j\alpha_j^2} = 1$$

ist.

Zum Beweis der Behauptung setze $v := \alpha \star u$. Es folgt $u + 2\alpha \bullet u = \alpha \star v + 2\alpha \bullet (\alpha \star v) = \alpha + v + 2\alpha \bullet \alpha$.

Zeige $2\alpha \bullet \alpha \in C$: Sei $x \in C = C^{\perp}$. Es gilt

$$< 2\alpha \bullet \alpha, x >= 2 \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 x_j = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \equiv 1(2)}}^{n} x_j \in \{0, 2\}.$$

$\alpha \in C = C^{\perp}$, daher gilt $< \alpha, \alpha >= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 = 0$. Die Anzahl der ungeraden Koordinateneinträge von α ist also durch 4 teilbar. O.B.d.A. seien die Einträge $\alpha_1, \ldots, \alpha_{4k}$ ungerade und $\alpha_{4k+1}, \ldots, \alpha_n$ gerade ($k \in \mathbb{N}_0$ geeignet) und die Einträge $x_1, \ldots, x_l$ von x ungerade und $x_{l+1}, \ldots, x_{4k}$ gerade ($l \in \mathbb{N}_0$, $l \leq 4k$ geeignet). Angenommen, $< 2\alpha \bullet \alpha, x >= 2$. Dann ist $k \geq 1$ und l ungerade.

$$< \alpha, x >= \sum_{j=1}^{l} \alpha_j x_j + \sum_{j=l+1}^{n} \underbrace{\alpha_j x_j}_{\text{gerade}} \in \{1, 3\} ,$$

d.h. $\alpha \notin C^{\perp}$. Widerspruch.
Wegen α, $2\alpha \bullet \alpha \in C$ und $u + 2\alpha \bullet u = \alpha + v + 2\alpha \bullet \alpha$ gilt:

$$u + 2\alpha \bullet u \in C \;\Leftrightarrow\; v \in C. \qquad \square$$

Aus dieser Proposition folgen nun zwei Korollare:

Korollar 1.18 *Sei $C = C^{\perp} \subset \mathbb{Z}_4^n$ ein selbstdualer Code. Dann gilt*

$$\frac{1}{|C \star C|^g} \cdot P_g^{(4)}(C \star C)(\tilde{X} \cdot T_g^{(4)}) = P_g^{(4)}(C \star C)(\tilde{X}) .$$

Beweis : Es ist

$$\begin{aligned} P_g^{(4)}(C \star C)(\tilde{X}) &= \frac{1}{|C|^g} \sum_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_g \in C \\ \beta_1, \ldots, \beta_g \in C}} \tilde{X}^{\epsilon(\alpha_1 \star \beta_1, \ldots, \alpha_g \star \beta_g)} \\ &= \frac{1}{|C|^g} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_g \in C} P_{\alpha_1 \star C, \ldots, \alpha_g \star C}(\tilde{X}) \\ &= \frac{1}{|C|^g} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_g \in C} P_{(\alpha_1 \star C)', \ldots, (\alpha_g \star C)'}(\tilde{X}) \\ &= \frac{1}{|C|^g} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_g \in C} \frac{1}{\Pi_{j=1}^g |\alpha_j \star C|} P_{\alpha_1 \star C, \ldots, \alpha_g \star C}(\tilde{X} \cdot T_g^{(4)}) \end{aligned}$$

Die dritte Gleichung gilt nach Proposition 1.17 und die letzte Gleichung gilt nach Gleichung (1) auf Seite 7. Es folgt

$$\begin{aligned} P_g(C\star C)^{(4)}(\tilde{X}) &= \frac{1}{|C\star C|^g}\cdot \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_g\in C}\frac{1}{|C|^g}P_{\alpha_1\star C,\ldots,\alpha_g\star C}(\tilde{X}\cdot T_g^{(4)}) \\ &= \frac{1}{|C\star C|^g}\cdot P_g^{(4)}(C\star C)(\tilde{X}\cdot T_g^{(4)})\ . \end{aligned}$$

□

Korollar 1.19 *Sei $C = C^\perp \subset \mathbb{Z}_4^n$ ein selbstdualer Code und sei $\alpha \in C$. Dann folgt*

$$P_g^{(4)}(\alpha\star C)(\tilde{X}) = \frac{1}{|C|^g}P_g^{(4)}(\alpha\star C)(\tilde{X}\cdot T_g^{(4)})\ .$$

Beweis : Analog zum vorherigen Korollar. □

Definition 1.20 Sei $H = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}_4^n} h_\nu \tilde{z}^\nu \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}_4^n]$. H heißt *unter Multiplikation mit 3 invariant*, falls für alle $\alpha\in\mathbb{Z}_4^n$ $h_\alpha = h_{3\alpha}$ gilt.

Ein Code $H \subset \mathbb{Z}_4^n$ ist also genau dann unter Multiplikation mit 3 invariant, wenn für alle $\alpha \in H$ auch $3\alpha \in H$ gilt.

Bemerkung 1.21 Sei $H \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}_4^n]$ unter Multiplikation mit 3 invariant. Dann ist der Zähler $P_g^{(4)}(H)$ invariant unter den Variablentranspositionen $\sigma_{a,b}$ der folgenden Form:

Sei $k \in [g]$ eine feste Koordinate und seien $a, b \in \mathbb{Z}_4^g$ mit $a_j = b_j$ für alle $j \in [g]\backslash\{k\}$ und $a_k = 1,\ b_k = 3$. Dann ist die Variablentransposition $\sigma_{a,b}$ definiert durch $\sigma_{a,b}(\tilde{X}_a) = \tilde{X}_b$, $\sigma_{a,b}(\tilde{X}_b) = \tilde{X}_a$.

Beweis: Nach Definition gilt $P_g^{(4)}(H)(\tilde{X}) = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_g\in H}(\Pi_{j=1}^g h_{\alpha_j})\tilde{X}^{\epsilon(\alpha_1,\ldots,\alpha_g)}$. Sei $k\in[g]$ fest. Da H unter Multiplikation mit 3 invariant ist, gilt $h_{\alpha_k} = h_{3\alpha_k}$. Für obige $\sigma_{a,b}$ ist $\sigma_{a,b}(\tilde{X}^{\epsilon(\alpha_1,\ldots,\alpha_g)}) = \tilde{X}^{\epsilon(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},3\alpha_k,\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_g)}$. Es folgt die Behauptung. □

Für lineare Codes $C \subset \mathbb{Z}_4^n$ ist $H := C\star C = \frac{1}{|C|}\sum_{\alpha,\beta\in C}\tilde{z}^{\alpha\star\beta} = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}_4^n} h_\nu\tilde{z}^\nu$ wegen $3(\alpha\star\beta) = (3\alpha)\star(3\beta)$ invariant unter Multiplikation mit 3, denn:

$$\begin{aligned} h_\nu &= \frac{1}{|C|}|\{(\alpha,\beta)\in C^2 \mid \alpha\star\beta=\nu\}| = \frac{1}{|C|}|\{(\tilde\alpha,\tilde\beta)\in C^2 \mid (3\tilde\alpha)\star(3\tilde\beta)=\nu\}| \\ &= \frac{1}{|C|}|\{\tilde\alpha,\tilde\beta)\in C^2 \mid \tilde\alpha\star\tilde\beta=\nu\}| = h_{3\nu} \end{aligned}$$

Korollar 1.22 *Für einen $\mathbb{Z}_4$-linearen Code $C\subset\mathbb{Z}_4^n$ ist der Zähler $P_g^{(4)}(C\star C)$ invariant unter den Variablentranspositionen $\sigma_{a,b}$.*

Bezeichne nun mit τ den $\mathbb{C}$-Algebrahomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \tau:\mathbb{C}[\tilde X_a]_{a\in\mathbb{Z}_4^g} & \longrightarrow & \mathbb{C}[X_b]_{b\in\mathbb{F}_2^g} \\ \tilde X_a & \mapsto & X_{G(a)_1}X_{G(a)_2} \end{array}$$

und setze $\tilde X := (\tilde X_0,\ldots,\tilde X_{4^g-1})$. Es gilt

$$\begin{aligned} \tau(P_g(C\star C)(\tilde X)) &= \frac{1}{|C|^g}\sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_g\in C\\ \beta_1,\ldots,\beta_g\in C}} \tau(\tilde X^{\epsilon^{(4,n)}(\alpha_1\star\beta_1,\ldots,\alpha_g\star\beta_g)}) \\ &= \frac{1}{|C|^g}\sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_g\in G(C)\\ \beta_1,\ldots,\beta_g\in G(C)}} X^{\epsilon^{(2,n)}(\alpha_1-\beta_1,\ldots,\alpha_g-\beta_g)} = Dist_g(G(C))(X) \end{aligned}$$

Setze $\sigma_1 := \sigma_{\binom{1}{1},\binom{1}{3}}$ und $\sigma_2 := \sigma_{\binom{3}{1},\binom{3}{3}}$.

Lemma 1.23 *Für beliebige $\beta_1,\beta_2\in\mathbb{Z}_4^n$ gilt*

$$\begin{aligned} \tau\left(\sigma_1\circ\sigma_2(W^{\epsilon(\beta_1,\beta_2)})\ |_{W=(\tilde X\cdot T_2^{(4)})}\right) &= (Y_0^2, Y_0Y_1, Y_1^2, Y_0Y_1, Y_0Y_2, Y_0Y_3, \\ &\quad Y_1Y_3, Y_1Y_2, Y_2^2, Y_2Y_3, Y_3^2, Y_2Y_3, \\ &\quad Y_0Y_2, Y_1Y_2, Y_1Y_3, Y_0Y_3)^{\epsilon(\beta_1,\beta_2)} \\ &= Y^{\epsilon(G(\beta_1),G(\beta_2))} \end{aligned}$$

mit $Y := X\cdot T_2^{(2)}$.

Beweis: Nachrechnen. Wie das Programm `T2Lemma.mws` zeigt, gilt

$$\begin{aligned} \tilde X\cdot T_2^{(4)}\Big|_{\tilde X_a = X_{G(a)_1}X_{G(a)_2},\, a\in\mathbb{Z}_4^2} = \ & (Y_0^2, Y_0Y_1, Y_1^2, Y_0Y_1, Y_0Y_2, Y_1Y_2, Y_1Y_3, Y_0Y_3, \\ & Y_2^2, Y_2Y_3, Y_3^2, Y_2Y_3, Y_0Y_2, Y_0Y_3, Y_1Y_3, Y_1Y_2)\,. \end{aligned}$$

Mit $U := (U_0, U_1, U_2, U_3)$ und $V := (U_0^2, U_0U_1, U_1^2, U_0U_1, U_0U_2, U_0U_3, U_1U_3, U_1U_2, U_2^2, U_2U_3, U_3^2, U_2U_3, U_0U_2, U_1U_2, U_1U_3, U_0U_3)$ gilt für beliebige $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}_4^n$ die Gleichung

$$V^{\epsilon(\beta_1,\beta_2)} = U^{\epsilon(G(\beta_1),G(\beta_2))} \; .$$

Damit sich das Ergebnis der Berechnung mit dem Programm `T2Lemma.mws` und der Vektor V für $U := Y$ nicht mehr in den Koordinaten 6,8,14 und 16 unterscheiden, müssen die Einträge an den Stellen 6 und 8 bzw. 14 und 16 vertauscht werden. Dies erledigen die Variablentranspositionen σ_1 und σ_2. □

Als Korollar erhält man nun Satz 1.16:

Sei $C \subset \mathbb{Z}_4^n$ ein selbstdualer Code. Dann gilt

$$\begin{aligned} Dist_2(G(C))(X) &= \tau(P_2^{(4)}(C \star C)(\tilde{X})) = \tau\left(\frac{1}{|C|^2} P_2^{(4)}(C \star C)(\tilde{X} \cdot T_2^{(4)})\right) \\ &= \tau\left(\frac{1}{|C|^2}\, \sigma_1 \circ \sigma_2 \left(P_2^{(4)}(C \star C)(W)\right)\Big|_{W=\tilde{X}\cdot T_2^{(4)}}\right) \\ &= \frac{1}{|C|^2} \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \in C \\ \beta_1,\beta_2 \in C}} \tau\left(\sigma_1 \circ \sigma_2 (W^{\epsilon(\alpha_1 \star \beta_1, \alpha_2 \star \beta_2)})\Big|_{W=\tilde{X}\cdot T_2^{(4)}}\right) \end{aligned}$$

Mit obigem Lemma 1.23 folgt

$$\begin{aligned} Dist_2(G(C))(X) \quad &= \frac{1}{|C|^2} \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \in G(C) \\ \beta_1,\beta_2 \in G(C)}} Y^{\epsilon(\alpha_1-\beta_1,\alpha_2-\beta_2)}\Big|_{Y=X\cdot T_2^{(2)}} \\ &= \frac{1}{|C|^2} Dist_2(G(C))(X \cdot T_2^{(2)}) \; . \end{aligned}$$

Damit ist Satz 1.16 bewiesen. □

Um auf diesem Weg einen analogen Satz für den Grad 3 Zähler $Dist_3(G(C))$ eines selbstdualen $\mathbb{Z}_4$-Codes C zu beweisen, müßte man eine Aussage analog zu Lemma 1.23 für die Matrizen $T_3^{(4)}$ und $T_3^{(2)}$ zeigen. Setzt man $X := (X_0, \ldots, X_7)$, $Y := X \cdot T_3^{(2)}$ und definiert $\tilde{X} = (\tilde{X}_a)_{a \in \mathbb{Z}_4^3}$ durch $\tilde{X}_a := X_{G(a)_1} X_{G(a)_2}$, so sollte gelten, daß jeder Koordinateneintrag in $\tilde{X} \cdot T_3^{(4)}$ ein Produkt von Einträgen des Vektors Y ist (analog Lemma 1.23). Leider zeigt das Programm `T3gehtnicht.mws`, daß $\tilde{X}_{21} = \tilde{X}_{(1,1,1)^T}$ sich nicht als Produkt zweier Einträge in Y schreiben läßt.

Ein ähnliches Problem tritt an einer anderen Stelle auf. Für Grad $g = 1$ beweist man Satz 1.16 wie folgt, siehe auch [RaS98], [Wan97]: Für $\mathbb{Z}_4$-lineare Codes $C \subset$

$\mathbb{Z}_4^n$ sei $Lee(C)(X,Y) = \sum_{x\in C} X^{2n-Lee(x)}Y^{Lee(x)}$ der Lee-Gewichtszähler von C. Es gilt

$$P_1^{(2)}(G(C))(X,Y) = Lee(C)(X,Y) = P_1^{(4)}(C)(X^2, XY, Y^2, XY)\ .$$

Da die Gray-Abbildung eine Isometrie und C als $\mathbb{Z}_4$-linearer Code distanzinvariant ist, gilt $Dist_1(G(C)) = P_1^{(2)}(G(C))$. Für selbtduale Codes C erbt der Lee-Gewichtszähler $Lee(C)$ die MacWilliams-Identität von $P_1^{(4)}(C)$, denn es gilt mit $W := (X^2, XY, Y^2, XY)$

$$\begin{aligned} Lee(C)(X,Y) \quad &= P_1^{(4)}(C)(W) = \frac{1}{|C|}P_1^{(4)}(C)(W\cdot T_1^{(4)}) \\ &= \frac{1}{|C|}P_1^{(4)}(C)((X+Y)^2, X^2-Y^2, (X-Y)^2, X^2-Y^2) \\ &= \frac{1}{|C|}Lee(C)(X+Y, X-Y)\ . \end{aligned}$$

Es folgt die MacWilliams-Identität für $Dist_1(G(C))$.

Versucht man nun, einen Grad 2 Lee-Gewichtszähler zu definieren, so sollte dieser Zähler in Analogie zum Grad 1 Fall die folgenden Eigenschaften haben: Er sollte erstens durch Spezialisieren der Variablen in $P_2^{(4)}(C)$ konstruierbar sein, wobei zwischen Variablen in $P_2^{(4)}(C)(\tilde{X})$ der Form $\tilde{X}_{(1,*)^T}$ und $\tilde{X}_{(3,*)^T}$ bzw. $\tilde{X}_{(*,1)^T}$ und $\tilde{X}_{(*,3)^T}$ wegen $Lee(1) = Lee(3) = 1$ nicht mehr unterschieden werden sollte. Zweitens sollte er mit dem Zähler $P_2^{(2)}(G(C))$ übereinstimmen. Diese beiden Forderungen können jedoch nicht gleichzeitig erfüllt werden: Im Lee-Zähler soll zwischen den Variablen $\tilde{X}_{(1,3)^T}$ und $\tilde{X}_{(1,1)^T}$ nicht unterschieden werden, der binäre Zähler $P_2(G(C))$ unterscheidet aber sehr wohl zwischen $G((1,3)^T) = \binom{01}{10}$ und $G((1,1)^T) = \binom{01}{01}$. Ein noch einfacheres Argument ist, daß der das Lee-Gewicht respektierende Zähler dann ein Polynom in den 9 Variablen $\tilde{X}_{(0,0)^T}$, $\tilde{X}_{(1,0)^T}$, $\tilde{X}_{(2,0)^T}$, $\tilde{X}_{(0,1)^T}$, $\tilde{X}_{(1,1)^T}$, $\tilde{X}_{(2,1)^T}$, $\tilde{X}_{(0,2)^T}$, $\tilde{X}_{(1,2)^T}$, $\tilde{X}_{(2,2)^T}$ wäre; $P_2(G(C))$ ist aber nur ein Polynom in 8 Variablen.

Im Programm `T3gehtnicht.mws` wird der Restterm $R := \tilde{X}_{21}\Big|_{\tilde{X}_a = X_{G(a)_1}X_{G(a)_2}, a\in\mathbb{Z}_4^2}$ $-Y_j \cdot Y_k$, unter anderem für $j=2$ und $k=6$ "am kleinsten", d.h. es treten die wenigsten Summanden auf. In diesem Fall gilt

$$R = 4\left(X_{\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)}X_{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)} + X_{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)}X_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)} - X_{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)}X_{\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right)} - X_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)}X_{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)}\right).$$

Wenn man nun in den ersten beiden Summanden jeweils in den Indices in der zweiten Zeile 1 und 0 vertauschen dürfte, dann würde $R = 0$ folgen. Dabei würde man natürlich den Fehler begehen, daß man zuvor die Koordinaten in den Indices mit Eintrag $3 \in \mathbb{Z}_4$ als $(1,0)$ übersetzt hat, und diese nun an den Stellen, wo es nicht paßt, durch $(0,1)$ ersetzt. Das Problem liegt hier also ebenfalls darin, daß beim Übergang zum binären Zähler die Ziffern $1,3 \in \mathbb{Z}_4$ nicht beliebig in $(1,0)$ oder $(0,1)$ übersetzt werden dürfen.

Da es nun nicht gelungen ist, Satz 1.16 für $g \geq 3$ zu beweisen, könnte man versuchen, ein Gegenbeispiel zu konstruieren, d.h. einen selbstdualen Code $C \subset \mathbb{Z}_4^n$ anzugeben, so daß $Dist_3(G(C))$ nicht invariant unter MacWilliams-Transformation ist. Mit den Codes der Blocklänge ≤ 8 aus [ConSlo93] läßt sich allerdings kein Gegenbeispiel konstruieren, denn es gilt:

Lemma 1.24 *Für die Codes aus der Liste in Figure 2. in [ConSlo93]* $\mathcal{A}_1, D_4^\oplus, \mathcal{E}_7^+, \mathcal{E}_8^\oplus, \mathcal{K}_8, \mathcal{K}_8', \mathcal{O}_8$ *gilt* $D'_{G(C)} = D_{G(C)}$. *Für* $D_6^\oplus, D_8^\oplus, \mathcal{L}_8$ *gilt* $D'_{G(C)} = \sigma(D_{G(C)})$*, wobei die Permutation* σ *im Fall von* $D_6^\oplus$ *durch* $\sigma := (2\ 8)(4\ 10)(6\ 12)$ *und im Fall von* $D_8^\oplus$ *bzw.* $\mathcal{L}_8$ *durch* $\sigma := (2\ 10)(4\ 12)(6\ 14)(8\ 16)$ *gegeben ist.*

Beweis: Nachrechnen mit den Programmen `A1.mag`, `D4oplus.mag`, `D6oplus.mag`, `E7plus.mag`, `D8oplus.mag`, `E8oplus.mag`, `O8.mag`, `L8.mag`, `K8.mag` und `K8Strich.mag`. □

Korollar 1.25 *Für die unzerlegbaren Codes* C *aus der Liste in [ConSlo93], Figure 2, gilt für beliebigen Grad* g *die Gleichung*

$$Dist_g(G(C))(X) = \frac{1}{|G(C)|^g} Dist_g(G(C))(X \cdot T_g^{(2)}) \ .$$

Beweis: Mit Gleichung (2) auf Seite 9 folgt die Behauptung. □

Bezeichne wie in [ConSlo93] die Abbildung $\beta : \mathbb{Z}_4^n \longrightarrow \mathbb{F}_2^n,\ x \mapsto x \mod 2$.

Bemerkung 1.26 Sei $C \subset \mathbb{Z}_4^n$ ein linearer Code und $C_0 := kern(\beta|_C)$ der gerade Teilcode von C, d.h. der Code, der aus den Codeworten von C mit lauter geraden Koordinateneinträgen besteht. Falls $[C : C_0] \leq 2$ gilt, so ist $G(C)$ linear. Ist C zusätzlich selbstdual, so ist $G(C)$ selbstdual, und für alle Grade g ist der Zähler $Dist_g(G(C))$ invariant unter MacWilliams-Transformation.

Beweis: Für $[C : C_0] = 1$ gilt $C = C_0$, und $G(C_0)$ ist linear. Sei also $[C : C_0] = 2$. Dann gilt $C = C_0 \cup (\alpha + C_0)$ für ein $\alpha \in C \backslash C_0$. Es folgt $G(C) = G(C_0) \cup G(\alpha + C_0)$. Für $\beta \in C_0$ ist $\alpha \star \beta = \alpha + \beta$, daher gilt $G(\alpha + \beta) = G(\alpha) + G(\beta)$ und $G(C) = G(C_0) \cup (G(\alpha) + G(C_0))$, also ist $G(C)$ linear. Es ist $C_0 \subset C_0^\perp$ und nach Lemma 1.15 gilt $G(C_0^\perp) = \psi(G(C_0)) = G(C_0)^\perp$, also $G(C_0) \subset G(C_0)^\perp$.

Mit $P_1(G(C))(1,1) = \frac{1}{|G(C)|} P_1(G(C))(2,0)$ für selbstduales C folgt $|G(C)| = 2^n$. Wegen $P_1(G(C)^\perp) = P_1(G(C))$ ist $|G(C)^\perp| = |G(C)|$. Für $C = C_0$ folgt also $G(C) = G(C)^\perp$, und im anderen Fall $C = C_0 \cup (\alpha + C_0)$ erhält man ebenfalls $G(C) = G(C)^\perp$. Denn für festes $\beta \in C$ gilt für alle $\gamma \in C = C^\perp$ $\kappa(\beta, \gamma) \equiv 0(4)$, und mit Lemma 1.15 folgt $\chi^{(2)}_{G(\beta)}(G(C)) = \chi^{(4)}_\beta(C) = 0$, also $G(\beta) \in G(C)^\perp$. Daher ergibt sich $G(C) \subset G(C)^\perp$. Mit $|G(C)| = |G(C)^\perp|$ folgt die Behauptung. Die Aussage über den Distanzzähler ist klar. □

Aus der Bemerkung 1.26 folgt die Aussage in Korollar 1.25 sofort für die Codes $\mathcal{A}_1^n, D_4^\oplus, D_4^\oplus \mathcal{A}_1^n$ und $\mathcal{K}_{4m}$ aus [ConSlo93].

Korollar 1.27 *Sei $C = C_1 \times \ldots \times C_s \subset \mathbb{Z}_4^n$ ein selbstdualer Code, der sich in Codes C_j zerlegen läßt, mit der Eigenschaft $C_j \in \{\mathcal{A}_1, D_4^\oplus, D_6^\oplus, \mathcal{E}_7^+, D_8^\oplus, \mathcal{E}_8, \mathcal{O}_8^\oplus, \mathcal{L}_8, \mathcal{K}'_8\}$, oder $C_j = \mathcal{K}_{4m}$ für geeignetes $m \in \mathbb{N}$, oder $[C_j : (C_j)_0] \leq 2$. Dann ist der Grad g Distanzzähler $Dist_g(G(C))$ invariant unter MacWilliams-Transformation. Insbesondere gilt diese Aussage für alle selbstdualen Codes der Blocklänge ≤ 8.*

Beweis : Folgt mit Proposition 1.13. □

Sollte es wirklich einen selbstdualen Code $C \subset \mathbb{Z}_4^n$ geben, für den der Distanzzähler $Dist_3(G(C))$ nicht invariant unter MacWilliams-Transformation ist, so gilt also $n > 8$. Als Indiz dafür, daß eventuell bei größeren Blocklängen durchaus noch so ein Code gefunden werden könnte, betrachte man den binären Reed-Muller-Code $RM(1,5) \subset \mathbb{F}_2^{32}$. Dieser ist $\mathbb{Z}_4$-linear, also zu einem Code C äquivalent, der unter der Gray-Abbildung ein $\mathbb{Z}$-lineares Urbild hat. Der duale Code $RM(1,5)^\perp = RM(3,5)$ ist aber nicht $\mathbb{Z}_4$-linear, [Wan97]. Der duale Code eines binären $\mathbb{Z}_4$-linearen Codes ist somit nicht notwendig $\mathbb{Z}_4$-linear. $RM(1,5)$ scheint das (zur Zeit ?) kleinste bekannte Beispiel für diesen Sachverhalt zu sein.

Bemerkung 1.28 Der Beweis von Satz 1.16 impliziert auch für den Gewichtszähler $P_2^{(2)}(G(C))$ eines selbstdualen Codes $C \subset \mathbb{Z}_4^n$ die Identität

$$P_2^{(2)}(G(C)) = \frac{1}{|G(C)|^2} P_2^{(2)}(G(C))(X \cdot T_2^{(2)}) \, .$$

Nach Satz 1.5 gilt $P_g^{(4)}(C)(\tilde{X}) = \frac{1}{|C|^g} P_g^{(4)}(C)(\tilde{X} \cdot T_g^{(4)})$. Wegen $\tau(P_g^{(4)}(C)(\tilde{X})) = P_g^{(2)}(G(C))(X)$, und da C trivialerweise invariant unter Multiplikation mit 3 ist, folgt die Behauptung.

Es ergibt sich die gleiche Frage für Gewichtszähler: Angenommen, $C \subset \mathbb{Z}_4^n$ sei ein beliebiger selbstdualer Code. Gilt dann für $g \geq 3$ die MacWilliams-Gleichung $P_g^{(2)}(G(C))(X) = \frac{1}{|G(C)|^g} P_g^{(2)}(G(C))(X \cdot T_g^{(2)})$?

Im Fall der Gewichtszähler ist die Antwort leichter zu geben. Wie oben beschrieben, ist es schon für Grad $g = 2$ nicht möglich, einen Lee-Gewichtszähler zu definieren, der einerseits das Lee-Gewicht respektiert, und andererseits mit dem Grad 2 Gewichtszähler $P_2(G(C))$ übereinstimmt. Die Aussage für Gewichtszähler für $g \geq 2$ auf diese Art beweisen zu wollen, muß also scheitern. Glücklicherweise kann im Fall der Gewichtszähler die Antwort durch Angabe von Gegenbeispielen gefunden werden:

Bemerkung 1.29 Für die Codes $D_6^{\oplus}, \mathcal{E}_7^+$ und $\mathcal{O}_8$ aus Figure 2 in [ConSlo93] gilt

1. $G(D_6^{\oplus})' = \sigma(G(D_6^{\oplus}))$, wobei $\sigma \in \mathcal{S}_{12}$ in Lemma 1.24 angegeben ist.
2. $G(\mathcal{E}_7^+)'$ ist nicht äquivalent zu $G(\mathcal{E}_7^+)$.
3. $G(\mathcal{O}_8)'$ ist nicht äquivalent zu $G(\mathcal{O}_8)$.
4. $P_3(G(\mathcal{E}_7^+))$ und $P_3(G(\mathcal{O}_8))$ sind nicht invariant unter MacWilliams-Transformation.

Beweis: Die Richtigkeit der Aussage in 1. rechnet man mit dem Programm `GD6oplus.mag` nach. Zu 2. und 3.: Beide Aussagen folgen aus 4.; bzw. man rechnet mit den Programmen `GE7plus.mag` und `GO8.mag` nach, daß in $G(\mathcal{E}_7^+)' = \sum_{u \in \mathbb{F}_2^{14}} h_u z^u$ und $G(\mathcal{O}_8)' = \sum_{u \in \mathbb{F}_2^{16}} \tilde{h}_u z^u$ negative Koeffizienten auftreten. Zum Beweis von *4.*: Die Zähler $P_3(G(\mathcal{E}_7^+))$ bzw. $P_3(G(\mathcal{O}_8))$ werden mit den Programmen `P3GE7plus.mag` bzw. `P3GO8.mag` berechnet. Die Ergebnisse dieser Berechnungen stehen in den Dateien `P3GE7pluszaehler` bzw. `P3GO8zaehler`. Diese können unter MAGMA mit dem restore-Befehl geladen werden. Die Programme `P3GE7plusMacW.mag` bzw. `P3GO8MacW.mag` berechnen die MacWilliams-Transformierte von $P_3(G(\mathcal{E}_7^+))$ bzw. $P_3(G(\mathcal{O}_8))$. Die Ergebnisse stehen in den Dateien `P3GE7plusMacWzaehler` bzw. `P3GO8MacWzaehler`. Die MacWilliams-Transformierten der Zähler $P_3(G(\mathcal{E}_7^+))$ bzw. $P_3(G(\mathcal{O}_8))$ enthalten negative Koeffizienten. $\square$

Für binäre Codes $C_1 \subset \mathbb{F}_2^k$ und $C_2 \subset \mathbb{F}_2^n$ gilt $P_g(C_1 \times C_2) = P_g(C_1) \cdot P_g(C_2)$, siehe [Rung96]. Da $G(\mathcal{A}_1)$ und $G(D_4^{\oplus})$ selbstduale Codes sind, ist $\mathcal{E}_7^+$ der selbstduale Code C kleinster Blocklänge (modulo Äquivalenz), für den der Grad 3 Gewichtszähler $P_3(G(C))$ nicht invariant unter MacWilliams-Transformation ist.

2 Thetareihen zu periodischen Punktmengen

2.1 Das Kugelpackungsproblem

Als Motivation für die nächsten Kapitel sei an das Kugelpackungsproblem im n-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ erinnert. Dabei geht es um die Frage, wie dicht man n-dimensionale Kugeln gleicher Größe in den $\mathbb{R}^n$ packen kann (siehe dazu auch [ConSlo99], [Rog64], [Zong99]). Zu Beginn dieses Abschnitts werden einige Bezeichnungen und Schreibweisen eingeführt, die später benötigt werden.

Betrachte den $(\mathbb{R}^n, (.,.))$ zusammen mit dem *Standardskalarprodukt* $(x, y) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Die Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ werden in dieser Arbeit als Spaltenvektoren geschrieben. Die *Norm* $N(x)$ eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ ist seine Quadratlänge, d.h. es gilt $N(x) := (x, x)$.

Ein *Gitter* $L \subset \mathbb{R}^n$ ist eine diskrete Untergruppe der additiven Gruppe $(\mathbb{R}^n, +)$ von vollem Rang, d.h. es existiert eine Basis $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^n$ mit $L = \mathbb{Z}b_1 + \ldots + \mathbb{Z}b_n$. Die Matrix $\Omega = (b_1, \ldots, b_n)^T$ heißt eine *Erzeugermatrix* des Gitters L, und $Gram(L) := \Omega \cdot \Omega^T = ((b_j, b_k))_{j,k=1}^{n}$ ist die *Gram-Matrix von* L *bezüglich der Basis* $b_1, \ldots, b_n$. Man beachte, daß die Gittervektoren $b_1, \ldots, b_n$ in den Zeilen von Ω stehen. Es bezeichnet $\det L := \det(Gram(L))$ die *Determinante von* L. Diese ist eine Invariante des Gitters, d.h. unabhängig von der Wahl der Basis, und für das Volumen eines Fundamentalbereichs des Gitters gilt $vol(\mathbb{R}^n/L) = \sqrt{\det L}$, siehe [Ebe02]. Das zu L *duale Gitter* wird mit $L^* := \{y \in \mathbb{R}^n \mid (y, L) \subset \mathbb{Z}\}$ bezeichnet. Ein Gitter L mit $L \subset L^*$ heißt *ganzzahlig*, und L heißt *gerade*, falls $N(x) \in 2\mathbb{Z}$ für alle $x \in L$ gilt.

Eine *periodische Punktmenge* Λ ist eine disjunkte, endliche Vereinigung von Translaten eines fest gewählten Gitters L, d.h.

$$\Lambda := \bigcup_{j=1}^{M} (u_j + L)$$

mit $u_1, \ldots, u_M \in \mathbb{R}^n$ und $u_j - u_k \notin L$ für alle $j \neq k$, $(j, k) \in [M]^2$. Die letzte Bedingung ist äquivalent zur Disjunktheit der Translate $u_j + L$ und $u_k + L$.

Einer periodischen Punktmenge, oder allgemeiner einer diskreten Menge $X \subset \mathbb{R}^n$, kann man eine Kugelpackung $\mathcal{P}$ zuordnen, indem man die Punkte $x \in X$ als Mittelpunkte von n-dimensionalen Kugeln $B_r(x)$ vom Radius r auffaßt,

$$\mathcal{P} = \bigcup_{x \in X} B_r(x) \quad .$$

Dabei dürfen sich die Kugeln höchstens in jeweils einem Punkt berühren, d.h. der Packungsradius r ist kleiner gleich dem größtmöglichen Radius r_{max}, s.d.

$|B_{r_{max}}(x) \cap B_{r_{max}}(y)| \leq 1$ für $x \neq y$ gilt. Das *Minimum* $\min(X)$ einer diskreten Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist durch

$$\min(X) := \min_{\substack{x,y \in X \\ x \neq y}} N(x-y)$$

gegeben. Für den maximalen Packungsradius gilt also $r_{max}^2 = \min(X)$.

Die *Kußzahl* τ einer Kugelpackung $\mathcal{P}$ ist die größtmögliche Anzahl an Kugeln in $\mathcal{P}$, die eine feste Kugel in $\mathcal{P}$ berühren. Die *Dichte* einer periodischen Kugelpackung $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$, d.h. die Kugelmittelpunkte bilden eine periodische Punktmenge $\Lambda = \cup_{j=1}^{M}(u_j + L)$, ist durch die Formel

$$\Delta_{\mathcal{P}} = \frac{M \cdot V_n \cdot r^n}{\sqrt{\det L}}$$

gegeben, siehe [ConSlo99]. Dabei bezeichnet V_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel und r den Packungsradius. Oftmals verwendet man als Maß für die Dichte auch die *center density* $\delta_{\mathcal{P}} := \Delta_{\mathcal{P}}/V_n$.

Die (obere) Dichte $\Delta_{\mathcal{P}}^+$ einer beliebigen Kugelpackung $\mathcal{P}$ kann durch die Dichte periodischer Kugelpackungen beliebig genau approximiert werden. Das kann man sich wie folgt überlegen:

Bezeichne mit $W_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_1|, \ldots, |x_n| \leq \frac{1}{2}\}$ den n-dimensionalen Einheitswürfel. Zu einer diskreten Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ sind die *obere Dichte*

$$\Delta^+(X) := \limsup_{l \to \infty} \frac{1}{vol(l \cdot W_n)} \cdot \sum_{\substack{x \in X \\ B_r(x) \cap lW_n \neq \emptyset}} vol(B_r(x)) = \limsup_{l \to \infty} \sum_{\substack{x \in X \\ B_r(x) \cap lW_n \neq \emptyset}} \frac{r^n \cdot V_n}{l^n}$$

und die *untere Dichte*

$$\Delta^-(X) := \liminf_{l \to \infty} \frac{1}{vol(l \cdot W_n)} \cdot \sum_{\substack{x \in X \\ B_r(x) \subset lW_n}} vol(B_r(x)) = \liminf_{l \to \infty} \sum_{\substack{x \in X \\ B_r(x) \subset lW_n}} \frac{r^n \cdot V_n}{l^n}$$

der zu X gehörenden Kugelpackung mit Packungsradius r definiert. In dieser Notation bezeichnet $vol(A)$ das n-dimensionale Volumen von $A \subset \mathbb{R}^n$. Sei nun eine diskrete Menge X mit $\Delta^+(X) > 0$ und ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Gesucht ist eine periodische Kugelpackung $\mathcal{P}$, für deren Dichte $|\Delta^+(X) - \delta_{\mathcal{P}}| < \epsilon$ gilt. Nach der Definition der oberen Dichte $\Delta^+(X)$ existiert ein $l > 0$ mit

$$\left| \Delta^+(X) - \sum_{\substack{x \in X \\ B_r(x) \cap lW_n \neq \emptyset}} \frac{r^n \cdot V_n}{l^n} \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{und} \quad \frac{vol((l+2r)W_n) - vol(lW_n)}{vol(lW_n)} < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Weiterhin gilt $vol((l+2r)W_n) > vol(lW_n) + \sum_{\substack{x\in X,\, B_r(x)\not\subset lW_n \\ B_r(x)\cap lW_n\neq\emptyset}} r^n V_n$, woraus mit der Dreiecksungleichung

$$\left| \Delta^+(X) - \sum_{x\in X,\, B_r(x)\subset lW_n} \frac{r^n \cdot V_n}{l^n} \right| < \epsilon$$

folgt. Sei $\{u_1, \ldots, u_M\} = \{x \in X \mid B_r(x) \subset lW_n\}$. Dann hat die zu $\Lambda := \cup_{j=1}^{M}(u_j + l\mathbb{Z}^n)$ gehörende Kugelpackung $\mathcal{P}$ die Dichte $\Delta_{\mathcal{P}} = \sum_{x\in X,\, B_r(x)\subset lW_n} \frac{r^n \cdot V_n}{l^n}$, und leistet somit das gewünschte. Einen ähnlichen Beweis findet man in [CoEl03] im Anhang A.

Die Dichte-Formel für periodische Packungen hängt von der Anzahl der Translate M, der Determinante des Gitters $\det L$ und dem Packungsradius r ab. Es ist immer möglich, durch geeignetes Skalieren einer periodischen Packung (der zugrunde liegenden periodischen Punktmenge Λ) mit einem fest gewählten $\alpha \in \mathbb{R}$, d.h. durch Multiplikation eines jeden Vektors mit α, zu erreichen, daß $\det L = M^2$ gilt. In diesem Fall gilt nach obiger Dichte-Formel für periodische Packungen für die center density von $\mathcal{P}$

$$\delta_{\mathcal{P}} = \frac{\sqrt{\min(\Lambda)}^{\,n}}{2^n} .$$

Um eine dichte Kugelpackung zu erhalten, ist man bei dieser Art der Normierung daran interessiert, eine periodische Punktmenge Λ mit $\det L = M^2$ zu finden, deren Minimum $\min(\Lambda)$ möglichst groß ist. Im Kapiel 5 dieser Arbeit wird die Existenz einer solchen Kugelpackung mit einer bestimmten vorgegebenen Thetareihe diskutiert.

Die *Distanzverteilung* einer periodischen Punktmenge $\Lambda = \bigcup_{j=1}^{M}(u_j + L)$ ist durch die Folge $(d_j)_{j\in J}$, $J := \{N(u_{k_1} - u_{k_2} + x) \mid (k_1, k_2, x) \in [M]^2 \times L\}$ mit

$$d_j := \frac{1}{M} |\{(k_1, k_2, x) \in [M]^2 \times L \mid N(u_{k_1} - u_{k_2} + x) = j\}|$$

gegeben. d_j ist also die durchschnittliche Anzahl der Punkte aus der periodischen Punktmenge, die zu Verschiebungsvektoren u_k den euklidischen Abstand $\sqrt{j}$ haben (mit Vielfachheit gezählt). Λ heißt *distanzinvariant*, falls für alle $\nu \in [M]$ die Folgen $(d_j^{(\nu)})_{j\in J}$ mit $d_j^{(\nu)} = \frac{1}{M}|\{(k, x) \in [M] \times L \mid N(u_{k_1} - u_\nu + x) = j\}|$ übereinstimmen.

Zur Verdeutlichung dieses Sachverhaltes wird noch eine andere Sichtweise angegeben, auf die im Abschnitt 2.3 noch einmal eingegangen wird.

Zu einer periodischen Punktmenge $\Lambda = \cup_{j=1}^{M}(u_j + L)$ betrachte die Menge

$$St(\Lambda) := \{u_{k_1} - u_{k_2} + x \mid (k_1, k_2, x) \in [M]^2 \times L\} = \bigcup_{x\in L} (x + st) ,$$

wobei der *Stern* st durch $st := \{u_{k_1} - u_{k_2} \mid k \in [M]^2\}$ gegeben ist. Man erhält also die Menge $St(\Lambda)$, indem man an jeden Gitterpunkt den Vektorstern st klebt. Ordnet man den Elementen $y \in St(\Lambda)$ Gewichte

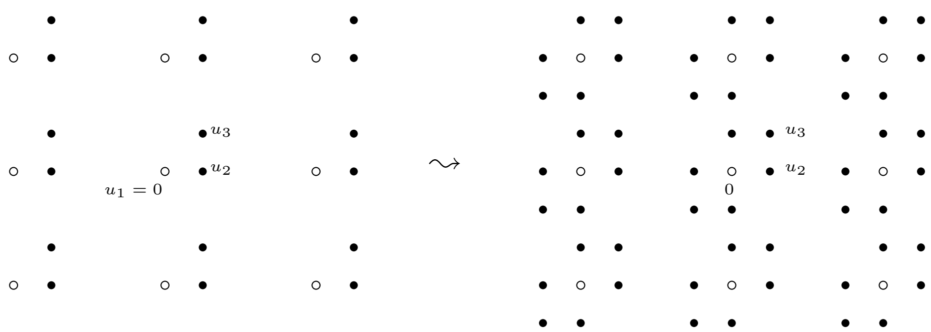
$$\eta_y := \frac{1}{M} |\{(k_1, k_2, x) \in [M]^2 \times L \mid u_{k_1} - u_{k_2} + x = y\}|$$

zu, so ist die Distanzverteilung von Λ durch die Abstandsverteilung von $St(\Lambda)$ bezüglich 0 unter Berücksichtigung der Gewichte η_y gegeben, d.h. für alle $j \in J$ gilt

$$d_j = \sum_{\substack{y \in St(\Lambda) \\ N(y)=j}} \eta_y \ .$$

Zur Veranschaulichung betrachte man folgendes Beispiel:

$\Lambda = L \cup (u_2 + L) \cup (u_3 + L)$ $\qquad\qquad\qquad$ $St(\Lambda)$



In diesem Bild werden die Punkte des Gitters L durch Kreise dargestellt und die Punkte der Translate des Gitters durch die schwarzen Punkte. Im rechten Teil des Bildes sind die Gitterpunkte mit 1 und die übrigen Punkte mit je 1/3 zu gewichten.

2.2 Modulformen

In diesem Abschnitt werden Schreibweisen und grundlegende Sachverhalte über Modulformen bereitgestellt, die in späteren Abschnitten benötigt werden. Als Referenz sei auf [Frei83] und [Frei91] verwiesen. Die Notation aus diesen Quellen wird hier übernommen.

Für $n \times n$-Matrizen A und $n \times k$-Matrizen G sei $A[G] := G^T AG$, wobei G^T die transponierte Matrix von G bezeichnet. $2g \times 2g$-Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

werden in Blöcke A, B, C, D zerlegt, wobei jeder Block eine $g \times g$-Matrix ist. Die Matrix E bezeichnet in dieser Arbeit immer die Einheitsmatrix, und es wird aus dem Zusammenhang klar werden, wieviele Zeilen die Matrix jeweils besitzt. Setze

$$I := \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} ,$$

dann ist die *symplektische Gruppe* $Sp_g(\mathbb{R})$ definiert durch

$$Sp_g(\mathbb{R}) := \{M \in GL_{2g}(\mathbb{R}) \mid I[M] = I\} .$$

Eine Matrix $M \in Sp_g(\mathbb{R})$ mit Blöcken A, B, C, D erfüllt die *symplektischen Relationen*

$$A^T D - C^T B = E, \quad A^T C = C^T A, \quad B^T D = D^T B .$$

Die Inverse einer Matrix $M \in Sp_g(\mathbb{R})$ in Blockgestalt ist durch

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix}$$

gegeben. Eine Matrix $M \in Sp_g(\mathbb{R})$ heißt *projektiv rational*, falls ein $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ existiert, s.d. tM rational ist.

Die symplektische Gruppe $Sp_g(\mathbb{R})$ operiert auf der *Siegelschen Halbebene* $\mathbb{H}_g := \{Z = Z^T \in \mathbb{C}^{g \times g} \mid Im(Z) > 0\}$ durch

$$\begin{array}{ccl} Sp_g(\mathbb{R}) \times \mathbb{H}_g & \longrightarrow & \mathbb{H}_g \\ (M, Z) & \mapsto & M\langle Z \rangle := (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \end{array} .$$

Die *Siegelsche Modulgruppe* $Sp_g(\mathbb{Z}) := Sp_g(\mathbb{R}) \cap GL_{2g}(\mathbb{Z})$ ist eine diskrete Untergruppe von $Sp_g(\mathbb{R})$ und operiert daher eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{H}_g$, siehe [Frei83]. Zu $l \in \mathbb{N}$ sei wie üblich

$$\begin{array}{l} \Gamma_{g,0}(l) := \{M \in Sp_g(\mathbb{Z}) \mid C \equiv 0 \mod l\} \\ \Gamma_{g,1}(l) := \{M \in \Gamma_{g,0}(l) \mid A, D \equiv E \mod l\} \\ \Gamma_g(l) := \{M \in Sp_g(\mathbb{Z}) \mid M \equiv E \mod l\} \end{array} .$$

Die Gruppe $\Gamma_g(l)$ heißt *Hauptkongruenzgruppe der Stufe* l, und es gilt $\Gamma_g(l) \subset \Gamma_{g,1}(l) \subset \Gamma_{g,0}(l)$. Eine Modulgruppe $\Gamma \subset Sp_g(\mathbb{R})$ heißt *Kongruenzgruppe* , falls es eine natürliche Zahl l mit $\Gamma_g(l) \subset \Gamma$ gibt. Die Sequenz

$$1 \longrightarrow \Gamma_g(l) \xrightarrow{id} Sp_g(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mod l} Sp_g(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \longrightarrow 1$$

ist exakt. Insbesondere hat $\Gamma_g(l)$ endlichen Index in $Sp_g(\mathbb{Z})$. Damit hat auch jede Kongruenzgruppe $\Gamma \subset Sp_g(\mathbb{Z})$ endlichen Index in $Sp_g(\mathbb{Z})$. Für die Menge

$$\Gamma_{g,1}^{(2)}(l) := \{M \in \Gamma_{g,1}(l) \mid B \equiv 0 \mod 2\}$$

gilt $\Gamma_g(l) \subset \Gamma_{g,1}^{(2)}(l)$ für gerades l, und für ungerades l gilt $\Gamma_g(2l) \subset \Gamma_{g,1}^{(2)}(l)$. Es ist leicht zu verifizieren, daß $\Gamma_{g,1}^{(2)}(l)$ für beliebiges $l \in \mathbb{N}$ eine Untergruppe von $\Gamma_{g,1}(l)$ ist. Die im nächsten Abschnitt definierten Average-Thetareihen sind Modulformen zur $\Gamma_{g,1}^{(2)}(l)$ für geeignetes l, wenn die Differenzen der Vektoren der zugrunde liegenden periodischen Punktmenge ganzzahlige Norm haben, siehe Korollar 2.24.

Im folgenden wird der Begriff des Multiplikatorsystems eingeführt, vgl. [Frei91]. Zu $M \in Sp_g(\mathbb{R})$ besitzt die Abbildung $Z \mapsto \det(CZ+D)$ eine holomorphe Wurzel $h(Z)$, die bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt ist. Für alle nachfolgenden Betrachtungen sei jetzt eine dieser Wurzeln fest gewählt. Diese wird mit $\sqrt{\det(CZ+D)}$ bezeichnet. Setze

$$J_k(M,Z) := (\det(CZ+D))^k,\ 2k \in \mathbb{Z}.$$

Zu jedem $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ existiert eine Abbildung $w_k : Sp_g(\mathbb{R}) \times Sp_g(\mathbb{R}) \longrightarrow \{\pm 1\}$ mit

$$J_k(MN,Z) = w_k(M,N) \cdot J_k(M, N\langle Z\rangle) \cdot J_k(N,Z)$$

und es gilt $w_k \equiv 1$ genau dann, wenn $k \in \mathbb{Z}$ ist, [Frei91].

Definition 2.1 Sei $\Gamma \subset Sp_g(\mathbb{R})$ eine Kongruenzgruppe. Eine Abbildung $\chi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ heißt *Multiplikatorsystem vom Gewicht* k ($2k \in \mathbb{Z}$) genau dann, wenn die Bedingungen

1. $\chi(MN) = w_k(M,N) \cdot \chi(M) \cdot \chi(N)$ für alle $M, N \in \Gamma$.
2. $\chi(-E) \cdot \det(0 \cdot Z - E)^k = 1$, falls $-E \in \Gamma$.

erfüllt sind.

Ein Multiplikatorsystem von ganzzahligem Gewicht ist ein Charakter auf Γ. Wie in [Frei91] werden auch hier nur Multiplikatorsysteme χ betrachtet, die auf einer geeigneten Kongruenzuntergruppe Γ_0 von Γ mit einer Potenz des *Theta-Multiplikatorsystems* χ_ϑ übereinstimmen, d.h. es soll

$$\chi|_{\Gamma_0} = \chi_\vartheta|_{\Gamma_0}^r$$

für ein geeignetes $r \in \mathbb{N}_0$ gelten. Die Existenz dieses Multiplikator-Systems ist durch das nachfolgende Lemma gegeben:

Lemma 2.2 *(Propositionen 5.1 und 5.5, Seite 21f in [Frei91])*
Die Thetareihe $\vartheta(Z) = \sum_{g\in\mathbb{Z}^n} exp(\pi i Z[g])$, $Z \in \mathbb{H}_n$, ist eine Modulform vom Gewicht $\frac{1}{2}$ bezüglich der Thetagruppe

$$\Gamma_{n,\vartheta} := \left\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_g(\mathbb{Z}) \middle| AB^T \text{ und } CD^T \text{haben gerade Diagonaleinträge} \right\}$$

und bezüglich eines bestimmten Multiplikatorsystems χ_ϑ (dem sogenannten Theta-Multiplikatorsystem), d.h. es gilt

$$\vartheta(M\langle Z\rangle) = \chi_\vartheta(M)\sqrt{\det(CZ+D)} \cdot \vartheta(Z)$$

für alle $M \in \Gamma_{n,\vartheta}$. Für jedes solche M ist $\chi_\vartheta(M)$ eine achte Einheitswurzel.

Wie in [Frei91], Kapiel II, Abschnitt 7, gezeigt wird, stimmt χ_ϑ für gerade Gitter der Stufe l und Gram-Matrix S mit dem in dieser Arbeit in Satz 2.22 definierten Multiplikator überein (siehe dazu auch [AnMa75]).

Für Matrizen $M \in Sp_g(\mathbb{R})$ und Funktionen $f : \mathbb{H}_g \longrightarrow \mathbb{C}$ definiere den *Slash-Operator* durch

$$f \mid_k M := \det(CZ+D)^{-k} \cdot f(M\langle Z\rangle)\ ,\ 2k \in \mathbb{Z}.$$

Es gilt $f|_k(MN) = w_k(M,N) \cdot (f|_kM)\,|_kN$.

Definition 2.3 Sei $f : \mathbb{H}_g \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $\Gamma \subset Sp_g(\mathbb{R})$ eine Kongruenzgruppe und $\chi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^*$ ein Multiplikatorsystem. f heißt *Modulform vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ zu Γ und zum Multiplikator χ*, falls gilt:

1. $f \mid_k M = \chi(M) \cdot f$ für alle $M \in \Gamma$
2. $f \mid_k N$ ist für alle projektiv rationalen Matrizen $N \in Sp_g(\mathbb{R})$ in Bereichen der Art $\{Z = X + iY \in \mathbb{H}_g \mid Y \geq Y_0 > 0\}$ beschränkt.

Dabei genügt es in der zweiten Bedingung, wenn N ein Vertretersystem der Nebenklassen ΓN, $N \in Sp_g(\mathbb{Z})$, durchläuft (siehe [Frei83]). Falls $g > 1$ ist, folgt 2. schon aus 1. und der Holomorphie von f nach dem Koecherprinzip, [Frei83]. Die Bedingung 2. ist äquivalent dazu, daß für die zu betrachtenden projektiv rationalen Matrizen $N \in Sp_g(\mathbb{R})$ in der Fourierentwicklung $f|_kN(Z) = \sum_{T=T^T} a_T e^{\pi i \sigma(TZ)}$ für die Koeffizienten die Implikation $a_T \neq 0 \ \Rightarrow\ T \geq 0$ gilt, siehe [Frei83]. In dieser Notation bezeichnet $\sigma(TZ)$ die Spur der Matrix TZ.

Zu einer Kongruenzgruppe $\Gamma \subset Sp_g(\mathbb{R})$ definiere

$$\Gamma|\Phi := \left\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_{g-1}(\mathbb{R}) \,\middle|\, \tilde{M} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix} \in \Gamma \right\} \quad ,$$

wobei $\tilde{A} := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{B} := \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{C} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{D} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$

gesetzt sind. $\Gamma|\Phi$ ist dann ebenfalls eine Kongruenzgruppe. In der Notation von [Frei83], [Frei91] bezeichne den $\mathbb{C}$-*Vektorraum der Modulformen vom Gewicht k zu Γ und zum Multiplikator χ mit* $[\Gamma, k, \chi]$. Falls $\chi(M) = 1$ für alle $M \in \Gamma$ gilt, läßt man die Angabe des Multiplikators weg und schreibt einfach $[\Gamma, k]$. Zu festem Γ, k, χ ist der Raum $[\Gamma, k, \chi]$ endlich dimensional, insbesondere ist eine Modulform $f \in [\Gamma, k, \chi]$ durch endlich viele Fourierkoeffizienten bestimmt. Nach obiger Voraussetzung existiert nämlich eine Hauptkongruenzgruppe $\Gamma_0 \subset \Gamma$, für die $\chi|_{\Gamma_0}$ Werte in den 8-ten Einheitswurzeln annimmt. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von $[\Gamma_0, k, \chi]$ und $f_0 \in \mathcal{B}$. dann ist $f_0^7 \cdot \mathcal{B} \subset [\Gamma_0, 8k, \chi^8] = [\Gamma_0, 8k]$ und nach [Frei83] ist $[\Gamma_0, 8k]$ endlich dimensional (siehe dort Theorem 6.11. in Kapitel 2).

Der *Siegelsche Φ-Operator*

$$(f|\Phi)(Z) := \lim_{t\to\infty} f\left(\left(\begin{smallmatrix} Z & 0 \\ 0 & it \end{smallmatrix}\right)\right)$$

liefert eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} [\Gamma, k, \chi] & \longrightarrow & [\Gamma|\Phi, k, \tilde{\chi}] \\ f & \mapsto & f|\Phi \end{array}$$

wobei $\tilde{\chi}$ durch $\tilde{\chi}(M)\cdot(\det(CZ+D))^k = \chi(\tilde{M})\cdot\left(\det\left(\tilde{C}\left(\begin{smallmatrix} Z & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right)+\tilde{D}\right)\right)^k$ definiert ist, siehe [Frei91]. Da $f(Z) = \sum_{T=T^T\geq 0} a_T e^{\pi i\sigma(TZ)} \in [\Gamma, k, \chi]$ in Bereichen der Art $Y \geq Y_0 > 0$ gleichmäßig konvergiert, kann man den Φ-Operator gliedweise auf die Reihe anwenden.

Definition 2.4 Sei $f \in [\Gamma, k, \chi]$. f heißt *Spitzenform*, falls $(f|_k N)|\Phi = 0$ für alle projektiv rationalen Matrizen $N \in Sp_g(\mathbb{R})$ gilt.

Auch hier reicht es wieder, ein Vertretersystem der Linksnebenklassen ΓN, $N \in Sp_g(\mathbb{Z})$ zu betrachten. Der *$\mathbb{C}$-Vektorraum der Spitzenformen* wird mit $[\Gamma, k, \chi]_0$ (bzw. $[\Gamma, k]_0$) bezeichnet. Eine Modulform f ist genau dann eine Spitzenform, wenn für alle projektiv rationalen Matrizen N für die Koeffizienten in der Entwicklung $f|_k N(Z) = \sum_{T=T^T\geq 0} a_T e^{\pi i\sigma(TZ)}$ die Aussage $a_T \neq 0 \;\Rightarrow\; T > 0$ gilt (Beweis analog [Frei83]).

Satz 2.5 *Sei Γ eine Kongruenzgruppe, $\chi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^*$ ein Multiplikatorsystem und $N \in Sp_g(\mathbb{R})$ eine projektiv rationale Matrix. Dann ist auch $N^{-1}\Gamma N$ eine Kongruenzgruppe und die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} [\Gamma, k, \chi] & \longrightarrow & [N^{-1}\Gamma N, k, \chi^N] \\ f & \mapsto & f\,|_k\,N \end{array}$$

ist ein Isomorphismus. Dabei ist $\chi^N(N^{-1}MN) := \chi(M)\cdot w_k(M,N)w_k(N, N^{-1}MN)$ für $M \in \Gamma$ gesetzt.

Zum Beweis siehe [Frei83] und [Frei91]. Die Aussage des Satzes bleibt natürlich gültig, wenn man die Matrix $N \in Sp_g(\mathbb{R})$ durch ein Vielfaches tN mit $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ersetzt.

Beispiel 2.6 Sei $L \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter und S eine Gram-Matrix von L. Dann ist die *Thetareihe vom Grad* g zu L durch

$$\vartheta_L^{(g)}(Z) := \sum_{G \in \mathbb{Z}^{n \times g}} e^{\pi i \sigma(S[G] \cdot Z)}\ ,\ Z \in \mathbb{H}_g,$$

gegeben. $\vartheta_L^{(g)}$ ist eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{H}_g$. Wenn L ein gerades Gitter ist und l die *Stufe von* L bezeichnet (d.h. l ist die kleinste natürliche Zahl, für die lS^{-1} eine gerade Matrix ist), so ist $\vartheta_L^{(g)}$ eine Modulform vom Gewicht $n/2$ zur Gruppe $\Gamma_{g,0}(l)$ und einem geeigneten Multiplikator χ, siehe [AnMa75], [Frei83], [Frei91] bzw. Satz 2.22 in dieser Arbeit. Skaliert man nun das Gitter mit $\frac{1}{\sqrt{2}}$, (d.h. man multipliziert die Punktmenge mit diesem Faktor), so erhält man ein Gitter $\tilde{L} := \frac{1}{\sqrt{2}} L$. Es gilt $\vartheta_{\tilde{L}}^{(g)}(Z) = \vartheta_L^{(g)}(Z/2)$. Mit $N := \left(\begin{smallmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} & 0 \end{smallmatrix} \right)$ gilt nach obigem Satz $\vartheta_{\tilde{L}}^{(g)} \in [N^{-1} \Gamma N, k, \chi^N]$.

Zerlegt man in der Fourier-Entwicklung einer Siegelschen Modulform $f(Z) = \sum_{T = T^T \geq 0} a_T e^{\pi i \sigma(TZ)}$ vom Gewicht k die Matrizen $Z \in \mathbb{H}_g$ und T in Blöcke

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2 & Z_3 \end{pmatrix}\ ,\ T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_2 & T_3 \end{pmatrix}\ ,$$

wobei Z_3 und T_3 $m \times m$-Matrizen sind ($m < g$), so läßt sich f in der Form

$$f(Z) = \sum_{T_3 = T_3^T \geq 0} \varphi_{T_3}(Z_1, Z_2) e^{\pi i \sigma(T_3 Z_3)}$$

schreiben. Diese Zerlegung der Reihe heißt *Fourier-Jacobi-Zerlegung von* f. Die Koeffizienten φ_{T_3} sind dann Jacobi-Formen vom Gewicht k und Index T_3 zu einer geeigneten Gruppe, siehe [Frei83], [Zie89], [EiZa85]. In dieser Arbeit wird nur der Fall der Modulformen vom Grad 2, ganzzahligem Gewicht k und trivialem Multiplikator benötigt.

Sei daher f eine Siegelsche Modulform mit diesen Eigenschaften. Schreibe $Z = \left(\begin{smallmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{H}_2$ und $T = \left(\begin{smallmatrix} t_1 & t_2 \\ t_2 & t_3 \end{smallmatrix} \right)$. Desweiteren gelte $f(Z + S) = f(Z)$ für alle Matrizen $S \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$. Diese Bedingung garantiert, daß die Koeffizienten $\varphi_{t_3} : \mathbb{H} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Reihenentwicklung der Form

$$\varphi_{t_3}(z_1, z_2) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r^2 \leq 4nm}} c(n, r) q^{2n} \zeta^{2r}$$

mit $q = e^{\pi i z_1}$, $\zeta = e^{\pi i z_2}$ besitzen.

Die folgenden Definitionen wurden aus [EiZa85] übernommen. Für $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{Z}^2$ und Funktionen $\varphi : \mathbb{H} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ setze

$$\begin{aligned}
\left(\varphi|_{k,m}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)(z_1,z_2): \quad &= (cz_1+d)^{-k} \cdot e^{2\pi i m \frac{-cz_2^2}{cz_1+d}} \cdot \varphi\left(\frac{az_1+b}{cz_1+d}, \frac{z_2}{cz_1+d}\right) \\
\text{und} \qquad (\varphi|_m(\lambda,\mu))(z_1,z_2): \quad &= e^{2\pi i m(\lambda^2+2\lambda z_2)} \cdot \varphi(z_1, z_2+\lambda z_1+\mu) \ .
\end{aligned}$$

Mit diesen Bezeichnungen rechnet man leicht

$$\begin{aligned}
(\varphi|_{k,m}M_1)|_{k,m}M_2 &= \varphi|_{k,m}(M_1 \cdot M_2) \\
(\varphi|_m x)|_m y &= \varphi|_m(x+y) \\
(\varphi|_{k,m}M)|_m(x \cdot M) &= (\varphi|_m x)|_{k,m}M
\end{aligned}$$

für $x, y \in \mathbb{Z}^2$ und $M, M_1, M_2 \in SL_2(\mathbb{Z})$ nach. Es folgt, daß

$$\varphi|_{k,m}(M,x) := (\varphi|_{k,m}M)|_m x$$

eine Operation von $SL_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$ auf der Menge der Funktionen $\varphi : \mathbb{H} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert.

Definition 2.7 Sei $\varphi : \mathbb{H} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$ eine Untergruppe von endlichem Index und $K \subset \mathbb{Z}^2$ ein Gitter, auf dem Γ durch $(M,x) \mapsto x \cdot M$ operiert. φ heißt *Jacobiform vom Gewicht k und Index m zu* $\Gamma \ltimes K$, falls die folgenden Begingungen erfüllt sind:

1. $\varphi|_{k,m}M = \varphi$ für alle $M \in \Gamma$

2. $\varphi|_m x = \varphi$ für alle $x \in K$

3. Für jedes $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ hat $\varphi|_{k,m}M$ eine Fourier-Entwicklung der Form $\sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z} \\ r^2 \leq 4nm}} c(n,r) q^{2n} \zeta^{2r}$ $(q = e^{\pi i z_1},\ \zeta = e^{\pi i z_2})$.

Der $\mathbb{C}$-*Vektorraum der Jacobiformen vom Gewicht k und Index m zu* $\Gamma \ltimes K$ wird mit $J_{k,m}(\Gamma \ltimes K)$ bezeichnet.

Satz 2.8 *(vgl. Theorem 6.1. in [EiZa85]) Sei f eine Siegelsche Modulform vom Grad 2 und Gewicht k zu einer Untergruppe $\Gamma \subset Sp_2(\mathbb{Z})$ von endlichem Index. Es gelte $f(Z+S) = f(Z)$ für alle $S \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$. Schreibt man f in der Form*

$$f(Z) = \sum_{m\geq 0} \varphi_m(z_1,z_2) \cdot e^{2\pi i m z_3} \ ,$$

so sind die Koeffizienten $\varphi_m(z_1,z_2)$ Jacobiformen vom Gewicht k und Index m.

2.3 Average-Thetareihen zu periodischen Punktmengen

Sei $\Lambda = \cup_{j=1}^{M}(u_j + L)$ eine periodische Punktmenge, d.h. $L \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Gitter vom Rang n und für die Verschiebungsvektoren $u_1, \ldots, u_M \in \mathbb{R}^n$ gilt $u_j + L \neq u_k + L$ für $j \neq k$. In [OdSlo80] wird die *Average-Thetareihe zu einer periodischen Punktmenge* Λ definiert,

$$\Theta_\Lambda(z) := \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{M} \sum_{x \in L} q^{N(x+u_k-u_l)},$$

wobei $q := e^{\pi i z}$ gesetzt ist und $N(v)$ wieder die Quadratlänge von $v \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet. $\Theta_\Lambda(z)$ ist eine erzeugende Funktion für die Distanzverteilung von Λ. Es gilt

$$\Theta_\Lambda(z) = \vartheta_L(z) + \frac{2}{M} \cdot \sum_{k<l} \sum_{x \in L} q^{N(x+u_k-u_l)} \quad ,$$

und für $M = 1$ (d.h. Λ ist ein Gitter) erhält man $\Theta_\Lambda(z) = \vartheta_L(z)$. Falls die periodische Punktmenge Λ distanzinvariant ist und 0 enthält, dann ist $\vartheta_\Lambda^{(1)} = \sum_{x\in\Lambda} q^{N(x)} = \Theta_\Lambda$. In der Notation von Abschnitt 2.1 gilt $\Theta_\Lambda = \sum_{y \in St(\Lambda)} \eta_y q^{N(y)}$. Man kann die Reihe Θ_Λ also als eine gewöhnliche Thetareihe zur periodischen Punktmenge $St(\Lambda)$ auffassen; allerdings hat man dabei noch die Gewichte η_y zu berücksichtigen.

Proposition 2.9 In der $q-$Entwicklung der Reihe $\Theta_\Lambda(z) = \sum_{j\in J} a_j q^j$, $J := \{N(u_{k_1} - u_{k_2} + x) \mid (k_1, k_2, x) \in [M]^2 \times L\}$, ist der Koeffizient a_{j_0} mit $j_0 := \min\{j \in J \mid j \neq 0\}$ eine untere Schranke an die Kußzahl der durch Λ definierten Kugelpackung.

Beweis: Es ist

$$\Theta_\Lambda(z) = \frac{1}{M} \sum_{k \in [M]^2} \vartheta_{u_{k_1}-u_{k_2}+L}(z) = \frac{1}{M} \sum_{k_2 \in [M]} \vartheta_{\Lambda - u_{k_2}}(z) \quad .$$

In dieser Notation bezeichnen $\vartheta_{u_{k_1}-u_{k_2}+L}$ die Thetareihe zur Nebenklasse $u_{k_1} - u_{k_2} + L$ und $\vartheta_{\Lambda-u_{k_2}}$ die Thetareihe zu der um $-u_{k_2}$ verschobenen Punktmenge Λ, d.h. es gilt $\vartheta_{u_{k_1}-u_{k_2}+L} = \sum_{x\in u_{k_1}-u_{k_2}+L} q^{N(x)}$ (für $\vartheta_{\Lambda-u_{k_2}}$ analog). Für jedes $k_2 \in [M]$ stimmen die Kußzahlen τ und τ_{k_2} der von Λ bzw. $\Lambda - u_{k_2}$ definierten Kugelpackungen überein. Mit $J_{k_2} := \{N(y - u_{k_2}) \mid y \in \Lambda\}$ und $j_0(k_2) := \min\{j \in J_{k_2} \mid j \neq 0\}$ folgt für den Koeffizienten $b(k_2; j_0(k_2))$ in der Entwicklung

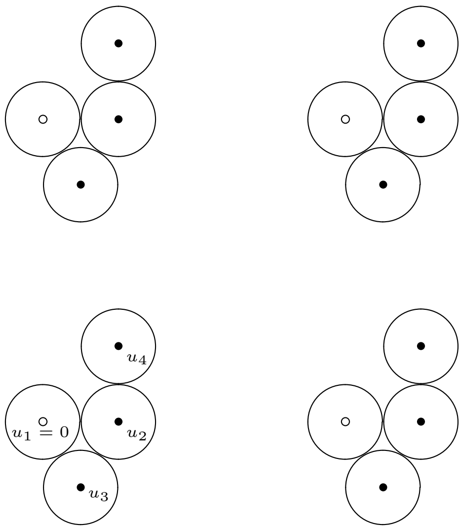
$$\vartheta_{\Lambda-u_{k_2}}(z) = \sum_{j \in J_{k_2}} b(k_2; j) e^{\pi i j z} \ ,$$

daß im Fall $j_0 = j_0(k_2)$ die Abschätzung $b(k_2; j_0(k_2)) \leq \tau$ gilt. Wegen $j_0 \leq j_0(k_2)$ für alle $k_2 \in [M]$ folgt

$$a_{j_0} = \frac{1}{M} \sum_{k_2 \in [M]} b(k_2; j_0) \leq \frac{1}{M} \sum_{k_2 \in [M]} \tau_{k_2} = \tau \quad . \qquad \square$$

Falls Λ selbst schon ein Gitter mit Kußzahl τ ist, dann folgt $a_{j_0} = \tau$. Das folgende Beispiel zeigt, daß es auch Fälle gibt, in denen a_{j_0} echt kleiner als die Kußzahl der Packung ist.

Beispiel 2.10 Betrachte $\Lambda := \cup_{j=1}^{4}(u_j + L)$ mit $L := 4\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ und $u_1 := 0, u_2 := (1,0), u_3 := (1/2, -\sqrt{3}/2)$ und $u_4 := (1,1)$.



Die Kußzahl der durch Λ definierten Kugelpackung ist $\tau = 3$ und es gilt

$$\Theta_\Lambda(z) = 1 + 2q^1 + \frac{1}{2}q^{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}q^{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \dots \; .$$

In [OdSlo80] wird die folgende Transformationsformel für die Reihen Θ_Λ bewiesen, die ein Analogon zur Thetatransformationsformel von Thetareihen zu Gittern darstellt:

$$\frac{\sqrt{\det L}}{M} \left(\frac{i}{z}\right)^{n/2} \cdot \Theta_\Lambda(-1/z) = \frac{1}{M^2} \sum_{y \in L^*} |B_y|^2 q^{N(y)}$$

Dabei ist $B_y := \sum_{k=1}^{M} e^{2\pi i (y, u_k)}$ gesetzt.

Das kann man nun auf Reihen von höherem Grad $g \geq 1$ verallgemeinern: Analog zu Thetareihen (zu Gittern) höheren Grades, kann man die Grad g Average-Thetareihe einer periodischen Punktmenge Λ definieren und eine Transformationsformel für diese Reihen beweisen.

Definition 2.11 Sei $\Lambda = \cup_{j=1}^{M}(u_j + L)$ eine periodische Punktmenge und $g \in \mathbb{N}$. Zu $k := (k_1, \ldots, k_{2g}) \in [M]^{2g}$ und $\tilde{X}_g := (x_1, \ldots, x_g) \in L^g$ definiere

$$A(g,k;\tilde{X}_g) := \big((x_j + u_{k_{2j-1}} - u_{k_{2j}}, x_l + u_{k_{2l-1}} - u_{k_{2l}})\big)_{j,l=1}^{g}$$
$$= \begin{pmatrix} (x_1 + u_{k_1} - u_{k_2}, x_1 + u_{k_1} - u_{k_2}) & (x_1 + u_{k_1} - u_{k_2}, x_2 + u_{k_3} - u_{k_4}) & \ldots \\ (x_2 + u_{k_3} - u_{k_4}, x_1 + u_{k_1} - u_{k_2}) & (x_2 + u_{k_3} - u_{k_4}, x_2 + u_{k_3} - u_{k_4}) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} .$$

Die Reihe
$$\Theta_{\Lambda}^{(g)}(Z) := \frac{1}{M^g} \sum_{k \in [M]^{2g}} \sum_{\tilde{X}_g = (x_1,\ldots,x_g) \in L^g} e^{\pi i \sigma(A(g,k;\tilde{X}_g)\cdot Z)}$$
heißt *Average-Thetareihe zu Λ vom Grad g.*

Für $g = 1$ stimmt $\Theta_{\Lambda}^{(1)}(z)$ mit der in [OdSlo80] definierten Reihe Θ_Λ überein. Daher wird oft im folgenden bei der Schreibweise der Index ${}^{(1)}$ weggelassen.

Bemerkung 2.12 Für jedes $g \in \mathbb{N}$ konvergiert die Reihe $\Theta_{\Lambda}^{(g)}(Z)$ auf Bereichen der Art $D(Y_0) = \{Z = Z^T \in \mathbb{H}_g \mid Im(Z) \geq Y_0 > 0\}$, $Y_0 = Y_0^T > 0$, $Y_0 \in \mathbb{R}^{g\times g}$, absolut und lokal gleichmäßig. Insbesondere ist $\Theta_{\Lambda}^{(g)} : \mathbb{H}_g \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.

Beweis:
Der Beweis verläuft völlig analog zum Beweis für Thetareihen zu Gittern, vgl. [Frei83]. Die Behauptung folgt auch aus der Darstellung über die Thetareihen $\vartheta_{A,B}^{(g)}(S,Z)$, siehe unten. □

Bemerkung 2.13 Die Reihen $\Theta_{\Lambda}^{(g)}$ sind invariant unter Translation der periodischen Punktmenge, d.h. für alle $u \in \mathbb{R}^n$ gilt
$$\Theta_{\Lambda}^{(g)} = \Theta_{u+\Lambda}^{(g)} .$$
Die Reihen $\Theta_{\Lambda}^{(g)}$ sind unabhängig von der Wahl der Darstellung von Λ, d.h.: Sind $L, L' \subset \mathbb{R}^n$ Gitter, $u_1, \ldots, u_M, u'_1, \ldots, u'_N \in \mathbb{R}^n$, $\Lambda = \cup_{j=1}^{M}(u_j + L)$, $\Lambda' = \cup_{j=1}^{N}(u'_j + L')$ disjunkte Vereinigungen mit $\Lambda = \Lambda'$, dann gilt für alle $g \in \mathbb{N}$
$$\Theta_{\Lambda}^{(g)} = \Theta_{\Lambda'}^{(g)} .$$

Beweis:
Die erste Behauptung ist klar. Beweis der zweiten Behauptung (Skizze): Es gilt $[L' : L \cap L']$, $[L : L \cap L'] < \infty$. Man kann sich auf den Fall $L' \subset L$ beschränken (ansonsten Λ und Λ' bezüglich $L \cap L'$ darstellen und die Unabhängigkeit der Reihe $\Theta_\Lambda^{(g)}$ bezüglich der Wahl der Repräsentanten der Nebenklassen $w_j + (L \cap L')$ ausnutzen). L ist dann eine Vereinigung von Nebenklassen von L'. Da die Reihe $\Theta_\Lambda^{(g)}$ unabhängig von der Wahl der Repräsentanten der Nebenklassen ist, folgt die Behauptung. $\square$

Wie im Beweis der vorigen Bemerkung angedeutet, gilt für die Darstellung einer periodischen Punktmenge $\Lambda = \cup_{j=1}^M (u_j + L)$ bezüglich eines Untergitters $L' \subset L$ vom Index N und den Vektoren $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{R}^n$, die ein Vertretersystem der Nebenklassen von L' in L bilden,

$$\Lambda = \bigcup_{j=1}^{M} \bigcup_{k=1}^{N} ((u_j + v_k) + L') \ .$$

Dies ist wieder eine disjunkte Vereinigung. Ist nun L ein Gitter mit $2L \subset L^*$ und gilt weiterhin $2u_j \in L^*$ für alle $j \in [M]$, so kann man durch die Wahl $L' := 2L$ erreichen, daß $\Lambda = \cup_{j=1}^M \cup_{k=1}^{2^n} ((u_j + v_k) + L'))$ die folgenden Eigenschaften hat:

1. $L' \subset (L')^*$
2. $u_1, \dots, u_M \in \frac{1}{2} L^* = (L')^*$
3. $v_1, \dots, v_{2^n} \in L \subset L^* \subset (L')^*$

Es folgt also:

Bemerkung 2.14 Ist $\Lambda = \cup_{j=1}^M (u_j + L)$ eine periodische Punktmenge mit $N(u_j - u_l + L) \subset \mathbb{Z}$ für alle $j, l \in [M]$, so existiert eine Darstellung $\Lambda = \cup_{j=1}^N (w_j + L')$, wobei L' ein gerades Gitter ist und die Verschiebungsvektoren $w_1, \dots, w_N$ im dualen Gitter von L' liegen.

Diese Bemerkung gestattet es, die Reihen $\Theta_\Lambda^{(g)}$ für solche periodischen Punktmengen Λ als Modulformen zu geeigneten Gruppen aufzufassen, siehe Abschnitt 2.4. Zunächst soll aber eine analoge Transformationsformel wie in [OdSlo80] für die höheren Reihen $\Theta_\Lambda^{(g)}$ bewiesen werden.

Sei dazu $S = S^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine positiv definite Matrix, $n, g \in \mathbb{N}$, und seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times g}$. Dann konvergieren die Reihen

$$\vartheta_{A,B}^{(g)}(S, Z) := \sum_{G \in \mathbb{Z}^{n \times g}} e^{\pi i \sigma\left(S\left[G + \frac{1}{2}A\right] \cdot Z + B^T G\right)}$$

absolut und lokal gleichmäßig auf der Siegelschen Halbebene $\mathbb{H}_g$, siehe [Frei83].

Im folgenden werden die Reihen $\Theta_\Lambda^{(g)}$ durch Reihen der Form $\vartheta_{A,B}^{(g)}(S,Z)$ dargestellt:

Um eine einigermaßen unkomplizierte Darstellung zu erhalten, ist erst ein wenig Notation nötig. Es bezeichne wieder $\Lambda = \cup_{j=1}^M (u_j + L) \subset \mathbb{R}^n$ eine periodische Punktmenge, Ω eine Erzeugermatrix von L und $S := Gram(L) = \Omega \cdot \Omega^T$ die Gram-Matrix von L bezüglich Ω. Zu beliebigen $x_1, \ldots, x_g \in L$ existieren $h_1 := h_1(x_1), \ldots, h_g := h_g(x_g) \in \mathbb{Z}^n$ mit $x_j = \Omega^T \cdot h_j$ für alle $j \in [g]$. Zu $\tilde{X}_g := (x_1, \ldots, x_g)$ setze $G_{\tilde{X}_g} := (h_1, \ldots, h_g)$ und zu $k \in [M]^{2g}$ definiere

$$C(k) := (c_1(k), \ldots, c_g(k)) \in \mathbb{R}^{n\times g} \text{ mit } c_j(k) := u_{k_{2j-1}} - u_{k_{2j}}$$

und $\tilde{C}(k) := (\Omega^T)^{-1} \cdot C(k)$.

Behauptung 2.15 Es gilt $A(g,k;\tilde{X}_g) = S[G_{\tilde{X}_g} + \tilde{C}(k)]$.

Beweis:
Seien $i,j \in [g]$ fest. Setze $c_v := c_v(k)$ und $\tilde{c}_v := \tilde{c}_v(k)$. Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$\begin{aligned} A(g,k;\tilde{X}_g)_{ij} \quad &= (x_i + u_{k_{2i-1}} - u_{k_{2i}}, x_j + u_{k_{2j-1}} - u_{k2j}) \\ &= (\Omega^T h_i + c_i, \Omega^T h_j + c_j) \\ &= c_i^T \Omega^T h_j + c_i^T c_j + h_i^T \Omega\Omega^T h_j + h_i^T \Omega c_j \\ &= \tilde{c}_i^T S h_j + \tilde{c}_i^T S \tilde{c}_j + h_i^T S h_j + h_i^T S \tilde{c}_j \\ &= (S[G_{\tilde{X}_g} + \tilde{C}(k)])_{ij} \end{aligned}$$

□

Man erhält für die Darstellung von $\Theta_\Lambda^{(g)}$ durch die Reihen der Form $\vartheta_{A,B}^{(g)}$:

Lemma 2.16 *Es gilt*

$$\Theta_\Lambda^{(g)}(Z) = \frac{1}{M^g} \sum_{k\in[M]^{2g}} \vartheta_{2\tilde{C}(k),0}^{(g)}(S,Z) \qquad .$$

Beweis: Die Abbildung $\tilde{X}_g : \mathbb{Z}^{n\times g} \longrightarrow L^g$, $G \mapsto \tilde{X}_g(G) := \Omega^T \cdot G$ ist bijektiv. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{M^g} \sum_{k\in[M]^{2g}} \vartheta_{2\tilde{C}(k),0}^{(g)}(S,Z) \qquad &= \frac{1}{M^g} \sum_{k\in[M]^{2g}} \sum_{G\in\mathbb{Z}^{n\times g}} e^{\pi i \sigma(S[G+\tilde{C}(k)]Z)} \\ = \frac{1}{M^g} \sum_{k\in[M]^{2g}} \sum_{\tilde{X}_g\in L^g} e^{\pi i\sigma(A(g,k;\tilde{X}_g)Z)} \qquad &= \Theta_\Lambda^{(g)}(Z) \qquad . \end{aligned}$$

□

Eine Verallgemeinerung der Transformationsformel aus [OdSlo80] auf die Average-Thetareihen vom Grad g stellt der folgende Satz dar.

Satz 2.17 *(Transformationsformel für die Reihen $\Theta_\Lambda^{(g)}$)*
Für die Reihen $\Theta_\Lambda^{(g)}$ gilt

$$\frac{(\det S)^{g/2}}{M^g}\,(\det(Z/i))^{-n/2}\cdot\Theta_\Lambda^{(g)}(-Z^{-1}) = \frac{1}{M^{2g}}\sum_{\tilde{Y}_g\in(L^*)^g}\left(\prod_{j=1}^{g}|B_{y_j}|^2\right)e^{\pi i\sigma(A(g;\tilde{Y}_g)Z)}\;.$$

Dabei ist $\tilde{Y}_g=(y_1,\ldots,y_g)$, $y_j\in L^*$, und $A(g;\tilde{Y}_g):=((y_j,y_l))_{j,l=1}^{g}$ bezeichnet die Gram-Matrix von $y_1,\ldots,y_g$.

Beweis:
Setzt man $A=2\tilde{C}(k)$ und $B=0$ in die Transformationsformel

$$\vartheta_{A,B}(S^{-1},-Z^{-1})=e^{-\frac{1}{2}\pi i\sigma(A^T\cdot B)}(\det S)^{n/2}\,(\det(Z/i))^{m/2}\,\vartheta_{B,-A}(S,Z)$$

für die Reihen $\vartheta_{A,B}^{(g)}(S,Z)$ (siehe [Frei83]) ein, so erhält man mit Lemma 2.16

$$\begin{aligned}\Theta_\Lambda^{(g)}(-Z^{-1}) &= \frac{1}{M^g}\sum_{k\in[M]^{2g}}\vartheta^{(g)}_{2\tilde{C}(k),0}(S,-Z^{-1})\\ &= \frac{1}{M^g}(\det(S^{-1}))^{g/2}\det(Z/i)^{n/2}\sum_{k\in[M]^{2g}}\vartheta^{(g)}_{0,-2\tilde{C}(k)}(S^{-1},Z)\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}&\frac{(\det S)^{g/2}}{M^g}(\det(Z/i))^{-n/2}\cdot\Theta_\Lambda^{(g)}(-Z^{-1})\\ &= \frac{1}{M^{2g}}\sum_{k\in[M]^{2g}}\vartheta^{(g)}_{0,-2\tilde{C}(k)}(S^{-1},Z)\\ &= \frac{1}{M^{2g}}\sum_{k\in[M]^{2g}}\sum_{G\in\mathbb{Z}^{n\times g}}e^{\pi i\sigma(S^{-1}[G]Z-2\tilde{C}(k)^T\cdot G)}\\ &= \frac{1}{M^{2g}}\sum_{G\in\mathbb{Z}^{n\times g}}e^{\pi i\sigma(S^{-1}[G]Z)}\cdot\sum_{k\in[M]^{2g}}e^{-2\pi i\sigma(\tilde{C}(k)\cdot G)}\\ &= \frac{1}{M^{2g}}\sum_{\tilde{Y}_g\in(L^*)^g}e^{\pi i\sigma(A(g;\tilde{Y}_g)Z)}\cdot\sum_{k\in[M]^{2g}}e^{-2\pi i\sigma(\tilde{C}(k)\cdot G_{\tilde{Y}_g})}\end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichung ist zu beachten, daß die Abbildung

$$\begin{aligned}\kappa:\mathbb{Z}^{n\times g} &\longrightarrow (L^*)^g\\ G &\longmapsto \kappa(G):=((\Omega^T)^{-1})^T\cdot G=\Omega^{-1}G\end{aligned}$$

eine Bijektion ist, und daß $G_{\tilde{Y}_g} := \kappa^{-1}(\tilde{Y}_g)$ gesetzt ist.

Bleibt also noch für $\tilde{Y}_g = (y_1, \ldots, y_g) \in (L^*)^g$ zu zeigen:

$$\sum_{k \in [M]^{2g}} e^{-2\pi i \sigma(\tilde{C}(k)^T \cdot G_{\tilde{Y}_g})} = \prod_{j=1}^{g} |B_{y_j}|^2 .$$

Es gilt $|B_y|^2 = |\sum_{j=1}^{M} e^{2\pi i y^T u_j}|^2 = \sum_{k \in [M]^2} e^{-2\pi i y^T (u_{k_1} - u_{k_2})}$, und damit

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{g} |B_{y_j}|^2 &= \prod_{j=1}^{g} \sum_{\kappa \in [M]^2} e^{-2\pi i (u_{\kappa_1} - u_{\kappa_2})^T y_j} \\
&= \sum_{k \in [M]^{2g}} e^{-2\pi i ((u_{k_1} - u_{k_2})^T y_1 + \ldots + (u_{k_{2g-1}} - u_{k_{2g}})^T y_g)} \\
&= \sum_{k \in [M]^{2g}} e^{-2\pi i \sigma(C(k)^T \tilde{Y}_g)} = \sum_{k \in [M]^{2g}} e^{-2\pi i \sigma(\tilde{C}(k)^T \cdot G_{\tilde{Y}_g})} .
\end{aligned}$$

Die letzte Umformung gilt wegen $\tilde{C}(k)^T \cdot G_{\tilde{Y}_g} = C(k)^T \cdot \tilde{Y}_g$. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Weitere Eigenschaften der Reihen $\Theta_\Lambda^{(g)}$ sind in der nachfolgenden Bemerkung zusammengefaßt. Die erste dieser Eigenschaften sichert, daß die Reihen $\Theta_\Lambda^{(g)}$ Modulformen zu den in Korollar 2.24 angegebenen Gruppen sind, sofern die q-Entwicklung von $\Theta_\Lambda^{(1)}$ ganzzahlige Exponenten hat.

Bemerkung 2.18

1. Wenn die Reihe $\Theta_\Lambda^{(1)}$ ganzzahlige Exponenten in der q-Entwicklung hat, dann gilt $2L \subset L^*$, $N(u_{k_1} - u_{k_2}) \in \mathbb{Z}$ und $2(u_{k_1} - u_{k_2}) \in L^*$ für alle $k \in [M]^2$.
2. Sei $Z \in \mathbb{H}_m$ und $W \in \mathbb{H}_{g-m}$. Dann gilt
$$\Theta_\Lambda^{(g)}\left(\left(\begin{smallmatrix} Z & 0 \\ 0 & W \end{smallmatrix}\right)\right) = \Theta_\Lambda^{(m)}(Z) \cdot \Theta_\Lambda^{(g-m)}(W) \qquad .$$
3. Für $Z \in \mathbb{H}_{g-1}$ ist $\Theta_\Lambda^{(g)}|\Phi(Z) = \Theta_\Lambda^{(g-1)}(Z)$.
4. Sei P eine $g \times g$-Permutationsmatrix, d.h. P hat in jeder Zeile und jeder Spalte genau einen von 0 verschiedenen Eintrag 1. Es bezeichne $\mathcal{M}$ die Matrix mit Blöcken $A = D = P$, $B = C = 0$. Dann gilt $\Theta_\Lambda^{(g)}(\mathcal{M}\langle Z \rangle) = \Theta_\Lambda^{(g)}(Z)$.

Beweis:
Zu 1.: Es gilt $N(u_{k_1} - u_{k_2} + x) = N(u_{k_1} - u_{k_2}) + N(x) + (2(u_{k_1} - u_{k_2}), x) \in \mathbb{Z}$ für alle $(k, x) \in [M]^2 \times L$. Dies ist äquivalent zu $N(x), N(u_{k_1} - u_{k_2}) \in \mathbb{Z}$ und $2(u_{k_1} - u_{k_2}) \in L^*$ für alle $(k, x) \in [M]^2 \times L$. $N(L) \subset \mathbb{Z}$ impliziert $2L \subset L^*$.
Zeige 2.: Der Beweis ist der gleiche wie der zur analogen Aussage für Thetareihen zu Gittern. Für $k = (k_1, k_2) \in [M]^{2s} \times [M]^{2(g-s)}$ und $\tilde{X}_s = (x_1, \ldots, x_s) \in L^s$, $\tilde{\tilde{X}}_{g-s} := (x_{s+1}, \ldots, x_g) \in L^{g-s}$, $\tilde{X}_g = (\tilde{X}_s, \tilde{\tilde{X}}_{g-s})$ gilt

$$A(g, k; \tilde{X}_g) \cdot \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(s, k_1; \tilde{X}_s) \cdot Z & * \\ * & A(g-s, k_2; \tilde{\tilde{X}}_{g-s}) \cdot W \end{pmatrix},$$

woraus die Behauptung durch direktes Nachrechnen folgt.
Zeige 3.: Folgt direkt aus 2. und der Definition des Φ-Operators.
Zeige 4.: Sei P die Matrix einer Transposition, dann gilt $P = P^{-1} = P^T$. Es folgt $\sigma(S[G] \cdot PZP^{-1}) = \sigma(P^T G^T SGPZ) = \sigma(S[G \cdot P]Z)$. □

Abschließend werden jetzt noch die Reihen $\Theta_\Lambda^{(1)}$ betrachtet, und es wird deren Verhalten bezüglich der Vereinigung von periodischen Punktmengen untersucht.

Proposition 2.19 *Seien* $\Lambda_1 := \cup_{j=1}^{M_1}(u_j + L)$ *und* $\Lambda_2 := \cup_{j=M_1-M_3}^{M_2}(u_j + L)$ *zwei periodische Punktmengen mit* $M_2 \geq M_1$. *Setze* $\Lambda_3 := \Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \cup_{j=M_1-M_3}^{M_1}(u_j + L)$. *Durch Umnummerierung der Translate und geeignete Wahl von* M_3 *kann dieses für beliebige* Λ_1, Λ_2 *immer erreicht werden. Es gilt*

$$\begin{aligned} M_2 \cdot \Theta_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2} = \quad & M_1 \cdot \Theta_{\Lambda_1} + (M_2 - M_1 + M_3 + 1) \cdot \Theta_{\Lambda_2} \\ & -(M_3 + 1) \cdot \Theta_{\Lambda_3} + 2 \sum_{k=1}^{M_1 - M_3 - 1} \sum_{j=M_1+1}^{M_2} \vartheta_{u_j - u_k + L} \; . \end{aligned}$$

Beweis: Nachrechnen unter Beachtung von $\vartheta_{u_j - u_k + L} = \vartheta_{u_k - u_j + L}$ und $M \cdot \Theta_\Lambda = \sum_{k,j=1}^{M} \vartheta_{u_j - u_k + L}$ liefert die Behauptung. □

Proposition 2.20 *Sei* $\Lambda = \cup_{j=1}^{M}(u_j + L)$ *eine periodische Punktmenge. Bezeichne mit* $\Lambda^{(k)} := \Lambda \backslash (u_k + L)$ *die* an der Stelle k punktierte Punktmenge. *Dann gilt*

$$(M-1) \sum_{k=1}^{M} \Theta_{\Lambda^{(k)}} = M(M-2) \cdot \Theta_\Lambda + M \cdot \vartheta_L \; .$$

Ist Λ *distanzinvariant, so stimmen die Reihen* $\Theta_{\Lambda^{(k)}}$ *alle überein, und man erhält*

$$(M-1) \cdot \Theta_{\Lambda^{(M)}} = (M-2) \cdot \Theta_\Lambda + \vartheta_L \; .$$

Beweis: Für die Average-Thetareihe zu $\Lambda^{(k)}$ gilt

$$(M-1)\cdot\Theta_{\Lambda^{(k)}} = \sum_{j\in([M]\setminus\{k\})^2} \vartheta_{u_{j_1}-u_{j_2}+L} = M\cdot\Theta_\Lambda - \sum_{j\in[M]} \vartheta_{u_j-u_k+L} - \sum_{j\in[M]} \vartheta_{u_k-u_j+L} + \vartheta_L.$$

Bildet man nun die Summe dieser Reihen über alle $k = 1,\dots,M$, so folgt die erste Gleichung.
Nun zur zweiten Behauptung: Setze $g_k := \sum_{j=1}^M \vartheta_{u_j-u_k+L}$. Wenn Λ distanzinvariant ist, dann gilt $g_k = g_1$ für alle $k \in [M]$. Es folgt

$$(M-1)\cdot\Theta_{\Lambda^{(k)}} = M\cdot\Theta_\Lambda - 2g_k + \vartheta_L \quad ,$$

und für distanzinvariantes Λ ist die rechte Seite unabhängig von k. Insbesondere gilt $g_k = \Theta_\Lambda$. □

Eine Anwendung von Proposition 2.20 wird für den distanzinvarianten Fall im Anhang A auf Seite 96 angegeben.

Bemerkung 2.21 Die Propositionen 2.19 und 2.20 lassen sich in analoger Weise für Codes und deren Distanzzähler formulieren.

1. Sei $C_0 \subset \mathbb{F}_2^n$ ein linearer Code, und seien $C_1 = \cup_{j=1}^{M_1}(u_j + C_0)$ und $C_2 = \cup_{j=M_1-M_3}^{M_2}(u_j + C_0)$ zwei Codes mit $M_2 \geq M_1$. Setze $C_3 := C_1 \cap C_2 = \cup_{j=M_1-M_3}^{M_1}(u_j + C_0)$. Durch Umnummerierung der Translate und geeignete Wahl von M_3 kann dieses für beliebige Codes C_1, C_2 immer erreicht werden. Es gilt

$$\begin{aligned} M_2\cdot Dist_1(C_1\cup C_2) &= M_1\cdot Dist_1(C_1) + (M_2-M_1+M_3+1)\cdot Dist_1(C_2) \\ &-(M_3+1)\cdot Dist_1(C_3) + 2\textstyle\sum_{k=1}^{M_1-M_3-1}\sum_{j=M_1+1}^{M_2}|C_0|\cdot P_1(u_j-u_k+C_0) \quad . \end{aligned}$$

2. Seien C_0, $C = \cup_{j=1}^M(u_j + C_0) \subset \mathbb{F}_2^n$ zwei Codes und C_0 linear. Setze $C^{(k)} := C\setminus(u_k + C_0)$. Dann gilt

$$(M-1)\sum_{k=1}^M Dist_1(C^{(k)}) = M(M-2)\cdot Dist_1(C) + M\cdot|C_0|\cdot P_1(C_0)\ .$$

   Ist C distanzinvariant, so stimmen alle Zähler $Dist_1(C^{(k)})$ überein, und man erhält

$$(M-1)\cdot Dist_1(C^{(M)}) = (M-2)\cdot Dist_1(C) + |C_0|\cdot P_1(C_0)\ .$$

Die Beweise dieser Aussagen verlaufen völlig analog zu denen der Propositionen 2.19 bzw. 2.20 und werden daher weggelassen.

2.4 Average-Reihen als Modulformen

Sei $L \subset \mathbb{R}^n$ ein gerades Gitter und $S := Gram(L)$ eine Gram-Matrix von L. Seien $u_1, \ldots, u_M \in \mathbb{R}^n$ Vektoren, deren paarweise Differenzen $u_i - u_j$ nicht in L liegen, und für die Zahlen $\gamma_1, \ldots, \gamma_M \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft $\gamma_1 u_1, \ldots, \gamma_M u_M \in L^*$ existieren. Bezeichne wieder mit $\Lambda = \cup_{j=1}^{M}(u_j + L)$ die zu diesen Daten gehörende periodische Punktmenge. Im folgenden werden geeignete Gruppen konstruiert, zu denen die Reihen $\Theta_\Lambda^{(g)}$ Modulformen sind.

Überträgt man die Theoreme 1 und 3 aus [AnMa75] in die Notation der Reihen $\vartheta_{\alpha,\beta}^{(g)}(S, Z)$, so erhält man:

Satz 2.22 *Sei $S = S^T > 0$ eine n-reihige gerade Matrix der Stufe l. Dann gilt für die Reihen $\vartheta_{\alpha,\beta}^{(g)}(S, Z)$ folgende Transformationsformel :*

Für jede Matrix $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_{g,0}(l)$ gilt

$$\begin{aligned}&\det(CZ + D)^{-n/2} \cdot \vartheta^{(g)}_{\alpha D^T - S^{-1}\beta C^T, \beta A^T - S\alpha B^T}(S, \mathcal{M}\langle Z\rangle) \\ &= \chi_S^{(g)}(M) \cdot e^{-\frac{\pi i}{4}\sigma((\beta A^T - S\alpha B^T)^T \cdot (S^{-1}\beta C^T - \alpha D^T) - \beta^T\alpha)} \cdot \vartheta_{\alpha,\beta}^{(g)}(S, Z) \qquad .\end{aligned}$$

Dabei ist der Multiplikator $\chi_S^{(g)} : \Gamma_{g,0}(l) \longrightarrow \left\{ e^{\frac{2\pi i j}{8}} \mid j \in [8] \right\}$ unabhängig von den Matrizen α und β, und für gerades n ist $\chi_M^{(g)}(S)$ ein Charakter, der durch

$$\chi_S^{(g)}(\mathcal{M}) := \begin{cases} 1 & , \ l = 1 \\ sign(\det D)^{n/2} \left(\frac{(-1)^{n/2} \cdot \det S}{|\det D|} \right) & , \ l > 1 \end{cases}$$

angegeben werden kann. In dieser Notation bezeichnet $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ das verallgemeinerte Legendre-Symbol.

Beweis: Folgt sofort aus [AnMa75] unter Berücksichtigung von $\vartheta_{-2Y,2X}^{(g)}(S, Z) = e^{\pi i \sigma(X^T Y)} \cdot \theta_S(Z; X, Y)$. Dabei bezeichnet $\theta_S(Z; X, Y)$ die in [AnMa75] verwendeten Reihen. □

Aus Satz 2.22 kann man nun eine Aussage über die Average-Reihen zu periodischen Punktmengen ableiten.

Satz 2.23 *Sei $L \subset \mathbb{R}^n$ ein gerades Gitter mit Erzeugermatrix Ω, $S := \Omega\Omega^T$ eine Gram-Matrix und l die Stufe von L. Seien $u_1, \ldots, u_M \in \mathbb{R}^n$ Vektoren, deren paarweise Differenzen nicht in L liegen und für die Zahlen $\gamma_1, \ldots, \gamma_M \in \mathbb{Z}$ mit* *der Eigenschaft* $\gamma_1 u_1, \dots, \gamma_M u_M \in L^*$ *existieren. Setze* $\gamma := kgV(\gamma_1, \dots, \gamma_M)$. *Dann gilt für die Grad g Average-Thetareihe der periodischen Punktmenge* $\Lambda = \cup_{j=1}^{M}(u_j + L)$*:*

Sei $\mathcal{M} := \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_g(\gamma^2 l)$ *und* $\chi_S^{(g)}$ *der in Satz 2.22 auftretende Multiplikator. Es ist*

$$\det(CZ+D)^{-n/2} \cdot \Theta_\Lambda^{(g)}(\mathcal{M}\langle Z\rangle) = \chi_S^{(g)}(\mathcal{M}) \cdot \Theta_\Lambda^{(g)}(Z) \qquad .$$

Insbesondere gilt für gerades n

$$\Theta_\Lambda^{(g)} \in \left[\Gamma_g\left(\gamma^2 l\right), \frac{n}{2}, \chi_S^{(g)}\right]$$

mit

$$\chi_S^{(g)}(\mathcal{M}) = \begin{cases} 1 & , l = 1 \\ sign(\det D)^{n/2} \cdot \left(\frac{(-1)^{n/2}\det S}{|\det D|}\right) & , l > 1 \end{cases} \qquad .$$

Beweis: Es wird wieder die Darstellung

$$\Theta_\Lambda^{(g)}(Z) = \frac{1}{M^g} \sum_{k \in [M]^{2g}} \vartheta^{(g)}_{2\tilde{C}(k),0}(S, Z)$$

aus Lemma 2.16 benutzt. Es genügt, die Behauptung für die Reihen $\vartheta^{(g)}_{2\tilde{C}(k),0}(S, Z)$ zu beweisen. Zu zeigen ist also für Matrizen $\mathcal{M} = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_g(\gamma^2 l)$ die Transformationsformel

$$\det(CZ+D)^{-n/2} \cdot \vartheta^{(g)}_{2\tilde{C}(k),0}(S, \mathcal{M}\langle Z\rangle) = \chi_S^{(g)}(\mathcal{M}) \cdot \vartheta^{(g)}_{2\tilde{C}(k),0}(S, Z) \ .$$

(Hinweis zur Notation: Der Matrixblock C und die Matrizen $C(k)$ bzw. $\tilde{C}(k)$ haben nach Definition von $C(k)$ bzw $\tilde{C}(k)$ nichts miteinander zu tun.)

Für Matrizen $\mathcal{M} = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_g(\gamma^2 l) \subset \Gamma_{g,0}(l)$ werden nun die Aussagen

1. $\vartheta^{(g)}_{2\tilde{C}(k)\cdot D^T, -2S\cdot\tilde{C}(k)\cdot B^T}(S, Z) = \vartheta^{(g)}_{2\tilde{C}(k),0}(S, Z)$
2. $e^{-\frac{\pi i}{4}\sigma((S[2\tilde{C}(k)])D^T\cdot B)} = 1$

bewiesen. Dann folgt die behauptete Transformationsformel mit Satz 2.22.

Zeige 1.: Zu $k \in [M]^{2g}$ setze

$$\tilde{H}(k) := \left(\frac{1}{\gamma_{k_1}} h_{k_1} - \frac{1}{\gamma_{k_2}} h_{k_2}, \dots, \frac{1}{\gamma_{k_{2g-1}}} h_{k_{2g-1}} - \frac{1}{\gamma_{k_{2g}}} h_{k_{2g}}\right) \ ,$$

wobei die h_ν so gewählt sind, daß $\frac{1}{\gamma_\nu}\Omega^{-1}h_\nu = u_\nu$ gilt. Da $(\Omega^T)^{-1}$ eine Erzeugermatrix für das duale Gitter L^* ist, sind die $h_\nu \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$\tilde{C}(k) = (\Omega^T)^{-1} \cdot C(k) = (\Omega^T)^{-1}\Omega^{-1}\tilde{H}(k) = S^{-1}\tilde{H}(k) \quad ,$$

und es ist $\gamma\tilde{H}(k) \in \mathbb{Z}^{n\times g}$.

$$\vartheta^{(g)}_{2\tilde{C}(k)D^T,-2S\tilde{C}(k)B^T}(S,Z) = \sum_{G\in\mathbb{Z}^{n\times g}} e^{\pi i\sigma\left(S\left[G+\tilde{C}(k)D^T\right]Z-2G^TS\tilde{C}(k)B^T\right)}$$

Für eine Matrix B mit $B \equiv 0(\gamma)$ existiert eine ganze Matrix $\tilde{B}$ mit $B = \gamma\tilde{B}$. Da für $G \in \mathbb{Z}^{n\times g}$

$$\sigma(2G^TS\tilde{C}(k)B^T) = 2\sigma\left(G^T \cdot (SS^{-1}) \cdot \left(\gamma\tilde{H}(k)\tilde{B}^T\right)\right) \in 2\mathbb{Z}$$

gilt, folgt

$$\vartheta^{(g)}_{2\tilde{C}(k)\cdot D^T,-2S\tilde{C}(k)\cdot B^T}(S,Z) = \vartheta^{(g)}_{2\tilde{C}(k)\cdot D^T,0}(S,Z) \quad .$$

Weiterhin ist $\sigma(S[G+\tilde{C}(k)D^T]Z) = \sigma(S[G+S^{-1}\tilde{H}(k)D^T]Z)$. Für eine Matrix $D \equiv E \bmod \gamma l$ existiert eine Darstellung $D = \gamma l\tilde{D} + E$ mit einer ganzen Matrix $\tilde{D}$. Es gilt

$$\sigma(S[G+\tilde{C}(k)D^T]Z) = \sigma(S[\tilde{\tilde{G}}+\tilde{C}(k)]Z) \ ,$$

wobei $\tilde{\tilde{G}} := G + (lS^{-1})(\gamma\tilde{H}(k))\tilde{D}^T \in \mathbb{Z}^{n\times g}$ gesetzt ist. Die Zuordnung $G \mapsto \tilde{\tilde{G}}$ ist bijektiv, es folgt $\vartheta^{(g)}_{2\tilde{C}(k)D^T,0}(S,Z) = \vartheta^{(g)}_{2\tilde{C}(k),0}(S,Z)$.

Zeige 2.: Es existiert eine ganze Matrix $\tilde{B}$, so daß $B = \gamma^2 l\tilde{B}$. Es ist

$$-\frac{\pi i}{4}\sigma(S[2\tilde{C}(k)]B^TD) = -\pi i\sigma(C(k)^TC(k)B^TD) \ ,$$

und wegen $C(k) = \Omega^{-1}\tilde{H}(k)$ folgt

$$-\frac{\pi i}{4}\sigma(S[2\tilde{C}(k)]B^TD) = -\pi i\sigma\left(\left(\left(lS^{-1}\right)\left[\gamma\tilde{H}(k)\right]\right)\tilde{B}^TD\right) \ .$$

Die Matrix lS^{-1} ist gerade und symmetrisch, $\gamma\tilde{H}(k)$ ist ganzzahlig. Daher ist $(lS^{-1})\left[\frac{\gamma}{\delta}\tilde{H}(k)\right]$ eine gerade, symmetrische Matrix. Aus den symplektischen Relationen für $\mathcal{M}$ folgt $\tilde{B}^TD = D^T\tilde{B}$, d.h. $\tilde{B}^TD$ ist symmetrisch. Für ganzzahlige symmetrische Matrizen U und V, U gerade, gilt $\sigma(UV) \in 2\mathbb{Z}$. Es folgt $e^{-\frac{\pi i}{4}\sigma(S[2\tilde{C}(k)]\cdot B^TD)} = 1$. □

Beschränkt man sich auf die Situation, daß die Verschiebungsvektoren $u_1,\dots,u_M$ im dualen Gitter von L enthalten sind und daß außerdem $N(u_{k_1}-u_{k_2})$ ganzzahlig ist für alle $k \in [M]^2$, so kann man noch eine größere Gruppe finden, bezüglich der die Reihe $\Theta_\Lambda^{(g)}$ eine Modulform ist. Man beachte an dieser Stelle, daß diese Forderung an die Verschiebungsvektoren durch Skalieren der Punktmenge mit $\sqrt{2}$ bzw. durch den Übergang zu einem geeigneten Untergitter $L' \subset L$ und die Darstellung der periodischen Punktmenge Λ bezüglich L' immer erreicht werden kann, falls $N(x-y) \in \mathbb{Z}$ für alle $x, y \in \Lambda$ gilt (vgl. Bemerkung 2.14).

Korollar 2.24 *Sei $L \subset L^*$ ein gerades Gitter der Stufe l, $u_1, \dots, u_M \in L^*$, so daß die paarweisen Differenzen nicht in L liegen. Außerdem gelte $N(u_i - u_j) \in \mathbb{Z}$ für alle $i, j \in [M]$. Sei*

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_{g,1}^{(2)}(l) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_{g,1}(l) \mid B \equiv 0(2),\ D \equiv E(l) \right\} .$$

Dann folgt

$$\det(CZ+D)^{-n/2} \cdot \Theta_\Lambda^{(g)}(\mathcal{M}\langle Z \rangle) = \chi_S^{(g)}(\mathcal{M}) \cdot \Theta_\Lambda^{(g)}(Z) .$$

Ist insbesondere $n \equiv 0(4)$ und $\det S$ eine Quadratzahl, so ist

$$\Theta_\Lambda^{(g)} \in \left[\Gamma_{g,1}^{(2)}(l), \frac{n}{2}\right] .$$

Für $g = 1$ findet man die Aussage dieses Korollars in [Miya89]. Dort ist sie für Thetareihen zu Nebenklassen eines Gitters formuliert, d.h. für Reihen der Form $\vartheta_{u+L}^{(1)}(z)$.

Beweis:
Da im Beweis von Satz 2.23 in Teil 1. für $\gamma = 1$ nur $B \in \mathbb{Z}^{g \times g}$ und $D \equiv E(l)$ benutzt wird, kann dieser übernommen werden und es bleibt nur

$$e^{-\frac{\pi i}{4}\sigma(S[2\tilde{C}(k)B^T D])} = 1$$

für Matrizen $\mathcal{M} \in \Gamma_{g,1}^{(2)}(l)$ zu zeigen.
Es ist wieder $S[2\tilde{C}(k)]B^T D = 4C(k)^T C(k) \cdot B^T D$. Sei o.B.d.A. $0 \in \Lambda$. Die Matrix

$$C(k)^T C(k) = \big((u_{k_{2l-1}} - u_{k_{2l}}, u_{k_{2j-1}} - u_{k_{2j}})\big)_{l,j=1}^{g}$$

ist symmetrisch und hat ganzzahlige Diagonaleinträge. Wegen

$$(u_l, u_j) = \frac{1}{2}(N(u_l) + N(u_j) - N(u_l - u_j)) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$$

ist die Matrix $2 \cdot C(k)^T C(k)$ eine ganzzahlige Matrix mit geraden Diagonaleinträgen. Schreibe $B = 2\tilde{B}$, dann gilt wieder $\tilde{B}^T \cdot D = D^T \cdot \tilde{B}$, woraus sich schließlich $\sigma(S[2\tilde{C}(k)]B^T D) \in 8\mathbb{Z}$ ergibt. □

3 Distanzzähler von Codes und Average-Reihen

In [Rung96] wird die Beziehung zwischen Gewichtszählern linearer Codes $C \subset \mathbb{F}_2^n$ und Thetareihen zu Gittern L_C beschrieben, die mit der Konstruktion A aus dem Code C konstruiert worden sind, vgl. [ConSlo99]. Dabei werden die *Thetakonstanten*

$$f_a(Z) := \sum_{x \in \mathbb{Z}^g} e^{2\pi i Z\left[x+\frac{1}{2}a\right]}\ ,\ a \in \mathbb{F}_2^g\ ,$$

in den Grad g Gewichtszähler $P_g(C)$ eingesetzt. Man erhält die Grad g Thetareihe zu L_C, d.h. es gilt

$$\vartheta_{L_C}^{(g)} = P_g(C)(f_0, \dots, f_{2^g-1})\ .$$

Man kann nun in der gleichen Weise die Thetakonstanten f_a in den Grad g Distanzzähler einsetzen. Dazu wird die folgende Notation benutzt:

Es bezeichne $\psi : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{F}_2^n,\ x \mapsto x \bmod 2$ die (koordinatenweise) Projektion modulo 2. Sei $C := \{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_M\} \subset \mathbb{F}_2^n$ ein nicht notwendig linearer Code und $M := |C|$. Setze $L := \sqrt{2}\mathbb{Z}^n$ und für alle $j = 1, \dots, M$ sei $u_j := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tilde{u}_j \in \mathbb{R}^n$. Bezeichne mit $\Lambda_C^{(A)}$ die *Konstruktion-A-Liftung* von C, d.h. es sei

$$\Lambda_C^{(A)} := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \psi^{-1}(C) = \bigcup_{j=1}^{M} (u_j + L) \subset \mathbb{R}^n\ .$$

Dann ist $\Lambda_C^{(A)}$ eine periodische Punktmenge und genau dann ein Gitter, wenn C linear ist (siehe [ConSlo99]).

Den Zusammenhang zwischen Distanzzählern von binären Codes und Average-Thetareihen zu periodischen Punktmengen liefert der folgende Satz.

Satz 3.1 *Sei mit obigen Bezeichnungen $C = \{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_M\} \subset \mathbb{F}_2^n$ ein Code und $\Lambda_C^{(A)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi^{-1}(C)$ die Konstruktion-A-Liftung von C. Dann gilt*

$$Dist_g(C)(f_0, \dots, f_{2^g-1}) = \Theta^{(g)}_{\Lambda_C^{(A)}}\ .$$

Dieser Satz verallgemeinert Proposition 4.1 in [Rung96] auf Distanzzähler. Da dort kein ausführlicher Beweis der Proposition angegeben ist, soll dies an dieser Stelle geschehen:

Zum Beweis des Satzes werden die folgenden beiden Bemerkungen benötigt:

Es seien $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_g$ Translate von Gittern $L_1, \dots, L_g \subset \mathbb{R}^n$. Schreibe

$$\vartheta_{\mathcal{L}_1,\dots,\mathcal{L}_g}(Z) := \sum_{x_1 \in \mathcal{L}_1, \dots, x_g \in \mathcal{L}_g} e^{\pi i \sigma\left(((x_j,x_k))_{j,k=1}^{g} \cdot Z\right)}\ .$$

Bemerkung 3.2 Für $a = (a_1, \ldots, a_g)^T \in \mathbb{F}_2^n$ ist

$$f_a(Z) = \vartheta_{\frac{1}{\sqrt{2}}a_1+\sqrt{2}\mathbb{Z},\ldots,\frac{1}{\sqrt{2}}a_g+\sqrt{2}\mathbb{Z}}(Z) \ .$$

Beweis : Seien $y_1, \ldots, y_g \in \mathbb{R}$, $Z \in \mathbb{H}_g$. Es gilt

$$\sigma\left(((y_j, y_k))_{j,k=1}^g \cdot Z\right) = \sigma\left((y_j \cdot y_k)_{j,k=1}^g \cdot Z\right) = \sum_{j,k=1}^g y_j y_k Z_{kj} = Z\left[(y_1, \ldots, y_g)^T\right] \ .$$

Es folgt :

$$\begin{aligned}\vartheta_{\frac{1}{\sqrt{2}}a_1+\sqrt{2}\mathbb{Z},\ldots,\frac{1}{\sqrt{2}}a_g+\sqrt{2}\mathbb{Z}}(Z) &= \textstyle\sum_{y_1\in\frac{1}{\sqrt{2}}a_1+\sqrt{2}\mathbb{Z},\ldots,y_g\in\frac{1}{\sqrt{2}}a_g+\sqrt{2}\mathbb{Z}} e^{\pi i\sigma\left((y_j\cdot y_k)_{j,k=1}^g\cdot Z\right)} \\ &= \textstyle\sum_{y_1\in\frac{1}{\sqrt{2}}a_1+\sqrt{2}\mathbb{Z},\ldots} e^{\pi i Z\left[(y_1,\ldots,y_g)^T\right]} = \sum_{x=(x_1,\ldots,x_g)^T\in\mathbb{Z}^g} e^{\pi i Z\left[\frac{1}{\sqrt{2}}a+\sqrt{2}x\right]} \\ &= \textstyle\sum_{x\in\mathbb{Z}^g} e^{2\pi i Z\left[x+\frac{1}{2}a\right]} = f_a(Z)\end{aligned}$$

□

Um eine einfachere Notation zu erhalten, werden wie im ersten Kapitel die Mengen $\mathbb{F}_2^g$ und $\{0, 1, \ldots, 2^g - 1\}$ in der dort angegebenen Weise identifiziert.

Bemerkung 3.3 Setze $f(Z) := (f_0(Z), \ldots, f_{2^g-1}(Z))$. Seien $\beta_1, \ldots, \beta_g \in \mathbb{F}_2^n$. Dann gilt

$$f^{\epsilon(\beta_1,\ldots,\beta_g)}(Z) = \vartheta_{\frac{1}{\sqrt{2}}\beta_1+\sqrt{2}\mathbb{Z}^n,\ldots,\frac{1}{\sqrt{2}}\beta_g+\sqrt{2}\mathbb{Z}^n}(Z) \ .$$

Beweis : Setze abkürzend $\epsilon_j := \epsilon_j(\beta_1, \ldots, \beta_g)$ und $\epsilon := \epsilon(\beta_1, \ldots, \beta_g)$. Dann gilt mit Bemerkung 3.2

$$\begin{aligned}f_0^{\epsilon_0}(Z)\cdot\ldots\cdot f_{2^g-1}^{\epsilon_{2^g-1}}(Z) &= \vartheta^{\epsilon_0}_{\sqrt{2}\mathbb{Z},\ldots,\sqrt{2}\mathbb{Z}}(Z)\cdot\vartheta^{\epsilon_1}_{\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\mathbb{Z},\sqrt{2}\mathbb{Z},\ldots,\sqrt{2}\mathbb{Z}}(Z)\cdot\ldots \\ &\quad \ldots\cdot\vartheta^{\epsilon_{2^g-1}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\mathbb{Z},\ldots,\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\mathbb{Z}}(Z) \\ &= \left(\sum_{x_1,\ldots,x_g\in\sqrt{2}\mathbb{Z}} e^{\pi i\sigma\left((x_jx_k)_{j,k=1}^g\cdot Z\right)}\right)^{\epsilon_0}\cdot\ldots \\ &= \sum_{\substack{x_1^{(0)}:=(x_{11},\ldots,x_{1\epsilon_0})^T\in\sqrt{2}\mathbb{Z}^{\epsilon_0}\\ \vdots \\ x_g^{(0)}:=(x_{g1},\ldots,x_{g\epsilon_0})^T\in\sqrt{2}\mathbb{Z}^{\epsilon_0}}} e^{\pi i\sigma\left((x_j^{(0)},x_k^{(0)})_{j,k=1}^g\cdot Z\right)}\cdot\ldots\end{aligned}$$

Bei der Notation in der letzten Gleichung ist zu beachten, daß ein Faktor

$$\sum_{\substack{x_1^{(\nu)} := (x_{11}, \dots, x_{1\epsilon_\nu})^T \in \sqrt{2}\mathbb{Z}^{\epsilon_\nu} \\ \vdots \\ x_g^{(\nu)} := (x_{g1}, \dots, x_{g\epsilon_\nu})^T \in \sqrt{2}\mathbb{Z}^{\epsilon_\nu}}} e^{\pi i \sigma\left((x_j^{(\nu)}, x_k^{(\nu)})_{j,k=1}^g \cdot Z\right)}$$

nur dann auftritt, wenn $\epsilon_\nu > 0$ ist. Ansonsten ist für diesen Faktor im Produkt 1 einzusetzen. Es folgt

$$\begin{aligned} f^\epsilon &= \sum_{x_1^{(0)},\dots,x_g^{(0)} \in \sqrt{2}\mathbb{Z}^{\epsilon_0}} e^{\pi i \sigma(\dots)} \cdot \sum_{\substack{x_1^{(1)} \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\mathbb{Z}\right)^{\epsilon_1} \\ x_2^{(1)}, \dots, x_g^{(1)} \in \sqrt{2}\mathbb{Z}^{\epsilon_1}}} e^{\pi i \sigma(\dots)} \cdot \sum_{\substack{x_2^{(2)} \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\mathbb{Z}\right)^{\epsilon_2} \\ x_1^{(2)}, x_3^{(2)}, \dots, x_g^{(2)} \in \sqrt{2}\mathbb{Z}^{\epsilon_2}}} e^{\pi i \sigma(\dots)} \\ &\quad \cdot \dots \qquad (*) \\ &= \sum_{\substack{y_1 \in \sqrt{2}\mathbb{Z}^{\epsilon_0} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\mathbb{Z}\right)^{\epsilon_1} \times \dots \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\mathbb{Z}\right)^{\epsilon_{2^g-1}} \\ y_2 \in \sqrt{2}\mathbb{Z}^{\epsilon_0} \times \sqrt{2}\mathbb{Z}^{\epsilon_1} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\mathbb{Z}\right)^{\epsilon_2} \times \dots \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\mathbb{Z}\right)^{\epsilon_{2^g-1}} \\ \vdots \\ y_g \in \sqrt{2}\mathbb{Z}^{\epsilon_0} \times \dots \times \sqrt{2}\mathbb{Z}^{\epsilon_{2^g-2}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\mathbb{Z}\right)^{\epsilon_{2^g-1}}}} e^{\pi i \sigma\left((y_j, y_k)_{j,k=1}^g \cdot Z\right)} \end{aligned}$$

Zur Verdeutlichung : Auch hier ist die Notation etwas irreführend. Bei der letzten Summenbildung gilt für die Vektoren y_j

$$y_j \in \left(x_j^{(0)} + \sqrt{2}\mathbb{Z}^{\epsilon_0}\right) \times \left(x_j^{(1)} + \sqrt{2}\mathbb{Z}^{\epsilon_1}\right) \times \dots \times \left(x_j^{(2^g-1)} + \sqrt{2}\mathbb{Z}^{\epsilon_{2^g-1}}\right) .$$

Dabei besteht das kartesische Produkt aus Faktoren $x_j^{(k)} + \sqrt{2}\mathbb{Z}^{\epsilon_k}$. Ein solcher Faktor tritt genau dann auf, wenn $\epsilon_k > 0$ gilt. Für $\epsilon_k = 0$ ist dieser Faktor wegzulassen, s.d. insgesamt y_j ein Element einer Nebenklasse des Gitters $\sqrt{2}\mathbb{Z}^n$ ist. Die Vektoren $x_j^{(k)} \in \mathbb{R}^{\epsilon_k}$, $k = 0, \dots, 2^g - 1$, sind dabei beliebige (fest gewählte) Summationsindices aus der Gleichung $(*)$.

Man kann nun die $x_j^{(k)}$ so wählen, daß die Koordinateneinträge von $x_j^{(k)}$ entweder 0 oder 1 sind. Für $j = 1, \dots, g$ definiere Nebenklassenvertreter

$$\alpha_j := (x_j^{(0)T}, x_j^{(1)T}, \dots, x_j^{(2^g-1)T})^T ,$$

d.h. es gilt

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\underbrace{0,\dots,0}_{\epsilon_0}, \underbrace{1,\dots,1}_{\epsilon_1}, \underbrace{0,\dots,0}_{\epsilon_2}, \dots, \underbrace{1,\dots,1}_{\epsilon_{2^g-1}})^T, \\
\alpha_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\underbrace{0,\dots,0}_{\epsilon_0}, \underbrace{0,\dots,0}_{\epsilon_1}, \underbrace{1,\dots,1}_{\epsilon_2}, \dots, \underbrace{1,\dots,1}_{\epsilon_{2^g-1}})^T, \\
&\vdots \\
\alpha_g &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\underbrace{0,\dots,0,\dots,0,\dots,0}_{n-\sum_{\nu=0}^{2^{g-1}-1}\epsilon_\nu}, \underbrace{1,\dots,1,\dots,1,\dots,1}_{\sum_{\nu=0}^{2^{g-1}-1}\epsilon_\nu})^T \quad ,
\end{aligned}$$

und die Matrizen $\sqrt{2} \cdot (\alpha_1, \dots, \alpha_g)^T$ und $(\beta_1, \dots, \beta_g)^T$ stimmen bis auf Spaltenpermutation überein.

Es folgt

$$\begin{aligned}
f^\epsilon(Z) &= \sum_{y_1 \in \alpha_1 + \sqrt{2}\mathbb{Z}^n, \dots, y_g \in \alpha_g + \sqrt{2}\mathbb{Z}^n} e^{\pi i \sigma\left((y_j, y_k)_{j,k=1}^g \cdot Z\right)} \\
&= \vartheta_{\frac{1}{\sqrt{2}}\beta_1 + \sqrt{2}\mathbb{Z}^n, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_g + \sqrt{2}\mathbb{Z}^n}(Z) \quad .
\end{aligned}$$

Die letzte Umformung gilt, da eine Permutation τ der Spalten mit

$$\tau\left((\alpha_1, \dots, \alpha_g)^T\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_1, \dots, \beta_g)^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{g1} & \dots & \beta_{gn} \end{pmatrix}$$

existiert. □

Nun zum Beweis des Satzes: Mit Hilfe der Bemerkung 3.3 folgt unter Berücksichtigung der Definitionen $u_j := \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{u}_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, M$, und $L := \sqrt{2}\mathbb{Z}^n$

$$Dist_g(C)(f_0, \dots, f_{2^g-1})(Z) = \frac{1}{M^g} \sum_{\substack{\beta_1, \dots, \beta_g \in C \\ \alpha_1, \dots, \alpha_g \in C}} f^{\epsilon(\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_g - \alpha_g)}$$

$$= \frac{1}{M^g} \sum_{\substack{\beta_1, \dots, \beta_g \in C \\ \alpha_1, \dots, \alpha_g \in C}} \vartheta_{\frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_1 - \alpha_1) + \sqrt{2}\mathbb{Z}^n, \dots}(Z)$$

$$= \frac{1}{M^g} \sum_{k \in [M]^{2g}} \vartheta_{u_{k_1} - u_{k_2} + L, \dots, u_{k_{2g-1}} - u_{k_{2g}} + L}(Z)$$

$$= \frac{1}{M^g} \sum_{k \in [M]^{2g}} \sum_{\tilde{X}_g = (x_1, \dots, x_g) \in L^g} e^{\pi i \sigma(A(g,k;\tilde{X}_g) \cdot Z)} = \Theta^{(g)}_{\Lambda_C^{(A)}}(Z) \quad . \qquad \square$$

Die Average-Thetareihe $\Theta^{(g)}_{\Lambda_C^{(A)}}$ ist eine Modulform zu einer Gruppe und einem Multiplikator, die von den Eigenschaften von C abhängen. Die Modulgruppe und der Multiplikator werden in der nächsten Bemerkung bestimmt. Setze dazu noch $N_g := \left(\begin{smallmatrix} 2E & 0 \\ 0 & E \end{smallmatrix}\right)$, wobei E die $g \times g$-Einheitsmatrix ist.

Bemerkung 3.4 Sei $C := \{\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_M\} \subset \mathbb{F}_2^n$, $n \equiv 0(2)$ und $\Lambda_C^{(A)}$ die Konstruktion-A-Liftung von C. Dann ist $\Theta^{(g)}_{\Lambda_C^{(A)}}$ eine Modulform vom Gewicht $\frac{n}{2}$ zur Gruppe $\Gamma := N_g^{-1} \cdot \Gamma^{(2)}_{g,1}(8) \cdot N_g$ und zum Multiplikator $\chi(\mathcal{M}) = sign(\det D)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} 4^n}{|\det D|}\right)$, $\mathcal{M} = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$. Falls für jedes $k \in [M]^2$ das Hamming-Gewicht $wt(\tilde{u}_{k_1} - \tilde{u}_{k_2})$ gerade ist, kann man $\Gamma = \Gamma^{(2)}_{g,1}(4)$ und $\chi(\mathcal{M}) = sign(\det D)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot 2^n}{|\det D|}\right)$ wählen. Für $n \equiv 0(4)$ ist χ trivial.

Beweis: Die Aussage ist eine direkte Folgerung aus Korollar 2.24. Mit den eingeführten Bezeichnungen gilt für $C = \{\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_M\}$

$$\sqrt{2}\Lambda_C^{(A)} = \psi^{-1}(C) = \bigcup\nolimits_{j=1}^{M} (\tilde{u}_j + 2\mathbb{Z}^n)\,.$$

Es folgt $\Theta^{(g)}_{\Lambda_C^{(A)}}|_{\frac{n}{2}} N_g = \Theta^{(g)}_{\psi^{-1}(C)}$. Da für alle $j = 1, \ldots, M$ der Vektor $\tilde{u}_j \in (2\mathbb{Z}^n)^*$ ist, und für alle $k \in [M]^2$ $N(\tilde{u}_{k_1} - \tilde{u}_{k_2}) \in \mathbb{Z}$ gilt, ist $\Theta^{(g)}_{\Lambda_C^{(A)}}|_{\frac{n}{2}} N_g$ eine Modulform zur Gruppe $\Gamma^{(2)}_{g,1}(8)$. Den Multiplikator erhält man aus den Sätzen 2.22 und 2.5. Wenn für alle $k \in [M]^2$ $wt(\tilde{u}_{k_1} - \tilde{u}_{k_2})$ gerade ist, dann gilt $\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{u}_{k_1} - \tilde{u}_{k_2}) \in \left(\sqrt{2}\mathbb{Z}^n\right)^*$ und für alle $k \in [M]^2$ ist $N(\tilde{u}_{k_1} - \tilde{u}_{k_2}) \in \mathbb{Z}$. Ist $n \equiv 0(4)$, so ist die Determinante von $\sqrt{2}\mathbb{Z}^n$ eine Quadratzahl, nach Korollar 2.24 ist χ also trivial. □

Die in der Bemerkung angegebene Modulgruppe kann im Einzelfall natürlich noch größer sein. Zum Beispiel kann man das E_8-Gitter durch die Konstruktion-A-Liftung des binären $[8, 4, 4]$-Hamming-Codes $\mathcal{H}_8 \subset \mathbb{F}_2^8$ konstruieren. Der Hamming-Code ist ein gerader Code der Blocklänge $n \equiv 0(4)$; nach der Bemerkung 3.4 ist $\vartheta^{(1)}_{E_8}$ also eine Modulform vom Gewicht 4 bezüglich der Gruppe $\Gamma^{(2)}_{1,1}(4)$ und trivialem Multiplikator. Das E_8-Gitter ist aber gerade und unimodular, daher ist die Stufe des E_8-Gitters $l = 1$, und die Thetareihe $\vartheta^{(1)}_{E_8}$ ist eine Modulform vom Gewicht 4 zur vollen Gruppe $SL_2(\mathbb{Z})$.

Das folgende Beispiel behandelt die Average-Thetareihe der Konstruktion-A-Liftung Λ_{Best} des $(10, 40, 4)$-Best-Codes. Diese periodische Punktmenge liefert die zur Zeit dichteste bekannte Kugelpackung in Dimension 10.

Beispiel 3.5 Sei $C_{\text{Best}} \subset \mathbb{F}_2^{10}$ der $(10, 40, 4)$-*Best-Code* (siehe [Best80], [ConSlo99]), $u \in C_{\text{Best}}$ beliebig. Bezeichne mit Λ_{Best} die nach Konstruktion A aus C_{Best} konstruierte periodische Punktmenge im $\mathbb{R}^{10}$. Nach [Best80] ist der Best-Code distanzinvariant, daher gilt für die Average-Thetareihe $\Theta^{(1)}_{\Lambda_{Best}} = \vartheta^{(1)}_{\Lambda_{Best}-\frac{1}{\sqrt{2}}u}$. In [OdSlo80] wurde die Grad 1 Reihe berechnet, es gilt

$$\Theta^{(1)}_{\Lambda_{\text{Best}}}(z) = Dist_1(C_{\text{Best}})(f_0, f_1)(z) = 1 + 372q^2 + 768q^3 + 5684q^4 + 6144q^5 + \dots \ .$$

Der Grad 1 Distanzzähler des Best-Codes

$$Dist_1(C_{\text{Best}})(X, Y) = P_1(C_{\text{Best}} - u)(X, Y) = X^{10} + 22X^6Y^4 + 12X^4Y^6 + 5X^2Y^8$$

enthält nur gerade Y-Exponenten, nach Bemerkung 3.4 folgt

$$\Theta^{(g)}_{\Lambda_{\text{Best}}} \in [\Gamma^{(2)}_{g,1}(4), 5, \chi^{(g)}]$$

mit $\chi^{(g)}(\mathcal{M}) = sign(\det D)^5 \cdot \left(\frac{-2^{10}}{|\det D|}\right)$. Insbesondere ist für $g = 1$ die Reihe $\Theta^{(1)}_{\Lambda_{\text{Best}}}(z)|_5 N_1$ eine Modulform zur $\Gamma_{1,1}(8)$ vom Gewicht 5 zum Multiplikator $\chi(\mathcal{M}) = sign(d)^5 \cdot \left(\frac{-2^{10}}{|d|}\right)$.

Im folgenden soll untersucht werden, wie sich die Reihen $\Theta^{(g)}_{\Lambda^{(A)}_C}$ unter der Modulsubstitution $Z \mapsto -Z^{-1}$ verhalten.

Wie in [Rung96] erwähnt wird, erfüllen die Thetakonstanten die Transformationsformel

$$\sum_{a \in \mathbb{F}_2^g} (-1)^{<a,b>} \cdot f_a(Z) = \sqrt{2}^g \cdot \sqrt{\det(Z/i)}^{-1} \cdot f_b(-Z^{-1}) \ .$$

Beweis: In der Notation aus [Frei83] $\vartheta(Z; a, b) := \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} e^{\pi i \left(Z\left[g + \frac{1}{2}a\right] + b^T \cdot g\right)}$ und mit der dort angegebenen Transformationsformel

$$\vartheta(-Z^{-1}; a, b) = e^{-\frac{1}{2}\pi i a^T b} \sqrt{\det(Z/i)} \cdot \vartheta(Z; b, -a)$$

gilt $f_a(Z) = \vartheta(2Z; a, 0)$, $a \in \mathbb{F}_2^g$, und es ist

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{a \in \mathbb{F}_2^g} (-1)^{<a,b>} \vartheta(2(-Z^{-1}); a, 0) &= \sqrt{\det(Z/(2i))} \cdot \textstyle\sum_{a \in \mathbb{F}_2^g} (-1)^{<a,b>} \cdot \vartheta(Z/2; 0, a) \\ &= \sqrt{2}^{-g} \cdot \sqrt{\det(Z/i)} \cdot \textstyle\sum_{x \in \mathbb{Z}^g} e^{\frac{1}{2}\pi i Z[x]} \sum_{a \in \mathbb{F}_2^g} e^{\pi i <a, x+b>} =: H(Z) \ . \end{aligned}$$

Die Abbildung $a \mapsto e^{\pi i <a,x+b>}$ ist ein Charakter auf $\mathbb{F}_2^g$, insbesondere ist der Wert der letzten Summe entweder gleich 0 oder gleich 2^g. Die Summe ist gleich

2^g genau dann, wenn $x+b$ gerade ist, d.h. wenn $x+b$ modulo 2 der Nullvektor ist. Es folgt

$$H(Z) = \sqrt{2}^g \cdot \sqrt{\det(Z/i)} \cdot \sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}^g \\ x+b \text{ gerade}}} e^{\frac{1}{2}\pi i Z[x]} = \sqrt{2}^g \cdot \sqrt{\det(Z/i)} \cdot \sum_{x \in b+2\mathbb{Z}^g} e^{2\pi i Z\left[\frac{1}{2}x\right]}$$

$$= \sqrt{2}^g \cdot \sqrt{\det(Z/i)} \cdot \sum_{y \in \mathbb{Z}^g} e^{2\pi i Z\left[y+\frac{1}{2}b\right]} = \sqrt{2}^g \cdot \sqrt{\det(Z/i)} \cdot f_b(Z)$$

Ersetzt man Z durch $-Z^{-1}$, so folgt die Behauptung. □

Mit dieser Transformationsformel erhält man:

Lemma 3.6 *Sei $C \subset \mathbb{F}_2^n$, ein Code und $\Lambda_C^{(A)}$ die Konstruktion-A-Liftung von C. Es gilt*

$$\Theta^{(g)}_{\Lambda_C^{(A)}}(-Z^{-1}) = \frac{|C|^g}{2^{\frac{ng}{2}}} \cdot \sqrt{\det(Z/i)}^n \cdot P_g((D_C)')(f_0(Z), \ldots, f_{2^g-1}(Z)) .$$

Beweis : Es bezeichne wieder $f = (f_0, \ldots, f_{2^g-1})$. Es folgt

$$P_g((D_C)')(f)(Z) = \tfrac{1}{|C|^g} \cdot P_g(D_C)(f \cdot T_g)(Z)$$
$$= \tfrac{1}{|C|^g} \cdot Dist_g(C)(f \cdot T_g)(Z) = \tfrac{2^{\frac{ng}{2}}}{|C|^g} \cdot \sqrt{\det(Z/i)}^{-n} \cdot \Theta^{(g)}_{\Lambda_C^{(A)}}(-Z^{-1})$$

□

Korollar 3.7 *Sei $C \subset \mathbb{F}_2^n$ und $\Lambda_C^{(A)}$ die Konstruktion-A-Liftung von C. Wenn $Dist_g(C)$ invariant unter MacWilliams-Transformation ist, dann gilt*

$$\Theta^{(g)}_{\Lambda_C^{(A)}}(-Z^{-1}) = \sqrt{\det(Z/i)}^n \cdot \Theta^{(g)}_{\Lambda_C^{(A)}}(Z) .$$

Beweis: Wenn der Grad g Distanzzähler $Dist_g(C)$ invariant unter MacWilliams-Transformation ist, dann gilt $P_g((D_C)') = Dist_g(C)$. Mit Lemma 3.6 folgt

$$\Theta^{(g)}_{\Lambda_C^{(A)}}(-Z^{-1}) = \frac{|C|^g}{2^{\frac{ng}{2}}} \cdot \sqrt{\det(Z/i)}^n \cdot \Theta^{(g)}_{\Lambda_C^{(A)}}(Z) .$$

Einsetzen von $X_0 = \ldots = X_{2^g-1} = 1$ in die MacWilliams-Gleichung für $Dist_g(C)$ liefert $|C|^g = 2^{\frac{ng}{2}}$. □

Definition 3.8

1. Zwei Codes $C_1, C_2 \subset \mathbb{F}_2^n$ heißen *k-dual* , wenn gilt :

$$Dist_k(C_1)(X) = \frac{1}{|C_2|^k} \cdot Dist_k(C_2)(X \cdot T_k) \ .$$

   Gilt dabei $C := C_1 = C_2$, so heißt C *k-selbstdual*.

2. Zwei periodische Punktmengen $\Lambda_1 = \cup_{j=1}^{M_1}(u_j + L_1), \Lambda_2 \subset \mathbb{R}^n$ heißen *k-dual*, wenn gilt :

$$\frac{\sqrt{\det L_1}^{\,k}}{M_1^k} \cdot \det{(Z/i)}^{-\frac{n}{2}} \cdot \Theta_{\Lambda_1}^{(k)}(-Z^{-1}) = \Theta_{\Lambda_2}^{(k)}(Z) \ .$$

   Gilt dabei $\Lambda := \Lambda_1 = \Lambda_2$, so heißt Λ *k-selbstdual*.

Codes bzw. periodische Punktmengen, die k-dual für alle $k \in \mathbb{N}$ sind, heißen *∞-dual*.

Zwei Codes C_1 und C_2 sind genau dann 1-dual zueinander, wenn sie formal dual sind.

Bemerkung 3.9 Die Eigenschaft, k-dual zu sein, ist symmetrisch. Sind zwei binäre Codes C_1, $C_2 \subset \mathbb{F}_2^n$ bzw. zwei periodische Punktmengen $\Lambda_1 = \cup_{j=1}^{M_1}(u_j + L_1), \Lambda_2 = \cup_{j=1}^{M_2}(v_j + L_2)$ k-dual, so sind sie auch $(k-1)$-dual und es gilt $|C_1| \cdot |C_2| = 2^n$ bzw. $\det L_1 \cdot \det L_2 = M_1^2 \cdot M_2^2$.

Beweis: Mit Hilfe der Gleichung (2) auf Seite 9 erhält man

$$Dist_k(C_1)(X) = \frac{1}{|C_2|^k} \cdot Dist_k(C_2)(X \cdot T_k) = P_k((D_{C_2})')(X) \ .$$

Anwenden des φ-Operators auf diese Gleichung liefert nach Bemerkung 1.8 die entsprechende MacWilliams-Gleichung für die Distanzzähler vom Grad $k-1$, denn es gilt $P_{k-1}((D_{C_2})')(X) = \frac{1}{|C_2|^{k-1}} Dist_{k-1}(C_2)(X \cdot T_{k-1})$.

Nun zum Fall der k-dualen periodischen Punktmengen:
Setzt man $Z := \left(\begin{smallmatrix} \tilde{Z} & 0 \\ 0 & w \end{smallmatrix}\right)$ in die Transformationsformel ein, so ergibt sich

$$\frac{\sqrt{\det L_1}^{\,k}}{M_1^k} \cdot \Big(\det(\tilde{Z}/i)\Big)^{-\frac{n}{2}} \cdot (w/i)^{-\frac{n}{2}} \cdot \Theta_{\Lambda_1}^{(k-1)}(-\tilde{Z}^{-1}) \cdot \Theta_{\Lambda_1}^{(1)}(-w^{-1}) = \Theta_{\Lambda_2}^{(k-1)}(\tilde{Z}) \cdot \Theta_{\Lambda_2}^{(1)}(w)$$

Setzt man $Z := Diag(w, \ldots, w)$ in die Transformationsformel ein, so erhält man $\frac{\sqrt{\det L_1}^{\,k}}{M_1^k}(w/i)^{-\frac{kn}{2}} \cdot \Theta^{(1)}_{\Lambda_1}(-w^{-1})^k = \Theta^{(1)}_{\Lambda_2}(w)^k$ und daher

$$\frac{\sqrt{\det L_1}}{M_1} \cdot (w/i)^{-\frac{n}{2}} \cdot \Theta^{(1)}_{\Lambda_1}(-w^{-1}) = \epsilon_k \cdot \Theta^{(1)}_{\Lambda_2}(w)$$

mit einer k-ten Einheitswurzel ϵ_k. Mit Satz 2.17 für $g = 1$, d.h. der Transformationsformel aus [OdSlo80], folgt durch Vergleich des 0-ten Fourier-Koeffizienten $\epsilon_k = 1$. Es folgt, daß Λ_1 und Λ_2 $(k-1)$-dual sind.

k-duale Codes bzw. Punktmengen sind also insbesondere 1-dual. Einsetzen von $X_0 = X_1 = 1$ in die Grad 1 Distanzzähler in der Definition von 1-dualen Codes C_1 und C_2 liefert $|C_1| \cdot |C_2| = 2^n$. Um die Gleichung $\det L_1 \cdot \det L_2 = M_1^2 M_2^2$ zu zeigen, substituiere man in der definierenden Gleichung für 1-duale Punktmengen Λ_1 und Λ_2 die Variable z durch $-1/z$. Man erhält auf diese Weise

$$\frac{\sqrt{\det L_1}}{M_1} \cdot \Theta^{(1)}_{\Lambda_1}(z) = \left(\frac{z}{i}\right)^{-\frac{n}{2}} \cdot \Theta^{(1)}_{\Lambda_2}(-1/z) \ ,$$

und mit der Transformationsformel aus Satz 2.17 folgt durch Vergleich der 0-ten Fourier-Koeffizienten

$$\frac{\sqrt{\det L_1}}{M_1} = \frac{M_2}{\sqrt{\det L_2}} \ .$$

Die Symmetrie der Eigenschaft, k-dual zu sein, folgt nun leicht aus der Definition unter Berücksichtigung der Formeln $|C_1| \cdot |C_2| = 2^n$ bzw. $\det L_1 \cdot \det L_2 = M_1^2 \cdot M_2^2$. $\square$

Nach Satz 1.16 ist der Grad 2 Distanzzähler von binären Codes, die äquivalent zu einem Code mit selbstdualem Urbild unter der Gray-Abbildung sind, invariant unter MacWilliams-Transformation. Diese Codes sind also 2-selbstdual und ebenso die Konstruktion-A-Liftung $\Lambda_C^{(A)}$ solcher Codes. Codes, die äquivalent zum Bild eines Codes aus Lemma 1.24 unter der Gray-Abbildung sind, sind nach Proposition 1.13 ∞-selbstdual.

Bemerkung 3.10 Betrachte wieder den Best-Code $C_{\text{Best}} \subset \mathbb{F}_2^{10}$. Es gibt keinen binären Code C, der 1-dual zu C_{Best} ist, denn die MacWilliams-Transformierte des Distanzzählers $Dist_1(C_{\text{Best}})$ ist

$$p(X,Y) := X^{10} + \frac{1}{5}X^8Y^2 + \frac{26}{5}X^6Y^4 + \frac{64}{5}X^5Y^5 + \frac{26}{5}X^4Y^6 + \frac{1}{5}X^2Y^8 + Y^{10} \ .$$

Würde es nun einen binären Code C mit $Dist_1(C) = p$ geben, so wäre $|C| = Dist_1(C)(1,1) = p(1,1) = \frac{128}{5} = \frac{2^{10}}{40} \notin \mathbb{Z}$. Widerspruch. (Ein kürzerer Beweis benutzt direkt die Bemerkung 3.9: Es gilt $|C_{\text{Best}}| = 40$, aber 40 ist kein Teiler von 2^{10}.)

4 Extremalität von Zählern und Reihen

4.1 Extremale Modulformen

Man betrachte die Gleichung für die center-density der durch eine periodische Punktmenge $\Lambda = \cup_{j=1}^{M}(u_j + L)$ definierten Kugelpackung,

$$\delta_\Lambda = \frac{M\sqrt{\min(\Lambda)}^n}{2^n\sqrt{\det L}} \quad .$$

Im Hinblick auf das Kugelpackungsproblem ist von Interesse, daß δ_Λ möglichst groß ist. Beschränkt man sich zunächst auf den Fall, daß $\Lambda = L$ ein Gitter ist, und betrachtet nur Gitter gleicher Determinante, so wird δ_L umso größer, je größer das Minimum $\min(L)$ des Gitters L ist. Dies bedeutet, daß man unter allen Gittern $L \subset \mathbb{R}^n$ gleicher Determinante solche Gitter finden muß, für die in der $q-$Entwicklung der Thetareihe $\vartheta_L(z) = \sum_{j\in N(L)} a_j q^j$ möglichst viele Anfangskoeffizienten verschwinden. Etwas präziser: Man ist an Gittern L interessiert, deren $q-$Entwicklung der Thetareihe

$$\vartheta_L(z) = 1 + \sum_{\substack{j\geq j_0 \\ j\in N(L)}} a_j q^j$$

mit einem möglichst großen $j_0 = \min(L)$ beginnt. Bei gegebenem n und gegebener Determinante kann j_0 nicht beliebig groß werden, da für die Dichte $\Delta_{\mathcal{P}}$ der zu Λ gehörenden Kugelpackung $\Delta_{\mathcal{P}} \leq 1$ gilt.

Falls $L \subset \mathbb{R}^n$, $n \equiv 0(2)$, ein gerades Gitter der Stufe l ist, dann ist ϑ_L eine Modulform vom Gewicht $n/2$ zur Gruppe $\Gamma_{1,0}(l)$ und einem geeigneten Charakter χ (siehe Satz 2.22). Der Raum $[\Gamma_{1,0}(l), n/2, \chi]$ ist ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}-$Vektorraum. Für die Stufe l und die Determinante $\det L$ eines Gitters L gelten die Beziehungen $l \mid 2\det L$ und $\det L \mid l^n$.

Diese Überlegungen führen zu der folgenden Definition, die erstmals in [SSP99] gegeben wurde.

Definition 4.1 Sei $\mathcal{M} \subset [\Gamma_{1,0}(l), k, \chi]$ ein Unterraum der Dimension d. Man sagt, *Extremalität ist definierbar bezüglich* $\mathcal{M}$, genau dann, wenn die Projektion

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbb{C}^d \\ \sum_{j\geq 0} a_j q^j & \mapsto & (a_0, \ldots, a_{d-1}) \end{array}$$

injektiv ist. Ist dies der Fall, so heißt die (eindeutig bestimmte) Modulform $f = 1 + \sum_{j\geq d} a_j q^j \in \mathcal{M}$ die *extremale Modulform bezüglich* $\mathcal{M}$. Ein Gitter $L \subset \mathbb{R}^{2k}$ heißt *extremal bezüglich* $\mathcal{M}$, falls Extremalität definierbar ist bezüglich $\mathcal{M}$ und falls die Thetareihe ϑ_L mit der extremalen Modulform in $\mathcal{M}$ übereinstimmt.

Diese Definition läßt sich in der offensichtlichen Weise für beliebige Räume von Modulformen formulieren. Dazu braucht man nur die Forderung an die Definierbarkeit von Extremalität leicht abzuschwächen.

Definition 4.2 Sei $\mathcal{M}$ ein beliebiger $\mathbb{C}$-Vektorraum von Modulformen mit $d := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M} < \infty$. Man sagt, *Extremalität ist definierbar bezüglich* $\mathcal{M}$, genau dann, wenn eine Basis von $\mathcal{M}$ der Form

$$f_k = q^{j_k} + \sum_{j>j_d} a_j^{(k)} q^j, \quad k \in [d]$$

mit $j_1 < j_2 < \ldots < j_d$ existiert. Ist dies der Fall, so heißt die (eindeutig bestimmte) Modulform $f = q^{j_1} + \sum_{j>j_d} a_j q^j \in \mathcal{M}$ die *extremale Modulform bezüglich* $\mathcal{M}$.

Beispiel 4.3

1. Bezeichne mit E_8 das $8-$dimensionale Gosset-Gitter. Die Thetareihe dieses Gitters ist eine Modulform vom Gewicht 4 zur vollen Modulgruppe $SL_2(\mathbb{Z})$ und hat die Form

$$\vartheta_{E_8}(z) = \sum_{x \in E_8} q^{N(x)} = 1 + 240 \sum_{j \in \mathbb{N}} \sigma_3(j) q^{2j} = 1 + 240q^2 + 2160q^4 + ...$$

   Bezüglich $\mathcal{M} := [SL_2(\mathbb{Z}), 4]$ ist Extremalität definierbar. Wegen $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M} = 1$ ist eine Modulform in diesem Raum durch die Angabe des ersten Fourierkoeffizienten bestimmt. Daher ist ϑ_{E_8} die extremale Modulform in $\mathcal{M}$ und das E_8-Gitter ist extremal bezüglich $\mathcal{M}$.

2. Bezeichne mit BW_{16} das 16-dimensionale Barnes-Wall-Gitter. Es gilt

$$\vartheta_{BW_{16}}(z) = 1 + 4320q^4 + 61440q^6 + 276480q^8 + \ldots \in \mathcal{M} := [\Gamma_{1,0}(2)^*, 8] \ .$$

   Dabei bezeichnet $\Gamma_{1,0}(2)^*$ die Fricke-Gruppe zur Stufe 2. Diese wird von $\Gamma_{1,0}(2)$ und der Matrix $\omega_2 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{smallmatrix} \right)$ erzeugt. Bezüglich $\mathcal{M}$ ist Extremalität definierbar und es gilt $\dim \mathcal{M} = 2$, siehe [Queb98]. Eine Modulform in $\mathcal{M}$ ist also durch die Koeffizienten von $1 = q^0$ und q^2 eindeutig bestimmt. Daher ist BW_{16} ein extremales Gitter bezüglich $\mathcal{M}$.

3. Wie in den vorangegangenen Beispielen ergibt sich, daß die Thetareihe des Leech-Gitters

$$\vartheta_{Leech}(z) = 1 + 196560q^4 + 16773120q^6 + \ldots \in \mathcal{M} := [SL_2(\mathbb{Z}), 12]$$

   mit der extremalen Modulform bezüglich $\mathcal{M}$ übereinstimmt, da der Raum 2-dimensional ist.

Es sei darauf hingewiesen, daß nach obiger Definition der Begriff der Extremalität eines Gitters vom vorgegebenen Raum $\mathcal{M}$ der Modulformen abhängt. Ist L ein beliebiges Gitter mit Thetareihe ϑ_L, so ist L natürlich extremal bezüglich $\mathcal{M} := \mathbb{C}\vartheta_L$. Dieser Fall tritt auch im ersten Beispiel von 4.3 ein. Jedes Gitter ist also extremal bezüglich eines geeigneten Raumes $\mathcal{M}$. Sinnvoll sind daher nur Fragestellungen nach Extremalität, bei denen der Raum der Modulformen vorgegeben ist, wie zum Beispiel dann, wenn man sich für gerade unimodulare Gitter interessiert.

Es gibt Fälle, in denen zwar die extremale Modulform f bezüglich eines Raumes $\mathcal{M}$ existiert, es aber kein Gitter L mit $\vartheta_L = f$ gibt, siehe zum Beispiel den in Abschnitt 5 behandelten Fall $\mathcal{M} := [G(2), 8]$. In diesem Fall würde auch eine periodische Punktmenge Λ mit $\Theta_\Lambda = f$ eine Kugelpackung im $\mathbb{R}^{16}$ liefern, die dichter wäre als die zur Zeit bekannten Kugelpackungen in Dimension 16 (siehe Abschnitt 5).

Definition 4.4 Sei $\mathcal{M}$ ein Raum von Modulformen bezüglich dem Extremalität definierbar ist. Eine periodische Punktmenge $\Lambda = \cup_{j=1}^{M}(u_j + L)$ heißt *extremal bezüglich* $\mathcal{M}$, falls ihre Average-Thetareihe Θ_Λ mit der extremalen Modulform in $\mathcal{M}$ übereinstimmt.

Die folgende Bemerkung ist unmittelbar klar.

Bemerkung 4.5 Sei $\mathcal{M}$ ein Raum von Modulformen, bezüglich dem Extremalität definierbar ist, und sei f die extremale Modulform in $\mathcal{M}$. Eine notwendige Bedingung dafür, daß f mit der Average-Thetareihe einer periodischen Punktmenge Λ übereinstimmen kann, ist, daß alle Koeffizienten in der $q-$Entwicklung von f nicht-negative rationale Zahlen mit beschränktem Nenner sind. Ist $\Lambda = L$ ein Gitter, so müssen die Koeffizienten sogar ganzzahlig sein.

Die Thetareihe eines geraden Gitters L der Stufe l ist eine Modulform zur Gruppe $\Gamma_{1,0}(l)$. Für $l = 1$ und die Gewichte 4 bzw. 12 wurden im Beispiel 4.3 extremale Gitter angegeben. Betrachtet man nun für Average-Thetareihen zu periodischen Punktmengen Λ (mit den Eigenschaften aus Korollar 2.24) den Raum der Modulformen, in dem sie auf natürliche Weise vorkommen, so erhält man folgende Aussage:

Proposition 4.6 *Sei $L \subset \mathbb{R}^{2k}$ ein gerades Gitter der Stufe l und $\Lambda = \cup_{j=1}^{M}(u_j + L) \subset \mathbb{R}^{2k}$ eine periodische Punktmenge, die kein Gitter ist und deren Verschiebungsvektoren $u_1, \ldots, u_M \in L^*$ die Voraussetzungen $u_{k_1} + L \neq u_{k_2} + L$ für $k_1 \neq k_2$ und $N(u_{k_1} - u_{k_2}) \in \mathbb{Z}$ für $k \in [M]^2$ erfüllen. Sei weiterhin χ der in Satz 2.22 definierte Charakter und sei für $[\Gamma_{1,1}^{(2)}(l), k, \chi]$ Extremalität definierbar. Dann ist Θ_Λ nicht die extremale Modulform in $[\Gamma_{1,1}^{(2)}(l), k, \chi]$.*

Beweis : Die Reihen $\Theta_\Lambda = \sum_{j\geq 0} a_j q^j$ und $\vartheta_L = \sum_{j\geq 0} b_j q^j$ sind in $[\Gamma_{1,1}^{(2)}(l), k, \chi]$ enthalten. Wegen

$$\Theta_\Lambda - \vartheta_L = \frac{1}{M}\left(\sum_{k\in[M]^2} \vartheta_{u_{k_1}-u_{k_2}+L}\right) - \vartheta_L = \frac{1}{M}\sum_{\substack{k\in[M]^2\\ k_1\neq k_2}} \vartheta_{u_{k_1}-u_{k_2}+L} \neq 0$$

gilt $\vartheta_L \neq \Theta_\Lambda$. Sei $d\in\mathbb{N}$ so gewählt, daß $a_j = 0$ für $1\leq j<d$ und $a_d\neq 0$ gilt. Wegen $\min(\Lambda)\leq\min(L)$ hat entweder L ein größeres Minimum als Λ, oder ϑ_L und Θ_Λ sind zwei verschiedene Modulformen mit $a_j = b_j$ für alle $0\leq j<d$. Die extremale Modulform ist aber eindeutig bestimmt. □

Nun stellt sich die Frage, ob in Proposition 4.6 die Forderung nach Definierbarkeit von Extremalität überhaupt erfüllbar ist. Das folgende Beispiel zeigt, daß bezüglich $[\Gamma_{1,1}^{(2)}(2), k]$ für gerades Gewicht k Extremalität definierbar ist.

Beispiel 4.7 Sei $l = 2$ und k gerade. Es ist $\Gamma_{1,1}^{(2)}(2) = \Gamma_1(2)$ und es gilt $\Gamma_1(2) = T\cdot\Gamma_{1,0}(4)\cdot T^{-1}$ mit $T = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Nach [Kob84], p.146, hat die graduierte Algebra der Modulformen geraden Gewichts zur $\Gamma_{1,0}(4)$ die Form

$$\bigoplus_{2|k}[\Gamma_{1,0}(4), k] = \mathbb{C}[g_1, g_2]$$

mit Modulformen

$$\begin{aligned} g_1(z) :&= \vartheta_{\sqrt{2}\mathbb{Z}^4}(z) = 1 + 8q^2 + 24q^4 + \dots\\ g_2(z) :&= \sum_{\substack{n>0\\ n\equiv 1(2)}} \sigma_1(n) q^{2n} = q^2 + 4q^6 + \dots \end{aligned} \qquad .$$

Beide Funktionen sind Modulformen vom Gewicht 2 und g_2 ist eine Spitzenform. Die Elemente $g_1^j g_2^{d-j}(z) = q^{d-j} + 8j\,q^{d-j+2} + \dots$ erzeugen für $j = 0, 1, \dots, d-1$ den $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathcal{M} := [\Gamma_{1,0}(4), k]$, wobei $d := \dim_{\mathbb{C}}\mathcal{M} = \frac{k}{2}$ gesetzt ist. Bezüglich $\mathcal{M}$ ist also also Extremalität definierbar. Da $T\in GL_2(\mathbb{Q})$ eine obere Dreiecksmatrix ist, ist auch Extremalität bezüglich $[\Gamma_{1,1}^{(2)}(2), k]$ definierbar.

Betrachtet man die Räume zu durch 4 teilbaren Gewichten, so passiert etwas bemerkenswertes: Beispielsweise hat die extremale Modulform bezüglich $[\Gamma_{1,0}(4), 8]$ die Form

$$f^* = 1 - 7680q^{12} + 4320q^{16} - 276480q^{20} + 61440q^{24} - \dots \quad .$$

Der Raum $[\Gamma_{1,0}(4), 8]$ ist 5-dimensional, daher verschwinden die Koeffizienten zu q^2, q^4, q^6, q^8. In diesem Fall verschwindet aber auch der Koeffizient zu q^{10}, und ebenso alle Koeffizienten der q^2-Entwicklung zu ungeraden Indices. Das liegt daran, daß f^* von der extremalen Modulform zur Gruppe $\Gamma_{1,0}(2)$ herkommt, wie in Abschnitt 4.3 erläutert wird.

4.2 Extremale Zähler

Die Gewichtspolynome $P_1(C)(X_0, X_1)$ zu selbstdualen Codes $C \subset \mathbb{F}_2^n$ sind homogene Polynome vom Grad n mit gewissen Invarianzeigenschaften. Definiere die Gruppen $H_1 := \langle T_1, D_1 \rangle$ und $H_2 := \langle T_1, D_2 \rangle$, wobei

$$T_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

gesetzt ist. Dann sind die nächsten beiden Sätze wohlbekannt, [ConSlo99], [RaS98].

Satz 4.8 *Sei $C \subset \mathbb{F}_2^n$ ein selbstdualer Code. Es gilt*

$$P_1(C) \in \mathbb{C}[X_0, X_1]^{H_1} = \mathbb{C}[p_1, p_4]$$

mit $p_1(X_0, X_1) := X_0^2 + X_1^2$ und $p_4(X_0, X_1) := X_0^2 X_1^2 (X_0^2 - X_1^2)^2$.

Satz 4.9 *(Gleason)*
Sei $C \subset \mathbb{F}_2^n$ ein doppeltgerader selbstdualer Code. Es gilt

$$P_1(C) \in \mathbb{C}[X_0, X_1]^{H_2} = \mathbb{C}[P_1(\mathcal{H}_8), P_1(\mathcal{G}_{24})] .$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{H}_8$ den $[8,4,4]-$Hamming-Code und $\mathcal{G}_{24}$ den $[24,12,8]-$ Golay-Code.

Betrachtet man die $n-$te homogene Komponente $\mathcal{P}$ eines gegebenen Invariantenringes $\mathbb{C}[X_0, X_1]^G$ bezüglich einer Gruppe G, d.h. $\mathcal{P} = \mathbb{C}[X_0, X_1]_n^G$, so kann man auch hier die Frage stellen, ob ein bezüglich $\mathcal{P}$ extremales (und eventuell eindeutig bestimmtes) Polynom in $\mathcal{P}$ existiert, und ob dieses dann der Gewichtszähler eines Codes ist.

Definition 4.10 Sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{C}[X_0, X_1]_n$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum homogener Polynome vom Grad n und sei $d := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}$. Man sagt, *Extremalität ist definierbar bezüglich* $\mathcal{P}$, genau dann, wenn eine Basis von $\mathcal{P}$ der Form

$$q_k(X_0, X_1) = X_0^{n-j_k} X_1^{j_k} + \sum_{j > j_k} a_j^{(k)} X_0^{n-j} X_1^j, \ k \in [d], \ a_j^{(k)} \in \mathbb{C}$$

mit $j_1 < j_2 < \ldots < j_d$ existiert. In diesem Fall heißt das (eindeutig bestimmte) Polynom $p(X_0, X_1) = X_0^{n-j_1} X_1^{j_1} + a_{j_d+1} X_0^{n-(j_d+1)} X_1^{j_d+1} + \ldots + a_n X_1^n$ *das extremale Polynom bezüglich* $\mathcal{P}$. Ein Code $C \subset \mathbb{Z}_m^n$ (bzw. $C \subset \mathbb{F}_q^n$) heißt extremal bezüglich $\mathcal{P}$, falls der *Hamming-Distanzzähler*

$$HD(C)(X_0, X_1) := \frac{1}{|C|} \sum_{\alpha, \beta \in C} X_0^{n - wt(\beta - \alpha)} X_1^{wt(\beta - \alpha)}$$

mit dem extremalen Polynom in $\mathcal{P}$ übereinstimmt.

Im Fall der binären selbstdualen Codes der Blocklänge 16 erhält man (siehe [ConSlo99]):

Beispiel 4.11 Sei $C \subset \mathbb{F}_2^{16}$ ein selbstdualer Code. Dann ist

$$P_1(C) = \lambda_1 p_1^8 + \lambda_2 p_1^4 p_4 + \lambda_3 p_4^2 \in \mathbb{C}[p_1, p_4]_{16}$$

für geeignete $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Q}$. Das extremale Polynom $p(X_0, X_1)$ in $\mathbb{C}[p_1, p_4]_{16}$ hat die Form

$$p(X_0, X_1) = X_0^{16} + 112X_0^{10}X_1^6 + 30X_0^8X_1^8 + 112X_0^6X_1^{10} + X_1^{16} \ .$$

Nun gibt es keinen linearen Code C mit $P_1(C) = p$, siehe [ConSlo99]. Allerdings gilt für den Nordstrom-Robinson-Code NRC_{16} aus Beispiel 1.14

$$Dist_1(NRC_{16}) = HD(NRC_{16}) = P_1(NRC_{16}) = p \ .$$

Aufgrund der Invarianz des Zählers $Dist_1(NRC_{16})$ unter MacWilliams-Transformation läßt sich aus dem Nordstrom-Robinson-Code ein Beispiel einer periodischen Punktmenge konstruieren, deren Average-Thetareihe eine Modulform zur Hecke-Gruppe $G(2)$ ist, siehe Kapitel 5.

4.3 Die extremale Modulform in $[\Gamma_0(4), 2k]$

In diesem Abschnitt werden die extremalen Modulformen bezüglich der Räume $[\Gamma_{1,0}(4), 2k]$, $k \in \mathbb{N}$, genauer untersucht. Es wird bewiesen, daß eine solche extremale Modulform von der entsprechenden extremalen Modulform zur Gruppe $\Gamma_{1,0}(2)$ herkommt.

Im folgenden sei wie in Beispiel 4.7 die Matrix $T = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $g_1(z) = \vartheta_{\sqrt{2}\mathbb{Z}^4}(z)$, $g_2(z) = \sum_{\substack{n>0 \\ n\equiv 1(2)}} \sigma_1(n) q^{2n}$ die Erzeuger des Polynomrings $\mathbb{C}[g_1, g_2] = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}_0}[\Gamma_{1,0}(4), 2k]$. Der Ring der elliptischen Modulformen zur $\Gamma_{1,0}(2)$ ist in [Skor92] bestimmt, es gilt

$$\bigoplus_{k\in\mathbb{N}_0}[\Gamma_{1,0}(2), 2k] = \mathbb{C}[\delta, \epsilon] \ .$$

Die beiden Erzeuger δ vom Gewicht 2 und ϵ vom Gewicht 4 sind algebraisch unabhängig und wie folgt definiert: Bezeichne mit

$$\wp(z, x) := \frac{1}{x^2} + \sum_{0\neq\gamma\in 2\pi i(\mathbb{Z}z+\mathbb{Z})} \left(\frac{1}{(x-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right)$$

die *Weierstraßsche $\wp$-Funktion.* Setze $\sigma_1^{odd}(n) := \sum_{\substack{d|n \\ d\equiv 1(2)}} d$. Dann gilt

$$\epsilon(z) = (\wp(z, \pi i) - \wp(z, \pi i z))(\wp(z, \pi i) - \wp(z, \pi i(z+1))) = \frac{1}{16} - q^2 + 7q^4 - 28q^6 + \ldots$$

und $\delta(z) = \frac{1}{4} + 6 \cdot \sum_{n \geq 1} \sigma_1^{odd}(n) q^{2n}$. Für die Dimension der Vektorräume $[\Gamma_{1,0}(2), 2k]$ ergibt sich

$$\dim_{\mathbb{C}}[\Gamma_{1,0}(2), 2k] = \left[\frac{k}{2}\right] + 1 \quad .$$

Wie in [Skor92] setze $\tilde{\epsilon} := \frac{1}{4}(\delta^2 - \epsilon) = q^2 + 8q^4 + 28q^6 + \ldots$. Eine Basis von $[\Gamma_{1,0}(2), 2k]$ ist durch $\{\delta^{\nu_1} \tilde{\epsilon}^{\nu_2} \mid (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{N}_0^2,\ \nu_1 + 2\nu_2 = k\}$ gegeben. Insbesondere ist Extremalität definierbar bezüglich $[\Gamma_{1,0}(2), 2k]$.

Satz 4.12 *Seien* $f_1 \in [\Gamma_{1,0}(4), 2k]$ *und* $f_2 \in [\Gamma_{1,0}(2), 2k]$ *die extremalen Modulformen bezüglich der angegebenen Räume. Dann gilt* $f_1 = f_2|_{2k}T$. *Insbesondere verschwinden in der* q^2*-Entwicklung von* $f_1 = \sum_{j \geq 0} a_j q^{2j}$ *die Koeffizienten* a_j *zu ungeraden Indices* j. *Ist* k *gerade, so gilt* $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = \ldots = a_{k+1} = 0$.

Dieser Satz liefert also eine Erklärung dafür, warum in der q^2-Entwicklung der extremalen Modulform in Beispiel 4.7 die Koeffizienten zu ungeraden Indices verschwinden, und warum $a_5 = 0$ gilt, wo doch der Raum $[\Gamma_{1,0}(4), 8]$ aus Dimensionsgründen nur $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ erzwingt.

Beweis: Die extremale Modulform $f_2 \in [\Gamma_{1,0}(2), 2k]$ ist eine Modulform zur Hauptkongruenzgruppe $\Gamma_1(2)$. Es gilt $\Gamma_{1,0}(4) = T^{-1}\Gamma_1(2)T$, daher ist $f_2|_{2k}T \in [\Gamma_{1,0}(4), 2k]$, siehe Beispiel 4.7. Sei $f_2 = 1 + \sum_{l \geq d} b_l q^{2l}$, $b_d \neq 0$, die q-Entwicklung von f_2. Aus der Extremalität von f_2 folgt $d \geq \left[\frac{k}{2}\right] + 1$. Es gilt also

$$f_2|_{2k}T = 1 + \sum_{l \geq d} b_l q^{4l} = \sum_{j \geq 0} a_j q^{2j} = 1 + \sum_{j \geq 2d} a_j q^{2j}$$

und $a_j = 0$ für ungerade Indices j. Wegen $\dim_{\mathbb{C}}[\Gamma_{1,0}(4), 2k] = k+1$ und $2\left(\left[\frac{k}{2}\right] + 1\right) \geq k + 1$ stimmt $f_2|_{2k}T$ mit der extremalen Modulform f_1 überein. Für gerades k ist $\left[\frac{k}{2}\right] = \frac{k}{2}$ und $2d \geq 2\left(\left[\frac{k}{2}\right] + 1\right) = k + 2 > k + 1$. Daher verschwindet auch der Koeffizient a_{k+1} in der q^2-Entwicklung von f_1. □

In den nachfolgenden Beispielen werden die extremalen Modulformen f^* bezüglich der Räume $[\Gamma_{1,0}(4), 2k]$ für $k \in [6]$ angegeben. Dabei wurden die Berechnungen mit dem Programm `ganzvieleextrMFGamma04.mag` durchgeführt.

Beispiel 4.13

- $k = 1 : f^* = 1 + 24q^4 + 24q^8 + 96q^{12} + 24q^{16} + 144q^{20} + \ldots$
  Es gilt $f^* = 4\delta|_2T$, und diese Modulform stimmt mit der Thetareihe des Gitters $\sqrt{2}D_4$ überein, vgl. [ConSlo99], p. 202.

- $k = 2 : f^* = 1 + 240q^8 + 2160q^{16} + 6720q^{24} + 17520q^{28} + \ldots$
  Diese Modulform stimmt mit der Thetareihe des Gitters $2E_8$ überein.

- $k = 3 : f^* = 1 - 504q^8 - 16632q^{16} - 122976q^{24} - 532728q^{28} + \ldots$
  Es gilt $f^*(z) = E_6(4z)$. Dabei bezeichnet E_6 die *Eisensteinreihe vom Gewicht 6*. Zur Definition der Eisensteinreihen siehe Seite 81.

- $k = 4 : f^* = 1 - 7680q^{12} + 4320q^{16} - 276480q^{20} + 61440q^{24} - \ldots$
  Diese Modulform steht in Verbindung zur extremalen Modulform zur Hecke Gruppe $G(2)$ (siehe Bemerkung 5.8), welche in Kapitel 5 genauer untersucht wird.

- $k = 5 : f^* = 1 + 10560q^{12} + 3960q^{16} + 1039104q^{20} + 168960q^{24} + \ldots$
  Ein Vergleich dieser Modulform mit der Thetareihe eines 10-dimensionalen, 2-modularen, extremalen Gitters L,

  $$\vartheta_L = 1 + 3960q^4 + 168960q^6 + 2094840q^8 + \ldots \quad ,$$

  zeigt, daß die Koeffizienten a_j aus der q-Entwicklung von f^* für $j \equiv 0(8)$ mit den Koeffizienten von ϑ_L übereinstimmen. Es gibt (bis auf Isometrie) genau drei 10-dimensionale, 2-modulare, extremale Gitter, siehe [BaVe01]. Zwei dieser Gitter wurden von Nebe und Plesken entdeckt, [NePle95]. Scharlau und Hemkemeier fanden das dritte, [SchHe98]. Die Frage, ob es vielleicht eine periodische Punktmenge $\Lambda = \cup_{j=1}^{M}(u_j + 2L)$ eines 10-dimensionalen, 2-modularen, extremalen Gitters L mit $\Theta_\Lambda = f^*$ gibt, ist offen. Eine analoge Fragestellung wird in Kapitel 5 für die extremale Modulform bezüglich $[G(2), 8]$ untersucht.

- $k = 6 : f^* = 1 + 196560q^{16} + 16773120q^{24} + 398034000q^{32} + \ldots$
  Bezeichne mit L_{Leech} das Leech-Gitter ($\min(L_{Leech}) = 4$). Dann gilt für die extremale Modulform $f^* = \vartheta_{2L_{Leech}}$.

4.4 Zwei Spezialfälle

Sei $\mathcal{M}$ ein endlich-dimensionaler Raum von Modulformen vom Gewicht $k \in \mathbb{N}$ bezüglich dem Extremalität definierbar ist und sei $f^* \in \mathcal{M}$ die extremale Modulform.

Problem: Gibt es eine periodische Punktmenge Λ mit $\Theta_\Lambda^{(1)} = f^*$?

Man beschränke sich hierbei auf den Fall, daß die Exponenten in der q-Entwicklung von f^* ganzzahlig sind, k ein Vielfaches von 4 ist, und $f^*(-1/z) = z^k f^*(z)$ gilt. Dann ist f^* eine Modulform zur *Hecke-Gruppe* $G(2)$, die von den Matrizen

$$S := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \;,\; U := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Unter der Annahme der Existenz der gesuchten periodischen Punktmenge $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ impliziert die Ganzzahligkeit der Exponenten von $f^* = \Theta_\Lambda^{(1)}$, daß $L \subset \frac{1}{2}L^*$ und $u_1, \dots, u_M \in \frac{1}{2}L^*$ gilt. Außerdem ist $n = 2k \equiv 0(8)$. Die Einschränkung $k \equiv 0(4)$ wurde gemacht, um in der Thetatransformationsformel für $\Theta_\Lambda^{(1)}$ den Faktor $i^{\frac{n}{2}} = 1$ zu erzwingen (vgl.Satz 2.17).

Für den Fall, daß es keine periodische Punktmenge Λ mit $\Theta_\Lambda = f^*$ gibt, kann man versuchen, die Nicht-Existenz von Λ mit Hilfe von Grad 2 Modulformen zu beweisen. Dazu nimmt man an, daß die periodische Punktmenge Λ existiert, und daß $\Theta_\Lambda^{(1)} = f^*$ gilt. Dann kann man die Grad 2 Average-Thetareihe $\Theta_\Lambda^{(2)}(Z) = \sum_{T=T^T \geq 0} a_T e^{\pi i \sigma(TZ)}$ zu Λ betrachten. Diese Reihe ist eine Modulform bezüglich einer gewissen Gruppe H und es gilt $\Theta_\Lambda^{(2)}|\Phi = \Theta_\Lambda^{(1)}$. Aus dieser Gleichung und aus den Eigenschaften, daß f^* extremal und $\Theta_\Lambda^{(2)}$ eine Modulform bezüglich H ist, kann man nun Bedingungen an die Koeffizienten a_T ableiten. Sollte dabei einer der Koeffizienten a_T negativ oder nicht rational sein, so erhält man einen Widerspruch zur Existenz von Λ. Für den Fall, daß eine solche Punktmenge Λ existiert, kann man versuchen, auf diese Weise einige Koeffizienten a_T der Reihe $\Theta_\Lambda^{(k)}$ zu berechnen.

In diesem Abschnitt soll ein Verfahren vorgestellt werden, mit dem sich Bedingungen (lineare Gleichungen) an die Fourier-Koeffizienten einer möglichen Siegelschen Modulform F vom Grad 2 mit $F|\Phi = \Theta_\Lambda^{(1)}$ ableiten lassen.

Sei $\Lambda = \cup_{j=1}^M (u_j + L)$ eine periodische Punktmenge mit $N(u_{k_1} - u_{k_2} + x) \in \mathbb{Z}$ für alle $(k, x) \in [M]^2 \times L$, und seien $\Theta_\Lambda^{(1)} = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} b_j q^j$ und $\Theta_\Lambda^{(2)} = \sum_{\substack{T=T^T>0 \\ T \text{ halbganz}}} a_T e^{\pi i \sigma(TZ)}$ die Fourier-Entwicklungen der Average-Reihen. Wegen

$$\Theta_\Lambda^{(2)}|\Phi(z) = \lim_{t\to\infty} \Theta_\Lambda^{(2)}\left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & it \end{pmatrix}\right) = \sum_{\substack{T=T^T>0 \\ T \text{ halbganz}}} a_T \lim_{t\to\infty} e^{\pi i \sigma\left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & it \end{pmatrix}\right)} = \Theta_\Lambda^{(1)}(z)$$

folgt für die Fourierkoeffizienten a_T zu Index-Matrizen $\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ die Beziehung $a_T = b_j$.

Setze $\tilde{T} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$, $I := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $P := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$. Dann folgt aus der Definition von $\Theta_\Lambda^{(2)}$ die Gleichung $\Theta_\Lambda^{(2)}|_k P = \Theta_\Lambda^{(2)}$ und damit auch $a_T = a_{\tilde{T}}$.

Weitere Einschränkungen an die Koeffizienten bekommt man, wenn man versucht, die Modulform $\Theta_\Lambda^{(2)} \in [H, k]$ als Linearkombination einer Basis von $[H, k]$ darzustellen. Hierbei ist das Problem, die Modulgruppe H zu bestimmen.

O.B.d.A. sei Λ eine endliche Vereinigung von Translaten eines geraden Gitters L, s.d. die Verschiebungsvektoren im dualen Gitter liegen. Nach Korollar 2.24 ist $\Theta_\Lambda^{(2)}$ eine Modulform zur Gruppe $\Gamma_{2,1}^{(2)}(l)$ und zu einem Multiplikator χ, wobei l die Stufe des Gitters L bezeichnet. Aus $\Theta_\Lambda^{(1)}|_k S = \Theta_\Lambda^{(1)}$ folgt mit der Transformationsformel

$$\frac{\sqrt{\det L}}{M} i^k \Theta_\Lambda^{(1)}|_k S = \frac{1}{M^2} \sum_{y \in L^*} |B_y|^2 q^{N(y)}$$

durch Vergleich des 0-ten Fourier-Koeffizienten, daß $\det L = i^n \det L = M^2$ gilt, und daher ist wegen $k \equiv 0(4)$ der Charakter χ trivial, vgl. Korollar 2.24.

Man kann nun erstmal keine Aussage über die Stufe l machen, da das Gitter L nicht bekannt ist, und da man die Stufe von L nicht an der Modulgruppe $G(2)$ ablesen kann. In vielen Fällen gilt aber für die Grad 2 Average-Thetareihe die zu $\Theta_\Lambda^{(1)}|_k S = \Theta_\Lambda^{(1)}$ analoge Gleichung

$$\Theta_\Lambda^{(2)}(-Z^{-1}) = (\det Z)^k \cdot \Theta_\Lambda^{(2)}(Z) .$$

Dies ist zum Beispiel dann der Fall, wenn Λ ein unimodulares Gitter oder die Konstruktion-A-Liftung eines binären Codes C ist, der ein $\mathbb{Z}_4$-lineares, selbstduales Urbild unter der Gray-Abbildung hat. Denn nach Satz 1.16 ist dann der Distanzzähler $Dist_2(C)$ invariant unter MacWilliams-Transformation und Einsetzen der Theta-Konstanten $f_0, \dots, f_3$ liefert nach Korollar 3.7 die Behauptung.

Die folgenden Betrachtungen geschehen unter der

Annahme (1): Die periodische Punktmenge Λ sei 2-selbstdual, d.h. es gelte $\Theta_\Lambda^{(2)}|_k S_2 = \Theta_\Lambda^{(2)}$, wobei $S_2 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{smallmatrix}\right)$ gesetzt ist.

Das folgende Beispiel zeigt, daß es nicht möglich ist, diese Annahme aus der Gleichung $\Theta_\Lambda^{(1)}|_k S = \Theta_\Lambda^{(1)}$ zu folgern:

Beispiel 4.14 Sei C der lineare Code aus Beispiel 1.10 und Λ_{C^4} die Konstruktion-A-Liftung von $C^4 \subset \mathbb{F}_2^{40}$. Es gilt $Dist_g(C) = P_g^{(2)}(C)$, $\Theta_{\Lambda_{C^4}}^{(g)} = \vartheta_{\Lambda_{C^4}}^{(g)}$ und

$$\begin{aligned} &Dist_g(C^4)(X) - \tfrac{1}{|C^4|^g} Dist_g(C^4)(X \cdot T_g^{(2)}) \\ &= (Dist_g(C)(X))^4 - \left(\tfrac{1}{|C|^g} Dist_g(C)(X \cdot T_g^{(2)})\right)^4 . \end{aligned}$$

Da der Grad 1 Gewichtszähler $P_1(C) = Dist_1(C)$ invariant unter MacWilliams-Transformation ist, folgt mit Korollar 3.7 $\Theta_{\Lambda_{C^4}}^{(1)}|_{20} S = \vartheta_{\Lambda_{C^4}}^{(1)}|_{20} S = \vartheta_{\Lambda_{C^4}}^{(1)} = \Theta_{\Lambda_{C^4}}^{(1)}$.

Nach Beispiel 1.10 ist $P_2(C) = Dist_2(C)$ nicht invariant unter MacWilliams-Transformation, daher ist nach obiger Gleichung $Dist_2(C^4) = P_2^{(2)}(C^4)$ nicht invariant unter MacWilliams-Transformation, d.h. es gilt $P_2^{(2)}(C^4) \neq P_2^{(2)}((C^4)^\perp)$. Die Theta-Konstanten $f_0, \ldots, f_3$ sind algebraisch unabhängig (vgl. [Rung96]), daher gilt mit Satz 3.1 und Lemma 3.6

$$\Theta^{(2)}_{\Lambda_{(C^4)^\perp}} = \Theta^{(2)}_{\Lambda_{C^4}}|_{20} S_2 \neq \Theta^{(2)}_{\Lambda_{C^4}} \ .$$

Unter der Annahme (1) ist die Grad 2 Average-Reihe $\Theta^{(2)}_\Lambda$ eine Modulform zur Gruppe

$$H_l := \left\langle \Gamma^{(2)}_{2,1}(l), S_2, P \right\rangle \ .$$

Wie eine Rechnung mit dem Programm `Gruppentest.mag` zeigt, sind die Gruppen H_l für $l \in \mathbb{N}$ nicht alle identisch. So sind z.B. die Gruppen H_2, H_4 und H_6 paarweise verschieden. Setze $N_1 := \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $N_2 := \left(\begin{smallmatrix} 2E & 0 \\ 0 & E \end{smallmatrix}\right)$ und $\tilde{H}_l := N_2^{-1} \cdot H_l \cdot N_2$. Dann ist $\Theta^{(2)}_\Lambda|_k N_2$ eine Modulform vom Gewicht k zur Gruppe $\tilde{H}_l$. Für Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \tilde{\Gamma}_{1,0}(4) := \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \Gamma_{1,0}(4)/\{\pm E\}$$

(vgl. [Kob84]) und $(\lambda, \mu) \in (l\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ enthält die Gruppe $\tilde{H}_l$ die Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mu \\ \lambda & 1 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Diese Behauptung prüft man für die beiden Erzeuger von $\tilde{\Gamma}_{1,0}(4)$ direkt nach und berücksichtigt, daß die Struktur der Matrizen der linken Form unter Matrixmultiplikation erhalten bleibt (vgl. [EiZa85]). Die Matrizen der rechten Form sind für $(\lambda, \mu) \in (l\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ Elemente der Untergruppe $N_2^{-1} \cdot \Gamma^{(2)}_{2,1}(l) \cdot N_2$ von $\tilde{H}_l$.

Sei $Z = \left(\begin{smallmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{smallmatrix}\right)$ und

$$\Theta^{(2)}_\Lambda|_k N_2(Z) = \sum_{m \in \mathbb{N}_0} \varphi_m(z_1, z_2) \cdot e^{2\pi i m z_3}$$

die Fourier-Jacobi-Zerlegung von $\Theta^{(2)}_\Lambda|_k N_2$. Nach [EiZa85] sind die Koeffizienten φ_m von $\Theta^{(2)}_\Lambda|_k N_2$ invariant unter der $.|_{k,m} A$ - bzw. $.|_m(\lambda, \mu)$ -Operation für Matrizen $A \in \tilde{\Gamma}_{1,0}(4)$ und Tupel $(\lambda, \mu) \in (l\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$.

Gesucht ist eine geeignete Gruppe, bezüglich der die Koeffizienten φ_m Jacobiformen sind. Allerdings operiert für allgemeines l die Gruppe $\tilde{\Gamma}_{1,0}(4)$ nicht auf dem Gitter $l\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Definiere $d := ggT(4, l)$.

Behauptung: Die Koeffizienten φ_m sind invariant unter der $.|_{k,m}(A, (\lambda, \mu))$-Operation von $\tilde{\Gamma}_{1,0}(4) \ltimes (d\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$.

In $SL_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$ gilt

$$(A_1, (\lambda_1, \mu_1)) \cdot (A_2, (\lambda_2, \mu_2)) = (A_1A_2, (\lambda_1, \mu_1)A_2 + (\lambda_2, \mu_2)) \ .$$

Wähle $\lambda_2 := 0$, $A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Zu $A \in \tilde{\Gamma}_{1,0}(4)$ setze $A_1 := A \cdot A_2^{-1}$. Sei $(\lambda, \mu) \in (d\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$, dann existiert ein $(\lambda_1, \mu_1) \in (l\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ mit $\lambda = \lambda_1 + 4\mu_1$. Setze $\mu_2 := \mu - \mu_1$. Dann sind für $j = 1, 2$ die Tupel $(A_j, (\lambda_j, \mu_j)) \in \tilde{\Gamma}_{1,0}(4) \times ((l\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z})$ und es gilt

$$(A_1, (\lambda_1, \mu_1)) \cdot (A_2, (\lambda_2, \mu_2)) = (A, (\lambda, \mu)).$$

Die Fourier-Jacobi-Koeffizienten φ_m sind invariant unter der $.|_{k,m}(A_j, (\lambda_j, \mu_j))$-Operation und daher auch invariant unter $.|_{k,m}(A, (\lambda, \mu))$. Nach Satz 2.8 ist φ_m eine Jacobiform vom Gewicht k und Index m zur Gruppe $\tilde{\Gamma}_{1,0}(4) \ltimes ((d\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z})$.

Man erhält folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
{[H_l, k]} \arrow[r, ".|_k N_2"] \arrow[d, dashed, "\Phi"'] & {[\tilde{H}_l, k]} \arrow[d, dashed, "\Phi"'] \arrow[dr, "\mathcal{J}"] & \\
{[G(2), k]} \arrow[r, ".|_k N_1"] & {[\Gamma_{1,0}(4)^*, k]} & \Pi_{m \geq 0} J_{k,m}(\tilde{\Gamma}_{1,0}(4) \ltimes ((d\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}))
\end{tikzcd}$$

Dabei ordnet die Abbildung $\mathcal{J}$ einer Modulform $F \in [\tilde{H}_l, k]$ die Folge ihrer Fourier-Jacobi-Koeffizienten $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ zu. Die vertikalen Pfeile sind gestrichelt, da es sich hierbei nicht um Abbildungen zwischen den Räumen der Modulformen handelt, sondern lediglich verdeutlicht werden soll, daß für die Grad 2 Average-Thetareihen $\Theta_\Lambda^{(2)}$ bzw. $\Theta_\Lambda^{(2)}|_k N_2$ die Gleichungen $\Theta_\Lambda^{(2)}|\Phi = \Theta_\Lambda^{(1)}$ bzw. $\Theta_\Lambda^{(2)}|_k N_2|\Phi = \Theta_\Lambda^{(1)}|_k N_1$ gelten.

Zu $\nu \in \mathbb{N}_0$ bezeichne $\mathcal{D}_\nu$ wie in [EiZa85] die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}_{2\nu} : J_{k,m}(\tilde{\Gamma}(4)_{1,0} \ltimes ((d\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z})) & \longrightarrow & [\tilde{\Gamma}_{1,0}(4), k + 2\nu] = [\Gamma_{1,0}(4), k + 2\nu] \quad , \\ \varphi & \mapsto & \mathcal{D}_{2\nu}\varphi \end{array}$$

und es sei $P_{2\nu}^{(k-1)}$ das 2ν*-te Gegenbauerpolynom*

$$P_{2\nu}^{(k-1)}(r, n) := \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^\mu \frac{(2\nu)!}{\mu!(2\nu - 2\mu)!} \cdot \frac{k + 2\nu - \mu - 2}{k + \nu - 2} r^{2\nu-2\mu} n^\mu \quad .$$

Dann ist für eine Jacobiform $\varphi(z_1, z_2) = \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z} \\ r^2\leq 4nm}} c(n,r)q^n\zeta^r$ die Funktion

$$\mathcal{D}_{2\nu}\varphi := \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{\substack{r\in\mathbb{Z} \\ r^2\leq 4nm}} P_{2\nu}^{(k-1)}(r, nm)c(n,r) \right) q^n$$

eine Modulform, und für $\nu > 0$ ist $\mathcal{D}_{2\nu}\varphi$ eine Spitzenform, siehe [EiZa85], Theorem 3.1.

Nun kann man das in [BaVe01] beschriebene Verfahren benutzen, das dort auf Jacobi-Thetareihen angewendet wird. Sei m fest gewählt. Für den Fourier-Jacobi-Koeffizienten φ_m von $\Theta_\Lambda^{(2)}|_k N_2$ ist $\mathcal{D}_{2\nu}\varphi_m$ eine Modulform vom Gewicht $k+2\nu$ zur Gruppe $\Gamma_{1,0}(4)$. Nach Beispiel 4.7 gilt für die graduierte Algebra der Modulformen

$$\bigoplus_{h\in 2\mathbb{N}_0} [\Gamma_{1,0}(4), k+2\nu] = \mathbb{C}[g_1, g_2] \ ,$$

insbesondere ist $\{\beta_j^{(\nu)} := g_1^{k/2+\nu-j} g_2^j \mid j = 0, \ldots, k/2+\nu\}$ eine Basis von $[\Gamma_{1,0}(4), k+2\nu]$, und $\{\beta_1^{(\nu)}, \ldots, \beta_{k/2+\nu}^{(\nu)}\}$ ist eine Basis von $[\Gamma_{1,0}(4), k+2\nu]_0$.
Das Ziel ist nun, lineare Gleichungen in den Koeffizienten $c(n,r)$ von φ_m zu erhalten, denn der Koeffizient $c(n,r)$ stimmt für $T = \left(\begin{smallmatrix} n & r \\ r & m \end{smallmatrix}\right)$ mit dem Fourierkoeffizienten a_T aus $\Theta_\Lambda^{(2)}|_k N_2$ überein.

$\mathcal{D}_{2\nu}\varphi_m$ ist eine Modulform zur $\Gamma_{1,0}(4)$, insbesondere existiert eine Darstellung $\mathcal{D}\varphi_m = \sum_{j=0}^{k/2+\nu} \lambda_j^{(\nu)}\beta_j^{(\nu)}$ mit geeigneten Koeffizienten $\lambda_0^{(\nu)}, \ldots, \lambda_{k/2+\nu}^{(\nu)} \in \mathbb{C}$. Falls $\nu > 0$ ist, gilt $\lambda_0^{(\nu)} = 0$. Seien

$$\beta_j^{(\nu)} = \sum_{n\geq 0} b_{j,n}^{(\nu)} q^n \text{ und } \mathcal{D}_{2\nu}\varphi_m = \sum_{n\geq 0} \tilde{b}_n^{(\nu)} q^n$$

die q-Entwicklungen von $\beta_j^{(\nu)}$ bzw. $\mathcal{D}_{2\nu}\varphi_m$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Gleichung $\tilde{b}_n^{(\nu)} = \sum_{j=0}^{k/2+\nu} \lambda_j^{(\nu)} b_{j,n}^{(\nu)}$, und nach Konstruktion ist

$$\tilde{b}_n^{(\nu)} = \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z} \\ r^2\leq 4nm}} P_{2\nu}^{(k-1)}(r, nm)c(n,r) \ .$$

Für $\nu = 0, \ldots, \nu_{max}$ und $n = 0, \ldots, n_{max}$ erhält man ein lineares Gleichungssystem

$$(*) \qquad \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z} \\ r^2\leq 4nm}} P_{2\nu}^{(k-1)}(r, nm)c(n,r) - \sum_{j=0}^{k/2+\nu} \lambda_j^{(\nu)} b_{j,n}^{(\nu)} = 0$$

in den Unbestimmten $(c(n,r))_{\substack{n=0,\ldots,n_{max}\\ r\in\mathbb{Z},\ r^2\le 4nm}}$ und $\left(\lambda_j^{(\nu)}\right)_{\substack{j=0,\ldots,k/2+\nu\\ \nu=0,\ldots,\nu_{max}}}$ mit noch zu bestimmenden Parametern ν_{max}, n_{max}. Dabei gilt $\lambda_0^{(\nu)} = 0$ für $\nu > 0$. Indem man ν_{max} vergrößert, bekommt man mehr Gleichungen in den Variablen $(c(n,r))_{\substack{n=0,\ldots,n_{max}\\ r\in\mathbb{Z},\ r^2\le 4nm}}$, aber man erhöht auch gleichzeitig die Zahl der Unbekannten $\lambda_j^{(\nu)}$. Indem man n_{max} vergrößert, fügt man Gleichungen mit neuen Unbekannten $c(n,r)$ aber ohne neue Variablen $\lambda_j^{(\nu)}$ hinzu. Eliminiert man im Gleichungssystem $(*)$ die Unbekannten $\left(\lambda_j^{(\nu)}\right)_{\substack{j=0,\ldots,k/2+\nu\\ \nu=0,\ldots,\nu_{max}}}$, so erhält man lineare Gleichungen in den Koeffizienten $(c(n,r))_{\substack{n=0,\ldots,n_{max}\\ r\in\mathbb{Z},\ r^2\le 4nm}}$. Damit ist gemeint, daß man zuerst nach den Variablen $\lambda_j^{(\nu)}$ auflöst. Auf diese Weise erhält man die $\lambda_j^{(\nu)}$ in Abhängigkeit der Unbekannten $c(n,r)$. Einsetzen in das Gleichungssystem $(*)$ liefert ein neues Gleichungssystem $(**)$ in den Unbekannten $c(n,r)$.

Das Ziel ist, im Gleichungssystem $(**)$ möglichst viele linear unabhängige Gleichungen in den Unbekannten $c(n,r)$ zu erhalten.

Bestimmung der Parameter n_{max} und ν_{max}:

Die Parameter n_{max} und ν_{max} sollen nun so bestimmt werden, daß das Gleichungssystem $(*)$ mehr Gleichungen als Unbekannte $c(n,r)$ und $\lambda_j^{(\nu)}$ besitzt. Das ist immer möglich, jedoch werden diese Gleichungen in der Regel linear abhängig sein.

Es gilt $c(n,r) = c(n,-r)$, denn für geeignetes $k \in [M]^4$ und geeignete $x, y \in L$ ist $r = 2(u_{k_1} - u_{k_2} + x, u_{k_3} - u_{k_4} + y)$. Identifiziert man in $(*)$ die Variablen $c(n,r)$ und $c(n,-r)$, so ist für jedes n die Anzahl der Variablen $c(n,r)$ im Gleichungssystem gleich $1 + [\sqrt{4nm}]$. Wenn man mit den ersten (n_0+1) Fourier-Koeffizienten von $\mathcal{D}_{2\nu}\varphi_m$ bzw. $\beta_j^{(\nu)}$ rechnen möchte, um Gleichungen in den Variablen $c(n,r)$ für $n = 0, \ldots, n_0$ zu bekommen, dann erhält man im Gleichungssystem $(*)$ $\mathcal{V}(n_0) := \sum_{n=0}^{n_0}([\sqrt{4nm}] + 1)$ Unbekannte $c(n,r)$. Setze $g_0 := n_0 - k/2$ und für $\nu > 0$

$$g_\nu := n_0 - \dim_C[\Gamma_{1,0}(4), k+2\nu]_0 = n_0 - \frac{k}{2} - \nu \quad .$$

Für jedes ν mit $g_\nu > 0$ erhält man im Gleichungssystem $(*)$ neue Gleichungen in den Unbestimmten $c(n,r)$, $n = 0, \ldots, n_0$, $r^2 \le 4nm$, und $\lambda_0^{(\nu)}, \ldots, \lambda_{\frac{k}{2}+\nu}^{(\nu)}$. Aufgrund von $g_\nu > 0$ fügt man dem Gleichungssystem $(**)$ nach Elimination der Variablen $\lambda_0^{(\nu)}, \ldots, \lambda_{\frac{k}{2}+\nu}^{(\nu)}$ also g_ν (neue) Gleichungen hinzu, deren einzige Unbestimmte nur die Variablen $c(n,r)$ sind.

Man kann nun ν_{max} und n_{max} so wählen, daß $\sum_{\nu=0}^{\nu_{max}} g_\nu > \mathcal{V}(n_0)$ gilt. Dazu starte man bei $n_0 = 1$, berechne zu diesem n_0 das zugehörige $\nu_{max} = n_0 - k/2$

und teste, ob die Ungleichung erfüllt ist. Falls nicht, erhöhe n_0 und iteriere. Auf diese Weise erhält man mehr als $\mathcal{V}(n_{max})$ (i. a. linear abhängige) Gleichungen in den $\mathcal{V}(n_{max})$ Unbestimmten $c(n,r)$.

Weitere Bedingungen an die Koeffizienten $c(n,r)$ ergeben sich aus der zweiten Transformationsformel für Jacobiformen, $\varphi_m|_m(\lambda,\mu) = \varphi_m$ für $(\lambda,\mu) \in (d\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$. Wie im Beweis von Theorem 2.2. in [EiZa85] ist für $(\lambda,\mu) \in (d\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ die Gleichung $\varphi_m|_m(\lambda,\mu) = \varphi_m$ äquivalent zu

$$c(n,r) = c(n + r\lambda + m\lambda^2, r + 2m\lambda)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \mathbb{Z}$ mit $r^2 \leq 4nm$. Es gilt also $c(n,r) = c(n',r')$, falls $r \equiv r'(2md)$ und $4n'm - r'^2 = 4nm - r^2$. Diese Gleichungen hängen von d und damit von l ab, jedoch sind nur noch die drei Fälle $d = 1,2$ oder 4 zu unterscheiden. Man hat also durch die Annahme (1) die Unkenntnis der Stufe l auf drei Fälle reduziert.

Alle Gleichungen hat man unter der Annahme $\Theta_\Lambda^{(2)}|_k S_2 = \Theta_\Lambda^{(2)}$ erhalten. Wenn nun diese Annahme durch die

Annahme (2): Es existiert eine periodische Punktmenge $\Lambda = \cup_{j=1}^M (u_j + L)$, L gerades Gitter der Stufe $l = 2$, mit $\Theta_\Lambda^{(1)} = f^*$.

ersetzt wird, so ergibt sich folgendes:

$\Theta_\Lambda^{(2)}$ ist eine Modulform zur Gruppe $\Gamma_2(2)$ und $\Theta_\Lambda^{(2)}|_k N_2$ ist eine Modulform zur Gruppe $\tilde{H} := N_2^{-1} \cdot \Gamma_2(2) \cdot N_2$. Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mu \\ \lambda & 1 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sind für $(\lambda,\mu) \in (2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ in $\tilde{H}$ enthalten. Man erhält also wieder eine Abbildung (beachte $ggT(4,l) = 2$)

$$\mathcal{J} : [\tilde{H}, k] \longrightarrow \Pi_{m \geq 0} J_{k,m}(\tilde{\Gamma}_{1,0}(4) \ltimes ((2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z})) \ ,$$

die einer Modulform die Folge ihrer Fourier-Jacobi-Koeffizienten zuordnet. Für festes m läßt sich wieder die Abbildung

$$\mathcal{D}_{2\nu} : J_{k,m}(\tilde{\Gamma}(4)_{1,0} \ltimes ((d\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z})) \longrightarrow [\tilde{\Gamma}_{1,0}(4), k + 2\nu] = [\Gamma_{1,0}(4), k + 2\nu]$$

anwenden, und man erzeugt auch hier dasselbe Gleichungssystem $(*)$. Weiterhin gilt $c(n,r) = c(n',r')$, falls $r \equiv r'(4m)$ und $4n'm - r'^2 = 4nm - r^2$ gilt. Insgesamt führt die Annahme (2) auf den Fall der Annahme (1) für $d = 2$.

Leider erweist sich diese Methode in der Praxis als nicht ausreichend. In vielen Anwendungen (siehe z.B. Kapitel 5, Bemerkung 5.14) ist das Gleichungssystem $(**)$ in den Unbestimmten $c(n,r)$ nicht eindeutig lösbar. Dann kann mit dieser Methode keine eindeutig bestimmte Siegelsche Modulform F mit $F|\Phi = f^*$ konstruiert werden, sondern nur ein Lösungsraum. In diesem Vektorraum von Modulformen ist dann die Nicht-Existenz einer Modulform mit nicht-negativen Koeffizienten a_T mit beschränktem Nenner nachzuweisen, um den gewünschten Widerspruch zu erhalten; bzw. es ist der Kegel aller Modulformen mit nicht-negativen Koeffizienten mit beschränktem Nenner zu bestimmen. Falls die gesuchte periodische Punktmenge Λ existiert, muß die Grad 2 Average-Thetareihe $\Theta_\Lambda^{(2)}$ in diesem Kegel liegen.

Trotz alledem bietet das hier vorgestellte Verfahren die Möglichkeit, überhaupt Bedingungen an die Koeffizienten einer möglichen Grad 2 Average-Thetareihe zu finden.

5 Die extremale Modulform vom Gewicht 8 zur Hecke-Gruppe $G(2)$

In diesem Kapitel soll die Frage untersucht werden, ob eine bestimmte periodische Kugelpackung im 16-dimensionalen euklidischen Raum mit vorgegebener Average-Thetareihe existiert. Aus dieser Reihe und ihrem Transformationsverhalten lassen sich Eigenschaften dieser hypothetischen Kugelpackung ableiten. Insbesondere ist dann die Dichte dieser Packung allein durch ihre Average-Thetareihe bestimmt. Die Fragestellung ist deshalb von besonderem Interesse, weil eine solche Kugelpackung dichter wäre als jede zur Zeit bekannte Kugelpackung in Dimension 16.

Betrachte den $(\mathbb{R}^{16}, (.,.))$ zusammen mit dem Standardskalarprodukt $(x,y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$. Um eine dichte Kugelpackung zu konstruieren, kann man sich zunächst einmal auf den einfachsten Fall beschränken, nämlich den, daß die Kugelmittelpunkte auf einem Gitter liegen und daß dieses Gitter sogar unimodular ist. Für die center-density einer solchen Kugelpackung gilt dann $\delta = \frac{(\min(L))^8}{2^{16}}$.

Im Fall eines geraden unimodularen Gitters L ist die Thetareihe ϑ_L eine Modulform vom Gewicht 8 zur vollen Modulgruppe $SL_2(\mathbb{Z})$. Der Raum $[SL_2(\mathbb{Z}), 8]$ ist eindimensional, [Ebe02]. Es gibt bis auf Isometrie genau zwei verschiedene 16-dimensionale gerade unimodulare Gitter, nämlich $E_8 \times E_8$ und $\tilde{D}_{16}^{+}$. Deren Thetareihen stimmen also mit der extremalen Modulform in $[SL_2(\mathbb{Z}), 8]$ überein.

Betrachtet man auch ungerade unimodulare Gitter, so sind die Thetareihen Modulformen vom Gewicht 8 zur Hecke-Gruppe $G(2)$. Diese Gruppe wird von den Matrizen S und U der Substitutionen $z \mapsto -1/z$ bzw. $z \mapsto z+2$ erzeugt, $S := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $U := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Der Raum $[G(2), 8]$ ist dreidimensional, siehe [ConSlo99]. Die extremale Modulform in $[G(2), 8]$ hat die Form

$$\Theta^*(z) = 1 + 7680q^3 + 4320q^4 + 276480q^6 + 61440q^6 + \dots \quad .$$

Wenn es nun ein unimodulares Gitter L mit $\vartheta_L = \Theta^*$ gäbe, dann würde $\min(L) = 3$ gelten, und daher für die center-density $\delta = 3^8/2^{16} = 0.1001129150$. Die zur Zeit dichteste bekannte Kugelpackung im $\mathbb{R}^{16}$ ist durch das 16-dimensionale *Barnes-Wall-Gitter* BW_{16} gegeben. Für die center-density der zugehörigen Kugelpackung gilt $\delta_{BW_{16}} = 1/16 = 0,0625$. Mit dem gesuchten Gitter L könnte man also dichter packen. Nach [ConSlo99], Theorem 1, p.441, existiert aber kein unimodulares Gitter L mit $\vartheta_L = \Theta^*$.

Beschränkt man sich bei der Suche nicht nur auf unimodulare Gitter, so kann man nach einem isodualen Gitter L mit dieser Thetareihe fragen. Dieses Gitter würde ebenfalls eine Kugelpackung mit center-density $\delta = 0,1001129150$ liefern. Quebbemann hat jedoch in [Queb98] gezeigt, daß es überhaupt kein Gitter gibt, dessen Thetareihe mit Θ^* übereinstimmt. Dazu überlegt man sich folgendes:

Die Gruppe $G(2)$ ist zur Fricke-Gruppe $\Gamma_{1,0}(4)^*$ der Stufe 4 über die Matrix $T := \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ konjugiert, d.h. es gilt $G(2) = T \cdot \Gamma_{1,0}(4)^* \cdot T^{-1}$. Die extremale Modulform f^* in $[\Gamma_{1,0}(4)^*, 8]$ ist durch $f^*(z) = (\Theta^*|_8 T)(z) = \Theta^*(2z)$ gegeben. Die q^2-Entwicklung von f^* stimmt also mit der q-Entwicklung von Θ^* überein. Insbesondere sind die Koeffizienten in der q^2-Entwicklung von f^* genau dann ganzzahlig und nicht-negativ, wenn es die Koeffizienten in der q-Entwicklung von Θ^* sind. Außerdem existiert genau dann ein Gitter $L \subset \mathbb{R}^{16}$ mit $\vartheta_L = \Theta^*$, wenn ein Gitter $\tilde{L} \subset \mathbb{R}^{16}$ mit $\vartheta_{\tilde{L}} = f^*$ existiert (dann gilt nämlich $\tilde{L} = \sqrt{2}L$). In [Queb98] wird gezeigt, daß es kein Gitter $\tilde{L}$ gibt, dessen Thetareihe mit f^* übereinstimmt.

Bemerkung 5.1 Sei $L \subset \mathbb{R}^{2k}$ ein gerades Gitter der Stufe l. Zu $n \in \mathbb{N}$ setze $M_n := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt für jedes $l' \in \mathbb{N}$ mit $\vartheta_L|_k M_{l'} = \vartheta_L$ die Beziehung $l \mid l'$.

Beweis : Schreibe $l' = \kappa l + r$, $0 \leq r < l$ (Division mit Rest). Dann gilt $M_{l'} = M_l^\kappa \cdot M_r$. Da l die Stufe des Gitters L ist, folgt $\vartheta_L|_k M_l = \vartheta_L$. Damit erhält man aus $\vartheta_L|_k M_{l'} = \vartheta_L$ die Gleichung

$$\vartheta_L|_k M_r = \vartheta_L \ .$$

Mit $\tilde{M}_r := \left(\begin{smallmatrix} 1 & -r' \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gilt $M_r = S\tilde{M}_r S^{-1}$. Daher folgt aus $\vartheta_L|_k M_r = \vartheta_L$ unter Berücksichtigung der Thetatransformationsformel $\vartheta_L|_k S = i^{-k}\sqrt{\det L}^{-1}\vartheta_{L^*}$ die Gleichung $\vartheta_{L^*}|_k\tilde{M}_r = \vartheta_{L^*}$. Sei $\vartheta_{L^*}(z) = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} a_j q^{2j/l}$, $q = e^{\pi i z}$, die q-Entwicklung von ϑ_{L^*}. Da nun für alle $z \in \mathbb{H}$ die Gleichung $\vartheta_{L^*}(z - r) = \vartheta_{L^*}(z)$ gilt, folgt

$$0 = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} a_j(1 - e^{-2\pi i j r/l})q^{2j/l} \ .$$

Für alle j mit $a_j \neq 0$ ist daher $1 - e^{-2\pi i j r/l} = 0$. Die Gleichung $e^{-2\pi i j r/l} = 1$ ist äquivalent zur Aussage $l|jr$.

Sei $\frac{\tilde{r}}{\tilde{l}} = \frac{r}{l}$ der gekürzte Bruch mit $\tilde{l} > 0$. Dann gilt $0 \leq \tilde{r} < \tilde{l}$. Für alle j mit $a_j \neq 0$ gilt $\tilde{l}|j$.

Sei $b_1, \ldots, b_{2k}$ eine Basis von L^* und $G = ((b_\nu, b_\mu))_{\nu,\mu\in[2k]^2}$ die Gram-Matrix von L^* bezüglich der gegebenen Basis. Für jedes $\nu \in [2k]$ existiert ein $j_\nu \in \mathbb{N}$ mit $N(b_\nu) = 2\frac{j_\nu}{l}$. Insbesondere ist $a_{j_\nu} \neq 0$. Es folgt

$$\frac{l}{\tilde{l}}N(b_\nu) = 2\frac{j_\nu}{\tilde{l}} \in 2\mathbb{Z} \ .$$

Für jedes Tupel $(\nu,\mu) \in [2k]^2$ existiert ein $j_{\nu,\mu} \in \mathbb{N}_0$ mit $N(b_\nu + b_\mu) = 2\frac{j_{\nu,\mu}}{l}$. Es folgt

$$\frac{l}{\tilde{l}}(N(b_\nu) + N(b_\mu) + 2(b_\nu, b_\mu)) = 2\frac{j_{\nu,\mu}}{\tilde{l}} \in 2\mathbb{Z}\,.$$

Dies zeigt, daß $\frac{l}{\tilde{l}}G$ eine gerade Matrix ist. l ist aber die Stufe des Gitters L, d.h. die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft. Es folgt $\frac{l}{\tilde{l}} = l$, also $\tilde{l} = 1$ und $\tilde{r} = 0$. □

Mit dieser Bemerkung folgt, daß man alle Möglichkeiten für die Stufe l des Gitters an der Modulgruppe ablesen kann. Ein gerades Gitter $\tilde{L}$ mit $\vartheta_{\tilde{L}} = f^*$ hätte also die Stufe 1,2 oder 4 gehabt.

Die Frage ist nun, ob vielleicht eine periodische Punktmenge $\Lambda = \cup_{j=1}^{M}(u_j + L)$ mit $\Theta_\Lambda = \Theta^*$ existiert. Eine solche Punktmenge Λ würde ebenfalls eine besonders dichte Kugelpackung $\mathcal{P}$ liefern:

Wegen $\Theta_\Lambda|_8 S = \Theta_\Lambda$, würde dann aus der Transformationsformel

$$\frac{\sqrt{\det L}}{M}\Theta_\Lambda|_8 S = \frac{1}{M^2}\sum_{y\in L^*}|B_y|^2 q^{N(y)}$$

durch Vergleich des 0-ten Fourierkoeffizienten $\frac{\sqrt{\det L}}{M}\cdot 1 = \frac{1}{M^2}|B_0|^2$ folgen. Mit $B_0 = \sum_{k=1}^{M} e^{2\pi i(0,u_k)} = M$ erhält man $\sqrt{\det L} = M$ und für die center-density ergibt sich $\delta_{\mathcal{P}} = \left(\frac{\sqrt{\min(L)}}{2}\right)^{16} = \frac{3^8}{2^{16}}$. Das ist derselbe Wert wie für die (nicht existente) Gitterpackung.

Allerdings können die Kugeln nicht beliebig dicht gepackt sein; es gibt Schranken für die Dichte bzw. die maximale Kußzahl von Kugelpackungen. Notwendige Bedingungen für die Existenz der gesuchten periodischen Punktmenge Λ (bzw. Kugelpackung $\mathcal{P}$) mit $\Theta_\Lambda = \Theta^*$ sind daher

1. $\delta_{\mathcal{P}}$ darf den Wert der besten zur Zeit bekannten Dichte-Schranke in Dimension 16 nicht überschreiten.

2. Die Kußzahl τ der Packung $\mathcal{P}$ darf den Wert der besten zur Zeit bekannten Kußzahl-Schranke in Dimension 16 nicht überschreiten.

3. Die Fourierkoeffizienten in Θ_Λ müssen nicht-negative rationale Zahlen mit beschränktem Nenner sein.

Die Dichte-Schranke (Rogers-Schranke) liefert in Dimension 16 einen Wert für die center-density von $\delta = 0,11774$ (siehe Table 1.2. in [ConSlo99]), und die zur

Zeit neueste Schranke von Cohn und Elkies liegt in Dimension 16 bei $\delta = 0,10738$ (siehe Table 3 in [CoEl03]). Der Wert $\delta_{\mathcal{P}} = 3^8/2^{16} = 0,10011\ldots$ der gesuchten Packung $\mathcal{P}$ liegt unterhalb der beiden Schranken. Die Schranke für die maximale Kußzahl wird ebenfalls nicht überschritten, in Dimension 16 liegt der Wert bei 8313, siehe Table 1.5. in [ConSlo99].

Betrachtet man die Anfangsstücke der q-Entwicklungen von Θ^* und der Thetareihe des Barnes-Wall-Gitters BW_{16}

$$\vartheta_{BW_{16}}(z) = 1 + 4320q^4 + 61440q^6 + 522720q^8 + \ldots\ ,$$

so erkennt man, daß die Koeffizienten zu geraden Indices in der Entwicklung von Θ^* mit den Koeffizienten in $\vartheta_{BW_{16}}$ übereinstimmen. Daher wurde in [Slo77] vermutet, daß geeignete $M = \sqrt{\det BW_{16}} = \sqrt{256} = 16$ Translate von BW_{16} eine periodische Punktmenge liefern, deren Average-Thetareihe mit Θ^* übereinstimmt. Jedoch besagt Theorem 14 in [ConSlo99], p. 190, daß für das Minimum jeder periodischen Punktmenge Λ die Abschätzung $\min(\Lambda) < 3$ gilt, sofern Λ aus M Translaten des Barnes-Wall-Gitters mit $M \geq 10$ besteht. Dieses Theorem wird dort allerdings nicht bewiesen. Die Richtigkeit der Aussage kann mit dem Programm `Keine10Translate.mag` verifiziert werden. Ein theoretischer Beweis, der auf einer Idee von Rudolf Scharlau beruht, ist im Anhang A angegeben. In [ConSlo99] wird vermutet, daß es keine periodische Punktmenge Λ mit $\Theta_\Lambda = \Theta^*$ gibt.

Im folgenden wird eine Formel zur Berechnung der Koeffizienten in der q-Entwicklung von Θ^* angegeben und es wird bewiesen, daß alle Koeffizienten zu geraden Indices mit den Koeffizienten der Thetareihe des Barnes-Wall-Gitters übereinstimmen. Insbesondere wird gezeigt, daß die Koeffizienten der Modulform Θ^* nicht-negative ganze Zahlen sind. Setze $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$.

Satz 5.2 *Sei $\Theta^*(z) = \sum_{n\geq 0} a_n q^n$ die q-Entwicklung von Θ^*. Dann gilt für die Koeffizienten a_n*

$$a_n = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 480 \cdot \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3+m_4=2n \\ m1,\ldots,m_4 \equiv 1(2)}} \prod_{j=1}^4 \sigma_1(m_j) & , n \equiv 1(2) \\ 480 \cdot \left(\sigma_7(n/2) - \sum_{\substack{m_1+\ldots+m_4=2n \\ m_1\, ldots, m_4 \equiv 1(2)}} \prod_{j=1}^4 \sigma_1(m_j) \right) & , n \equiv 0(2), n > 0 \end{cases}$$

und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $a_n \geq 0$. Insbesondere sind die Koeffizienten in der q-Entwicklung von Θ^* ganzzahlig und nicht-negativ.

Zum Beweis des Satzes überlegt man sich folgendes: Nach [ConSlo99] gilt

$$\bigoplus_{k\in 2\mathbb{N}_0} [G(2), k, \chi^k] = \mathbb{C}[\theta_3^4(z), \Delta_8(z)]\ .$$

Dabei ist $\chi : G(2) \longrightarrow \mathbb{C}$ der durch $\chi(U) = 1$ und $\chi(S) = i$ gegebene Charakter. Die Modulformen θ_3 und Δ_8 sind durch $\theta_3(z) = 1 + 2\sum_{m\geq 1} q^{m^2}$ und

$$\Delta_8(z) = \frac{1}{16}\theta_2(z)^4\theta_4(z)^4 = q - 8q^2 + 28q^3 - 64q^4 + 126q^5 - 224q^6 + \ldots \in [G(2), 4, \chi]$$

definiert, wobei in der Darstellung von $\Delta_8(z)$ wie in [ConSlo99] die Reihen

$$\theta_2(z) = 2\sum_{m\geq 1} q^{(m+1/2)^2} \quad \text{und} \quad \theta_4(z) = 1 + 2\sum_{m\geq 1}(-q)^{m^2}$$

benutzt werden. Für den Raum der Modulformen vom Gewicht 8 gilt $[G(2), 8, \chi] = [G(2), 8]$, und nach Theorem 7 in [ConSlo99], p.187, folgt $\dim_{\mathbb{C}}[G(2), 8] = 3$. Die Reihen

$$\begin{aligned}
\theta_3^{16}(z) &= 1 + 32q + 480q^2 + 4480q^3 + 29152q^4 + \ldots \\
\theta_3^{8}(z)\Delta_8(z) &= q + 8q^2 + 12q^3 - 64q^4 - \ldots \\
\Delta_8^2(z) &= q^2 - 16q^3 + 120q^4 - \ldots
\end{aligned}$$

sind linear unabhängig in $[G(2), 8]$, bilden also eine Basis. Es gilt

$$\Theta^* = \theta_3^{16} - 32\theta_3^8\Delta_8 - 224\Delta_8^2 \ .$$

Daher sind die Koeffizienten von Θ^* ganzzahlig, weil auch die Koeffizienten in den Reihen $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ ganzzahlig sind. Bleibt zu zeigen, daß alle Koeffizienten nichtnegativ sind und die in Satz 5.2 angegebene Formel erfüllen.

Bezeichne zu $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, mit E_{2k} die *Eisensteinreihe vom Gewicht* $2k$,

$$E_{2k}(z) := 1 - \frac{4k}{B_{2k}}\sum_{n\geq 1}\sigma_{2k-1}(n)q^{2n} \ .$$

Dabei ist B_{2k} die $2k$-te Bernoulli-Zahl. Die Bernoulli-Zahlen erhält man aus der Darstellung $\frac{x}{e^x-1} = \sum_{i\geq 0}\frac{B_i}{i!}x^i$. Die Eisensteinreihe E_{2k} ist eine Modulform vom Gewicht $2k$ zur vollen Modulgruppe $SL_2(\mathbb{Z})$ und trivialem Multiplikator. Wie in [Ser78], bemerkt, gilt für die Eisensteinreihe E_4 die Gleichung $E_4 = \theta_3^8 - 16\Delta_8$. Es folgt

$$\Theta^*(z) = E_4^2(z) - 480\Delta_8^2(z) \ .$$

Benötigt werden nun Formeln für die Koeffizienten von E_4 und Δ_8. Dazu ist es jetzt am bequemsten, im Vektorraum $[\Gamma_{1,0}(2), 8]$ zu rechnen.

Bemerkung 5.3 Die Gruppen $G(2)$ und $\Gamma_{1,0}(2)$ sind zueiander konjugiert, genauer gilt:

$$\Gamma_{1,0}(2) = N^{-1}\cdot G(2)\cdot N \ , \ \text{mit } N := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Beweis: Wie man nachrechnet, gilt $N^{-1} \cdot S \cdot N = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{smallmatrix}\right) =: \tilde{S}$ und $N^{-1} \cdot U \cdot N = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) =: \tilde{U}$. $\tilde{S}$ und $\tilde{U}$ erzeugen $\Gamma_{1,0}(2)$. □

Man erhält also einen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} .|_8 N : [G(2), 8] & \longrightarrow & [\Gamma_{1,0}(2), 8] \\ f(z) & \mapsto & f|_8 N(z) = f(2z+1) \quad . \end{array}$$

Zu betrachten ist jetzt $\Theta^*|_8 N \in [\Gamma_{1,0}(2), 8]$. Wie üblich bezeichne mit

$$\wp(z, x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{0 \neq \gamma \in 2\pi i(\mathbb{Z}z + \mathbb{Z})} \left(\frac{1}{(x-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right)$$

die *Weierstraßsche* $\wp$*-Funktion*. Setze wie in [Skor92]

$$e_1(z) := \wp(z, \pi i), \; e_2(z) := \wp(z, \pi i z) \;\text{ und }\; e_3(z) := \wp(z, \pi i(z+1))$$

und $\sigma_1^{\mathrm{odd}}(n) := \sum_{\substack{d|n \\ d \equiv 1(2)}} d$. Mit diesen Bezeichnungen und $q = e^{\pi i z}$ gilt (vgl. [Skor92], p.132):

Satz 5.4 *Die* $.|_2 M$*-Operation für* $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ *permutiert* e_1, e_2, e_3*, und* e_1 *ist invariant unter* $\Gamma_{1,0}(2)$*. Es gilt*

$$\begin{aligned} e_1 &= -\frac{1}{6}\left(1 + 24 \sum_{n \geq 1} \sigma_1^{odd}(n) q^{2n}\right) && \in [\Gamma_{1,0}(2), 2] \;, \\ e_2 &= \frac{1}{12}\left(1 + 24 \sum_{n \geq 1} \sigma_1^{odd}(n) q^{n}\right) && \in [\Gamma_1^0(2), 2] \;, \\ e_3 &= \frac{1}{12}\left(1 + 24 \sum_{n \geq 1} \sigma_1^{odd}(n) (-q)^{n}\right) && \in [W^{-1}\Gamma_{1,0}(2) W, 2] \;, \end{aligned}$$

wobei $W := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ *und* $\Gamma_1^0(2) := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; b \equiv 0(2) \right\}$ *gesetzt ist.*

Wie in [Skor92] definiere

$$\tilde{\epsilon} := \frac{1}{16}(e_2 - e_3)^2 = q^2 + 8q^4 + 28q^6 + 64q^8 + 126q^{10} + 224q^{12} + \ldots \in [\Gamma_{1,0}(2), 4].$$

Dann gilt $-\Delta_8|_4 N = \tilde{\epsilon}$. Denn die q-Entwicklungen von $-\Delta_8(2z+1)$ und $\tilde{\epsilon}(z)$ stimmen in den ersten beiden Fourierkoeffizienten überein, es gilt $\dim_{\mathbb{C}}[\Gamma_{1,0}(2), 4] =$

$\dim_{\mathbb{C}}[G(2),4] = 2$ und eine Basis von $[\Gamma_{1,0}(2),4]$ ist durch $E_4|_4N = 1 + \ldots$ und $\Delta_8|_4N = -q^2 - \ldots$ gegeben. Es folgt

$$\begin{aligned}\Theta^*|_8N(z) &= (E_4|_4N(z))^2 - 480(\Delta_8|_4N(z))^2 \\ &= E_4(2z)^2 - 480\tilde{\epsilon}(z)^2 = E_8(2z) - 480\tilde{\epsilon}(z)^2 \ .\end{aligned}$$

Lemma 5.5 *Es gilt:*

1. $\tilde{\epsilon}(z) = \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{\substack{m_1+m_2=2n\\ m_1,m_2\equiv 1(2)}} \sigma_1(m_1)\sigma_1(m_2)\right) q^{2n}$

2. $\tilde{\epsilon}^2(z) = \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{\substack{m_1+m_2+m_3+m_4=2n\\ m_1,\ldots,m_4\equiv 1(2)}} \prod_{j=1}^4 \sigma_1(m_j)\right) q^{2n}$

3. *Für alle $k \in 2\mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{\substack{m_1+m_2=k\\ m_1,m_2\equiv 1(2)}} \sigma_1(m_1)\sigma_1(m_2) = \begin{cases} \sigma_3(k/2) & ,k\equiv 2(4) \\ \sigma_3(k/2) - \sigma_3(k/4) & ,k\equiv 0(4)\end{cases}$$

Beweis: Nach der Definition von $\tilde{\epsilon}$ gilt

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon} &= \frac{1}{16}(e_2-e_3)^2 = \frac{1}{16\cdot 12^2}\cdot 24^2\cdot\left(2\sum_{\substack{n\geq 1\\ n\equiv 1(2)}} \sigma_1^{\mathrm{odd}}(n)q^n\right)^2 \\ &= \left(\sum_{\substack{n\geq 1\\ n\equiv 1(2)}} \sigma_1^{\mathrm{odd}}(n)q^n\right)^2 = \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{\substack{m_1+m_2=2n\\ m_1,m_2\equiv 1(2)}} \sigma_1(m_1)\sigma_1(m_2)\right) q^{2n} \quad .\end{aligned}$$

Damit erhält man die erste Behauptung. Die Behauptung *2.* folgt sofort. Nach [Skor92], p.138, ist

$$\tilde{\epsilon}(z) = \frac{1}{240}\left(E_4(z) - E_4(2z)\right) = \sum_{n\geq 1}\sigma_3(n)q^{2n} - \sum_{n\geq 1}\sigma_3(n)q^{4n}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die Behauptung *3.* . □

Mit Hilfe dieses Lemmas folgt aus der Gleichung $\Theta^*|_8N(z) = E_8(2z) - 480\tilde{\epsilon}(z)^2$ die Formel für die Koeffizienten der q-Entwicklung von $\Theta^*|_8N$.

Bemerkung 5.6 *Sei $\Theta^*|_8N(z) = \sum_{n\geq 0} b_n q^n$ die q-Entwicklung von $\Theta^*|_8N$. Es folgt für die Koeffizienten $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$*

$$b_n = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n \equiv 1(2) \\ -480\left(\sum_{\substack{m_1+m_2+m_3+m_4=2n \\ m_1,\ldots,m_4\equiv 1(2)}} \prod_{j=1}^4 \sigma_1(m_j)\right) & , n/2 \equiv 2(4) \\ 480\left(\sigma_7(n) - \left(\sum_{\substack{m_1+m_2+m_3+m_4=2n \\ m_1,\ldots,m_4\equiv 1(2)}} \prod_{j=1}^4 \sigma_1(m_j)\right)\right) & , n \equiv 0(4) \end{cases} .$$

Sei $\Theta^*(z) = \sum_{j\geq 0} a_j q^j$ die q-Entwicklung von $\Theta^*(z)$. Dann folgt aus der letzten Bemerkung die Formel für die Koeffizienten von Θ^*, denn es gilt

$$a_j = \begin{cases} b_{2j} & , j \equiv 0(2) \\ -b_{2j} & , j \equiv 1(2) \end{cases} .$$

Um den Satz 5.2 vollständig zu beweisen, muß noch für gerade j die Abschätzung $a_j \geq 0$ gezeigt werden.

Lemma 5.7 *Sei $\vartheta_{BW_{16}}$ die Grad 1 Thetareihe des Barnes-Wall Gitters. Dann gilt*

$$\frac{1}{2}\left(\Theta^*(2z) + \Theta^*(2z+1)\right) = \vartheta_{BW_{16}}(2z) .$$

Beweis: Das Barnes-Wall-Gitter $BW_{16} \subset \mathbb{R}^{16}$ ist ein gerades Gitter der Stufe $l = 2$. Daher gilt $\vartheta_{BW_{16}} \in [\Gamma_{1,0}(2), 8] \subset [\Gamma_1(2), 8]$. Die Gruppen $G(2)$ und $\Gamma_{1,0}(2)$ bzw. $G(2)$ und $\Gamma_{1,0}(4)^*$ sind zueinander konjugiert. Mit $T = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $N = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ erhält man Isomorphismen

$$[G(2), 8] \xrightarrow{\cdot|_8 N} [\Gamma_{1,0}(2)] \quad \text{und} \quad [G(2), 8] \xrightarrow{\cdot|_8 T} [\Gamma_{1,0}(4)^*, 8] .$$

Die Räume $[\Gamma_{1,0}(2), 8]$ und $[\Gamma_{1,0}(4)^*]$ sind in $[\Gamma_{1,0}(4), 8]$ enthalten. Nach Beispiel 4.7 ist der Raum $[\Gamma_{1,0}(4), 8]$ 5-dimensional und eine Modulform f ist durch die ersten fünf Koeffizienten der q-Entwicklung eindeutig bestimmt. Es folgt $\vartheta_{BW_{16}}(2z) - \frac{1}{2}(\Theta^*(2z) + \Theta^*(2z+1)) = 0 + 0q^2 + 0q^4 + 0q^6 + 0q^8 + \ldots = 0 \in [\Gamma_{1,0}(4), 8]$. □

Da die Koeffizienten in der q-Entwicklung von $\vartheta_{BW_{16}}$ nicht-negative Zahlen sind, folgt mit diesem Lemma für die Koeffizienten b_{4k} aus Bemerkung 5.6 die Abschätzung $b_{4k} \geq 0$. Damit ist Satz 5.2 vollständig bewiesen. □

Die Aussage $b_{4k} \geq 0$ über die Koeffizienten von $\Theta^*|_8 N$ kann man auch durch elementare Abschätzungen der σ_k-Funktion zeigen. Im Anhang B wird dieser elementare Beweis angegeben.

Die Reihe Θ^* hat nach Satz 5.2 nicht-negative ganzzahlige Koeffizienten, und nach Lemma 5.7 stimmen die Koeffizienten zu geraden Indices mit den Koeffizienten der Thetareihe des Barnes-Wall- Gitters überein. Im Beweis dieses Lemmas wurde benutzt, daß $\Theta^*|_8 T$ eine Modulform vom Gewicht 8 zur Gruppe $\Gamma_{1,0}(4)$ ist. Die Beziehung zwischen Θ^* und der extremalen Modulform bezüglich $[\Gamma_{1,0}(4), 8]$ ist nach Abschnitt 4.3 durch die folgende Bemerkung gegeben.

Bemerkung 5.8 Die extremale Modulform $f \in [\Gamma_{1,0}(4), 8]$ hat die Form

$$f(z) = 1 - 7680q^{12} + 4320q^{16} - 276480q^{20} + 61440q^{24} + \dots \quad ,$$

und es gilt $f(z) = (\Theta^*|_8 N)|_8 T(z) = \Theta^*(4z+1)$.

Zuerst einmal stellt sich jetzt die Frage nach einem nicht-trivialen Beispiel, d.h. nach der Existenz einer periodischen Punktmenge Λ, die kein Gitter ist, mit $\Theta_\Lambda \in [G(2), 8]$. Ein solches Beispiel kann mit Hilfe des Nordstrom-Robinson-Codes konstruiert werden:

Bezeichne dazu mit $\Lambda^{(A)}_{NRC_{16}}$ die Konstruktion-A-Liftung des Nordstrom-Robinson-Codes, d.h. es ist

$$\Lambda^{(A)}_{NRC_{16}} := \bigcup_{x \in NRC_{16}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x + \sqrt{2}\mathbb{Z}^{16} \right).$$

Für die Average-Thetareihe gilt dann

$$\Theta_{\Lambda^{(A)}_{NRC_{16}}}(z) = Dist_1(NRC_{16})(f_0(z), f_1(z)) = 1 + 32q^2 + 7168q^3 + 8160q^4 + \dots \quad .$$

$\Theta_{\Lambda^{(A)}_{NRC_{16}}}$ ist eine Modulform vom Gewicht 8 zur Hecke-Gruppe $G(2)$, denn die Exponenten in der q-Entwicklung sind nach Konstruktion ganzzahlig und der Distanzzähler $Dist_1(NRC_{16})$ ist invariant unter MacWilliams-Transformation. Aufgrund der Konstruktion A kann diese Reihe natürlich nicht mit Θ^* übereinstimmen.

Bezeichne nun mit Λ_9 die im Anhang A angegebene periodische Punktmenge bestehend aus 9 Translaten des Barnes-Wall-Gitters und mit $\Lambda^{(B)}_{NRC_{16}}$ die *Konstruktion-B-Liftung* des Nordstrom-Robinson-Codes, d.h. setze
$\Lambda^{(B)}_{NRC_{16}} := \bigcup_{x \in NRC_{16}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x + \sqrt{2} D_{16} \right)$ mit $D_{16} := \{ y \in \mathbb{R}^{16} \mid \sum_{j=1}^{16} y_j \equiv 0(2) \}$.

Lemma 5.9 *Für die Average-Thetareihen zu diesen periodischen Punktmengen gilt* $\Theta_{\Lambda^{(B)}_{NRC_{16}}}, \Theta_{\Lambda_9} \in [\Gamma_1(2), 8]$.

Beweis : Der Nordstrom-Robinson-Code ist eine Vereinigung von 8 Translaten des 16-dimensionalen Reed-Muller-Codes erster Ordnung,

$$NRC_{16} = \cup_{j=1}^{8}(x_j + RM(1,4)),$$

siehe Beispiel 1.14. Die Konstruktion-B-Liftung des Reed-Muller-Codes $RM(1,4)$ liefert das Barnes-Wall-Gitter (siehe [ConSlo99], p.191), d.h. $\Lambda^{(B)}_{NRC_{16}}$ ist eine Vereinigung von 8 Translaten des Barnes-Wall-Gitters BW_{16}. BW_{16} ist ein gerades Gitter der Stufe $l = 2$ und die Verschiebungsvektoren $\frac{1}{\sqrt{2}}x_1, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2}}x_8$ sind im dualen Gitter BW_{16}^* enthalten, daher gilt nach Korollar 2.24

$$\Theta_{\Lambda^{(B)}_{NRC_{16}}} \in [\Gamma^{(2)}_{1,1}(2), 8] = [\Gamma_1(2), 8] \ .$$

Nach Anhang A sind die Verschiebungsvektoren $y_1, \ldots, y_9$ in $\Lambda_9 = \cup_{j=1}^{9}(y_j + BW_{16})$ ebenfalls im dualen Gitter BW_{16}^* enthalten. So folgt die Behauptung für Θ_{Λ_9}. $\square$

Dieses Lemma wird benötigt, um den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 5.10 *Es gilt*

$$\Theta^* = \Theta_{\Lambda^{(B)}_{NRC_{16}}} + \Theta_{\Lambda_9} - \vartheta_{BW_{16}} \ .$$

Wenn man diesen Satz auf der Ebene der Punktmengen lesen möchte, was man im Hinblick auf das Kugelpackungsproblem natürlich nicht darf, so ist die Aussage die folgende: Man nehme die Menge $\Lambda_9 \backslash BW_{16}$ bestehend aus den 9 Translaten des Barnes-Wall-Gitters ohne das Barnes-Wall-Gitter selbst, und vereinige diese verbleibenden 8 Translate mit der Menge $\Lambda^{(B)}_{NRC_{16}}$ der 8 Translate des Barnes-Wall-Gitters. Man erhält also $9 - 1 + 8 = 16$ Translate des Barnes-Wall-Gitters. Dabei ist zu berücksichtigen, daß bei der Konstruktion von $\Lambda^{(B)}_{NRC_{16}}$ der Nordstrom-Robinson-Code NRC_{16} in der Darstellung von Beispiel 1.14 verwendet wurde, und deshalb für BW_{16} und Λ_9 in der Darstellung wie im Anhang A $BW_{16} \not\subset \Lambda^{(B)}_{NRC_{16}} \cap \Lambda_9$ gilt. Man muß in diesem Fall statt $\Lambda^{(B)}_{NRC_{16}}$ die dazu isometrische Punktmenge Λ_8 aus Anhang A verwenden.

Die Punktmengen Λ_8 und Λ_9 sind distanzinvariant, daher gilt $\Theta_{\Lambda_8} = \vartheta_{\Lambda_8}$ und $\Theta_{\Lambda_9} = \vartheta_{\Lambda_9}$. Die Thetareihen der im Anhang A angegebenen periodischen Punktmenge Λ_{16}, die aus 16 Translaten des Barnes-Wall-Gitters besteht, berechnen sich zu

$$\Theta_{\Lambda_{16}}(z) = 1 + 148q^2 + 5312q^3 + 22080q^4 + 191232q^5 + 366320q^6 + \ldots \ ,$$
$$\vartheta_{\Lambda_{16}}(z) = 1 + 7680q^3 + 4320q^4 + 276480q^5 + 61440q^6 + \ldots \ .$$

Λ_{16} ist also nicht distanzinvariant und für die gewöhnliche Thetareihe $\vartheta_{\Lambda_{16}}$ gilt $\vartheta_{\Lambda_{16}} = \Theta^*$. Die center-density der durch Λ_{16} gegebenen periodischen Kugelpackung $\mathcal{P}$ beträgt $\delta_{\mathcal{P}} = \frac{1}{256}$. Dies ist nur $\frac{1}{16}$ der center-density des Barnes-Wall-Gitters.

Bemerkung 5.11 Die Reihe $\Theta_{\Lambda_{16}}$ ist eine Modulform zur Hecke-Gruppe $G(2)$, denn es gilt

$$\Theta_{\Lambda_{16}} = \theta_3^{16} - 32\theta_3^8\Delta_8 - 76\Delta_8^2 \in [G(2), 8].$$

Falls es nun keine periodische Punktmenge Λ mit $\Theta_\Lambda = \Theta^*$ geben sollte, so liefern Satz 5.10 und die im Anhang A angegebene periodische Punktmenge Λ_{16} wenigstens eine Erklärung dafür, was die Modulform Θ^* mit dem Barnes-Wall-Gitter und den Thetareihen der 8- bzw. 9-Translate-Packungen zu tun hat: Es gilt die Gleichung

$$\vartheta_{\Lambda_{16}} = \Theta^* = \vartheta_{\Lambda_9} + \vartheta_{\Lambda_8} - \vartheta_{BW_{16}} \quad .$$

Diese Identität gilt für die gewöhnlichen Thetareihen, welche erzeugende Funktionen für die Abstandsverteilung vom Nullpunkt sind. Eine analoge Gleichung für die Average-Thetareihe einer 16-Translate-Packung des Barnes-Wall-Gitters gibt es nicht, weil eine solche Packung Minimum 2 haben muß. Die Angabe der periodischen Punktmenge Λ_{16}, deren Thetareihe die Gleichung $\vartheta_{\Lambda_{16}} = \Theta^*$ erfüllt, liefert auch einen kurzen Beweis dafür, daß die Koeffizienten der q-Entwicklung der Modulform Θ^* ganzzahlig und nicht-negativ sind.

Beweis von Satz 5.10: Es gilt $\Theta_{\Lambda^{(B)}_{NRC_{16}}}, \Theta_{\Lambda_9}, \vartheta_{BW_{16}} \in [\Gamma_1(2), 8]$. Bezüglich $[\Gamma_1(2), 8]$ ist Extremalität definierbar und es gilt $\dim_{\mathbb{C}}[\Gamma_1(2), 8] = 5$, da $\Gamma_1(2)$ und $\Gamma_{1,0}(4)$ konjugiert sind (siehe Beispiel 4.7). Die Behauptung folgt nun durch Betrachtung der Anfangsstücke der q-Entwicklungen der Reihen

$$\begin{aligned}
\Theta_{\Lambda^{(B)}_{NRC_{16}}}(z) &= 1 + 3584q^3 + 4320q^4 + 129024q^5 + 61440q^6 + \ldots \\
\Theta_{\Lambda_9}(z) &= 1 + 4096q^3 + 4320q^4 + 147456q^5 + 61440q^6 + \ldots \\
\vartheta_{BW_{16}}(z) &= 1 \qquad\qquad\quad + 4320q^4 \qquad\qquad\quad + 61440q^6 + \ldots \\
\Theta^*(z) &= 1 + 7680q^3 + 4320q^4 + 276480q^5 + 61440q^6 + \ldots \quad .
\end{aligned}$$

$\square$

Korollar 5.12 *Sei $L \subset BW_{16}$ ein beliebiges Untergitter von vollem Rang. Dann ist Θ^* ein Element des von den Thetareihen zu Nebenklassen $u + L$, $u \in L^*$, erzeugten $\mathbb{C}$-Vektorraums, d.h.*

$$\Theta^* \in span\{\vartheta_{u+L} \mid u \in L^*\} \quad .$$

Das Problem bei der Konstruktion einer periodischen Punktmenge $\Lambda = \cup_{j=1}^{M}(u_j + L)$ mit $\Theta_\Lambda = \Theta^*$ bzw. beim Beweis der Nicht-Existenz einer solchen Menge ist, daß man unter der Annahme der Existenz von Λ die Stufe l des Gitters L nicht genau kennt. Wenn man zum Beispiel mit Hilfe einer Grad 2 Reihe $\Theta_\Lambda^{(2)}$ die Nicht-Existenz von Λ beweisen möchte, so muß man die Stufe l kennen, weil davon die Modulgruppe $\Gamma_{2,1}^{(2)}(l)$ abhängt. Trotzdem lassen sich die folgenden Aussagen über die Stufe des Gitters aus den Eigenschaften der Reihe ableiten:

Die Stufe kann nicht gleich 1 sein, da $\sqrt{\det L} = M$ und $\det L \mid l^n$ ([Ebe02], p. 95) gilt. Sonst wäre Λ wegen $M = 1$ ein gerades unimodulares Gitter, daher dürften in der q-Entwicklung von Θ^* keine ungeraden Exponenten auftreten. Außerdem ist die Stufe l gerade, denn Θ_Λ ist eine Modulform zur Gruppe $\Gamma_{1,1}^{(2)}(l)$, also gilt mit $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{smallmatrix}\right)$ die Gleichung $\Theta_\Lambda|_8 A = \Theta_\Lambda$. Setze $\tilde{A} := \left(\begin{smallmatrix} 1 & -l \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, dann gilt $A = S\tilde{A}S^{-1}$, und wegen $\Theta_\Lambda|_8 S = \Theta_\Lambda$ folgt $\Theta_\Lambda|_8 \tilde{A} = \Theta_\Lambda$. Da in der q-Entwicklung von Θ_Λ ungerade Exponenten auftauchen, muß l gerade sein.

Leider kann man die Bemerkung 5.1 nicht auf die Reihen Θ_Λ verallgemeinern. Wie im Beweis der Bemerkung 5.1 erhält man die q-Entwicklung $\Theta_\Lambda|_8 S = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} a_j q^{2j/l}$, jedoch können jetzt die Koeffizienten

$$a_j = \frac{1}{M^2} \sum_{\substack{y \in L^* \\ lN(y) = 2j}} |B_y|^2$$

verschwinden, auch wenn ein $y \in L^*$ mit $lN(y) = 2j$ existiert. In diesem Fall verschwinden alle $B_y = \sum_{k=1}^{M} e^{2\pi i (u_k, y)}$ mit $y \in L^*$, $N(y) = 2j/l$. Man erhält auf diese Weise also nur Bedingungen an die Vektoren der Norm $2j/l$ in Abhängigkeit zu den Verschiebungsvektoren $u_1, \ldots, u_M$.

Beispiel 5.13 Sei $\mathcal{H}_8 \subset \mathbb{F}_2^8$ der [8,4,4]-Hamming-Code. Das E_8-Gitter kann man aus der Konstruktion-A-Liftung dieses Codes erhalten, d.h.

$$E_8 = \bigcup_{x \in \mathcal{H}_8} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x + \sqrt{2}\mathbb{Z}^8 \right).$$

Die Stufe l des Gitters $L = \sqrt{2}\mathbb{Z}^8$ ist gleich 4. Es gilt $a_j = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$ mit $\frac{2j}{4} \notin 2\mathbb{Z}$; d.h. $B_y = 0$ für alle $y \in L^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{Z}^8$ mit $N(y) \notin 2\mathbb{Z}$.

Man kann nun versuchen, die Nicht-Existenz der gesuchten Punktmenge Λ in Spezialfällen mit Hilfe der in Abschnitt 4.4 vorgestellten Methode zu beweisen. Dazu nimmt man an, daß eine periodische Punktmenge Λ mit $\Theta_\Lambda = \Theta^*$ existiert und daß entweder L ein gerades Gitter der Stufe 2 ist, oder daß Λ 2-selbstdual ist, d.h. daß $\Theta_\Lambda^{(2)}|_8\left(\begin{smallmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{smallmatrix}\right) = \Theta_\Lambda^{(2)}$ gilt. Man erhält auf diese Weise lineare Gleichungen in den Fourierkoeffizienten a_T von $\Theta_\Lambda^{(2)}(Z) = \sum_{T=T^T} a_T e^{\pi i \sigma(TZ)}$. Ein Widerspruch ergibt sich, falls mindestens einer der Koeffizienten a_T negativ oder nicht rational ist. Leider führt diese Vorgehensweise aber nicht zum Ziel, wie die nachstehende Bemerkung zeigt.

Bemerkung 5.14 Seien $F_\vartheta^{(g)} := \vartheta_{\Lambda_9}^{(g)} + \vartheta_{\Lambda_8}^{(g)} - \vartheta_{BW_{16}}^{(g)}$, $F_\Theta^{(g)} := \Theta_{\Lambda_9}^{(g)} + \Theta_{\Lambda_8}^{(g)} - \vartheta_{BW_{16}}^{(g)}$, $F_{\Theta,\vartheta}^{(g)} := \Theta_{\Lambda_9}^{(g)} + \vartheta_{\Lambda_8}^{(g)} - \vartheta_{BW_{16}}^{(g)}$ und $F_{\vartheta,\Theta}^{(g)} := \vartheta_{\Lambda_9}^{(g)} + \Theta_{\Lambda_8}^{(g)} - \vartheta_{BW_{16}}^{(g)}$. Dann sind die Funktionen $F_\vartheta^{(g)}, F_\Theta^{(g)}, F_{\Theta,\vartheta}^{(g)}, F_{\vartheta,\Theta}^{(g)}, \vartheta_{\Lambda_{16}}^{(g)}$ und $\Theta_{\Lambda_{16}}^{(g)}$ Modulformen zur Hauptkongruenzgruppe $\Gamma_g(2)$, d.h. es gilt

$$F_\vartheta^{(g)}, F_\Theta^{(g)}, F_{\Theta,\vartheta}^{(g)}, F_{\vartheta,\Theta}^{(g)}, \vartheta_{\Lambda_{16}}^{(g)}, \Theta_{\Lambda_{16}}^{(g)} \in [\Gamma_g(2), 8] \ .$$

Weiterhin liefert $(g-1)$-faches Anwenden des Siegelschen Φ-Operators auf die ersten fünf Modulformen (in obiger Reihenfolge) die Modulform Θ^*. Die Koeffizienten in den Fourier-Entwicklungen der Reihen $F_\vartheta^{(g)}, F_\Theta^{(g)}, F_{\Theta,\vartheta}^{(g)}, F_{\vartheta,\Theta}^{(g)}, \vartheta_{\Lambda_{16}}^{(g)}$ und $\Theta_{\Lambda_{16}}^{(g)}$ sind nicht-negative rationale Zahlen mit beschränktem Nenner. Für $g \geq 2$ ist $\vartheta_{\Lambda_{16}}^{(g)} \neq F_\vartheta^{(g)}$, und es gilt

$$\Theta_{\Lambda_{16}}^{(g)} \notin \{F_\vartheta^{(g)}, F_\Theta^{(g)}, F_{\Theta,\vartheta}^{(g)}, F_{\vartheta,\Theta}^{(g)}, \vartheta_{\Lambda_{16}}^{(g)}\} \ .$$

Die Reihen $\vartheta_{\Lambda_{16}}^{(g)}, \Theta_{\Lambda_{16}}^{(g)}$ und $F_\vartheta^{(g)}$ sind linear unabhängig.

Beweis : Die Verschiebungsvektoren der periodischen Punktmengen Λ_8, Λ_9 und Λ_{16} sind im dualen Gitter des Barnes-Wall-Gitters enthalten. Ihre paarweisen Differenzen haben ganzzahlige Norm. Mit Korollar 2.24 folgt die erste Behauptung. Die zweite Behauptung über das Anwenden des Φ-Operators ist klar. Die Aussage über die Fourierkoeffizienten wird hier exemplarisch für die Funktion $F_\Theta^{(g)}$ bewiesen:

Setze $L := BW_{16}$ und $\tilde{F}_\Theta^{(g)} := \Theta_{\Lambda_8}^{(g)} - \vartheta_L^{(g)}$. Dann gilt die Behauptung für $\tilde{F}_\Theta$ wegen

$$\begin{aligned}
\Theta_{\Lambda_8}^{(g)} - \vartheta_L^{(g)} &= \left(\frac{1}{8^g}\sum_{k\in[8]^{2g}} \vartheta^{(g)}_{u_{k_1}-u_{k_2}+L,\dots,u_{k_{2g-1}}-u_{k_{2g}}+L}\right) - \vartheta_L^{(g)} \\
&= \left(\left(\frac{1}{8^g}\sum_{\substack{k\in[8]^{2g}\\ k_1\neq k_2 \text{ oder } k_3\neq k_4 \dots}} \vartheta^{(g)}_{u_{k_1}-u_{k_2}+L,\dots,u_{k_{2g-1}}-u_{k_{2g}}+L}\right) + \vartheta_L^{(g)}\right) - \vartheta_L^{(g)} \\
&= \frac{1}{8^g}\sum_{\substack{k\in[8]^{2g}\\ k_1\neq k_2 \text{ oder } k_3\neq k_4 \dots}} \vartheta^{(g)}_{u_{k_1}-u_{k_2}+L,\dots,u_{k_{2g-1}}-u_{k_{2g}}+L} \qquad ,
\end{aligned}$$

und damit für $F_\Theta^{(g)} = \Theta_{\Lambda_9}^{(g)} + \tilde{F}_\Theta^{(g)}$.

Um zu zeigen, daß die Modulformen $\vartheta_{\Lambda_{16}}^{(g)}$ und $F_\vartheta^{(g)}$ für $g \geq 2$ verschieden sind, genügt es, diese Aussage für $g = 2$ zu beweisen. Denn durch $(g-2)$-faches Anwenden des Φ-Operators würde aus der Gleichheit der Grad g Reihen die Gleichheit der Grad 2 Reihen folgen. Sei also $g = 2$. Die periodische Punktmenge $\Lambda_{16} = (\psi(\Lambda_8)\backslash BW_{16}) \cup \Lambda_9$ aus Anhang A wird in der Form $\Lambda_{16} = \cup_{j=1}^{16}(u_j + L)$ geschrieben, wobei $u_1 = 0$ gilt, und die Translate wie im Anhang A so angeordnet sind, daß $\Lambda_9 = \cup_{j=1}^{9}(u_j + L)$ und $\psi(\Lambda_8) = L \cup (\cup_{j=10}^{16}(u_j + L))$ gilt. Setze $B := \{10, 11, \dots, 16\}$ und $A := B \cup \{1\}$. Um eine einfachere Notation zu erhalten, bezeichne abkürzend $\vartheta_k := \vartheta_{u_{k_1}+L, u_{k_2}+L}$ für $k \in [16]^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\vartheta_{\Lambda_{16}}^{(2)} - F_\vartheta^{(2)} &= \sum_{k \in [9]^2} \vartheta_k + \sum_{\substack{k_1 \in [9] \\ k_2 \in B}} \vartheta_k + \sum_{\substack{k_1 \in B \\ k_2 \in [9]}} \vartheta_k + \sum_{k \in B^2} \vartheta_k \\
&\quad - \left(\sum_{k \in [9]^2} \vartheta_k + \sum_{k \in A^2} \vartheta_k - \vartheta_L^{(2)} \right) .
\end{aligned}$$

Es gilt $\sum_{k \in A^2} \vartheta_k = \sum_{k \in B^2} \vartheta_k + \sum_{\substack{k_1 = 1 \\ k_2 \in B}} \vartheta_k + \sum_{\substack{k_1 \in B \\ k_2 = 1}} \vartheta_k + \vartheta_L^{(2)}$. Es folgt

$$\vartheta_{\Lambda_{16}}^{(2)} - F_\vartheta^{(2)} = \sum_{\substack{k_1 \in [9]\backslash\{1\} \\ k_2 \in B}} \vartheta_k + \sum_{\substack{k_1 \in B \\ k_2 \in [9]\backslash\{1\}}} \vartheta_k \neq 0 \ .$$

Zu zeigen ist noch die lineare Unabhängigkeit der Reihen $\vartheta_{\Lambda_{16}}^{(g)}, \Theta_{\Lambda_{16}}^{(g)}$ und $F_\vartheta^{(g)}$. Angenommen, sie wären linear abhängig. Dann existieren $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{C}$ mit $\mu_1 \vartheta_{\Lambda_{16}}^{(g)} + \mu_2 \Theta_{\Lambda_{16}}^{(g)} + \mu_3 F_\vartheta^{(g)} = 0$. Da die drei Modulformen paarweise verschieden sind, gilt $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \neq 0$. Man kann o.B.d.A. $\mu_3 = -1$ annehmen. $(g-1)$-faches Anwenden des Φ-Operators liefert $\mu_1 \Theta^* + \mu_2 \Theta_{\Lambda_{16}}^{(1)} - \Theta^* = 0$. Wegen $\min(\Lambda_{16}) = 2$ folgt $\mu_1 - 1 = \mu_2 = 0$. Widerspruch. □

Es gibt also Modulformen $f \in [\Gamma_2(2), 8]$ mit $f|\Phi = \Theta^*$, die nicht-negative Koeffizienten mit beschränktem Nenner haben. Mit der in Abschnitt 4.4 vorgestellten Methode kann man daher weder eine eindeutige Modulform f mit $f|\Phi = \Theta^*$ berechnen, noch zeigen, daß eine Modulform mit dieser Eigenschaft mindestens einen negativen Koeffizienten hat. Nach Bemerkung 5.14 ist der Kegel in $[\Gamma_2(2), 8]$ der Modulformen mit nicht-negativen Koeffizienten mindestens 2-dimensional. Jede Modulform $f := \lambda \cdot \vartheta_{\Lambda_{16}}^{(2)} + (1-\lambda) \cdot F_\vartheta^{(2)}$ mit $\lambda \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ erfüllt die Bedingungen an eine mögliche Grad 2 Average-Reihe $\Theta_\Lambda^{(2)}$.

Zusammenfasssung 5.15 :
Es konnte gezeigt werden, daß die Koeffizienten in der q-Entwicklung der extremalen Modulform Θ^* nicht-negative ganze Zahlen sind, die man mit Hilfe der Formel aus Satz 5.2 berechnen kann. Durch die im Anhang A angegebene periodische Punktmenge Λ_{16} wurde bewiesen, daß Θ^* die erzeugende Funktion für die Abstandsverteilung der Punkte in Λ_{16} vom Nullpunkt ist. Dadurch ist eine mögliche Erklärung für den Zusammenhang des Barnes-Wall-Gitters mit der extremalen Modulform Θ^* gefunden. Satz 5.10 liefert eine Identität der Thetareihen der 8-,9- und 16-Translate-Packungen des Barnes-Wall-Gitters und der Reihe des Gitters selbst.

Das Problem, ob es eine periodische Punktmenge gibt, deren Average-Thetareihe mit Θ^* übereinstimmt, ist weiterhin offen. Die Schwierigkeit wurde beim Ansatz aus Abschnitt 4.4 deutlich. Die Unkenntnis der Stufe des Gitters L bereitet Probleme, da von ihr die Modulgruppe einer möglichen Grad 2 Reihe abhängt. Selbst unter Annahmen (z.B. Λ 2-selbstdual) war es wegen der Aussage in Bemerkung 5.14 nicht möglich, die Existenz bzw. Nichtexistenz einer solchen periodischen Punktmenge zu klären. Die Schwierigkeit des Problems wird auch deutlich, wenn man versucht, den Spezialfall zu untersuchen, daß Λ eine distanzinvariante periodische Punktmenge mit $\vartheta_\Lambda = \Theta^*$ ist. In diesem Fall stimmen die Reihen Θ_Λ und ϑ_Λ überein, d.h. es gilt $\vartheta_\Lambda = \Theta^*$. Es existieren nun nach Anhang A sehr wohl periodische Punktmengen Λ mit $\vartheta_\Lambda = \Theta^*$, allerdings haben diese Minimum 2 und sind nicht distanzinvariant. An der Reihe ϑ_Λ kann man das aber nicht erkennen.

6 Anhang A

Als Erzeugermatrix für das Barnes-Wall-Gitter BW_{16} sei die Matrix

$$\Omega_{BW_{16}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 2&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 2&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 2&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 2&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 2&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 2&0&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 2&0&0&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 2&0&0&0&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0 \\ 2&0&0&0&0&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0 \\ 2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

gewählt (vgl. [ConSlo99]). Dann gilt $\min(BW_{16}) = 4$ und die Thetareihe

$$\vartheta_{BW_{16}}(z) = 1 + 4320q^4 + 61440q^6 + 522720q^8 + \ldots$$

ist eine Modulform vom Gewicht 8 zur Fricke-Gruppe $\Gamma_{1,0}(2)^*$ und trivialem Multiplikator, siehe [SSP99]. Die in den folgenden Abschnitten angegebenen periodischen Punktmengen Λ_8, Λ_9 und Λ_{16} sind bezüglich dieser Erzeugermatrix dargestellt.

Die folgende Bemerkung wird bei der Berechnung der Thetareihen zu $\Lambda_k = \cup_j (u_j + BW_{16})$, $k \in \{8, 9, 16\}$, benötigt. Die Verschiebungsvektoren u_j dieser Punktmengen haben Abstand $\sqrt{3}$ zum Barnes-Wall-Gitter. Daher sind sie tiefe Löcher von BW_{16}.

Bemerkung 6.1 Der Überdeckungsradius des Barnes-Wall-Gitters BW_{16} ist $\sqrt{3}$. Die tiefen Löcher liegen im dualen Gitter BW_{16}^*, und je zwei verschiedene tiefe Löcher haben modulo BW_{16} Abstand $\sqrt{2}$ bzw. $\sqrt{3}$ voneinander, d.h. für verschiedene tiefe Löcher x_1 und x_2 gilt

$$\min_{y \in BW_{16}} N(x_1 - x_2 + y) \in \{2, 3\} \; .$$

Beweis : Die Aussage über den Überdeckungsradius wird in Chapter 6, Theorem 12 in [ConSlo99] bewiesen. Die Behauptung über die tiefen Löcher rechnet man

entweder mit dem Programm `deepholesinBWdual.mag` nach, oder man überlegt sich folgendes:
In Figure 4.12 in [ConSlo99] ist eine Erzeugermatrix des Leech-Gitters in MOG-Koordinaten angegeben. Indem man in den ersten 16 Zeilen die letzten 8 Koordinaten (diese sind alle gleich Null) wegläßt, erhält man eine Erzeugermatrix eines Gitters L, das zu BW_{16} isometrisch ist. Genauer: Mit der Permutation

$$\sigma = (1\,4\,2\,3\,9\,5\,6\,8)(7\,12\,13\,11) \in \mathcal{S}_{16}$$

gilt $\sigma(BW_{16}) = L$. Nach Chapter 6, Proposition 11 in [ConSlo99] lassen sich die Vektoren der tiefen Löcher durch Anhängen geeigneter Vielfacher von Minimalvektoren des E_8-Gitters zu Minimalvektoren des Leech-Gitters erweitern (alles in MOG-Koordinaten !). Ein solcher Minimalvektor hat ganzzahliges Skalarprodukt mit jeder der ersten 16 Zeilen der Erzeugermatrix des Leech-Gitters, da das Leech-Gitter unimodular ist. Weil nun in jeder dieser 16 Zeilen die letzten 8 Koordinaten verschwinden, liegen die tiefen Löcher von L im dualen Gitter L^*.

Das Barnes-Wall-Gitter BW_{16} ist 2-modular, daher gilt für $y \in BW_{16}$ und zwei verschiedene tiefe Löcher x_1 und x_2 $N(x_1 - x_2 + y) \in \{2, 3, \ldots\}$. Da der Überdeckungsradius von BW_{16} gleich $\sqrt{3}$ ist, folgt auch die letzte Behauptung. □

Die Punktmengen Λ_9 und Λ_{16} wurden experimentell am Rechner konstruiert. Dabei wurden die tiefen Löcher des Barnes-Wall-Gitters berechnet und geeignete Löcher als Verschiebungsvektoren gewählt. Die Ergebnisse dieser Berechnungen werden in den Programmen `Lambda9.mag` und `Lambda16.mag` benutzt.

6.1 Die periodische Punktmenge Λ_8

Der Nordstrom-Robinson-Code NRC_{16} ist nach Beispiel 1.14 eine Vereinigung von 8 Translaten des Reed-Muller-Codes $RM(1,4)$, d.h. es gilt

$$NRC_{16} = \bigcup_{j=1}^{8} (x_j + RM(1,4)).$$

Es ist bekannt, daß die Konstruktion-B-Liftung $L^{(B)}_{RM(1,4)}$ des Reed-Muller-Codes $RM(1,4)$ das Barnes-Wall-Gitter liefert, [ConSlo99]. Betrachtet man $RM(1,4)$ in der Darstellung von Beispiel 1.14, so stimmen $L^{(B)}_{RM(1,4)}$ und das von $\Omega_{BW_{16}}$ erzeugte Gitter nicht überein. Die beiden Gitter können aber durch eine geeignete Permutation ineinander überführt werden:

Die letzten fünf Zeilen in $\Omega_{BW_{16}}$ bilden eine Erzeugermatrix für einen zu $RM(1,4)$ über die Permutation

$$\sigma = (1\ 16\ 13\ 9\ 8\ 3\ 11\ 12)(2\ 15\ 7\ 4\ 14)(6\ 10) \in \mathcal{S}_{16}$$

äquivalenten Code. Das D_{16}-Gitter ist invariant unter Permutationen, und durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Erzeugermatrix von D_{16} gegeben. Eine einfache Rechnung zeigt $BW_{16} = \sigma(L^{(B)}_{RM(1,4)})$.

Die Punktmenge $\Lambda^{(B)}_{NRC_{16}}$ erhält man durch Liftung des Nordstrom-Robinson-Codes NRC_{16} nach Konstruktion B. Insbesondere liegen die Translationsvektoren $\frac{1}{\sqrt{2}}x_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}}x_8$ im dualen Gitter $(L^{(B)}_{NRC_{16}})^* = (\sigma^{-1}(BW_{16}))^*$. Setze

$$\Lambda_8 := \sigma(\Lambda^{(B)}_{NRC_{16}}) \ .$$

Dann liegen für $j \in [8]$ die Vektoren $\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma(x_j)$ in BW^*_{16}. Weil der Nordstrom-Robinson-Code distanzinvariant ist, sind $\Lambda^{(B)}_{NRC_{16}}$ und damit auch Λ_8 distanzinvariant. Für die Thetareihen zu Λ_8 gilt

$$\Theta_{\Lambda_8}(z) = \vartheta_{\Lambda_8}(z) = 1 + 3584q^3 + 4320q^4 + 129024q^5 + 61440q^6 + \dots \ ,$$

wie man mit dem Programm `Lambda8.mag` berechnet.

6.2 Die periodische Punktmenge Λ_9

Die Punktmenge Λ_8 läßt sich durch Hinzunahme eines weiteren Translats des Barnes-Wall-Gitters zu einer periodischen Punktmenge bestehend aus 9 Translaten des BW_{16}-Gitters erweitern. Dazu berechnet man alle Norm 3 Vektoren u in BW^*_{16}, deren Nebenklassen $u + BW_{16}$ von Λ_8 einen Abstand $\geq \sqrt{3}$ haben. Da der Überdeckungsradius von BW_{16} gleich $\sqrt{3}$ ist (vgl. Bemerkung 6.1), sind diese Vektoren u gerade tiefe Löcher von BW_{16} mit $\min\{N(u-y) \mid y \in \Lambda_8\} = 3$. Eine einfache Computerrechnung zeigt, daß es 256 solche Vektoren u gibt, die aber alle dieselbe Nebenklasse $u + BW_{16}$ bestimmen. Die Punktmenge Λ_9 ist dann durch die Matrix $\Omega_{BW_{16}}$ und die Verschiebungsvektoren $u_1, \dots, u_9$ festgelegt. Eine mögliche Wahl der Verschiebungsvektoren ist in der folgenden Matrix angegeben. Dabei stehen die Vektoren in den Spalten.

$$(u_1,\ldots,u_9) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}
0&1&0&0&1&0&1&1&1/2\\
0&0&1&1&1&0&0&1&-3/2\\
0&1&0&1&0&1&0&1&-1/2\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1/2\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1/2\\
0&0&0&1&0&1&1&1&-1/2\\
0&1&0&1&1&0&0&1&1/2\\
0&1&1&1&1&1&1&0&-1/2\\
0&1&1&0&0&0&1&1&1/2\\
0&0&1&1&0&0&1&1&-1/2\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1/2\\
0&0&1&0&1&1&0&1&1/2\\
0&1&1&0&0&1&0&1&1/2\\
0&0&0&0&1&1&1&1&-1/2\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1/2\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1/2
\end{pmatrix}$$

Bei dieser Wahl bestimmen die Matrix $\Omega_{BW_{16}}$ und die Vektoren $u_1,\ldots,u_8$ die Menge Λ_8. Nach Konstruktion liegen $u_1,\ldots,u_9$ in BW_{16}^*. Wie das Programm `Lambda9.mag` zeigt, ist Λ_9 distanzinvariant und für die Thetareihen zu Λ_9 gilt

$$\Theta_{\Lambda_9}(z) = \vartheta_{\Lambda_9}(z) = 1 + 4096q^3 + 4320q^4 + 147456 + 61440q^6 + \ldots \quad .$$

Als Anwendung der Proposition 2.20 kann man aus diesen Daten auch die Average-Thetareihe der Punktmenge $\Lambda_{NRC16}^{(B)}$ berechnen: Λ_9 ist distanzinvariant und es gilt $\Lambda_8 \subset \Lambda_9$. Nach Proposition 2.20 besitzt jede 8-Translate Packung $\Lambda_9^{(k)}$ ($k \in [9]$) dieselbe Average-Thetareihe

$$\Theta_{\Lambda_9^{(k)}} = \frac{1}{8}(7\cdot\Theta_{\Lambda_9} + \vartheta_{BW_{16}}) = 1 + 3584q^3 + 4320q^4 + 129024q^5 + 61440q^6 + \ldots \quad .$$

Eine allgemeinere Konstruktion für periodische Punktmengen, die *squaring construction*, ist in [Forn89] angegeben. Dort werden auch 9-Translate-Packungen des Barnes-Wall-Gitters konstruiert und die gewöhnliche Thetareihe dieser Punktmengen berechnet.

6.3 Packen mit Translaten des Barnes-Wall-Gitters

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß für jede periodische Punktmenge $\Lambda = \cup_{j=1}^{M}(u_j + BW_{16})$ mit Minimum 3 die Anzahl der Translate höchstens 9 ist. Diese Aussage findet man in [ConSlo99], Chapter 7, Theorem 14. Dort wird allerdings kein Beweis angegeben. Die Idee zu folgendem Beweis stammt von Rudolf Scharlau.

Satz 6.2 *Sei* $\Lambda = \cup_{j=1}^{M}(u_j + BW_{16})$ *eine Vereinigung von* M *Translaten des Barnes-Wall-Gitters* BW_{16} *mit* $\min(\Lambda) = 3$*. Dann gilt* $M \leq 9$*.*

Beweis: Bezeichne mit $D := BW_{16}^*/BW_{16}$ die Diskriminantengruppe des Barnes-Wall-Gitters BW_{16}. D ist isomorph zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$ und kann daher als $\mathbb{F}_2$-Vektorraum aufgefaßt werden. Setze

$$\begin{array}{rcl} \tilde{l} : D & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \bar{x} = x + BW_{16} & \mapsto & \tilde{l}(\bar{x}) := \min\limits_{y \in \bar{x}} N(y) \end{array}$$

und $l : D \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $l(\bar{x}) := \tilde{l}(\bar{x}) \bmod 2$. Da BW_{16} ein gerades Gitter ist, gilt $l(\bar{x}) = N(y) \bmod 2$ für alle $y \in \bar{x}$. Definiere

$$\begin{array}{rcl} b : D \times D & \longrightarrow & \mathbb{F}_2 \\ (\bar{x}, \bar{y}) & \mapsto & l(\bar{x} + \bar{y}) - l(\bar{x}) - l(\bar{y}) \ . \end{array}$$

b ist eine symmetrische Bilinearform, und wegen $l(\bar{x} + \bar{y}) = l(\bar{x}) + l(\bar{y}) + b(\bar{x}, \bar{y})$ ist l eine quadratische Form auf D.

Sei $\Lambda = \cup_{j=1}^{M}(u_j + BW_{16})$ eine periodische Punktmenge mit $\min(\Lambda) = 3$ und $M \geq 9$. O.B.d.A. sei $u_1 = 0$. Nach Bemerkung 6.1 ist der Überdeckungsradius des Barnes-Wall-Gitters $\sqrt{3}$, daher sind $u_2, \ldots, u_M$ tiefe Löcher von BW_{16}. Für $j = 2, \ldots, M$ gilt also $u_j \in BW_{16}^*$ und $\tilde{l}(u_j) = 3$. Setze $G := (b(\bar{u}_j, \bar{u}_k))_{j,k=2,\ldots,9}$. Dann gilt

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{8 \times 8} \ ,$$

denn für $k = j$ ist $b(\bar{u}_k, \bar{u}_k) = l(\underbrace{2\bar{u}_k}_{=0}) - 2l(\bar{u}_k) = 0$, und für $j \neq k$ gilt wegen $\min(\Lambda) = 3$ nach Bemerkung 6.1

$$b(\bar{u}_j, \bar{u}_k) = l(\bar{u}_j + \bar{u}_k) - l(\bar{u}_j) - l(\bar{u}_k) = \tilde{l}(\bar{u}_j - \bar{u}_k) \bmod 2 = 1 \ .$$

Aus $\det(G) = 1$ $(\in \mathbb{F}_2)$ folgt, daß $\{\bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_9\}$ eine $\mathbb{F}_2$-Basis von D ist.

Angenommen, es gilt $M \geq 10$. Dann ist u_{10} ein weiteres tiefes Loch von BW_{16}, und $\bar{u}_{10}$ läßt sich als Linearkombination

$$\bar{u}_{10} = \sum_{j=2}^{9} \lambda_j \bar{u}_j \quad , \lambda_j \in \mathbb{F}_2$$

darstellen. Wegen $\min(\Lambda) = 3$ folgt wie oben nach Bemerkung 6.1 $l(\bar{u}_{10} - \bar{u}_j) = 1$ für alle $j = 2, \ldots, 9$. Außerdem gilt

$$l(\bar{u}_{10} - \bar{u}_j) = l(\bar{u}_{10}) - l(\bar{u}_j) + b(\bar{u}_{10}, \bar{u}_j) = \sum_{k=2}^{9} \lambda_k b(\bar{u}_k, \bar{u}_j)$$

und daher $1 = \sum_{k=2}^{9} \lambda_k b(\bar{u}_k, \bar{u}_j) = \sum_{\substack{k=2\\k\neq j}}^{9} \lambda_k$.

Es gilt nun $\lambda_2 = \ldots = \lambda_9 = 1$, denn sonst existierte ein j_0 mit $\lambda_{j_0} = 0$. Wähle j_1 mit $\lambda_{j_1} \neq 0$. Es würde nun $1 = l(\bar{u}_{10} - \bar{u}_{j_1}) = \sum_{\substack{k=2\\k\neq j_0}}^{9} \lambda_k + \lambda_{j_0} - \lambda_{j_1} = 1 + 0 - 1 = 0$ folgen. Widerspruch.

Man erhält also $\bar{u}_{10} = \sum_{j=2}^{9} \bar{u}_j$. u_{10} ist ein tiefes Loch von BW_{16}, somit gilt $l(\bar{u}_{10}) = 1$. Andererseits ist $l(\bar{u}_{10}) = \sum_{j=2}^{9} l(\bar{u}_j) + \sum_{k=3}^{9} \sum_{j=2}^{k-1} b(\bar{u}_j, \bar{u}_k) = 0$. Widerspruch. Es folgt also $M < 10$. $\square$

6.4 Die periodische Punktmenge Λ_{16}

Man kann aus den Mengen Λ_8 und Λ_9 eine periodische Punktmenge Λ_{16} konstruieren, die aus 16 Translaten des Barnes-Wall-Gitters besteht. Es gilt $\Lambda_8 \subset \Lambda_9$. Gesucht ist daher ein geeigneter Automorphismus des Barnes-Wall-Gitters $\psi \in O(BW_{16})$ mit $\psi(\Lambda_8) \cap \Lambda_9 = BW_{16}$. Dann gilt $(\psi(\Lambda_8) \backslash BW_{16}) \cap \Lambda_9 = \emptyset$, und

$$\Lambda_{16} := (\psi(\Lambda_8) \setminus BW_{16}) \cup \Lambda_9$$

ist eine disjunkte Vereinigung von 16 Translaten des Barnes-Wall-Gitters BW_{16}. Nach Konstruktion gilt dann für die gewöhnliche Thetareihe von Λ_{16}

$$\vartheta_{\Lambda_{16}}(z) = \vartheta_{\Lambda_8}(z) + \vartheta_{\Lambda_9}(z) = 1 + 7680q^3 + 4320q^4 + 276480q^5 + 61440q^6 + \ldots \quad .$$

Mit dem Programm `Lambda16.mag` wird die Gruppe $O(BW_{16})$ berechnet. Es werden einige Automorphismen ψ erzeugt und getestet, ob $(\psi(\Lambda_8) \backslash BW_{16}) \cap \Lambda_9 = \emptyset$ gilt. Ist dies der Fall, so wird die Average-Thetareihe Θ_Λ der periodischen Punktmenge $\Lambda = (\psi(\Lambda_8) \backslash BW_{16}) \cup \Lambda_9$ bestimmt. Unter anderem kommen die folgenden Reihen vor:

$$\begin{gathered}
1 + 104q^2 + 6016q^3 + 16800q^4 + 216576q^5 + 275680q^6 + \ldots \quad , \\
1 + 120q^2 + 5760q^3 + 18720q^4 + 207360q^5 + 308640q^6 + \ldots \quad , \\
1 + 124q^2 + 5696q^3 + 19200q^4 + 205056q^5 + 316880q^6 + \ldots \quad , \\
1 + 132q^2 + 5568q^3 + 20160q^4 + 200448q^5 + 333360q^6 + \ldots \quad , \\
1 + 136q^2 + 5504q^3 + 20640q^4 + 198144q^5 + 341600q^6 + \ldots \quad , \\
1 + 148q^2 + 5312q^3 + 22080q^4 + 191232q^5 + 366320q^6 + \ldots \quad , \\
1 + 152q^2 + 5248q^3 + 22560q^4 + 188928q^5 + 374560q^6 + \ldots \quad .
\end{gathered}$$

Diese Reihen $\Theta_\Lambda = 1 + a_2 q^2 + \ldots$ sind Modulformen zur Hecke-Gruppe $G(2)$, und es gilt $\Theta_\Lambda = \Theta^* + a_2 \cdot \Delta_8^2$. Diese Gleichung gilt, da eine Modulform in $[\Gamma_1(2), 8]$ durch die ersten fünf Fourier-Koeffizienten bestimmt ist.

Wie man an den verschiedenen Average-Thetareihen erkennen kann, reichen die Bedingungen, daß Λ_{16} eine Vereinigung von 16 Translaten des BW_{16}-Gitters ist und obige Thetareihe $\vartheta_{\Lambda_{16}}$ hat, nicht aus, um Λ_{16} eindeutig zu bestimmen. Die zu diesen Average-Thetareihen gehörenden Punktmengen liefern allerdings Kugelpackungen $\mathcal{P}$ mit derselben center-density $\delta_\mathcal{P} = \frac{1}{256}$.

Sei nun der Automorphismus ψ so gewählt, daß

$$\Theta_{\Lambda_{16}}(z) = 1 + 148q^2 + 5312q^3 + 22080q^4 + 191232q^5 + 366320q^6 + \ldots$$

gilt. Ein solches ψ findet man, siehe Programm `Lambda16.mag` . Für das dort gewählte $\psi = \mathbf{G.2^6}$ gilt:
Die periodische Punktmenge Λ_{16} ist durch $\Omega_{BW_{16}}$ und die Verschiebungsvektoren $u_1, \ldots, u_{16}$ mit

$$(u_1, \ldots, u_{16}) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1 & -1/2 & -1 & -1/2 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & -1/2 & -1 & -1/2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1 & -1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & -1 & -1/2 & 0 & -1/2 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & -1/2 & 0 & -3/2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 & -1/2 & 1 & 1/2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 3/2 & 1 & 3/2 & 1 & 1/2 & 1
\end{pmatrix}$$

gegeben. Diese Wahl von ψ liefert eine periodische Punktmenge Λ_{16} mit Minimum 2 und der in Kapitel 5 angegebenen Average-Thetareihe. Wegen $\Theta_{\Lambda_{16}} \neq \vartheta_{\Lambda_{16}}$ ist Λ_{16} natürlich nicht distanzinvariant.

7 Anhang B

In diesem Anhang soll die Aussage $b_{4k} \geq 0$ für die Koeffizienten der q-Entwicklung von $\Theta^*|_8 N = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} b_j q^j$ durch elementare Abschätzungen der σ_k-Funktion bewiesen werden. Die Eigenschaft $b_{2j} \geq 0$ für gerade j ist äquivalent zu folgender Behauptung:

Behauptung 7.1 Sei $\tilde{\epsilon}(z)^2 = \sum_{n \geq 0} c_n q^n$ die q-Entwicklung von $\tilde{\epsilon}^2$, d.h. es gelte

$$c_n := \sum_{\substack{k_1 + k_2 = n \\ k_1, k_2 > 0}} \sigma_3^*(k_1)\sigma_3^*(k_2)$$

mit $\sigma_3^*(k) = \sigma_3(k)$, falls k ungerade, und $\sigma_3^*(k) = \sigma_3(k) - \sigma_3(k/2)$, falls k gerade. Dann folgt für alle $n \in 2\mathbb{N}$ die Abschätzung $c_n \leq \sigma_7(n/2)$.

Benötigt werden Abschätzungen für die Funktionen $\sigma_3(n)$ und $\sigma_7(n)$.

Bemerkung 7.2

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{\sigma_7(n) - \sigma_3(n)}{120} = \sum_{\substack{k_1 + k_2 = n \\ k_1, k_2 > 0}} \sigma_3(k_1)\sigma_3(k_2)$.

2. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $8\sigma_3(k) \leq \sigma_3(2k) \leq 9\sigma_3(k)$.

3. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $128\sigma_7(k) \leq \sigma_7(2k) \leq 129\sigma_7(k)$.

Beweis: Die Behauptung 1. ist in [Ser78], p.93, bewiesen. Sei nun $k = 2^l \cdot \kappa$, $\kappa \equiv 1(2)$. Es gilt $\sigma_j(n) = \sum_{d|n} d^j = \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p|n}} \frac{p^{(\nu_p(n)+1)j} - 1}{p^j - 1}$, siehe [HaWri58], pp. 271, 272. Dabei ist $\nu_p(n) = s$, falls $p^s || n$ gilt. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_j(2k)}{\sigma_j(k)} &= \frac{\sigma_j(2^{l+1})\sigma_j(\kappa)}{\sigma_j(2^l)\sigma_j(\kappa)} = \frac{2^{(l+2)j} - 1}{2^{(l+1)j} - 1} \\ &= \frac{2^j\left(2^{(l+1)j} - 1\right) + 2^j - 1}{2^{(l+1)j} - 1} = 2^j + \frac{2^j - 1}{2^{(l+1)j} - 1} \leq 2^j + 1 \end{aligned}$$

Also gilt $2^j \sigma_j(k) < \left(2^j + \frac{2^j - 1}{2^{(l+1)j} - 1}\right)\sigma_j(k) = \sigma_j(2k) \leq (2^j + 1)\sigma_j(k)$. Für $j = 3$ bzw. $j = 7$ folgen die zweite und dritte Behauptung. $\square$

Für gerades $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
c_n &= \sum_{\substack{k_1+k_2=n\\ k_1,k_2\equiv 1(2)\\ k_1,k_2>0}} \sigma_3(k_1)\sigma_3(k_2) + \sum_{\substack{k_1+k_2=n\\ k_1,k_2\equiv 0(2)\\ k_1,k_2>0}} (\sigma_3(k_1)-\sigma_3(k_1/2))(\sigma_3(k_2)-\sigma_3(k_2/2))\\
&= \sum_{\substack{k_1+k_2=n\\ k_1,k_2\equiv 1(2)\\ k_1,k_2>0}} \sigma_3(k_1)\sigma_3(k_2) + \sum_{\substack{k_1+k_2=n\\ k_1,k_2\equiv 0(2)\\ k_1,k_2>0}} \sigma_3(k_1)\sigma_3(k_2)\\
&\quad -2 \sum_{\substack{k_1+k_2=n\\ k_1,k_2\equiv 0(2)\\ k_1,k_2>0}} \sigma_3(k_1/2)\sigma_3(k_2) + \sum_{\substack{k_1+k_2=n\\ k_1,k_2\equiv 0(2)\\ k_1,k_2>0}} \sigma_3(k_1/2)\sigma_3(k_2/2)\\
&= \sum_{\substack{k_1+k_2=n\\ k_1,k_2>0}} \sigma_3(k_1)\sigma_3(k_2) - 2\sum_{\substack{k_1+k_2=n\\ k_1,k_2\equiv 0(2)\\ k_1,k_2>0}} \sigma_3(k_1/2)\sigma_3(k_2) + \sum_{\substack{k_1+k_2=n\\ k_1,k_2\equiv 0(2)\\ k_1,k_2>0}} \sigma_3(k_1/2)\sigma_3(k_2/2)\\
&= \frac{\sigma_7(n)-\sigma_3(n)+\sigma_7(n/2)-\sigma_3(n/2)}{120} - 2\sum_{\substack{k_1+k_2=n\\ k_1,k_2\equiv 0(2)\\ k_1,k_2>0}} \sigma_3(k_1/2)\sigma_3(k_2)
\end{aligned}$$

Die letzte Umformung gilt nach Bemerkung 7.2. Mit der Abschätzung 2. aus der Bemerkung 7.2 folgt für gerades n

$$\begin{aligned}
c_n &\le \frac{\sigma_7(n)-\sigma_3(n)+\sigma_7(n/2)-\sigma_3(n/2)}{120} - 16\sum_{\substack{k_1+k_2=\frac{n}{2}\\ k_1,k_2>0}} \sigma_3(k_1)\sigma_3(k_2)\\
&= \frac{1}{120}\cdot(\sigma_7(n)+\sigma_7(n/2)-\sigma_3(n)-\sigma_3(n/2)-16\sigma_7(n/2)+16\sigma_3(n/2))\\
&\le \frac{1}{120}\cdot(\sigma_7(n)-15\sigma_7(n/2)-\sigma_3(n)+15\sigma_3(n/2)) =: h_n \quad ,
\end{aligned}$$

und für gerades $n > 2$ gilt nach Abschätzung 3. aus der Bemerkung 7.2

$$\begin{aligned}
h_n - \sigma_7(n/2) &= \frac{1}{120}(\sigma_7(n)-135\sigma_7(n/2)-\sigma_3(n)+15\sigma_3(n/2))\\
&\le \frac{1}{120}(-6\sigma_7(n/2)-\sigma_3(n)+15\sigma_3(n/2))\\
&\le \frac{1}{120}(-6\sigma_7(n/2)+7\sigma_3(n/2))\\
&= \frac{1}{120}\sum_{d|\frac{n}{2}} d^3(7-6d^4) < 0 \quad .
\end{aligned}$$

Man erhält also $0 < \sigma_7(n/2) - h_n \le \sigma_7(n/2) - c_n$. Zusammen mit $c_2 = 1$ ergibt das die Behauptung 7.1. $\square$

8 Anhang C

Liste der benutzten Computerprogramme:

MAPLE Programme:

- `T2Lemma.mws`, 21
- `T3gehtnicht.mws`, 22

MAGMA Programme:

- `A1.mag`, 24
- `Bsp.mag`, 9
- `DCBerechnung.mag`
  (wird von den auf Seite 24 angegebenen Programmen aufgerufen)
- `deepholesinBWdual.mag`, 94
- `Distnotinv.mag`, 10
- `Dist2NRC.mag`, 13
- `D4oplus.mag`, 24
- `D6oplus.mag`, 24
- `D8oplus.mag`, 24
- `E7plus.mag`, 24
- `E8oplus.mag`, 24
- `ganzvieleextrMFGamma04.mag`, 67
- `GCStrichBerechnung.mag`
  (wird von den Programmen `GD6oplus.mag`, `GE7plus.mag` und `GO8.mag` aufgerufen)
- `GD6oplus.mag`, 26
- `GE7plus.mag`, 26
- `GO8.mag`, 26

Literatur

[AnMa75] Andrianov, A.N., Maloletkin, G.N., Behaviour of theta series of degree n under modular substitutions, Math. of the USSR Izvestija 9, 227-241 (1975)

[BaVe01] Bachoc, C., Venkov, B., Modular forms, lattices and spherical designs, in: Martinet, Jacques (ed.), Euclidean lattices, spherical designs and modular forms. On the works of Boris Venkov. (Résaux Euclidiens, designs sphériques et formes modulaires. Autour des travaux de Boris Venkov) Monographies de l'Enseignement Mathématique 37. Genève: L'Enseignement Mathmatique. (2001).

[Best80] Best, M.R., Binary codes with a minimum distance of four. IEEE Trans. Inf. Theory 26, 738-742 (1980)

[BeHa01] Betsumiya, K., Harada, M., Classification of formally self-dual even codes of lengths up to 16, Des. Codes Cryptography 23, No.3, 325-332 (2001)

[CHKSS94] Calderbank, A.R., Hammons, A.R., Kumar, P.V., Sloane, N.J.A., Solé, P., The $\mathbb{Z}_4$-linearity of Kerdock, Preparata, Goethals and related codes, IEEE Trans. Inf. Theory 40, No.2, 301-319 (1994)

[CoEl03] Cohn, H., Elkies, N., New upper bounds on sphere packings. I, Ann. Math. (2) 157, No.2, 689-714 (2003)

[ConSlo93] Conway, J.H., Sloane, N.J.A., Self-dual codes over the integers modulo 4, J. Comb. Theory, Ser. A 62, No.1, 30-45 (1993)

[ConSlo99] Conway, J.H., Sloane, N.J.A. Sphere packings, lattices and groups, 3rd ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 290, New York, NY: Springer-Verlag (1999)

[Ebe02] Ebeling, W., Lattices and codes. A course partially based on lectures by F. Hirzebruch, 2nd ed., Advanced Lectures in Mathematics, Wiesbaden: Vieweg (2002)

[EiZa85] Eichler, M., Zagier, D., The theory of Jacobi forms, Progress in Mathematics, Vol. 55., Boston-Basel-Stuttgart: Birkhäuser Verlag, (1985)

[Fields] [www.math.uic.edu/˜fields/z4/index.html] www.math.uic.edu/ fields/ z4/index.html

[FGLP98] Fields, J., Gaborit, P. , Leon, J. S., Pless, V., All self-dual $\mathbb{Z}_4$ codes of length 15 or less are known, IEEE Trans. Inf. Theory 44, No.1, 311-322 (1998)

[Forn89] Forney, G. David jun., Coset codes. II: Binary lattices and related codes, IEEE Trans. Inf. Theory 34, No.5, Part II, 1152-1187 (1989)

[Frei83] Freitag, E., Siegelsche Modulfunktionen, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 254, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag (1983)

[Frei91] Freitag, E., Singular modular forms and theta relations, Lecture Notes in Mathematics 1487, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag (1991)

[HaOu99] Harada, M., Oura, M., On the Hamming weight enumerators of self-dual codes over $\mathbb{Z}_k$, J. Finite Fields Appl. 5, No.1, 26-34 (1999)

[HaWri58] Hardy, G.H., Wright, E.M., Einführung in die Zahlentheorie, München: R. Oldenbourg Verlag GmbH (1958)

[Kob84] Koblitz, N., Introduction to elliptic curves and modular forms, Graduate Texts in Mathematics, 97, New York etc.: Springer-Verlag (1984)

[MacWiSlo77] MacWilliams, F.J., Sloane, N.J.A., The theory of error-correcting codes, North-Holland Mathematical Library, Vol. 16, Amsterdam - London - New York - Tokyo: North-Holland (1977)

[Miya89] Miyake, T., Modular forms, Berlin etc.: Springer-Verlag (1989)

[NePle95] Nebe, G., Plesken, W., Finite rational matrix groups, Mem. Am. Math. Soc. 556 (1995)

[OdSlo80] Odlyzko, A.M., Sloane, N.J.A., A theta-function identity for nonlattice packings, Stud. Sci. Math. Hung. 15, 461-465 (1980)

[Pless98] Pless V.S. et al., An Introduction to Algebraic Codes, in: Pless, V.S.(ed.), Huffman, W.C.(ed.), Handbook of coding theory. Vol. 1, Amsterdam: Elsevier (1998)

[Queb98] Quebbemann, H.-G., A shadow identity and an application to isoduality, Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. 68, 339-345 (1998)

[RaS98] Rains, E.M., Sloane, N.J.A., Self-Dual Codes, in: Pless, V.S.(ed.), Huffman, W.C.(ed.), Handbook of coding theory. Vol. 1, Amsterdam: Elsevier (1998)

[Rog64] Rogers, C.A., Packing and Covering. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. No. 54), Cambridge: University Press (1964).

[Rung96] Runge, B., Codes and Siegel modular forms, Discrete Math. 148, No.1-3, 175-204 (1996)

[SchHe98] Scharlau, R., Hemkemeier, B., Classification of integral lattices with large class number, Math. Comput. 67, No.222, 737-749 (1998)

[SSP99] Scharlau, R., Schulze-Pillot, R., Extremal lattices, in : Matzat, B. Heinrich (ed.) et al., Algorithmic algebra and number theory. Selected papers from a conference, Heidelberg, Germany, October 1997, Berlin: Springer-Verlag 139-170 (1999)

[Ser78] Serre, J.-P., A course in arithmetic, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 7, New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag (1978)

[Skor92] Skoruppa, N.-P., Modular forms, Appendix I in: Hirzebruch, F., Berger, T., Jung, R., Manifolds and modular forms, Aspects of Mathematics, E 20, Wiesbaden: Vieweg-Verlag (1992)

[Slo77] Sloane, N.J.A., Binary codes, lattices, and sphere-packings, Combinatorial Surveys: Proceedings of the Sixth British Combinatorial Conference, P. J. Cameron (ed), Academic Press, NY, 1977, pp. 117-164

[Wan97] Wan, Z.-X., Quaternary codes, Series on Applied Mathematics, 8, Singapore: World Scientific. (1997)

[Zie89] Ziegler, C., Jacobi forms of higher degree, Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. 59, 191-224 (1989)

[Zong99] Zong, C., Sphere packings, Universitext, New York, NY: Springer (1999)

Index