HEFENDEHL-HEBEKER, Lisa
Duisburg-Essen

Argumentieren und Beweisen mit algebraischen Werkzeugen

Mit der elementar-algebraischen Formelsprache entstand "eine für die neuzeitliche Wissenschaft konstitutive und vorbildlose Neuerung" (Krämer 1988, S. 72). Die damit bereitgestellten symbolischen Methoden sind Darstellungsmittel, Explorationsinstrument, Argumentationshilfen und Beweismittel zugleich. Inwiefern das der Fall ist, soll Thema dieser Erörterung sein. Darin wird teilweise auf Ausführungen in (Hefendehl-Hebeker & Rezat, 2023) und (Hefendehl-Hebeker, 2022) zurückgegriffen.

1. Präalgebraisches Argumentieren und Beweisen

Zahlenmauern sind ein bewährtes Aufgabenformat, das im Mathematikunterricht vielfältig einsetzbar ist. Aus einer Fallstudie zu Beginn der Sekundarstufe I (Sjuts, 2006) stammen die nachfolgend zitierten Bearbeitungen einer Zahlenmauer mit Lücken (Abb. 1):

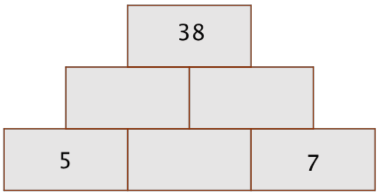

Abb. 1: Zahlenmauer mit Lücken

Thorsten: Die Differenz zwischen 5 und 7 ist 2. So müssen die Zahlen in der mittleren Etage auch die Differenz 2 haben, weil 5 und 7 mit der gleichen Zahl addiert werden. Da es aber nur dieses Paar gibt (18 und 20), die zusammen 38 ergeben und eine Differenz von 2 haben, müssen sie 18 und 20 sein. Dann ist das 13, weil 5+13=18 ergibt und 7+13=20 ist.

Karen: 5+7=12, 38-12=26, 26:2=13. Weil die Zahl zweimal gebraucht wird, einmal bei der 5, einmal bei der 7.

Die Argumentationen dieser beiden Kinder repräsentieren ein frühes, aber wirkmächtiges Stadium in der Entstehung algebraischer Denkweisen, wie es sich schon in den frühen Hochkulturen in Mesopotamien und Ägypten anbahnte. Radford (2010) beschreibt den Kern dieser Erkenntnisleistungen als den "analytischen Umgang mit dem Unbestimmten". Danach wird mit unbestimmten Zahlen oder Größen, mit denen nicht numerisch gerechnet werden kann, relational operiert. Man betrachtet, wie sich solche Zahlen bzw. Größen in einem arithmetischen Gefüge bewegen, und zieht daraus Schlüsse, die Teil einer Argumentationskette werden können. Das tun Thorsten und Karen auf je eigene Weise. Ihre Überlegungen beruhen auf einem klaren

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

Bewusstsein von der arithmetischen Struktur der Zahlenmauer, achten aber auf unterschiedliche Aspekte. Die Kinder argumentieren mit präalgebraischen Denkweisen, die noch nicht die symbolischen Methoden einer Formelsprache verwenden. Diese sind grundlegend für die weitere Entwicklung algebraischer Fähigkeiten und sollten deshalb in den ersten sechs Schuljahren ausgebildet und gepflegt werden.

2. Argumentieren und Beweisen mit der algebraischen Formelsprache

Das volle Spektrum elementar-algebraischer Methoden, zu dem Viète und Descartes seinerzeit den Anstoß gegeben haben, kommt später bei dem anspruchsvollen Unterrichtsthema quadratische Gleichungen zur Geltung. Mit einem Symbolsystem, das Variablensymbole sowohl für gegebene wie für gesuchte Größen und Operationssymbole für arithmetische Operationen enthält, ist es möglich, alle quadratischen Gleichungen unter eine gemeinsame Normalform zu fassen:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Mit dem formal durchgeführten Lösungsverfahren der quadratischen Ergänzung gelangt man zur allgemeinen Lösungsformel, in der der Werkzeugcharakter des symbolischen Kalküls deutlich wird:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}\,.$$

Eine solche Herleitung erfordert jedoch einen Sinn für Termstrukturen und impliziert die Fähigkeit, in einem algebraischen Ausdruck Teilterme so zu bündeln, dass eine nutzbare Grundstruktur erkennbar wird (Arcavi, 1994). Eine entscheidende, dahinterstehende Denkfähigkeit besteht darin, einen Ausdruck, z. B. $b^2 - 4ac$, nicht nur als eine mit den unbekannten Zahlen auszuführende Operation, sondern auch als deren Ergebnis anzusehen und dieses seinerseits wieder als Gegenstand von Operationen zu betrachten, hier z. B. Wurzelziehen. Das bedeutet, dass gedachte Rechenopertionen in objektähnliche Gegenstände eigenen Rechts verwandelt werden. Für diese Entwicklung von einer auszuführenden Operation zu einem denkbaren Konzept hat Tall (2013) den englischen Ausdruck "procept" geprägt. Sie gestattet, Transformationsprozesse als gedankliche Möglichkeiten zu durchlaufen, ohne sie numerisch auszuführen.

Die Erfahrung zeigt, dass an dieser Stelle für Lernende eine besondere Hürde liegt. Deshalb sollte diese Fähigkeit früh angebahnt werden. Ein geeignetes Beispiel aus der Geometrie der Jahrgangsstufe 7 ist das folgende: "In einem Viereck sind die Diagonalen gleich lang und halbieren sich gegenseitig. Begründe, ohne zu messen, dass jeder Innenwinkel 90° sein muss." Mit Grundkenntnissen über Winkelsätze gelangt man zu den Winkelangaben in Abb. 2

und sieht, dass die vier Innenwinkel alle die gleiche Größe $\gamma + \delta$ haben. Auch, wenn man γ und δ nicht kennt, kann man schließen, dass $4(\gamma + \delta) = 360°$, also $\gamma + \delta = 90°$ sein muss. Diese Schlussfigur ist elementar, für viele Lernende aber dennoch gewöhnungsbedürftig.

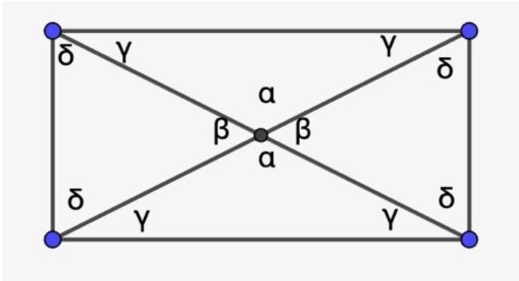

Abb. 2: Viereck mit gleich langen, sich gegenseitig halbierenden Diagonalen

Kehren wir zurück zur Lösungsformel für quadratische Gleichungen. Ist diese mit dem nötigen Umformungsgeschick hergeleitet, hat man zwei Vorgänge vereint: Man hat ein Lösungsverfahren erarbeitet und zugleich dessen Richtigkeit bewiesen. Die Korrektheit ist durch das regelgeleitete Vorgehen, basierend auf den Grundgesetzen der Arithmetik, garantiert. So tragen Termumformungen einen Beweischarakter in sich, weil man sie als Schlussfolgerungen in einem formalen Kalkül auffassen kann (Ruede, 2015, S. 5).

Die gewonnene Lösungsformel zeigt aber nicht nur, wie die Lösungen einer Gleichung aus ihren Koeffizienten ermittelt werden können, sie ermöglicht auch eine Untersuchung der Frage, unter welchen Bedingungen eine Gleichung eine, zwei oder gar keine Lösung hat. Der Doppelcharakter der Formel als Lösungsschema und Explorationsgegenstand ist eine weitere Ausprägung dessen, was Tall mit dem Kunstwort "procept" (s. o.) meinte.

3. Algebraisches Argumentieren und funktionales Denken

Eine neue Reichweite erlangt algebraisches Denken, wenn es sich mit funktionalem Denken verbindet und Variable nicht nur als unbestimmte oder unbekannte Zahlen, sondern auch als veränderliche Größen betrachtet. Für eine quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ kann man anhand der Scheitelpunktform Aussagen über die Gestalt der Parabel machen und damit zu neuen innermathematischen Deutungen gelangen. Eine Ausweitung des Explorationsfeldes ergibt sich, wenn man eine ganze Funktionenschar $f_t(x) = x^2 - tx + 3t$ mit einem Parameter $t \in \mathbb{R},\ t > 0$, betrachtet (Abb. 3), wobei noch ein weiterer Variablenaspekt ins Spiel kommt. Die Abbildung lässt vermuten, dass alle Parabeln durch den gemeinsamen Punkt $P(3; 9)$ laufen und dass ihre Scheitelpunkte wieder auf einer Parabel liegen. Diese Vermutungen lassen sich mit algebraischen Methoden beweisen.

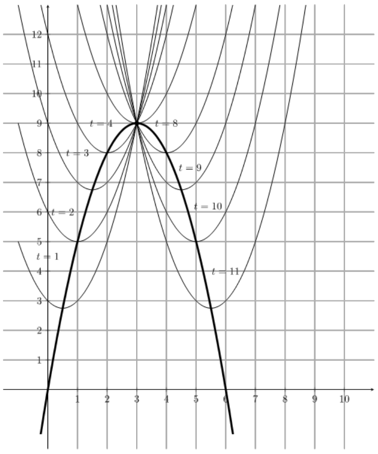

Abb. 3: Funktionenschar $f_t(x) = x^2 - tx + 3t, t \in \mathbb{R},\ t > 0$.

Die Ausführung erfordert einen flexiblen Umgang mit den Variablenaspekten und immer wieder formales Operieren in einer symbolischen Welt eigenen Rechts. Dabei sind die algebraischen Methoden "nicht nur ein Beschreibungsmittel, sondern zugleich ein Werkzeug des Geistes, eine Denktechnik und ein Intelligenzverstärker." (Krämer, 2003, S. 171).

Literatur

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24–35. https://www.jstor.org/stable/40248121

Hefendehl-Hebeker, L. (2022). Elementare Algebra – Werkzeug zum Umgang mit dem Unbestimmten. In: S. Bauer & A. Büchter (Hrsg.), Themenheft Elementare Algebra. *Der Mathematikunterricht, 68(3),* 3 – 15.

Hefendehl-Hebeker, L. & Rezat, S. (2023). Algebra: Leitidee Symbol und Formalisierung. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 123 – 158). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-66604-3

Krämer, S. (2003). >Schriftbildlichkeit< oder: Über eine (fast) vergessene Dimension der Schrift. In S. Krämer & H. Bredekamp (Hrsg.), *Bild – Schrift – Zahl* (S. 157-176). Wilhelm Fink Verlag.

Krämer, S. (1988). *Symbolische Maschinen: Die Idee der Formalisierung in geschichtlichem Abriss.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Radford, L. (2010): Signs, Gestures, Meanings: Algebraic Thinking from a Cultural Semiotic Perspective. *Proceedings of CERME 6*, January 28th – February 1st 2009, Lyon France. www.inrp.fr/editions/cerme6.

Rüede, C. (2015). *Strukturierungen von Termen und Gleichungen: Theorie und Empirie des Gebrauchs algebraischer Zeichen durch Experten und Novizen*. Springer.

Sjuts, J. (2006). Diagnostische und didaktische Kompetenz auf Forschungsbasis: das Beispiel Zahlenmauern. In: Rieß, F. (Hrsg.), *Einblicke in aktuelle Forschungszusammenhänge zum Mathematikunterricht* (S. 21-37). Didaktisches Zentrum (diz), Oldenburg.

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically*. Cambridge Univ. Press.