

ETZOLD, Heiko
Potsdam

Lernmodelle zum Lösen von Gleichungen – Eine Analyse und Weiterentwicklung aus tätigkeitstheoretischer Perspektive

Das Lösen von Gleichungen ist eine herausfordernde Aufgabe für Schülerinnen und Schüler, weshalb zu deren Unterstützung verschiedene Veranschaulichungen genutzt werden. Von Barzel & Holzäpfel (2011) und Weigand et al. (2022, S. 260 ff.) diskutierte Modelle werden im Folgenden kurz vorgestellt, für den Lerngegenstand *Lösen linearer Gleichungen mittels Äquivalenzumformungen* aus stoffdidaktischer und tätigkeitstheoretischer Perspektive analysiert und zum Teil weiterentwickelt.

Modelle für Äquivalenzumformungen

Das *Waagemodell* stellt Gleichungen über Massestücke auf einer Balkenwaage dar, die Gleichheit wird über das Gleichgewicht der Waage visualisiert. Eine Äquivalenzumformung entspricht derselben Operation auf beiden Waagschalen, sodass stets ein Gleichgewicht besteht.

Beim »Knack die Box«-Modell ist die Anzahl von Objekten (z. B. Streichhölzer) in einer Schachtel unbekannt und die Gleichung wird mit entsprechend vielen Schachteln und einzelnen Objekten dargestellt. Ähnlich wie beim Waagemodell wird die Gleichung über gleichartiges Operieren auf beiden Seiten gelöst.

Im *Streckenmodell* werden beide Terme einer Gleichung über zusammengesetzte Strecken dargestellt. Die Gleichheit zeigt sich dann über die gleiche Länge der Strecken und Äquivalenzumformungen sind über gleichzeitiges Abziehen oder Hinzufügen bzw. Auftrennen von Teilstrecken visualisierbar.

Darüber hinaus stellen Barzel & Holzäpfel (2011) noch das *Faltmodell* vor, das in Abb. 1 mit dargestellt ist, allerdings wegen seiner geringen Verbreitung in diesem Beitrag nicht weiter verfolgt wird.

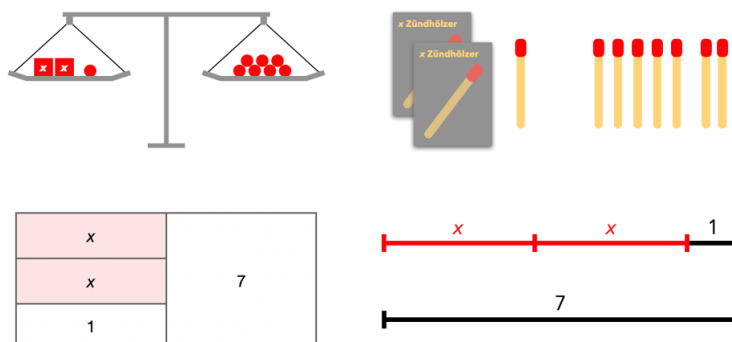


Abb. 1: Verschiedene Modelle für die Gleichung $2x + 1 = 7$ (eigene Darstellung)

Der Lernmodell-Begriff aus der Tätigkeitstheorie

Für die Analyse der o. g. Modelle soll der *Lernmodell*-Begriff aus der Tätigkeitstheorie genutzt werden. Lernmodelle sind demnach »sinnliche Stützen geistigen Handelns« (Giest & Lompscher, 2006, S. 225), also Repräsentationen eines Lerngegenstandes, mit denen (zumindest gedanklich) operiert werden kann. Sie haben die Eigenschaft, dass sie »nicht die konkreten Merkmale der einzelnen Erscheinungen oder Situationen, sondern nur konstitutive, im gegebenen Kontext wesentliche Merkmale und Relationen enthalten, also *abstrakt* sind«. Gleichzeitig sind sie »*anschauliche* Abbildungen und machen damit die grundlegenden Zusammenhänge und Wesensmerkmale der Wahrnehmung und Vorstellung zugänglich« (Lompscher, 1985, S. 64, Hervorhebungen im Original). Damit sind sie insbesondere für Verinnerlichungsprozesse dienlich, da sie die »abstrakte Struktur des Gegenstands zusammen mit dem prinzipiellen Weg abbilden, der zur Aufdeckung der Struktur geführt hat« (Lompscher, 1996, S. 6). Als Beispiele werden Schemata und Symbole genannt, aber auch Arbeitsmittel können als Lernmodelle aufgefasst werden, denn auch diese »repräsentieren mathematische Objekte und erlauben Handlungen mit den dargestellten Objekten« (Reinhold et al., 2023, S. 525).

Analyse bestehender Modelle

Die *gleichzeitige Abstraktheit wie Anschaulichkeit*, die als charakterisierend für Lernmodelle aufgefasst wird, dient nun als Analysekriterium. Bezüglich der Anschaulichkeit zeigen die o. g. Modelle folgende Merkmale:

- Die *Variable* erfährt in allen Modellen eine anschauliche Bedeutung (unbekannte Masse, Anzahl der Objekte in Schachtel, Länge der Teilstrecke).
- Die *Gleichheit* wird über die Ausgewogenheit bzw. gleiche Länge der Gesamtstrecken repräsentiert. Das »Knack die Box«-Modell stellt die Gleichheit nicht visuell dar, sondern muss in die Repräsentation hineininterpretiert werden. Hinsichtlich des Waagemodells kann hinterfragt werden, inwiefern tatsächliche Erfahrungen mit Balkenwaagen bestehen, was Einfluss auf die Anschaulichkeit des Modells haben kann (vgl. Barzel & Holzäpfel, 2011, S. 6).
- Als *Äquivalenzumformungen* sind Subtraktionen in allen Modellen übers Wegnehmen, Additionen übers Hinzufügen realisierbar. Die Division kann über gleichmäßiges Bündeln (Waage- und Boxmodell) bzw. Aufteilen (Streckenmodell) der Objekte veranschaulicht werden, wobei im Waage- und Boxmodell für die finale Ermittlung von x noch ein Wegnehmen notwendig ist, im Streckenmodell ist ein Längenvergleich möglich.

Diese kurze Analyse zeigt, dass die Modelle, bis auf die Gleichheit beim »Knack die Box«-Modell, als anschaulich im Sinne der Lernmodell-Charakterisierung eingeschätzt werden können. Hinsichtlich der Abstraktheit lässt sich feststellen:

- Sinnvoll visualisierbar und operierbar sind in allen Modellen nur Gleichungen mit *positiven Werten*. Diese Einschränkung widerspricht der geforderten Abstraktheit. Im Waagemodell gäbe es die Möglichkeit, dass bspw. $x - 1$ über ein Massstück für x mit einem Loch der Größe 1 dargestellt wird. Auch ermöglichen digitale Umsetzungen, dass negative Werte eine Bewegung der Waage entgegen der Schwerkraft bewirken (vgl. Weigand et al., 2022, S. 261). Beides widerspricht jedoch der Anknüpfung an entsprechende Handlungszusammenhänge. Im »Knack die Box«-Modell sind negative Werte über verschiedenfarbige Objekte möglich, falls entsprechende Repräsentationen im Vorfeld aufgebaut wurden. Im Streckenmodell können Pfeile statt Strecken verwendet werden, die über ihre Richtung das Vorzeichen darstellen. Derartige Visualisierungen sind i. d. R. vom Rechnen mit negativen Zahlen an der Zahlengeraden bekannt.
- Das Waage- und das Streckenmodell ermöglichen, die (Un-)Gleichheit der beiden Terme abhängig vom Wert für x nachzuvollziehen, also die Idee der *Lösung einer Gleichung* (dasjenige x , für das die Gleichung eine wahre Aussage ergibt) im Modell sichtbar zu machen. Eine Variation des Wertes für x entspricht im Waagemodell einem Erschweren/Erleichtern der entsprechenden Massstücke (bspw. visualisierbar über Vergrößern/Verkleinern) bei gleichzeitigem Ausschlag des Balkens. Im Streckenmodell ändern sich lediglich die Streckenlängen, was weniger visueller Interpretation bedarf und daher ggf. besser erfasst werden kann.
- Das Streckenmodell ermöglicht nicht nur natürliche, sondern auch *rationale Vorfaktoren*, da die in den anderen Modellen vorherrschende diskrete Sichtweise (Anzahl der einzelnen Objekte) nun einer kontinuierlichen Sichtweise (Länge der Strecken) weichen kann.

Dieser Analyse zufolge kann insbesondere das Streckenmodell (bzw. angepasst als Pfeilmodell) als abstrakt im Sinne der Lernmodell-Charakterisierung angesehen werden. Als Anknüpfungspunkte zur Verbesserung der Abstraktheit können die *Ermöglichung negativer Werte* sowie eine *Realisierung der Variabilität der Variable* benannt werden.

Weiterentwicklung zum digital gestützten Pfeilmodell

Derzeit befindet sich ein digital gestütztes Arbeitsmittel in Entwicklung, das

die o. g. Potenziale über ein dynamisches Operieren mit den Streckenlängen, umsetzen soll.

Neben dem Hinzufügen, Entfernen und Aufteilen von Teilstrecken kann über ein »Ziehen« für beide Terme jeweils die Länge der Gesamtstrecke verändert werden. Dabei bleiben die Teilstrecken, die absolute Werte visualisieren, in ihren Längen unverändert und die Teilstrecken, die Variablen repräsentieren, verkürzen/verlängern sich gleichartig für beide Terme (vgl. Abb. 2). Sobald Gleichheit erlangt ist, kann diese über einen entsprechenden Button »festgelegt werden« – die Länge der »x-Strecken« ändert sich damit nicht mehr. Daraufhin ist ein äquivalentes Operieren für beide Gesamtstrecken möglich, um den korrekten Wert für x zu bestimmen.



Abb. 2: Gleichheit (links) und Ungleichheit (rechts) der Terme $2x + 1$ und 7

Insgesamt sind die stofflichen Zusammenhänge zum Lösen von Gleichungen und der Lernmodell-Begriff leitend für die zu treffenden Designentscheidungen der digitalen Anwendung.

Literatur

- Barzel, B., & Holzäpfel, L. (2011). Gleichungen verstehen. *mathematik lehren* 169, 2–7.
- Giest, H., & Lompscher, J. (2006). *Lerntätigkeit – Lernen aus kultur-historischer Perspektive. Ein Beitrag zur Entwicklung einer neuen Lernkultur im Unterricht*. Lehmanns Media.
- Lompscher, J. (1985). Die Ausbildung von Lernhandlungen. In J. Lompscher (Hrsg.), *Persönlichkeitsentwicklung in der Lerntätigkeit* (S. 53–78). Volk und Wissen.
- Lompscher, J. (1996, 15.09). *Aufsteigen vom Abstrakten zum Konkreten—Lernen und Lehren in Zonen der nächsten Entwicklung*. Übersetzung eines Referats auf dem Symposium "Die ZdnE: Beziehungen zwischen Erziehung und Entwicklung" im Rahmen der 2. Internationalen Konferenz zur soziokulturellen Forschung, Genf. <https://publi-shup.uni-potsdam.de/opus4-ubp/frontdoor/deliver/index/docId/444/file/AUF-STEIG.pdf>
- Reinhold, F., Walter, D., & Weigand, H.-G. (2023). Digitale Medien. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 523–559). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-66604-3_17
- Weigand, H.-G., Schüler-Meyer, A., & Pinkernell, G. (2022). *Didaktik der Algebra: Nach der Vorlage von Hans-Joachim Vollrath*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-64660-1>