

HOLLAND, Ricarda; WOSCH, Carolin; ROLFES, Tobias & HOTH, Jessica
Frankfurt, Rostock

Fehler beim Lösen von arithmetischen Aufgaben zu rationalen Zahlen - Eine Analyse der Bearbeitungen von Lehramtsstudierenden

Im Sinne der Leitidee Zahl und Operation sollen Lernende in der Sekundarstufe I sinntragende Vorstellungen zu rationalen Zahlen entwickeln, mit diesen operieren oder sie im Rahmen von Rechengesetzen vorteilhaft anwenden können (KMK, 2022). Des Weiteren sind Prozentrechnungsfähigkeiten in dieser Stufe zentral. Damit die Lernenden diese Kompetenzen erwerben können, müssen auch ihre Mathematiklehrkräfte über ausreichende fachliche Kompetenzen im Bereich Zahl und Operation verfügen. Die vorliegende Studie gibt einen Einblick in die schulmathematischen Kompetenzen von angehenden Mathematiklehrkräften aus dem Primarbereich und fokussiert sich hierbei auf die Bruchzahl- und Bruchrechnfehler von Lehramtsstudierenden zu Studienbeginn.

Theoretischer Hintergrund

Für Akteure in der Lehrkräfteausbildung ist essenziell, dass als Basisniveau für die Lehrkräfte mindestens die Kompetenzen gelten, die auch von den Schülerinnen und Schülern erworben werden sollten, womit die in den Curricula verankerten Ziele - unter anderem in der Arithmetik - gemeint sind. Gemäß Klieme und Leutner (2006) bezeichnen Kompetenzen "kontextspezifische kognitive Leistungsdispositionen, die sich funktional auf Situationen und Anforderungen [...] beziehen" (S. 879). Im Kontext der Arithmetik impliziert dies, dass Lernende über Kenntnisse und Fähigkeiten verfügen, um arithmetische Aufgaben zu natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen zu verstehen, zu lösen und ihre Lösungen zu kommunizieren.

Der Bereich der rationalen Zahlen stellt Personen dahingehend vor Herausforderungen, da implizit herausgebildete Vorstellungen zu den natürlichen und ganzen Zahlen nicht in gleicher Form bei den rationalen Zahlen Anwendung finden können (Eichelmann et al., 2012). Dies wird bspw. an der Dichtigkeit der Brüche und Operationen wie dem Erweitern für die Addition ungleichnamiger Brüche deutlich. Im Rahmen der aktuellen PIAAC-Ergebnisse konnte festgestellt werden, dass mindestens 60 % der Erwachsenen über mittlere mathematische Kompetenzen verfügen und somit u. a. Berechnungen mit Dezimalzahlen, Prozentangaben und Brüchen durchführen können (Rammstedt et al., 2024). Studien zeigen unterschiedliche Fehlertypen je nach Anforderung der Aufgabe bzw. Operation bei Lernenden

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

unterschiedlicher Altersstufen (Eichelmann et al., 2012). Beispielsweise Rechenfehler durch eine falsche Umwandlung gemischter Zahlen oder beim Addieren zweier Brüche durch falsches Erweitern oder der Übergeneralisierung bekannter Rechenregeln aus den natürlichen Zahlen (Eichelmann et al., 2012). Aufgrund dieses Forschungsstands zu Fehlern bei Bruchzahlen und beim Bruchrechnen stellt sich die Frage, inwiefern diese Fehler auch bei (angehenden) Mathematiklehrkräften auftreten bzw. inwiefern Lehrkräfte über die Kompetenzen zu rationalen Zahlen verfügen. Die Fragestellung lautet daher: Wie gut lösen angehende Mathematiklehrkräfte zu Beginn des Studiums Aufgaben im Bereich Brüche und welche Fehler können rekonstruiert werden?

Methodisches Vorgehen

Zur Erfassung dieser Kompetenzen von angehenden Mathematiklehrkräften wurde im Rahmen des Projekts a^2 (Diagnose und Förderung arithmetischer und algebraischer Basiskompetenzen) unter anderem ein Diagnosetest zur Erfassung der arithmetischen Basiskompetenzen für den Bereich der rationalen Zahlen entwickelt. Der Test umfasst Aufgaben aus den Bereichen Umgang mit Zahlen (z. B. darstellen, erweitern), Operationen (z. B. Grundrechenarten, Prozentrechnung) und weiterführenden Zusammenhängen im Rahmen der Bruchrechnung (z. B. Terme, Zusammenhänge zwischen Prozent- und Bruchdarstellung) in Anlehnung an die Vorgaben aus nationalen und internationalen Curricula (insbesondere KMK, 2022). Zu den drei Facetten wurden Aufgaben im offenen und geschlossenen Antwortformat für den Diagnosetest entwickelt.

An dem Diagnosetest nahmen insgesamt 441 Lehramtsstudierende der Goethe-Universität Frankfurt im Rahmen einer mathematikdidaktischen Einführungsvorlesung im Herbst 2024 teil. Die Studierenden befanden sich zum Zeitpunkt der Erhebung vorwiegend im ersten ($n=268$) oder zweiten Semester ($n=120$). Alle Studierenden erhielten insgesamt 29 Aufgaben mit rationalen Zahlen, die ihnen zufällig aus einem Pool von 108 Aufgaben im Rahmen einer Online-Erhebung zugeteilt wurden. In diesem Beitrag erfolgt die Analyse der Lösungen der offen gestellten Aufgaben. Diese umfassten 54 Aufgaben, welche aus dem Bereich rationale Zahlen von durchschnittlich 96 Studierenden beantwortet wurden. Die offenen Antworten der Studierenden wurden mithilfe einer induktiven Kategorienbildung nach Mayring (2010) mit Blick auf bekannte Bruchrechenfehler kategorisiert, da allgemeine Fehlertypen auch bei Rechnungen mit Dezimalzahlen und Prozentrechnung mit einbegriffen werden sollten.

Ergebnisse

Die Auswertung zeigt, dass 60 % der offenen Aufgaben korrekt beantwortet wurden. Darüber hinaus deutet die systematische Fehleranalyse darauf hin, dass ein Teil der Fehler bestimmte Charakteristika aufweisen.

Fehlertyp	Zahlen	Operationen	Zusammenhänge
Übergeneralisierung \mathbb{N} zu \mathbb{Q} bspw. Umgang mit gemischter Zahl	26	21	10
Stellenwertfehler bspw. beim Umwandeln von Bruch in Dezimalzahl um Stellen verschoben	97	59	89
Vorzeichenfehler bspw. - statt + im Ergebnis	8	13	7
Rechenrichtungsfehler bspw. Umkehroperation	9	10	11
Umwandeln/Darstellen/Runden bspw. Dezimalzahl, wenn Bruch gefordert	83	37	101
Unwissenheit/Schwierigkeit bspw. durch Angabe "keine Ahnung"	26	21	46
Weitere Rechenfehler	31	7	24
Sonstige Fehler	358	407	687

Tabelle 1: Übersicht der Fehlertypen und deren Häufigkeiten je Facette

Die Tabelle zeigt die absoluten Häufigkeiten der vorkommenden Fehlertypen. Pro Aufgabe wurde ein Typ kodiert oder die Aufgabe als richtig bewertet. Am häufigsten traten unter den systematisch deutbaren Fehler jene im Sinne der Stellenwertfehler, durch eine falsche Darstellung des Ergebnisses und durch Rechenfehler oder Übergeneralisierung von \mathbb{N} zu \mathbb{Q} auf. Weiterführend wurde häufig kenntlich gemacht, dass die Aufgabe bewusst nicht beantwortet wurde (Unwissenheit) oder das Zustandekommen des Ergebnisses war im Sinne eines sonstigen, uneindeutigen Fehlers nicht erkennbar.

Diskussion und Ausblick

Im Rahmen der durchgeführten Fehleranalyse wurde ersichtlich, dass verschiedene Fehlertypen im Kontext der Bruchrechnung bei angehenden Mathematiklehrkräften zu Beginn ihres Studiums auftreten. Sowohl die Darstellung als auch der Umgang mit Stellenwerten und Konzepten der natürlichen Zahlen wurden identifiziert. Es bedarf eines Grundvorstellungsumbruchs und damit einer Reorganisation bestehender Konzepte, um nicht nur algorithmisch-formal, sondern auch verstehensbasiert die Bruchzahlen und

-rechnung bewältigen zu können. Insgesamt zeigt sich für die Analyse der hier ausgewählten Aufgaben, dass die Lösungsrate der angehenden Mathematiklehrkräfte identisch ist mit der einer beliebigen Auswahl Erwachsener (vgl. PIAAC) und darüber hinaus die klassischen Fehlvorstellungen aus dem Bereich der Brüche auch bei dieser Kohorte gefunden wurden. Mit Blick auf die spätere berufliche Tätigkeit dieser Personen muss also während des Lehramtsstudiums eine Weiterentwicklung dieser grundlegenden Kompetenzen erfolgen, was nicht immer in den Hochschulcurricula vorgesehen ist. Dabei ist anzumerken, dass die Analyse eine Zuschreibung der Vorgehensweise zum Erhalt der entsprechenden falschen Lösung war und dies nicht interpretationsobjektiv geschieht. Weiterführende Untersuchungen bspw. durch qualitative Ansätze können hier wirkungsvoll sein, um Ursachen konzeptioneller Schwierigkeiten besser zu beleuchten. Auch kann Anschlussforschung identifizieren, ob die Fehler aufgaben- oder personenspezifisch erfolgen.

Im Rahmen des Projekts liefert die Analyse der Fehlertypen wichtige Hinweise für die Weiterentwicklung des Diagnostetests. Die fehlerhaften Antworten können als sinnhafte Distraktoren für geschlossene Items verwendet werden. Für die Lehramtsausbildung und damit weiterführend die Qualitätssicherung für Fachunterricht wird anhand der hier aufgezeigten Ergebnisse deutlich, dass teils Defizite der Sekundarstufe I gefestigt bleiben. Aus diesem Grund ist es von entscheidender Bedeutung, zu Studienbeginn konkrete Förderangebote bereitzustellen, um defizitären Kompetenzen der Studierenden auszugleichen, sodass sie sowohl für den Schulkontext als auch den Erwerb der Hochschulmathematik anschlussfähig sind.

Literatur

- Eichelmann, A., Narciss, S., Schnaubert, L. & Melis, E. (2011). Typische Fehler bei der Addition und Subtraktion von Brüchen – Ein Review zu empirischen Fehleranalysen. *JMD*, 33(1), 29–57. <https://doi.org/10.1007/s13138-011-0031-5>
- Kultusministerkonferenz (KMK). (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA)* (in der Fassung vom 23.06.2022). https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf
- Klieme, E. & Leutner, D. (2006). Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen. Beschreibung eines neu eingerichteten Schwerpunktprogramms der DFG. *Zeitschrift für Pädagogik*, 52(6), 876–903.
- Mayring, P. (2010). Qualitative Inhaltsanalyse. In G. Mey & K. Mruck (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie*. VS. https://doi.org/10.1007/978-3-531-92052-8_42
- Rammstedt, B., Gauly, B., Kapidzic, S., Maehler, D. B., Martin, S., Massing, N., Schneider, S. L. & Zabal, A. (2024). *PIAAC 2023. Grundlegende Kompetenzen Erwachsener im internationalen Vergleich*. <https://doi.org/10.31244/9783830999652>