

EBERS, Patrick
Essen

Arten der Ergebnisdokumentation bei der Bearbeitung offener medial gestützter Aufgaben

Potenziale digitaler Medien entfalten sich nur in Kombination mit einer Veränderung der Unterrichtsprozesse (SWK, 2022). Für den Mathematikunterricht kann das z. B. die Distanzierung von Rechen- oder Standardaufgaben bedeuten, sodass Raum für reichhaltiges mathematisches Arbeiten eröffnet wird. Betrachtet wird eine exemplarische Aufgabe, die für die Lehrkräftebildung im Rahmen eines Videofalls (Ebers, 2024; Thurm et al., 2022) aufbereitet wird. Ausgehend von der Äußerung einer Lehrkraft, dass der Aufgabe eine Aufforderung zur Ergebnisdokumentation fehlt, wird das Forschungsinteresse verfolgt, Arten dieser Dokumentation bei offenen Aufgaben explorativ zu untersuchen. Die gewonnenen Erkenntnisse sollen Lehrkräfte noch besser auf den Einsatz offener Aufgaben vorbereiten.

Theoretische Grundlagen

Denn neben der Eigenschaft, dass offene Aufgaben divergente Lösungswege erzeugen, scheint es logisch, dass auch die Dokumentation der Bearbeitung unterschiedlich ist. Insbesondere beim Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge ist die Dokumentation der Ergebnisse eine andere. Schacht (2016) schlägt dafür eine Unterscheidung zwischen lernverlaufsorientierten und lernstandsorientierten Gütekriterien vor. Erstere sind Aufgaben im Unterrichtsgeschehen, zweitere gelten für Prüfungsformate. Für die Bearbeitung offener Aufgaben im Unterricht sind Formalisierungsgrad, Sprachliche Elaboriertheit und Komplexität, sowie Reflexionsgrad die drei lernverlaufsorientierten Gütekriterien (Schacht, 2016), die für die vorliegende Studie relevant sein könnten.

Der Einsatz digitaler Werkzeuge zeigt für das Lernen von Mathematik viele Potenziale, wie das Erzeugen von Beispielen oder die Verknüpfung verschiedener Darstellungen und dabei insbesondere die dynamischen Visualisierungen (z. B. Drijvers et al., 2016). Bei offenen Aufgaben kann das digitale Werkzeug Routineaufgaben wie das Zeichnen von Graphen oder das Umformen von Termen und Lösen von Gleichungen übernehmen, damit kognitive Kapazitäten für reichhaltige mathematische Überlegungen, das Kommunizieren von Hypothesen, Vergleichen von Ergebnissen und das Finden von Zusammenhängen frei werden (Barzel & Ebers, 2020). Da insbesondere bei offenen Aufgaben die Bandbreite der Zugänge und Ergebnisse sehr variabel ist, wird für die folgende Aufgabe untersucht, welche Art der Ergebnisdokumentation von Lernenden gewählt wird.

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.

<https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0>

Methodik

Zur Beantwortung der Frage *Wie dokumentieren Lernende die Ergebnisse ihrer Aufgabenbearbeitung einer offenen Aufgabe bei Nutzung digitaler Mathematikwerkzeuge?* wird die Aufgabe *Parabel als Produkt zweier linearer Funktionen* (Abb. 1), die in verschiedenen Fortbildungen genutzt wurde (<https://dzlm.de/node/2878>), eingesetzt.

Wenn man zwei lineare Funktionen miteinander multipliziert, entsteht eine quadratische Funktion.
Verändere die linearen Funktionen so,

- ...dass die Öffnung der Parabel umgekehrt ist.
- ...dass die Parabel die x-Achse berührt.
- ...dass der Scheitelpunkt der Parabel dieselbe x-Koordinate hat wie der Schnittpunkt der Geraden.

Hinweise:

- Nutze GeoGebra für die Bearbeitung der Aufgabe.
- Dokumentiere deine Ergebnisse.

Zusatz:
Gibt es Parabeln, die sich auf diese Weise nicht darstellen lassen?

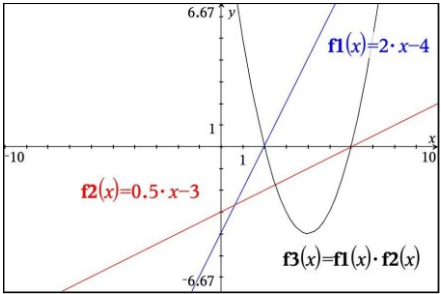


Abb. 1: Lernendenaufgabe (Grafik mit TI Nspire erstellt)

Die Aufgabe eröffnet verschiedene Zugänge. Durch die Verfügbarkeit eines Funktionenplotters können Beispiele erkundet werden, wobei durch die Veränderung der Terme Auswirkungen an der Grafik untersucht werden können. Je nach verwendetem Medium ist auch der umgekehrte Zugang möglich. Eine algebraische Lösung ist denkbar, benötigt allerdings komplexe Umformungen. Es lassen sich somit reichhaltige mathematische Erkundungen machen oder Zusammenhänge zwischen den Parametern der linearen Funktionen und der Parabel entdecken. Als eine einfache Form von verknüpften Funktionen bietet sich der Einsatz der Aufgabe auch in der Oberstufe an.

Für diese Teilstudie wurde die Aufgabe in einer neunten Klasse eines Berliner Gymnasiums mit MINT-Profil eingesetzt. Insgesamt liegen 21 schriftliche Dokumentationen vor. Teilweise wurde in Paaren oder Kleingruppen gearbeitet. In einem kollegialen Austausch mit acht Mathematikdidaktiker*innen wurden die Dokumente gesichtet und analysiert. Dabei ging es um die fachliche Richtigkeit und die Art der Ergebnisdokumentation.

Ergebnisse und Diskussion

Innerhalb der vier Teilaufgaben (inkl. Zusatz) wurden induktiv Kategorien (Tab. 1) gebildet. Aufgrund der Aufgabenstruktur sind diese für (1)-(3) identisch und für (4) abweichend davon benannt. Der Tabelle lässt sich die Verteilung der Dokumentationen auf die verschiedenen Kategorien entnehmen. In eckigen Klammern steht die Anzahl der fehlerhaften Lösungen.

Kategorie	(1)	(2)	(3)	Kategorie	(4)
Beispiel	2	5 [2]	5 [1]	Nein	5 [5]
Beispiel & Verallgemeinerung	4	2	0	Nein & Begründung	1 [1]
Allgemeine Lösung	10	7 [2]	2 [1]	Nein - Umkehrung	3 [3]
Spezialfall $(x) \cdot (-x)$	2	3	3	Ja, $c > 0$	1
Betrachtung von der quadratischen Funktion aus	2 [2]	1 [1]	1 [1]	Ja, wenn const. (Begründung falsch)	3 [3]
Sonstige	1 [1]	2 [1]	4	Symb. - Umkehrung	1 [1]
Nicht bearbeitet	0	1	1	Nicht bearbeitet	7
Analog zu (2)			5 [1]		

Tab. 1: Übersicht über die kategorisierten Dokumentationen

Die Dokumentation von Schüler*in BE08 erläutert die Art der Kategorisierung. Teilaufgaben (1)-(3) werden knapp, allein durch ein korrekt gewähltes Beispiel, beantwortet. Die Notation bei (2) verdeutlicht das Vorgehen: f_2 wurde um vier Einheiten nach links verschoben. Bei Teilaufgabe (3) notiert BE08 die gleiche Lösung wie bei (2). Das ist richtig, aber nur ein Spezialfall. Zusatz (4) wird mit „Nein, da sich alle Parabeln in zwei lineare Funktionen zerlegen lassen.“ (BE08) beantwortet. Dies ist falsch, da Parabeln ohne Nullstellen sich nicht als Produkt zweier linearer Funktionen darstellen lassen.

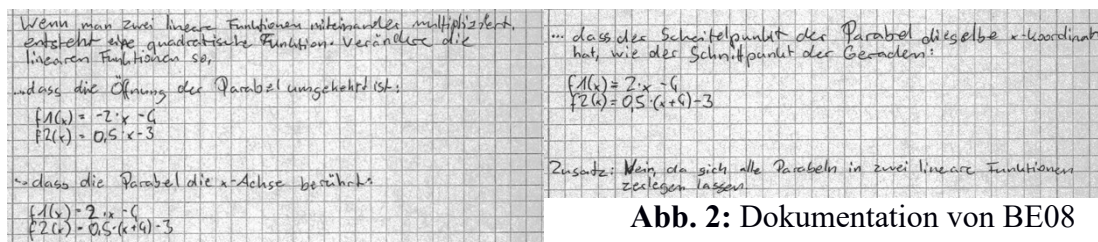


Abb. 2: Dokumentation von BE08

Kontrastierend dazu stehen die Antworten von BE10. Verallgemeinerungen werden verwendet, die weitestgehend richtig sind. Lediglich die Formulierung bei (2) könnte treffender sein. Analog zu BE08 wird für (3) die gleiche Lösung wie für (2) notiert. Weitere Fällen werden auch hier nicht gesucht.

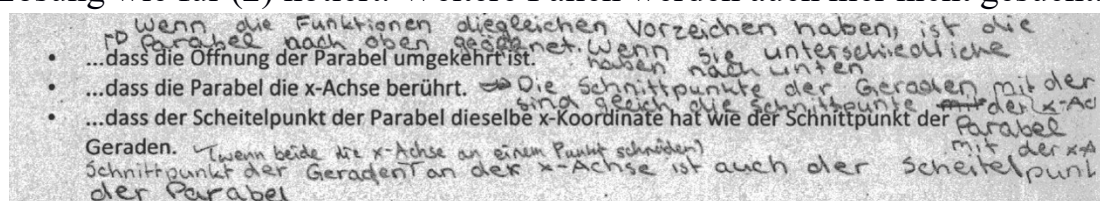


Abb. 3: Dokumentation von BE10

Die Bandbreite der Ergebnisdokumentationen in Form der dargestellten Kategorien lassen sich den Kriterien von Schacht (2016) zuordnen. So ist der Unterschied im Formalisierungsgrad und der Komplexität erkennbar. Eine Reflexion, bei (3) noch weitere Fälle zu betrachten, bleibt aus. Es ist nicht verwunderlich, dass keine Werkzeugsprache, wie Schacht (2016) sie identifiziert hat, verwendet wird, da kein direkter Befehl zur Lösung genutzt werden kann. In wenigen Fällen beschreiben die Lernenden ihr Vorgehen der

Werkzeugnutzung. *Beispiele* bei der Ergebnisdokumentation zu nutzen, ist erwartbar. Die Teilaufgaben (2) und (3) sind komplexer; dass dort mehr Beispiele verwendet werden und weniger verallgemeinert wird, ist nachvollziehbar. Die Kategorie *allgemeine Lösung ohne Beispiel* nimmt ebenso bei den fortschreitenden Teilaufgaben ab. Interessant ist der betrachtete Spezialfall $(x) \cdot (-x)$, welcher alle Teilaufgaben löst. Zwar ist die Lösung nicht vollständig, lässt sich aber so interpretieren, dass die Lernenden die Aufgabe so verstanden haben, dass alle Aspekte gleichzeitig erfüllt sein müssen.

Auch für diese starke Lerngruppe ist das Finden aller Lösungen eine Herausforderung. Nur BE10 bietet für (4) eine fast richtige Lösung an. "Wenn c größer als null ist, dann nicht" (BE10). Diese ist nicht vollumfänglich, macht aber deutlich, dass verstanden wurde, dass für Parabeln, die vollständig oberhalb der x -Achse liegen keine Darstellung als Produkt möglich ist. Es fehlt noch die Unterscheidung für nach oben und unten geöffnete Parabeln.

Diese offene Aufgabe zeigt eine große Bandbreite von Arten der Ergebnisdokumentationen. Die gefundenen Kategorien sind dabei als Antwort auf die gestellte Forschungsfrage zu verstehen. Diese können helfen, sich auf die Herausforderung, offene Aufgaben im Unterricht einzusetzen, vorzubereiten, sodass das Bündeln der Ergebnisse leichter gelingt.

Literatur

- Barzel, B. & Ebers, P. (2020). Kognitiv aktivieren - Eine wichtige Dimension fürs fachliche Lernen. *mathematik lehren*, 223, 27–31.
- Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, M. K., Cao, Y. & Maschietto, M. (2016). *Uses of Technology in Lower Secondary Mathematics Education - A Concise Topical Survey*: SpringerOpen.
- Ebers, P. (2024). Art der Videonutzung zum Stärken des Teacher Noticing in Fortbildungen zu digitalen Mathematikwerkzeugen. In P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2024*. 57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. (S. 745–748). WTM.
- Schacht, F. (2016). Und wie schreibe ich das jetzt auf? Zur Dokumentation von Fach- und Werkzeugsprache im Mathematikunterricht. In G. Heintz, G. Pinkernell & F. Schacht (Hrsg.), *Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht* (S. 243–261). Verlag Klaus Seeberger.
- SWK. (2022). *Digitalisierung im Bildungssystem: Handlungsempfehlungen von der Kita bis zur Hochschule - Gutachten der Ständigen Wissenschaftlichen Kommission der Kultusministerkonferenz* (SWK) Bonn.
- Thurm, D., Ebers, P. & Barzel, B. (2022). Professional Development for Teaching Mathematics with Technology: Fostering Teacher and Facilitator Noticing. In A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Hrsg.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era: International Research on Professional Learning and Practice* (S. 1–29). Springer.