Gert KADUNZ, Klagenfurt

Geometrie als Mittel zur Strukturierung des Denkens

In den nun folgenden knappen Ausführungen soll die elementare euklidische Geometrie und Ihre Didaktik als Werkzeuge gesehen werden. Einerseits ist die Geometrie ein Mittel, um das Denken von Menschen in bestimmter Weise zu strukturieren. Zugleich kann die Didaktik der Geometrie als Interpretationsmittel verwendet werden, um über die Anfänge der Geometrie als beweisende Wissenschaft sprechen zu können. Den Beginn macht ein kurzer Ausflug ins antike Griechenland, in welchem über eine sozialpolitische Konstellation berichtet wird, in der die Geometrie als Übungsfeld zum Erwerb von Argumentationskompetenzen verwendet wurde. Eine geometriedidaktische Interpretation, warum die Geometrie bei den Griechen mehr der Schulung des Denkens und Argumentierens als der Bewältigung von Alltagsproblemen diente, schließt sich an die historischen Überlegungen an. Aus geometriedidaktischer Sicht waren und sind es Besonderheiten der geometrischen Zeichen und deren Verwendung, welche den angedeuteten Verwendungszweck wesentlich unterstützten.

Zuerst wenden wir uns den antiken Griechen zur Zeit der Entstehung der der Geometrie als beweisende Wissenschaft zu. Der hier betrachtete Zeitraum umfasst etwa die Zeit zwischen dem 8. Jhdt. und dem 6. Jhdt. vor Beginn der Zeitrechnung. Das Betreiben von Geometrie diente weniger den Zweck – im Gegensatz zur Verwendung in Ägypten oder Mesopotamien - Probleme des Alltags zu lösen, als vielmehr der Formulierung und Begründung geometrischer Sätze. Welche Gründe können für diese Verwendung aus historisch-sozialer Sicht und letztlich aus der Position einer geometrischen Zeichenverwendung angeführt werden? Diese Zeichenverwendung soll den Erfolg der Geometrie als eine spezielle Leitwissenschaft der antiken griechischen Kultur plausibel machen.

In Anlehnung an Pichot (1995), Netz (1998) oder Russo (2005) können wir annehmen, dass dass die Geometrie als argumentierende Wissenschaft Anteil an der Entstehung der griechischen Demokratie hatte.

These: *Die Griechen entwickelten ihre Verwendung von Geometrie, um damit auch ihre demokratische Gesellschaftsordnung zu organisieren. Dabei wurde die Geometrie, genauer das Argumentieren innerhalb geometrischer Begründungen als paradigmatisches Bsp. von nachvollziehbarer Rede betrachtet. Besonderheiten der Verwendung der Zeichen der Geometrie stützten dies.*

Aus Platzgründen kann hier nur stichwortartig festgehalten werden, dass eine neue sozialpolitische Situation, die wesentlich durch Abwanderung von Teilen der Bevölkerungen der griechischen Stadtstaaten im oben genannte Zeitraum bestimmt war, zum Problem der Neuorganisation der Stadtstaaten führte (vgl. Pichot, S. 243ff). Dies bestand unter anderem in der Rekrutierung von Teilen der Bevölkerung, die bis dato vom „Wehrdienst“ entbunden waren, zu militärischen Aufgaben. Diese Teilhabe am „Wehrdienst“ hatte gleichzeitig zur Folge, dass diese Bevölkerungsteile oder zumindest deren Vertreter maßgeblich in politische Entscheidungsprozesse einzubinden waren. Diese Einbeziehung von vormals nicht entscheidungsbefugten Schichten der Bevölkerung führte zu einer Reihe von organisatorischen Fragen. Unter anderem entstand das Problem, sich in Versammlungen nun auch mit diesen neuen „gleichberechtigten“ Personen - als Mitglieder der „Kriegerkaste“ – über politische Fragen in Rede und Gegenrede austauschen zu müssen. So zeigt sich in diesem Zeitraum eine Entwicklung der altgriechischen Sprache weg von einer eher poetischen Verwendungsweise hin zu einer argumentierenden Verwendungsweise. Gleichzeitig, so die hier vorgelegte These, findet man Anfangsgründe der Geometrie als beweisende Wissenschaft, mit der man das sozial notwendige Werkzeug der Argumentation lernen konnte. Insofern transformierten die antiken Griechen die Geometrie als Mittel zur Strukturierung von Umwelt, wie sie vornehmlich in Ägypten oder dem Zweistromland schon lange verwendet wurde, unter anderem in ein Mittel zum Lernen und Üben des nachvollziehbaren Argumentierens. Dieser Gedanke beendet die gezwungenermaßen holzschnittartigen Ausführungen und werden nun durch wenige didaktische Überlegungen unterstützt.

Womit kann diese neue Verwendungsweise der Anfänge der argumentierenden Geometrie didaktisch begründet werden? Drei mögliche Punkte, die durch weitere Überlegungen ergänzt werden müssen, können als Quelle der Verwendbarkeit der Geometrie als Argumentationsmittel vermutet werden.

1. *Die Realisierung geometrischer Begriffe mittels sichtbarer Zeichen ist wesentlich durch jene Relationen/Beziehungen bestimmt, welche diese Begriffe festlegen.*

2. *Die Zeichen der Geometrie entziehen sich im Gegensatz etwa zur elementaren Arithmetik, Algebra oder Analysis algorithmischen Umformungen. In der Geometrie können wir im wesentlichen nicht „rechnen“. Wenn wir rechnen – mit den Zeichen der Arithmetik/Algebra – so verlassen wir die Geometrie.*

3. *Eine vor uns auf einem Blatt Papier sichtbare geometrische Konstruktion zeigt im Regelfall nicht ihre Geschichte. Obwohl die Konstruktion*

Schritt für Schritt durchgeführt wurde, bedarf das Ergebnis einer oft aufwendigen Interpretation. Diese geometrische Hermeneutik ist weniger eine Hermeneutik des Ergebnisses der Konstruktion als vielmehr eine Durchdringung der geometrischen Gründe der Konstruktion. Die regelhafte Verwendung der geometrischen Zeichen verbirgt notwendiger weise die Geschichte einer geometrischen Zeichnung.

Nur wenige Stichworte zur Erläuterung dieser Sichtweisen sind hier möglich. Der ersten Punkt kann aus der Position einer operativen Begriffsbildung, kurz OB, (Bender & Schreiber, 1985) betrachtet werden. Bender und Schreiber meinen und das kann auch aus einer tendenziell konstruktivistischen Position gelesen werden, dass die Grundbegriffe der Geometrie nicht durch Abstraktion, also einem Absehen von Eigenschaften, sondern durch ein Hineinsehen von Eigenschaften in „Gegenstände" – dazu zähle ich auch die Zeichen der Geometrie – gebildet werden. Diese Hinwendung zur Verwirklichung führt also zur materiellen Realisierung. Die Autoren sprechen bei dieser Realisierung von Normen, die gleichsam als operative Grundlage für die Herstellung und dann auch für den Gebrauch zu sehen sind. Sie präsentieren als erläuterndes Beispiel die Herstellung eines Würfels. Nur müssen wir uns keineswegs auf die Raumgeometrie konzentrieren. Auch die Herstellung elementarer Begriffe der ebenen Geometrie (Strecke, Kreis, n-Eck, Normale, Parallele etc.) kann mit der OB gedeutet werden. Die Konstruktion von Begriffen ist wesentlich von der Herstellung entsprechender Zeichen mitbestimmt. Denken wir nur daran, worauf wir Lernende bei der Konstruktion eines Kreises oder einer Normalen hinweisen. Das Zeichnen berücksichtigt die Vorschrift. Das sich bewährende Zeichen bestärkt kognitiv die Handlungsvorschrift. Dies nennen Bender und Schreiber die Operativität beim Begriffserwerb. Zum zweiten Punkt kann erläuternd gesagt werden, dass bei der Herstellung einer geometrischen Konstruktion, die verwendeten Zeichen im Regelfall kaum Möglichkeit anbieten, durch regelhafte Umformung die vorhandene Konstruktion in eine andere über zu führen. Einzig die Verwendung einer DGS würde in dieser Hinsicht Umformungen unterstützen. Aus diesem scheinbaren Mangel an Umformungsmöglichkeiten kann ein Gewinn erzielt werden. Erinnern wir uns an die elementare Algebra und stellen wir uns vor, dass als Ansatz bei der Lösung einer Aufgabenstellung eine Gleichung erstellt wurde. Nach einer Reihe von Umformungen entsteht eine Gleichung der Form $ax^2+bx+c=0$. Lernende erkennen diesen Ausdruck – sofern geübt – und berechnen mittels Lösungsformel für quadratische Gleichungen eine Lösung. Regelhafte Umformungen können zu Konfigurationen führen, welche die Verwendung eines Satzes – hier in Gestalt einer Lösungsformel – nahe legen. In der Geometrie sieht die Sache anders aus. Denken wir an eine Aufgabe, welche den Satz vom Peripheriewinkel benötigt. Wir können dann das Problem behandlen, wenn wir die durch diesen Satz festgelegten Relationen bescheid wissen. Kennt man diesen Satz nicht, so ist die Aufgabe günstigstenfalls näherungsweise z. B. mit DGS zu bearbeiten. Die Lösung im Sinne der euklidischen Geometrie, welche einer formalen Prüfung standhält, ist nicht vorstellbar. So erscheint bereits der Ansatz zur Lösung, also der erste Schritt von der Kenntnis eines geometrischen Satzes bestimmt zu sein. Und dies setzt sich auf dem Lösungsweg auch so fort. An den wenigsten Stellen können wir in der elementaren Geometrie auf entlastende weil gleichsam mechanisch verwendbare Aktionen hoffen. Stets verweisen wir in der Geometrie – zumindest gedacht – bei jedem Schritt auf einen Satz oder eine Definition. Dieser zweite Punkt führt also zur Frage der Modularisierung des Denkens (Dörfler, 1991) und damit zur Bedeutung von Modulen in der elementaren Geometrie. Der dritte Punkte nimmt Bezug auf die Notwendigkeit der Interpretation einer geometrischen Konfiguration und damit auch auf das Verhältnis von hörbarer Sprache und sichtbarem geometrischem Zeichen (Krämer, 2002). Über diese drei Punkte wird anderer Stelle ausführlicher berichtet werden. Was nun die Anfangsgründe der griechischen Geometrie betrifft, so waren die antiken Geometer mindestens mit den hier angedeuteten geometriedidaktischen Themen konfrontiert. Jedes kann auf seine Weise als Feld gelesen werden, auf dem das Argumentieren geübt werden kann.

Literatur

Bender, P., & Schreiber, A. (1985). Operative Genese der Geometrie (Vol. 12). Wien, Stuttgart: Hölder-Pichler-Tempsky, B.G.Teubner.

Dörfler, W. (1991). Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium. In P. W. Dörfler W., Schneider E., Wegenkittl K. (Hrsg.), Computer - Mensch - Mathematik (S. 51-76). Wien, Stuttgart: Hölder-Pichler-Tempsky; B.G.Teubner.

Krämer, S. (2002). Sprache und Sprechen: Wie sinnvoll ist die Unterscheidung zwischen einem Schema und seinem Gebrauch. In S. Krämer & E. König (Hrsg.), Gibt es eine Sprache hinter dem Sprechen? (S. 97-125). Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Netz, R. (1998). Greek Mathematical Diagrams: Their Use and Their Meaning. For the Learning of Mathematics, 18(3), 33-39.

Pichot, A. (1995). Die Geburt der Wissenschaft. Frankfurt, New York: Campus.

Russo, L. (2005). Die vergessene Revolution oder die Wiedergeburt des antiken Wissens. Berlin: Springer.