KRAPF, Regula
Bonn

Pfeiljagd im Pascal'schen Dreieck - Summenformeln mit Binomialkoeffizienten visuell beweisen

Binomialkoeffizienten nehmen in der Kombinatorik sowie in der Stochastik eine zentrale Rolle ein. Es gibt vielfältige Zugänge zu Binomialkoeffizienten, die unterschiedliche Beweisstrategien mit sich bringen (Lockwood et al., 2020). In den meisten Schulbüchern (siehe z.B. Greulich et al., 2022) werden Binomialkoeffizienten mithilfe von Fakultäten definiert. Möchte man eine komplizierte Summenformel wie die berühmte Chu-Vandermonde-Identität

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \cdot \binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}$$

damit beweisen, so stößt man mit dieser Definition schnell an seine Grenzen. Kombinatorische Beweise mithilfe des Prinzips des doppelten Abzählens stellen eine Lösung dar. Es geht aber auch anders: Wenn man lediglich die Rekursionsvorschrift für Binomialkoeffizienten – die man durchaus auch als *Definition* von Binomialkoeffizienten auffassen kann – verwendet, so taucht man ein in die Welt des Pascal'schen Dreiecks. Indem man Einträge bunt markiert und mit geeigneten Pfeilen verbindet, kann man sogar komplexere Identitäten über Binomialkoeffizienten als die obige visuell beweisen. Dieser Artikel soll daher einen anschaulichen Weg aufzeigen, wie man Eigenschaften von Binomialkoeffizienten beweisen und neue Muster entdecken kann sowie dafür plädieren, in der Schule visuelle Beweise stärker zu berücksichtigen. Wir definieren Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ durch folgende Rekursion:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Dadurch erkennt man leicht, dass $\binom{n}{k}$ für alle natürlichen Zahlen n und k mit $k \leq n$ definiert ist. Man kann die Binomialkoeffizienten daher in einem dreieckigen Schema (dem *Pascal'schen Dreieck*) anordnen, wobei der k-te Eintrag in der n-ten Zeile (beginnend bei $n, k = 0$) der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist. Dadurch stehen an den Rändern nur Einsen und die Einträge in der Mitte ergeben sich aufgrund unserer rekursiven Definition als Summe der beiden diagonal darüberliegenden Einträge.

Erste Beispiele für Beweise mittels Pfeiljagd

Wir wollen nun anhand von Beispielen aufzeigen, wie die Methode der *Pfeiljagd* funktioniert. Die wohl bekannteste Eigenschaft des Pascal'schen Dreiecks besteht darin, dass die Summe aller Einträge der n-ten Zeile genau 2^n

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

ergibt, d.h. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$. Diese Formel lässt sich leicht folgendermaßen beweisen (siehe Abb. 1): Für $n = 0$ gibt es nur einen Summanden, nämlich $\binom{0}{0} = 1 = 2^0$. Anschließend verdoppelt sich die Summe in jeder Zeile, denn jeder Summand aus der $(n-1)$-ten Zeile wird in der n-ten Zeile doppelt gezählt. Dadurch erhalten wir in der n-ten Zeile die Zeilensumme 2^n.

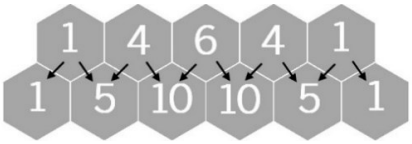

Abb. 1: Zeilensumme

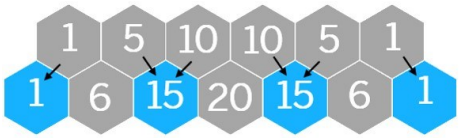

Abb. 2: Halbe Zeilensumme

Was geschieht nun, wenn wir nur jeden zweiten Binomialkoeffizienten addieren? Wenn wir wie in Abb. 2 gemäß unserer Rekursionsformel Pfeile einzeichnen, so erkennen wir, dass nun jeder Eintrag in der darüberliegenden Zeile genau einmal addiert wird. Daher entspricht unsere Summe genau der Zeilensumme der $(n-1)$-ten Zeile, also gemäß obiger Überlegung 2^{n-1}.

Eine weitere bekannte Formel über Binomialkoeffizienten ist die sogenannte Hockeyschlägerformel. Sie erhält ihren Namen durch ihre Visualisierung im Pascal'schen Dreieck in der Form eines Hockeyschlägers. Die Formel lautet $\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}$. Der Beweis ergibt sich aus Abb. 3:

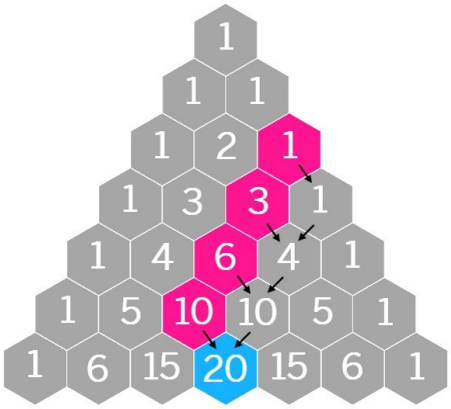

Abb. 3: Hockeschlägerformel

Sucht man in der Standardliteratur nach der Hockeyschlägerformel, so findet man üblicherweise die Visualisierung (ohne Pfeile!) im Pascal'schen Dreieck, jedoch wird die Formel dennoch oft mit vollständiger Induktion gezeigt.

Verwendung von Multipfeilen

Die Strategie, Summenformeln durch Pfeile anzugeben, lässt sich auch verallgemeinern zur Verwendung von sogenannten *Multipfeilen*. Dabei kann man statt einem einzelnen Pfeil auch mehrere Pfeile (wir nennen dies einen Multipfeil) angeben, wobei die Stelligkeit eines Multipfeils angibt, mit welchem Koeffizienten der entsprechende Eintrag multipliziert wird. Dies

eröffnet neue Möglichkeiten für Beweise komplexerer Formeln über Binomialkoeffizienten. Wir wollen nun folgenden Spezialfall der Chu-Vandermonde- Identität beweisen (die allgemeine Formel folgt dann analog):

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Dazu betrachten wir Abb. 4 (dargestellt ist der Fall $n = 4$):

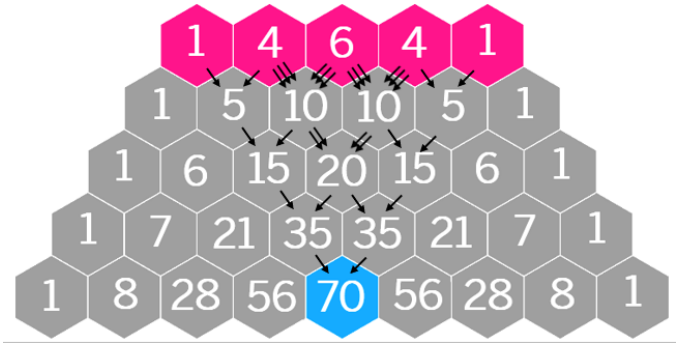

Abb. 4: Summe der Quadrate von Binomialkoeffizienten

Wenn wir bei $\binom{2n}{n}$ starten (hier die Zahl 70), so ist dies die Summe der beiden diagonal darüberliegenden Einträge (hier $35 + 35$), was wir entsprechend mit zwei Pfeilen markieren. Dafür benötigen wir aber wiederum jeweils die beiden darüberliegenden Einträge, wobei wir die Zahl in der Mitte (hier die Zahl 20) zweimal benötigen, da von dieser zwei Pfeile ausgehen. Wenn wir also noch eine Zeile weiter hochgehen, so benötigen wir in der Mitte jeweils einen Doppelpfeil. Dieses Verfahren können wir immer weiter nach oben fortsetzen, bis wir zur n-ten Zeile gelangen. Nun gilt es zu beachten, dass die gewichtete Summe der Einträge (wobei wir jeden Eintrag mit der Anzahl der ausgehenden Pfeile multiplizieren) jeder Zeile konstant bleibt, also gleich $\binom{2n}{n}$ ist. In unserem Beispiel bedeutet dies:

$$70 = 1 \cdot 35 + 1 \cdot 35 = 1 \cdot 15 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 15 = \cdots$$

Nach Konstruktion bilden die Stelligkeiten der Pfeile dann ein umgedrehtes Pascal'sches Dreieck. In der n-ten Zeile entsprechen die Stelligkeiten der ausgehenden Pfeile also genau den Einträgen in den jeweiligen Feldern! Somit ist die gewichtete Summe in der n-ten Zeile $\binom{n}{0} \cdot \binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{n} \cdot \binom{n}{n}$ und nach Konstruktion muss diese gleich $\binom{2n}{n}$ sein. Das zeigt die Identität.

Wir haben im vorherigen Beweis gesehen, dass man mit den Pfeilen „rechnen" kann. Dies lässt sich auch auf negative Zahlen ausweiten, d.h. es gibt auch Pfeile von negativer Stelligkeit, was bedeutet, dass der entsprechende Eintrag subtrahiert statt addiert wird. Um diese von den positiven Pfeilen zu unterscheiden, geben wir das Vorzeichen durch die Orientierung an und

lassen die Pfeile in die entgegengesetzte Richtung zeigen. Damit können wir nun einen Beweis für die Tatsache finden, dass die alternierende Zeilensumme $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$ im Pascal'schen Dreieck gleich 0 ist (siehe Abb. 5):

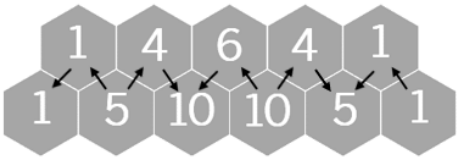

Abb. 5: Alternierende Zeilensumme im Pascal'schen Dreieck

Hier erkennen wir, dass jeder Eintrag in der $(n-1)$-ten Zeile genau einmal addiert und subtrahiert wird, was dadurch klar wird, dass jeweils ein Pfeil von dort ausgeht und einer dort hinführt. Dadurch ist die gewichtete Summe in der $(n-1)$-ten Zeile gleich 0 und somit auch in der n-ten Zeile.

Reflexion und Ausblick

Die Methode der Pfeiljagd ermöglicht es, Beweise bekannter Formeln über Binomialkoeffizienten zu vereinfachen und zu visualisieren. Sie ist darüber hinaus auch für andere Identitäten über Summen rekursiv definierter Folgen wie der Fibonacci-Folge hilfreich (Krapf, 2024). Anders als algebraische Beweise, bei denen man Identitäten über Binomialkoeffizienten oftmals mithilfe von Fakultäten und komplizierten Termumformungen zeigt, können Beweise mittels Pfeiljagd als „erklärende Beweise" bzw. „proofs that explain" (Hanna, 1990) aufgefasst werden, da sie wertvolle Einsichten darüber geben, *warum* eine Identität gilt. Zudem erfordern diese visuellen Beweise keine Vorkenntnisse über Fakultäten oder vollständige Induktion. Das Thema bietet auch vielfältige Möglichkeiten für eigene Erkundungen durch Schüler:innen. Derzeit arbeitet die Autorin im Rahmen eines Schüler:innenforschungsprojekts an der Universität Bonn mit einer Gruppe von Jugendlichen zusammen, um mittels Pfeiljagd neue Beweise zu identifizieren. Erste Forschungsergebnisse der Schüler:innen liegen bereits vor.

Literatur

Greulich, D., Haug, F., Kölle, M., Rauscher, M., Roy, R., Sandmann, R., & Schatz, T. (2022). Lambacher Schweizer – Mathematik für Gymnasien (Kursstufe Leistungskurs). Ernst Klett Verlag.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21*(1), 6–13. https://doi.org/10.1007/BF01809605

Krapf, R. (2024). Arrow-chasing in Pascal's triangle – Visual proofs for summation formulas involving binomial coefficients [Unveröffentlichtes Manuskript].

Lockwood, E., Caughman, J. S., & Weber, K. (2020). An essay on proof, conviction, and explanation: Multiple representation systems in combinatorics. *Educational Studies in Mathematics*, *2*(2), 173–189. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09933-8