

ZÖGgeler, Marion; Tscholl, Pia & Stampfer, Florian
Innsbruck

Rechengeschichten von Lehramtsstudierenden zur Addition im Kontext der Wahrscheinlichkeit

Die Ausbildung von Grundvorstellungen zu mathematischen Begriffen ist eine notwendige Voraussetzung für ein tieferes Verständnis mathematischer Inhalte. Grundvorstellungen ermöglichen es, Sachverhalte in der Realität zu beschreiben bzw. geeignete Modelle dafür zu finden. Sie bilden daher im Modellierungsprozess ein zentrales Bindeglied zwischen Realität und Modell (vom Hofe & Roth, 2023). In dieser Rolle wird ihre Bedeutung insbesondere auch für die stochastische Grundbildung evident (vgl. Krüger, 2016).

Im vorliegenden Beitrag wird eine Studie der Universität Innsbruck beschrieben, bei der Rechengeschichten von 110 Lehramtsstudierenden zur Addition im Kontext der Wahrscheinlichkeit im Hinblick auf vorhandene Grundvorstellungen untersucht wurden. Die Studierenden wurden aufgefordert, eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit zur Rechnung $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$ zu formulieren.

Motivation der Studie

Individuelle mentale Modelle der Lernenden werden fortwährend erweitert und verändert, insbesondere beim Erlernen neuer mathematischer Inhalte, die eine konzeptionelle Veränderung verlangen. Im Sinne eines „conceptual change“ ergeben sich solche notwendigen Änderungen und Erweiterungen in den Grundvorstellungen beispielsweise beim Übergang vom Rechnen mit natürlichen zu rationalen Zahlen. Es sind diesbezüglich viele Hürden bekannt; bei der Addition allerdings zeigen sich im konzeptuellen Verständnis kaum Schwierigkeiten (Padberg & Wartha, 2017). Dass im neuen Kontext der Wahrscheinlichkeit bei der Addition dennoch Probleme im konzeptuellen Verständnis auftreten können, kann in der vorliegenden Studie empirisch nachgewiesen werden. Die Grundvorstellungen der Addition, die das Hinzu-fügen, das Zusammenfassen und das Vereinigen betreffen (vgl. vom Hofe & Roth, 2023), bedürfen nun der kontextbezogenen Anpassung, dass lediglich die Wahrscheinlichkeiten zweier disjunkter Ereignisse A und B desselben Zufallsexperimentes zur Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A oder das Ereignis B eintritt, addiert werden können: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Dies bildet u. a. eine Motivationsgrundlage für die Durchführung der hier beschriebenen Studie. Es geht dabei um die zentrale Frage: Welche individuellen mentalen Modelle haben Studierende zu Rechenoperationen im Bereich

der Wahrscheinlichkeit? Es soll festgehalten werden, ob Studierende ihre gefestigten Grundvorstellungen zur Addition dem Kontext der Wahrscheinlichkeit anpassen und ob dieses „conceptual change“ für ein inhaltliches Verständnis der Addition bei der Übertragung auf die Wahrscheinlichkeit vollzogen wird. Es muss dafür die inhaltliche Bedeutung der Rechenoperation verinnerlicht werden. Dies zählt ebenso zu einer stochastischen Grundbildung, wie das Erfassen der Grundvorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff (vgl. Kleine & Schmelzer, 2023). Im neuen österreichischen Lehrplan, der mit dem Schuljahr 2023/2024 in Kraft getreten ist, nehmen Inhalte der Stochastik einen breiteren Raum ein bzw. werden in frühere Schuljahre vorgezogen. Umso bedeutsamer ist es für Lehramtsstudierende, Grundvorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff gefestigt zu haben, um den Schüler*innen im Unterricht die Möglichkeit zu bieten, entsprechende Vorstellungen zu entwickeln.

Methodik der Studie

An der Erhebung nahmen 110 Studierende des Lehramts Sekundarstufe mit Unterrichtsfach Mathematik im Verbund LEHRERiNNENBILDUNG WEST in Österreich in zwei Durchgängen teil (2022: 49, 2023: 61). Zum Zeitpunkt der Erhebung hatten die teilnehmenden Studierenden laut Curriculum noch keine Lehrveranstaltung zu stochastischen Themen besucht.

Es wird die Methode des Schreibens einer Rechengeschichte zu einer mathematischen Operation – in Anlehnung an eine Studie von Prediger (2008) bei Schüler*innen der 7. Schulstufe – herangezogen, um Rückschlüsse auf vorhandene individuelle mentale Modelle zu ermöglichen. Die Rechengeschichten wurden von drei Interratern unabhängig voneinander begutachtet und, wie im Folgenden beschrieben, einer Klassifizierung zugeordnet, die im Laufe der Auswertung fortlaufend angepasst worden ist. Bei unterschiedlicher Kodierung wurde in gemeinsamer Diskussion nach Übereinkunft eine Neukodierung vorgenommen. Die Klassifikation der Ergebnisse erfolgt ähnlich zur oben genannten Studie (Prediger, 2008). Aufgaben mit unvollständigem Text, fehlender Fragestellung bzw. gänzlich durchgestrichene Textangaben oder eine Nichtbearbeitung der Aufgabenstellung, auch wenn dafür eine Begründung angeführt wird, werden der Kategorie „keine Lösung“ zugeordnet. Wenn kein Zufallsexperiment beschrieben wird oder nur relative Anteile genannt werden, so betrifft dies „kein stochastisches Modell“. Als „unpassendes Modell“ werden jene Aufgabentexte gewertet, die eine zwar stochastische, aber unkorrekte Fragestellung beinhalten. Da die Verwechslung der Addition mit der Multiplikation eine häufig auftretende Schwierigkeit ist, wird ihr eine eigene Subkategorie „unpassendes Modell: Verwechslung Addition mit Multiplikation“ zugewiesen. Es wird nämlich vielfach zur

Addition eine Textaufgabe eines zweistufigen Zufallsexperimentes beschrieben, die passend für eine Multiplikation gewesen wäre. Textformulierungen, aus denen man erkennen kann, dass der Studierende das Konzept der Addition von Wahrscheinlichkeiten erfasst hat, werden der Kategorie „angemessenes Modell“ zugeschrieben, auch wenn das Zufallsexperiment nicht exakt beschrieben ist, die Formulierung dürftig ist bzw. wenn Begrifflichkeiten ungenau oder im Kontext nicht zutreffend sind. Rundungsfehler, wie z. B. 33 % als $\frac{1}{3}$, werden im Rating nicht berücksichtigt.

Ergebnisse und Diskussion

Von den insgesamt 110 Studierenden konnten 36 (33%) eine Rechengeschichte finden, die auf ein angemessenes mentales Modell schließen lässt. Demgegenüber gaben 54 (49%) eine Rechengeschichte an, die ein unpassendes mentales Modell nahelegt, wobei bei 19 von diesen eine Verwechslung von Addition und Multiplikation festgestellt werden konnte. Die Rechengeschichten von weiteren 9 Studierenden (8%) enthielten kein stochastisches Modell. Die restlichen 11 Studierenden (10%) gaben keine verwertbare Lösung an.

Nachfolgendes Textbeispiel zeigt einen Ausschnitt einer Rechengeschichte, welche das häufig auftretende unpassende mentale Modell, ausgelöst durch die Verwechslung von Addition und Multiplikation, exemplarisch repräsentiert: „Du hast 4 grüne Trauben und 3 rote Trauben. In 1 der 4 grünen sowie in 2 der 3 roten sind Kerne. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass du sowohl eine grüne als auch eine rote Traube mit Kernen erwischst?“ (p2022_35). Neben diesem häufigen Fehler sind weitere Fehler, die in die Kategorie „unpassendes Modell“ fallen und auf unzulängliche Grundvorstellungen hinweisen, u. a. folgende:

- Willkürliche Addition von zwei Wahrscheinlichkeiten, um die Fragestellung zu erfüllen: es wurde keine inhaltliche Interpretation der Addition vorgenommen; z. B. „12 Kugeln befinden sich in einer Box. 3 rot punktierte, 5 blau punktierte, 4 gelb strichlierte. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine rote Kugel gezogen wird! Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine punktierte Kugel gezogen wird. Addiere die Wahrscheinlichkeiten am Ende!“ (p2022_03)
- Vorstellung der Addition, dass bei (genau bzw. mindestens) einem von zwei Zufallsexperimenten das gewünschte Ereignis eintritt, z. B. „Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Kartenspiel zu gewinnen, beträgt $\frac{1}{4}$. Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Würfelspiel zu gewinnen, beträgt $\frac{2}{3}$. Berechne die Wahrscheinlichkeit, bei einem der beiden

Spiele zu gewinnen.“ (p2022_14)

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass das Übertragen der Addition in den Bedeutungsgehalt eines sprachlichen Textes im Kontext der Wahrscheinlichkeit den teilnehmenden Lehramtsstudierenden nur unzureichend gelingt. Auch wenn im Allgemeinen Grundvorstellungen zur Addition von Brüchen gut ausgeprägt sind – wie die Studie von Prediger (2008) nahelegt –, zeigt die vorliegende Studie, dass dies nicht zwingend für den Kontext der Wahrscheinlichkeit gilt.

Ausblick

Die in dieser Studie aufgefundenen Schwierigkeiten bei der Bearbeitung von Aufgaben zur Wahrscheinlichkeit bedürfen einer genaueren Aufschlüsselung, was in einer geplanten Interviewstudie erfolgen wird. Mittels einer weiteren Aufgabe, bei der die Summe zweier Brüche größer als 1 ist, soll eruiert werden, ob ein passendes Modell für die Addition von Wahrscheinlichkeiten von den Studierenden unmittelbar übertragen wird oder ob Grenzen erkannt werden. Des Weiteren wird ein Vergleich mit den Schwierigkeiten bei der Bearbeitung einer Multiplikationsaufgabe angestellt. Es kann auch die Frage aufgeworfen werden, ob bei der Addition in einem geometrischen Kontext ähnliche Schwierigkeiten vorhanden sind oder ob dabei die Vorstellung des „plus“ als Hintereinanderlegen und des „mal“ als Flächenvorstellung stärker ausgeprägt ist. Es muss noch über eine geeignete Zielgruppe einer derartigen Studie nachgedacht werden.

Literaturverzeichnis

- Kleine, M., & Schmelzer, N. (2023). Steck weg, die 6. Grundvorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff verbinden. *mathematik lehren*, 236, 24–28.
- Krüger, K. (2016). Statistische Grundbildung fördern. *mathematik lehren*, 197, 2–7.
- Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Springer Spektrum.
- Prediger, S. (2008). Discontinuities for mental models - A source for difficulties with the multiplication of fractions. In D. De Bock, B. D. Søndergaard, B. A. Gómez, & C. L. Cheng (Hrsg.), *Proceedings of ICME-11 – Topic Study Group 10, Research and Development of Number Systems and Arithmetic* (S. 29–37).
- vom Hofe, R., & Roth, J. (2023). Grundvorstellungen aufbauen. *mathematik lehren*, 236, 2–7.