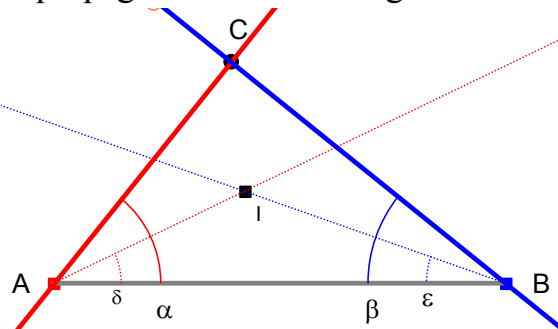


Thomas GAWLICK; Landau

## Ortskurvenbestimmung mit einem CAS als „black box“

Die Untersuchung von Ortslinien der besonderen Dreieckspunkte erlaubt ein reizvolles Wechselspiel von Algebra und Geometrie: Der Nutzen der *Kartesischen Korrespondenz* (Punkt  $\leftrightarrow$  Koordinaten, Gerade  $\leftrightarrow$  lineare Gleichung, Konstruktion  $\leftrightarrow$  Funktion, Ortslinie  $\leftrightarrow$  Parameterdarstellung) wird erfahrbar – stößt aber auch an Grenzen: i.A. ist die *geometrische Ortslinie* nur eine echte Teilmenge der durch Gleichungen beschriebenen *algebraischen Ortskurve* (Gawlick 2001). Besonders interessant ist der Ort des Inkreismittelpunkts I eines Dreiecks ABC bei Variation von C auf einem Kreis. Da sich Winkelhalbierende nur schlecht mit Koordinaten beschreiben lassen, glückte die Ortskurvenbestimmung nur in Spezialfällen, z.B. wenn C auf dem Kreis K um A durch B läuft: Warneke (2001) erhält eine Strophoide – I durchläuft allerdings nur ihren inneren Teil (s.u.). Gawlick(2004) erläutert eine modifizierte *Linealkonstruktion* von I, die die ganze Strophoide erzeugt. Offen war bisher im allgemeinen Fall die algebraische Beschreibung der Ortslinie – mit dem folgenden Ansatz gelingt das *ohne* explizite Darstellung von I! Wesentlich ist dabei die Nutzung eines CAS als „black box“ – das Folgende beleuchtet also auch Möglichkeiten und Grenzen dieser zunehmend propagierten Verwendungsweise...

Da I Ähnlichkeitsinvariant ist, kann man  $A=(0,0)$  und  $B=(0,1)$  annehmen. C und I sind bestimmt durch die Winkel, unter denen sie aus A und B erscheinen. Für die analytische Behandlung eignet sich dies gut, denn I ist als Schnitt der Winkelhalbierenden  $w_A$  und  $w_B$  leicht mit Hilfe der „**trigonometrischen Ko-**



**ordinaten**“  $d=\tan(\delta)$  und  $e=\tan(\epsilon)$  auszudrücken (man beachte: die Steigung von  $w_B$  ist  $-e!$ ), nämlich durch folgende „Mathematica“-Formel:

$$\mathbf{x}[e, d] = e / (d + e); \quad \mathbf{y}[e, d] = e d / (d + e)$$

Dies haben wir gleich als Funktion geschrieben, damit wir auch  $C=(x_c, y_c)$  als Schnitt von a und b darstellen können, dann mit  $d_2=\tan(2\delta)=\tan(\alpha)$  und  $e_2=\tan(\epsilon)=\tan(\beta)$ . Der Kniff ist nun, dass zwischen d und  $d_2$  sowie e und  $e_2$  aufgrund des Additionstheorems für Tangens folgende Relation besteht:

$$\mathbf{tan2}[t_a] = 2 t_a / (1 - t_a^2); \quad e_2 = \mathbf{tan2}[e]; \quad d_2 = \mathbf{tan2}[d] \quad (*)$$

Man könnte dies dazu benutzen, um  $I=(x_i, y_i)$  durch C auszudrücken, indem man die Gleichungen unter Elimination von e und d nach  $x_i$  und  $y_i$  auflöst:

$$\mathbf{IvonC} := \{\mathbf{x_i}, \mathbf{y_i}\} /. \mathbf{Solve}[\{\{\mathbf{x_c}, \mathbf{y_c}\} == \{\mathbf{x}[d_2, e_2], \mathbf{y}[d_2, e_2]\},$$

$$\{\mathbf{x_i}, \mathbf{y_i}\} == \{\mathbf{x}[d, e], \mathbf{y}[d, e]\}, \{\mathbf{x_i}, \mathbf{y_i}\}, \{\mathbf{e}, \mathbf{d}\}]$$

Man erhält so  $(x_i, y_i)$  als Funktion in  $(x_c, y_c)$ , das Ergebnis ist aber so unhandlich, dass man es besser nicht anzeigen lässt! Zudem misslingt schon für den

Fall, dass C auf dem Einheitskreis verläuft, die Elimination der Parameter aus dieser Gleichung. Eleganter ist es dagegen, *direkt* eine Gleichung für die Ortskurve von I durch Elimination aller Parameter und der Gleichung der Bahn von C zu bestimmen – mit dem CAS „Mathematica“ als „**black box**“:

```
Eliminate[{{xc, yc} == {x[d2, e2], y[d2, e2]}, {xi, yi} == {x[d, e], y[d, e]},
  (yc)^2 + (xc)^2 == 1}, {xc, yc, e, d}]
-2 xi^4 + xi^5 + 2 xi^3 yi^2 + xi^2 (2 - 4 yi^2) + xi (-1 + yi^4) == yi^2 (-2 + 2 yi^2)
```

Das ist allerdings mehr als die von Warneke gefundene Strophoide:

```
Factor[-2 xi^4 + xi^5 + 2 xi^3 yi^2 + xi^2 (2 - 4 yi^2) + xi (-1 + yi^4) - yi^2 (-2 + 2 yi^2)]
(-1 + xi^2 + yi^2) (xi - 2 xi^2 + xi^3 - 2 yi^2 + xi yi^2)
```

Der Laufkreis K taucht also als zusätzlicher Faktor in der Gleichung auf – wie-so? Offenbar kann I doch niemals dort liegen... daher untersuchen wir in einem konkreten Beispiel die zusätzlichen Lösungen, etwa bei C=(3/5,4/5):

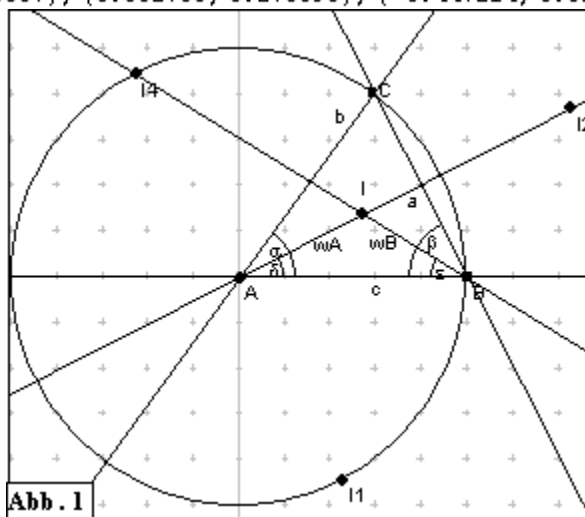
```
Simplify[IvonC /. {xc -> 3/5, yc -> 4/5}]
```

Das Ergebnis ist immer noch kompliziert genug, rechnen wir also numerisch:

```
{I1, I2, I3, I4} = N[%]
```

```
{{0.447214, -0.894427}, {1.44721, 0.723607}, {0.552786, 0.276393}, {-0.447214, 0.894427}}
```

Schauen wir uns diese Punkte einmal an – in Abb. 1: I3=I ist der Inkreismittelpunkt, I4 der Schnittpunkt von wB mit K. I1 ist offenbar der antipodale Punkt zu I4, also sein Spiegelbild am Ursprung. Und die Gerade I1I4 steht anscheinend senkrecht auf wA – sie ist also nichts anderes als die zweite Winkelhalbierende vA. Konstruiert man vA und zieht an C, sieht man, dass das kein Zufall war: Der



Schnittpunkt von vA und wB liegt stets auf K! Ebenso schneiden sich vB und vA stets in I1. I1 und I4 sind also Ankreismittelpunkte, ebenso wie I2 als Schnittpunkt von vB und wA! Das erweitert das Ergebnis von Warneke:

*Variiert eine Basisecke eines gleichschenkligen Dreiecks auf einem Kreis K um die Spitze, durchlaufen zwei Ankreismittelpunkte ebenfalls K. Der dritte beschreibt den außerhalb K liegenden Teil einer Strophoide, der Inkreismittelpunkt den inneren Teil.*

Diese geometrische Interpretation rechtfertigt im Nachhinein auch die Auswahl des CAS: Nimmt man das bedienerfreundlichere „Maple“, erhält man nämlich bei der Elimination noch einen „ungeometrischen“ Faktor xi hinzu... Solche Erfahrungen wecken die Frage, ob man nicht sogar nur eine Ortsgleichung für I und I2 erhalten kann. Das lässt sich aber weder durch ein anderes CAS noch

durch eine anderen Ansatz erreichen – algebraisch kann man Inkreis- und Ankreismittelpunkte nämlich überhaupt nicht voneinander trennen. Dies sieht man ein, indem man die betrachtete Situation etwas verallgemeinert, z.B. indem man den Laufkreis auf (1,0) hin zusammenzieht – der Mittelpunkt sei also (m,0): Für m=1/5, 2/5, 3/5, 4/5 sieht man, wie der Ort von I3 und I4 zunächst etwas bauchiger wird, dann eindellt, worauf er aufplatzt und teilweise mit den Überresten der Strophoide zu einer fischförmigen Kurve verschmilzt (Abb. 2):

```
IvonCaufK = Eliminate[{{xc, yc} == {x[d2, e2], y[d2, e2]},
  {xi, yi} == {x[d, e], y[d, e]}, (yc)^2 + (xc - m)^2 == (1 - m)^2}, {xc, yc, e, d}]
-xi + 2 xi^2 - 2 xi^4 + xi^5 + 2 yi^2 - 4 xi^2 yi^2 + 2 xi^3 yi^2 - 2 yi^4 + xi yi^4 ==
m (-2 xi + 6 xi^2 - 6 xi^3 + 2 xi^4 + 2 yi^2 - 2 xi yi^2 - 2 yi^4) (**)
Animate[ImplicitPlot[{IvonCaufK}, {xi, -1, 2}, {yi, -3/2, 3/2},
  PlotPoints -> 200], {m, 1/5, 1, 1/5}]
```

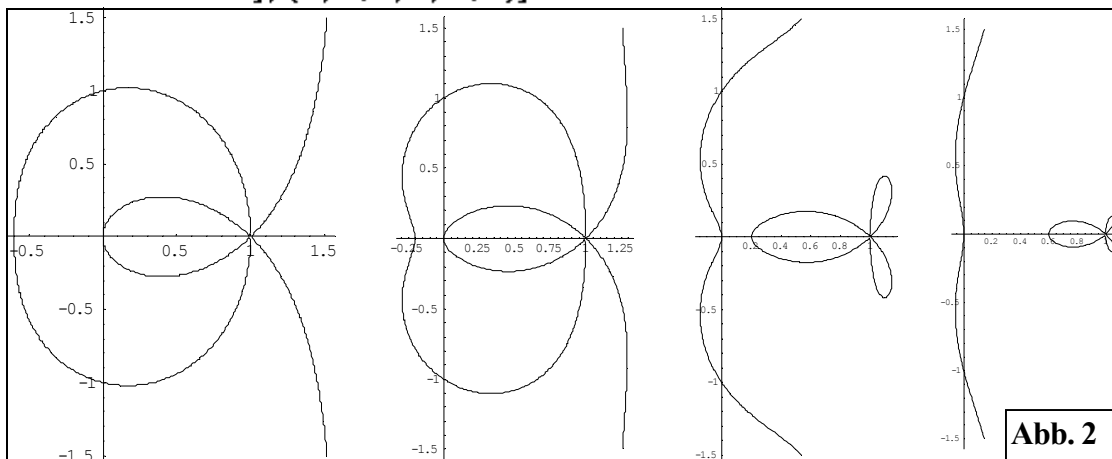


Abb. 2

Scheinbar besteht die Ortskurve hierbei auch wieder aus verschiedenen Zweigen. Diese lassen sich jedoch nicht wie für m=0 durch eigene Gleichungen beschreiben, denn die Gleichung ist im Allgemeinen irreduzibel.<sup>1</sup> Reduzibel wird sie außer für m=0 noch für m=1/2: In diesem Fall zerfällt sie in zwei Kreise, denn das Dreieck ABC ist stets rechtwinklig, so dass AB von I aus stets unter dem Winkel 135° erscheint. I läuft also auf Teilen der zugehörigen Fasskreisbögen, die von I1, I2, I4 komplettiert werden (Abb. 3a). Weil I1,...,I4 jeweils 2 symmetrische Kreisbogenstücke *verschiedener* Kreise durchlaufen, besteht also

- jede geometrische Ortslinie aus 2 algebraischen Ortskurvenstücken,
- jede algebraische Ortskurve aus 4 geometrischen Ortslinienstücken!

Der geometrische Ort jedes der Punkte I1,...,I4 lässt sich also nur als *semialgebraische Menge* beschreiben: d.h. durch Vereinigung und Durchschnitt der Lösungsmengen von Gleichungen und Ungleichungen. Hierfür gibt es in keinem

<sup>1</sup> Hierfür ist es allerdings vonnöten, die Gleichung nach „Maple“ zu exportieren, das über „irreduc“ verfügt - „factor“ reicht nicht: dabei wäre die Angabe des „richtigen“ Koeffizientenbereichs erforderlich, aber i.A. nicht ohne weiteres machbar, wie folgendes Beispiel zeigt: `Factor[x^4 + y^4]` liefert  $x^4 + y^4$ , `Factor[x^4 + y^4, Extension ->  $\sqrt{2}$ ]` aber  $(-x^2 + \sqrt{2}xy - y^2)(x^2 + \sqrt{2}xy + y^2)$ .

der gängigen CAS eine Darstellungsmöglichkeit!

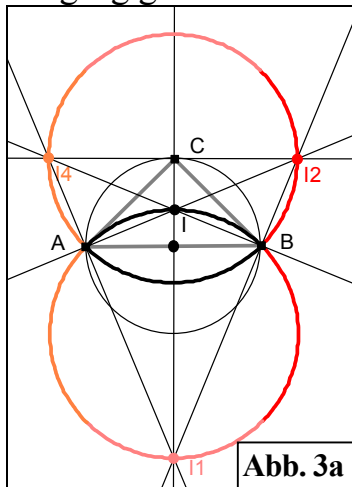


Abb. 3a

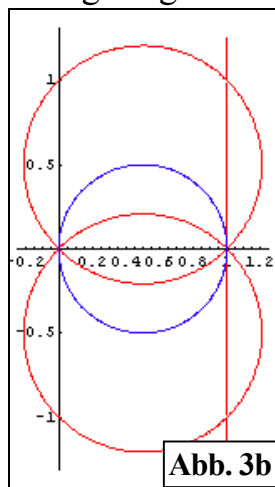


Abb. 3b

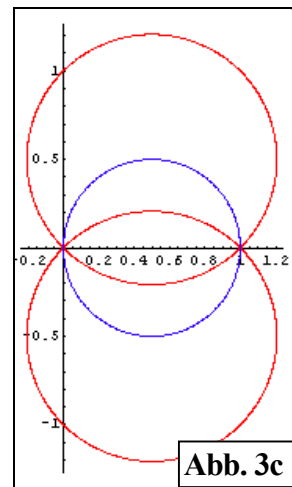


Abb. 3c

Man beachte zudem noch zwei Abweichungen von Ortsgleichung und -linie: Wie Abb. 3b zeigt, enthält die aus (\*\*) durch Spezialisierung  $m = \frac{1}{2}$  entstehende Gleichung einen Extra-Linearfaktor, diesmal aber einen „geometrischen“: offenbar entsteht er als Grenzwert der „Außenarme“ der Strophoide – denn spezialisiert man dagegen *vor* der Elimination, tritt er nicht auf. Das wird in Abb. 3c wiedergegeben – diese entsteht aber auch, wenn man im Plot-Befehl keinen Bereich für  $y_i$  angibt, weil „Mathematica“ dann einen anderen Algorithmus verwendet, immerhin aber vor möglichen Fehlern warnt:

```
DisplayTogether[ImplicitPlot[{IvonCauFK /. {m -> 1/2}}, {xi, -.5, 2}, PlotPoints -> 200, PlotStyle -> Hue[1]], ImplicitPlot[{yc ^ 2 + (xc - 1/2) ^ 2 == 1/4}, {xc, 0, 1}, PlotStyle -> Hue[.7]]]
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables.

Obwohl für spezielle Werte von  $x_0, y_0, r$  die Berechnung i.A. nicht terminiert, kann „Mathematica“ die Ortskurve für C auf „allgemeinem“ K berechnen:

```
IvonCauFK = Eliminate[{{xc, yc} == {x[d2, e2], y[d2, e2]},
  {xi, yi} == {x[d, e], y[d, e]}, (yc - y0) ^ 2 + (xc - x0) ^ 2 == r ^ 2}, {xc, yc, e, d}]
x0^2 xi^2 - 2 x0 xi^3 - 2 x0^2 xi^3 + xi^4 + 4 x0 xi^4 + x0^2 xi^4 - 2 xi^5 - 2 x0 xi^5 + xi^6 + xi^2 y0^2 -
  2 xi^3 y0^2 + xi^4 y0^2 - 4 xi^2 y0 yi + 8 xi^3 y0 yi - 4 xi^4 y0 yi + 2 x0 xi yi^2 - 2 x0^2 xi yi^2 +
  2 xi^2 yi^2 - 2 x0 xi^2 yi^2 + 2 x0^2 xi^2 yi^2 - 4 xi^3 yi^2 + 2 xi^4 yi^2 - 2 xi y0^2 yi^2 + 2 xi^2 y0^2 yi^2 +
  4 xi y0 yi^3 - 4 xi^2 y0 yi^3 + yi^4 - 2 x0 yi^4 + x0^2 yi^4 - 2 xi yi^4 + 2 x0 xi yi^4 + xi^2 yi^4 + y0^2 yi^4 ==
  r^2 (xi^2 - 2 xi^3 + xi^4 - 2 xi yi^2 + 2 xi^2 yi^2 + yi^4)
```

**Didaktische Reflexion:** Die Interaktion mit dem CAS gleicht der Kommunikation mit einem Experten (Schneider): manche Antworten sind unklar, unvollständig, unzuverlässig und interpretationsbedürftig – offensichtlich ein Nachteil der Verwendung als „black box“. Wen hierbei ein Unbehagen beschleicht, vergleiche seine Lage mit der des Schülers, dem CAS als „black box“ angeboten wird, deren Funktion er nicht (mehr?!) händisch nachvollziehen kann. Reicht es zur Beruhigung, wenn der Lehrer diese Fähigkeit besitzt?

**Literatur:** DGS- und CAS-Dateien: unter [www.uni-landau.de/mathe/gawlick/](http://www.uni-landau.de/mathe/gawlick/)