

KRÜGER, Marlene & PÖHLER, Birte
Potsdam

Einbindung von Darstellungsebenen in Kombinatorikaufgaben - Eine Schulbuchanalyse

Die Kombinatorik ist das Teilgebiet der Mathematik, das sich mit Auswahl- und Anordnungsproblemen beschäftigt. Das Lösen kombinatorischer Aufgaben bereitet vielen Lernenden große Schwierigkeiten, was insbesondere auf ein mangelndes konzeptuelles Verständnis zurückgeführt wird (Annin & Lai, 2010). Ein qualitätvoller (Kombinatorik-)Unterricht sollte daher den Erwerb tragfähiger Konzepte, Strategien und Verfahren durch Verständnis fundieren - also eine Verstehensorientierung anstreben (Holzäpfel et al., 2024). Ein konzeptuelles Verständnis lässt sich etwa dadurch aufbauen, dass Lernende auf verschiedenen Darstellungsebenen arbeiten (Cramer, 2003). Vor diesem Hintergrund soll in diesem Beitrag untersucht werden, inwiefern das Arbeiten auf verschiedenen Darstellungsebenen in Kombinatorikaufgaben verschiedener Schulbücher angesprochen wird.

Darstellungsebenen als Gestaltungsprinzip für Kombinatorikaufgaben

Die Einbindung verschiedener Darstellungsebenen wird von Neubert et al. (2019) als konkretes Gestaltungsprinzip für Kombinatorikaufgaben benannt. Dieses ist keineswegs neu, sondern geht auf das etablierte EIS-Prinzip von Bruner et al. (1971) zurück. Es besagt, dass die Lernenden einen mathematischen Sachverhalt möglichst durch konkrete Handlungen oder die Benutzung von Gegenständen (Enaktiv), bildhafte Darstellungen wie Abbildungen oder Zeichnungen (Ikonisch) und die Verwendung von Ziffern und Rechenzeichen (Symbolisch) erschließen sollen. Prediger und Wessel (2012) ergänzen Bruners EIS-Prinzip um die verbale Darstellungsebene, auf der der mathematische Sachverhalt entweder mündlich oder schriftlich durch die Verwendung von Wörtern, Sätzen oder sprachlichen Strukturen erfasst wird. Zudem betonen die Autorinnen, die Notwendigkeit der sprachlichen Vernetzung aller Darstellungsebenen. Das angemessene Arbeiten auf sowie das Wechseln und Vernetzen zwischen diesen fördert das gedankliche Durchdringen mathematischer Sachverhalte. Maier et al. (2010) schlagen diesbezüglich eine Ausdifferenzierung von Darstellungsformen vor. Sie unterscheiden danach, ob in einer Aufgabe eine einzelne Darstellungsebene, eine Integration (Vernetzung von mindestens zwei Ebenen) oder eine Transformation (Wechsel zwischen mindestens zwei Ebenen) angesprochen wird. Bezüglich des Darstellungswechsels kann präziser zwischen intermodalem Transfer (Ebenenwechsel) und intramodalem Transfer (Wechsel zwischen ikonischen Darstellungen) unterschieden werden (Sprenger et al., 2013).

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
<https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0>

Forschungsfrage

Wie bereits erwähnt, fällt es vielen Lernenden schwer, Kombinatorikaufgaben zu lösen, da sie diesbezüglich über ein unzureichendes konzeptuelles Verständnis verfügen (Annin & Lai, 2010). Dies wirft die zentrale Frage auf, welche Ursachen diesen Verständnislücken zugrunde liegen. Eine mögliche Erklärung könnte in der Gestaltung der zu bearbeitenden Aufgaben liegen, da etwa 86 % der Lehrkräfte zur Planung und Durchführung ihres Unterrichts Aufgaben aus Schulbüchern nutzen (Mullis et al. 2012). Dementsprechend stellt sich die generelle Frage, wie Kombinatorikaufgaben in Mathematikschulbüchern gestaltet sind. Da das Arbeiten auf verschiedenen Darstellungsebenen ein probates Mittel zum Aufbau von konzeptuellem Verständnis sein soll, wird im Rahmen dieses Beitrags die Umsetzung des Gestaltungsprinzips *Einbinden verschiedener Darstellungsebenen* fokussiert. Bearbeitet werden soll dabei die folgende Forschungsfrage:

Inwiefern ermöglichen die kombinatorischen Aufgaben in Schulbüchern der Klassenstufen 1 bis 10 ein Arbeiten auf verschiedenen Darstellungsebenen?

Methodisches Vorgehen

Um die Forschungsfrage zu bearbeiten, wurden im Rahmen einer Masterarbeit Kombinatorikaufgaben in Schulbüchern analysiert. Die Analyse wurde in Anlehnung an Mayring (2010) als qualitative Inhaltsanalyse realisiert.

Insgesamt wurden 30 Schulbücher von Cornelsen, Klett und Westermann für die Primarstufe und die Sekundarstufe I untersucht, da diese Verlage zu den größten in Deutschland gehören. Die Untersuchung erfolgte im Bundesland Brandenburg, in dem die Grundschule die Klassen 1 bis 6 umfasst. Bei den ausgewählten Reihen von Cornelsen handelt es sich bei der Primarstufe um Mathefreunde (Kl. 1-4) und Mathematik (Kl. 5-6) und für die Sekundarstufe I um Fundamente der Mathematik (Kl. 7-10). Vom Klett-Verlag wurden Das Zahlenbuch (Kl. 1-4) und Schnittpunkt (Kl. 5-10) ausgewählt. Zu den ausgewählten Reihen von Westermann zählen Denken und Rechnen (Kl. 1-4) und Elemente der Mathematik (Kl. 5-10). Im Bereich der Grundschule (Kl. 1-6) ist in fast allen analysierten Schulbüchern ein Kapitel zur Kombinatorik enthalten. In der Sekundarstufe I tritt sie weniger isoliert auf. Dort findet sich ein Kombinatorik-Kapitel nur in zwei Büchern der 10. Klasse. Daher konnten in nur 17 Schulbüchern die Kombinatorikaufgaben hinsichtlich der Einbindung der verschiedenen Darstellungsebenen analysiert werden.

Als Analyseeinheit wurde eine vollständige Schulbuchaufgabe (bestehend aus Aufgabentext, ggf. vorhandener Abbildung, etwaigen Teilaufgaben und/oder Aufgabenhinweisen) definiert, die sich innerhalb eines Kapitels zur Kombinatorik befindet.

Die Analyse der Aufgaben erfolgte mithilfe eines eigens entwickelten Kategoriensystems. Grundlage für die deduktive Ableitung der Hauptkategorien stellen die Darstellungsformen nach Maier et al. (2010) dar. Eine präzise Differenzierung zwischen intermodalem und intramodalem Transfer wird nicht vorgenommen, da sie den Umfang der Untersuchung überschreiten würde. Die Unterkategorien wurden auf Basis des weiterentwickelten EIS-Prinzips von Bruner et al. (1971) abgeleitet (z.B. Integration: enaktiv & ikonisch ..., Transformation: enaktiv zu ikonisch ...).

Ergebnisse

Die Analyse zeigt, dass die kombinatorischen Aufgaben in der 1. bis 4. Klasse vor allem ein Lösen auf der ikonischen und verbalen Ebene ansprechen. Die enaktive Darstellungsebene wird über die Schulstufen hinweg nur in einer Schulbuchreihe zu einem kleinen Anteil aufgegriffen. In Klasse 5, 6 und 10 wird der Anteil an Kombinatorikaufgaben, die ein ikonisches Arbeiten anregen, deutlich kleiner, während das Lösen auf der symbolischen Ebene zunimmt.

Bezüglich der Darstellungsformen unterscheiden sich die Schulbücher der 1. bis 3. Klasse stärker als die der höheren Klassenstufen. Während eine Grundschulbuchreihe vor allem das Arbeiten auf einer Ebene anspricht, sind bei den zwei anderen Reihen deutlich mehr Aufgaben enthalten, die Verknüpfungen und/oder Darstellungswechsel anregen. In den Klassenstufen 4, 5, 6 und 10 wird deutlich, dass hier in allen Schulbüchern der Anteil an kombinatorischen Aufgaben, die zum Wechsel auffordern, deutlich präsenter ist.

Betrachtet man die Darstellungswechsel genauer, zeigen sich im Anfangsunterricht eher Wechsel von der ikonischen zur verbalen Ebene (siehe Abbildung 1). In Klasse 3 und 4 erfolgen die Wechsel tendenziell eher andersherum. In den höheren Schulstufen regen die meisten Kombinatorikaufgaben als Textaufgaben eine Transformation von verbal zu symbolisch an.


Klasse 1	Klasse 3	Klasse 10
<p>3 Wie viele verschiedene Wege findest du, um von der Schule zur Schwimmhalle zu kommen? Zeige und erkläre deinem Lernpartner die Wege.</p>  <p>Schule Schwimmhalle</p>	<p>1 Für diese Woche hat der Kaiser zwei Hemden und drei Hosen.</p>  <p>Wie viele Möglichkeiten hat er, sich verschieden anzuziehen?</p> <p>Es war einmal ein eitler Kaiser. Er wollte sich jeden Tag verschieden anziehen. An einem Tag trug er ein rotes Hemd und dazu eine gelbe Hose. Am nächsten Tag trug er ein blaues Hemd, aber dazu eine ...</p>  <p>Ich male. Ich schreibe in eine Tabelle.</p>	<p>17. a) Berechne die Anzahl der Möglichkeiten, die 26 Buchstaben unseres Alphabets anzuordnen. b) Ein Computer kann eine Million Anordnungen in einer Millisekunde speichern. Berechne, wie lange der Computer für die Speicherung aller Anordnungen benötigt.</p>
ikonisch zu verbal	verbal zu ikonisch	verbal zu symbolisch

Abb. 1: Beispiel-Kombinatorikaufgaben zu den häufigsten Darstellungswechseltypen (eigene Darstellung in Anlehnung an bestehende Aufgaben)

Diskussion und Ausblick

Die Schulbuchanalyse verdeutlicht, dass viele der Aufgaben einen Darstellungswechsel anregen und somit durch das Übersetzen das gedankliche Durchdringen kombinatorischer Sachverhalte fördern. Kritisch ist jedoch anzumerken, dass in vielen Schulbüchern häufig das Arbeiten auf nur zwei (in der Primarstufe ikonisch und verbal, in der Sekundarstufe verbal und symbolisch) der vier Darstellungsebenen im Fokus steht. Alle vier Ebenen werden nur in wenigen Grundschulbüchern angesprochen. Da sich das konzeptuelle Verständnis am besten durch vernetztes Arbeiten auf allen vier Darstellungsebenen aufbauen lässt, könnte es sinnvoll sein, gerade im Kombinatorikunterricht in der Grundschule und in weiterführenden Schulen mehr Wert auf die enaktive Darstellungsebene und das Wechseln sowie Verknüpfen zwischen allen Ebenen zu legen. In zukünftigen Forschungsprojekten könnten im Rahmen fachdidaktischer Entwicklungsforschung kombinatorische Aufgabensammlungen entwickelt und beforscht werden, die gezielt alle Darstellungsebenen einbeziehen und durch klar formulierte Anforderungen die Vernetzung und Wechsel zwischen diesen Ebenen stärker adressieren.

Literatur

- Annin, S. & Lai, K. (2010). Common Errors in Counting Problems. *Mathematics Teacher*, 103(6), 402-409.
- Bruner, J. S., Olver, R. R. & Greenfield, P. M. (1971). *Studien zur kognitiven Entwicklung*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.
- Cramer, K. (2003). Using a translation model for curriculum development and classroom instruction. In R. Lesh & H. Doerr (Hrsg.), *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (S. 449-464). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Holzäpfel, L., Prediger, S., Götze, D., Rösken-Winter, B. & Selter, C. (2024). Qualitätsvoll Mathematik unterrichten: Fünf Prinzipien. *Mathematik Lehren*, 242, 2–9.
- Maier, U., Kleinknecht, M., Metz, K., & Bohl, T. (2010). Ein allgemeindidaktisches Kategoriensystem zur Analyse des kognitiven Potenzials von Aufgaben. *Beiträge zur Lehrerbildung*, 28(1), 84-96.
- Mayring, Philipp (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse*. Weinheim/ Basel: Beltz Verlag.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P. & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics*. Chestnut Hill: TIMSS & PIRLS International Study Center.
- Neubert, B., Giesbrecht, L., Kircher, M., Möbs, S., & Neckenich, J. E. (2019). *Kombinatorik. Aufgabenbeispiele und Impulse für die Grundschule* (4. Aufl.). Offenburg: Miltenberger Verlag.
- Prediger, S., & Wessel, L. (2012). Darstellungen vernetzen. Ansatz zur integrierten Entwicklung von Konzepten und Sprachmitteln. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 54(45), 28-33.
- Sprenger, J., Wagner, A., & Zimmermann, M. (2013). *Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen*. Wiesbaden: Springer Fachmedien.