

Willi DÖRFLER, Universität Klagenfurt

Inskriptionen und mathematische Objekte

Schon eine naive und nur oberflächliche Betrachtung von mathematischen Texten belegt, dass in der Mathematik Symbole, Zeichen und Diagramme verschiedenster Form und Art vorkommen und auch eine wichtige Rolle spielen. Es ist daher naheliegend zu prüfen, ob die Wissenschaft von den Zeichen und deren Gebrauch, also die Semiotik, einen Beitrag zur Analyse, zum Verständnis, zur Interpretation und zur Rekonstruktion mathematischer Tätigkeiten liefern kann. Dies wurde in der Didaktik der Mathematik bereits vielfältig angedacht. Dabei wird neben dem Bezug auf die Semiotik von Saussure (Konzept von *signifier/signified*) in letzter Zeit vermehrt und intensiver die Semiotik von Charles S. Peirce herangezogen, vergleiche Hoffmann (2003a,b) oder Hoffmann und Plöger (2000). Von Peirce selbst stammt der Hinweis auf die zentrale Bedeutung von „Diagrammen“ und diagrammatischem Denken in der Mathematik, was zum Beispiel in Dörfler (2004a,b,c) den Ausgangspunkt für weitere Analysen bildet. Nun bildet aber für die Peirce'sche Semiotik deren triadische Struktur die zentrale Charakteristik, und es muss gefragt werden, welche Schlüsse daraus für die Mathematik gezogen werden könnten. Ein erster, noch unbefriedigender Versuch in dieser Hinsicht wurde in Dörfler (2004d) unternommen. Hier wird nun eine eher radikale und wahrscheinlich unkonventionelle Anwendung der Peirce'schen Triade auf mathematische Zeichen vorgenommen.

Triadische Grundstruktur von Zeichen

Bei Peirce gibt es verschiedene Stellen, an denen er kompakt seine Zeichenkonzeption vorstellt, vergleiche Pape (2004), Nagl (1992) oder Hoffmann (2003a). Eine lautet wie folgt: «Ein Zeichen ist [...] alles, was in einer solchen Beziehung zu einem Zweiten steht, das sein *Objekt* genannt wird, dass es fähig ist, ein Drittes, das sein *Interpretant* genannt wird, dahingehend zu bestimmen, in derselben triadischen Relation zu jener Relation auf das Objekt zu stehen, in der es selbst steht. Dies bedeutet, dass der Interpretant selbst ein Zeichen ist, das ein Zeichen desselben Objekts bestimmt und so fort ohne Ende.»

In dieser Triade „Objekt-Zeichen-Interpretant“ ist das „Zeichen“ (auch Repräsentamen genannt) in irgendeiner Form materialiter verfügbar. In unserem Kontext werden dies zum Beispiel Schriftzeichen oder allgemeine Inskriptionen („Aufgeschriebenes“) sein oder auch Gesprochenes. Diese Zeichen sind also durch den Interpretanten, der wieder ein Zeichen ist, auf das Objekt bezogen: der Interpretant liest das Zeichen auf eine bestimmte Weise (Nagl, S. 32) und wird dadurch selbst wieder zu einem auf das Ob-

jekt bezogenen Zeichen. Dies erfordert (natürlich) ein Subjekt, das diese Zeichentätigkeit ausführt. Wichtig ist die Offenheit dieses semiotischen Prozesses, der nach Peirce zu einer immer komplexeren „Repräsentanz“ des Objektes in den Zeichen führt. Keiner der drei Pole ist dabei verzichtbar, insbesondere ist die verbreitete signifier/signified Relation (also ohne Interpretant) defizitär. In der Anwendung auf spezielle Bereiche ist vor allem von Interesse, welche Klasse von materiellen oder ideellen Dingen als Objekte in der Triade zu qualifizieren sind, denn dadurch wird der primäre Gegenstandsbereich der Zeichentätigkeit festgelegt.

Inskriptionen am Objektpol

Bei einer Anwendung der Peirce'schen Triade auf Mathematik ist es verlockend, an den Objektpol zu stellen, was üblicherweise mathematisches Objekt genannt wird. Damit „importiert“ man aber alle Probleme und Fragen zum Status (ontologisch oder epistemologisch) der mathematischen Objekte (Zahlen, geometrische Figuren, Funktionen, Gruppe, Ring, Körper, etc.) in die Zeichenkonzeption. Diese (philosophische) Problematik kann hier nicht einmal andeutungsweise erörtert werden.

Für meinen Vorschlag einer Anwendung der Peirce'schen Semiotik auf die Mathematik wähle ich für den Objektpol ganz generell mathematische Inskriptionen. Das sind also alle von Mathematikern verwendete, aufgeschriebene oder in Texten gedruckte Formeln, Graphiken, Diagramme, aber auch Wörter und Sätze. Als Objekte in der Triade kommen in diesem Sinne zum Beispiel in Frage: verschiedene Zahldarstellungen; algebraische Terme jeder Art (Polynome im speziellen; lineare Gleichungssysteme); jegliches Axiomensystem (als ein System von Formeln); jede Definition, jeder Beweis, jeder Satz – aber immer verstanden als die jeweilige Inskription. Dabei ist diese Objektkonzeption noch in folgender Weise zu spezifizieren. Eine mathematische Inskription wird nicht als „token“ sondern als „type“ zum Objektpol einer Triade. Das ist genau in dem Sinne gemeint, wie wir etwa das Wort „das“ auf dieser Seite verstehen, also unabhängig von der Schriftart, der Farbe des Druckes etc., wobei der Typ im allgemeinen sehr weit gefasst ist und durch den Gebrauch in einer Gemeinschaft festgelegt bzw. limitiert ist. In der Mathematik gibt es ebenfalls einen breiten Spielraum dafür, wie zum Beispiel ein Polynom aufgeschrieben wird oder generell eine Formel. Innerhalb gewisser Grenzen bleibt die relevante Struktur erkennbar, die vorwiegend darin besteht, dass gewisse Operationen und Transformationen auf die Inskription anwendbar sind. Durch diese Festlegung wird das Objekt in der Triade zu einem materialen Gegenstand, der wahrnehmbar ist und dadurch erst mit anderen sozial geteilt und kommunizierbar wird. Man kann darüber sprechen, schreiben, handeln, abduktiv

Hypothesen aufstellen usf. Das ist für die sonst als „abstrakt“ und gerade nicht sinnlich fassbar charakterisierten „mathematischen Objekte“ prinzipiell und per definitionem ausgeschlossen.

Ein Beispiel

Für einen ersten Versuch der Anwendung der Peirce'schen Triade mit einer mathematischen Inskription als Objektpol wähle ich ein (beliebiges) Polynom oder generell Polynome, zunächst verstanden als (Typ von) Inskriptionen der Form $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Für die Zeichentätigkeit (Semiosis) weist auch Peirce mehrfach auf die Rolle eines „ground“ hin, welchen ich hier als kontextuellen Hintergrund interpretiere. Das kann zum Beispiel der Mathematikunterricht mit seinen zahlreichen Konventionen sein oder Mathematik als Forschungsdisziplin. Dieser „ground“ beinhaltet explizit oder implizit Hinweise darauf, wie die Inskription zu „lesen“ ist. Als Vergleich verweise ich auf die Analogie eines Stadtplanes und seiner Legende, die „gelesen“ werden können, ohne die Stadt zu kennen, ja sogar auch, wenn es diese gar nicht gibt. Als Repräsentamen (Zeichen im engeren Sinne) bieten sich nun verschiedene Möglichkeiten an: Das Wort „Polynom“ als Symbol mit konventionellem Bezug auf die Inskription; Rechenausdruck oder Rechenvorschrift, auch eine genaue Beschreibung der Rechenschritte; algebraischer (oder symbolischer) Term; ein spezielles Polynom mit Zahlen als Koeffizienten (ikonischer Objektbezug). Im Sinne der triadischen Konzeption ist das Zeichen aber erst „vollständig“, wenn auch der dritte Pol des Interpretanten belegt ist. Eine erste Möglichkeit ist, eines der oben angeführten Zeichen als Interpretant eines anderen Zeichens anzusehen, wobei schon auf verschiedene Weise eine Folge von Interpretanten entstehen kann. Zum Beispiel: Polynom- Rechenvorschrift-spezies Polynom-konkrete Berechnung nach Wahl von 2 für x . Wichtig ist es anzuerkennen, dass dabei stets Zeichen auf Zeichen interpretativ bezogen werden (zum Beispiel von einem Lernenden), wobei die Handlung des Berechnens nach Peirce auch ein Zeichen ist, das das jeweilige Repräsentamen interpretiert. Alle auftretenden Zeichen, als Interpretanten bzw. Repräsentamene, bleiben dabei immer auf das Objekt bezogen und sind – zwar vermittelt – stets durch dieses motiviert. In dieser Zeichentätigkeit entsteht sukzessive ein Netzwerk von Repräsentamenen und Interpretanten, das in gewisser Weise die Bedeutung des Objektes entwickelt. Dieses Netz kann erweitert werden, indem an den Objektpol mehrere Polynom-Inskriptionen gestellt werden und deren „Verknüpfungen“ (Addition, Multiplikation) gebildet werden. Zu den Interpretanten gehören dann auch „Sätze“ über diese Verknüpfungen. Das „unbekannte“ Objekt wird so sukzessive erforscht.

Didaktische Konsequenzen

Lernende und Lehrende befassen sich zwangsweise mit Zeichen bei jeder Form mathematischer Tätigkeit: beim Rechnen, beim geometrischen Konstruieren, beim Beweisen, beim Anwenden, beim Modellbilden, usf. Also scheint die Peircesche Triade in meiner Interpretation nichts wesentlich Neues zu erschließen. Akzeptiert man jedoch die hier vorgestellte Sichtweise, so gewinnen die (Typen von) Inskriptionen einen viel gewichtigeren Stellenwert, als er ihnen meines Erachtens im üblichen Mathematikunterricht zugewiesen wird. Sie sind dann nicht „nur“ Darstellungsmittel für etwas Anderes, das eigentlich Wichtige, wie immer das auch gefasst wird. Mathematik ist dann nicht bloß „Sprache“, mit der über die „Realität“ (in den sogenannten Anwendungen) oder über abstrakte Gegenstände (in der reinen Mathematik) gesprochen wird. Die mathematischen Inskriptionen werden zu den interessanten und wichtigen „Objekten“, die durch „diagrammatisches Schließen“ (Dörfler 2004a,b,c) erforscht werden, also durch die Entwicklung eines Netzes von Zeichen und Interpretanten im Sinne von Peirce. Gelernt werden soll somit der effiziente Umgang mit den jeweiligen Inskriptionen: Es geht um die Entwicklung von Erfahrung mit den Formeln und Diagrammen, was auch genaues Beobachten erfordert.

Literatur

- Dörfler, W. (2004a): Diagrammatic Thinking: Affordances and Constraints. – In: M. Hoffmann et al. (Hg.), *Activity and Sign–Grounding Mathematics Education*. – Dordrecht: Kluwer.
- Dörfler, W. (2004b): Diagrams as Means and Objects of Mathematical Reasoning. – In: *Developments in Mathematics Education in German-Speaking Countries. Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics 2001*, S. 39-49. – Hildesheim: Verlag Franzbecker.
- Dörfler, W. (2004c): Mathematical Reasoning and Observing Transformations of Diagrams. – In: *Mathematics and Language* (Hg. Ch. Bergsten and B. Grevholm), *Proc. MADIF 4*, S. 7-19. – Linköping: SMDF.
- Dörfler, W. (2004d): Peircesche Semiotik und Zahlentheorie. – In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*. – Hildesheim: Verlag Franzbecker.
- Hoffmann, M.H.G. (2003a): Erkenntnisentwicklung. Ein semiotisch-pragmatischer Ansatz (Überarbeitung Februar 2003). – Dresden: Philosophische Fakultät der Technischen Universität (Habilitationsschrift 2002).
- Hoffmann, M.H.G. (2003b): Entdeckendes Lernen – semiotisch gefasst. – In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, S. 305-308. – Hildesheim: Franzbecker.
- Hoffmann, M.H.G.; Plöger, M. (2000): Mathematik als Prozess der Verallgemeinerung von Zeichen: Eine exemplarische Unterrichtseinheit zur Entdeckung der Inkommensurabilität. – In: *Zeitschrift für Semiotik* 22, (1), S. 81-114.
- Nagl, L. (1992): *Ch.S. Peirce*. – Frankfurt: Campus Verlag.
- Pape, H. (2004): *Ch.S. Peirce*. – Hamburg: Junius Verlag.