Bodo VON PAPE, Oldenburg

Neusis-Lösungen in der Rezeption der Antike

Kant bezeichnet die „Construction“ der antiken Geometer als „Beschreibung, welche a priori durch die Einbildungskraft nach einer Regel geschieht“. Diese Interpretation einer antiken Problemlösung als bloße Beschreibung zum „Beweis von der Möglichkeit des Objects“ erweist sich als an die Quellentexte besonders gut angepasst. Descartes bringt eine Neuinterpretation auf den Weg: Die antike „Synthese“ – ursprünglich Komplement der Analyse – wird zur „Konstruktion“. Zum Konstruieren benötigt man ein Werkzeug, zumindest eine Kurve, die sich werkzeugmäßig erzeugen lässt. Sein „Mesolab“ weist den Weg für „new compasses“. Van Schooten steuert 1657 Kegelschnitt-Zirkel bei. Sturm stellt 1670 die „Kunstrichtigkeit“ der Diokles-Lösung sicher mit einem Kissoiden-Zirkel. 1707 präsentiert auch Newton ein derartiges Gerät. Diese Entwicklung rundet der Oldenburger Diedrich Uhlhorn 1809 ab mit neuen Kurven 3. Grades und einem Arsenal von Zeichengeräten, das passgenau zugeschnitten ist auf die Neusis-Lösungen der „Großen Probleme“.

1. Das Narrativ

Das Große Narrativ zu den Großen Probleme der Antike lautet:

“Der bessere Teil der Mathematik der Griechen war angetrieben von dem Bemühen, das Unmögliche zu erreichen oder, wenn man es nicht schafft, die Regeln zu ändern. Mit seinem eigentlichen Ziel einer regelkonformen Lösung ist das Heroische Zeitalter gescheitert.“

Diesem Dictum von Boyer (1968) stellen wir eine Reihe von Feststellungen an die Seite, die nur selten angesprochen werden. („Taceative“)

#1 Dass die „Großen Probleme“ mit euklidischen Mitteln
nicht zu lösen sind, das war den Griechen sehr früh klar.

#2 Die Praxis der antiken Lösungen ist mit der ´Theorie´ unvereinbar.

#3 Die Konchoide ist bei Nikomedes nicht Mittel einer Konstruktion.
Sie dient dem Nachweis der Möglichkeit einer Neusis-Konfiguration.

#4 Vieta hat gezeigt: Eine um die Neusis erweiterte Geometrie reicht hin
für das Lösen der Großen Probleme der Antike.

#5 Standard für die antiken Lösungen der Großen Probleme war
die Neusis, allgemeiner die sog. „Bewegungsgeometrie“.
(Im Einsatz von Hippokrates (430 BC) bis Pappus (330 AD).)

In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.)
Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag

#6 Pappus versteht seine eigene Neusis-Lösung als exakt:
Wer eine Näherungslösung vorlegt, hat das Problem nicht verstanden.

#7 An den Schlüsselstellen stehen nicht Anweisungen wie „Zeichne …“.
Es heißt: „Es sei gezeichnet .“ – „Es sei getan .“ – „Man denke sich .“

#7: Der Einsatz des unpersönlichen Perfekt Passiv Imperativs erfolgt bei Pappus wie bei Eutokios sehr konsequent („gegraftho“, „gegoneto“, „kineistho“). Lachterman konstatiert das Gleiche für Euklid und erklärt: “Euclid does not give instructions or permission to a reader to carry out a specified operation; the perfect tense tells us that the relevant operation has already been executed prior to the reader's encounter with the unfolding proof.”

#2 ist offenkundig. Zur Rettung der (aus Pappus herausgelesenen) ´Theorie´ werden zwei Optionen genutzt: Man kann den krassen Widerspruch herunterspielen (Bos: „The practice of problem solving in the *Collection* implied a much more lenient attitude toward the legitimacy of constructions.“ „The implications of the precept were mitigated by the practice throughout the *Collection*.”). Oder aber man erklärt die Beispiele für nicht ernst gemeint. (Sefrin-Weiss: „Pappus proposes simple ruler manipulation as a device to establish the crucial *neusis* (not claiming that it is an exact mathematical construction.”) Dem steht #6 entgegen: Hauptanliegen bei Pappus III ist die Abkanzelung einer von einem „Amateur“ vorgelegten Lösung, die sich auf euklidische Mittel beschränkt. Für den Nachweis, dass diese Lösung nicht exakt und damit inakzeptabel ist, wendet Pappus mehr Seiten und mehr Scharfsinn auf als auf die vier andern (einschließlich der eigenen). Dass dieser Ansatz von vornherein verfehlt ist („hamartema“), ist nur ein Zusatzargument: Jeder weiß doch, dass das mit euklidischen Mitteln nicht geht. (#1)

2. Neusis-Konfigurationen

Die Definition der Neusis findet sich in Pappus VII im Rahmen der Erklärung der grundlegenden Verfahrensweisen der Geometer: „Allgemein gesprochen sieht das Problem so aus: Wenn zwei Linien gegeben sind, so soll zwischen ihnen eine gerade Linie gegebener Länge so eingefügt werden, dass sie durch den gegebenen Punkt geht.“

Was in den Lösungen tatsächlich zum Einsatz kommt, das ist aber keineswegs beschränkt auf das, was diese Definition abdeckt, sei es mit Verweis auf ein „marked ruler“, auf eine Konchoide (Nikomedes) oder auf Kegelschnitte (Menaichmos). Etwas Entsprechendes findet sich als Sicherstellung der Gleichheit zweier Längen, linear benachbart (Pappus/Sporus) oder nicht (Heron/Philon/Apollonius). Der Rahmen der Neusis-Lösungen wird damit erweitert zu dem der „Sliding Ruler“-Lösungen. Dieser Klasse zuzurechnen ist insbesondere die Pappus’sche „Neusis-solution of his own“ (Knorr). Im

Falle der Heptagon-Lösung nach Archimedes geht es sogar darum, dass eine Gerade durch einen Punkt so liegen soll, dass zwei anliegende nichtähnliche Dreiecke flächengleich sind. (Bei einer Prüfung im Rahmen einer „experimentellen“ Konstruktion würde das auf Quadraturen führen, auf Umwandlungen in Quadrate!). Auch bei den Lösungen nach Platon und Eratosthenes geht es darum, dass eine bzw. zwei Gebilde (Rechteck bzw. Dreiecke) passend liegen sollen. Bezieht man diese anerkannten Lösungen mit ein, so kommt man zu einer Klasse, für die sich seit Tropfke die Bezeichnung „Bewegungsgeometrie“ eingebürgert hat. (#5)

Die Formulierungen in den Texten legen nahe, dass es hier nicht um Beschreibung von Aktivitäten geht, sondern jeweils um eine handlungsorientierte Beschreibung einer Konfiguration – nicht um „Legen“, sondern um „Gelegtsein“, genauer gesagt um „vorgestelltes Gelegtsein“. (Probleme damit sind bei der Neusis eher weniger absehbar als bei den höheren Kurven!)

Diese Sichtweise drängt sich insbesondere auf bei der aus dem Rahmen fallenden Lösung von Archytas. Im griechischen Text ist durchgehend die Rede davon, dass man sich eine Bewegung (eines Dreiecks oder eines Halbkreises) im Raum vorstellen soll. (noeistho).

3. Konstruktion als Aufbau einer Vorstellung

Einen Überblick über die zwölf Lösungen zum Delischen Problem mit einer Klassifikation gibt Knorr [1989]: Alle Lösungsverfahren sind „mechanical“:

Instrumentell (Neusis): Heron, Philon, Pappus, Apollonius, Sporus

Instrumentell (apparativ): „Plato“, Eratosthenes, (Archytas)

Instrumentell (Apparat zum Kurvenzeichnen): Nikomedes, Eudoxus-Platon

Grafisch (´pointwise construction for the curves`): Menaichmos I/II, Diokles

Abschließend hält Knorr fest: „What is remarkable about this mechanical feature of the solutions is that it obscures the theoretical issue one usually assumes lies at the base of this whole constructing enterprise.“ Das Sich-Wundern könnte man zum Anlass nehmen, den Übergang von “solution” (lyein) zu „constructive enterprise“ in Frage zu stellen, insbesondere vor dem Hintergrund, dass es in den Texten primär ausdrücklich darum geht, ob diese Konstellation möglich ist. (#3) Genau dies Abstellen auf die bloße Denkmöglichkeit trifft Kant sehr gut mit seiner Wendung: „Beweis von der Möglichkeit des Objects“. Setzt man jeder Beschreibung ein „man denke sich“ voran, so liegt die Feststellung nahe, bei den „Konstruktionen“ handle es sich je um den Aufbau einer Vorstellung. Der „konstruktive Existenzbeweis“ mutiert zu einem „deskriptiven Existenzbeweis“. Derartiges findet sich bereits bei Speusipp (mit Verweis auf die Platonische Ontologie).

4. „Organische“ Kurven

Descartes knüpft an Pappus an. Er macht eine einzige Zusatzannahme: „Zwei oder mehr Linien können bewegt werden und durch ihren Schnitt andere Kurven festlegen.“ Damit wird der Bereich der zulässigen Kurven erweitert um alle Linien, die sich mit einem Werkzeug („organisch“) erzeugen lassen. „Die Genauigkeit im Denken (‚la justesse du raisonnement‘) kann bei diesen Linien genau so perfekt sein wie bei den anderen.“

5. Die Uhlhornschen Kurven

Von dem Nestor der Antiken Geometrie – Eudoxus von Knidos – ist bekannt, dass er eine Lösung des Delischen Problems mit einer „krummen Linie“ (kampyle) vorgelegt hat. Knorr und Breidenbach spekulieren dazu über zwei Linien, deren tatsächlichen Urheber man in der Geschichte der Mathematik schlichtweg übersehen hat: Der Oldenburger Diedrich Uhlhorn. Mit seiner Ophiuride und seiner Toxoide, den dazu gehörigen Werkzeugen sowie weiteren Werkzeugen gelingt es Uhlhorn, 8 der 12 überlieferten Lösungen gegen die Kritik abzusichern, es könne sich dabei nur um „experimentelle Näherungen“ oder „Probierlösungen“ handeln. Uhlhorn zeigt: Auch diese Lösungen verdienen das Sturmsche Siegel „kunstrichtig“.

Im Sinne der Neuzeit müsste man Uhlhorn würdigen als

„Vollender der Antiken Geometrie“.

6. Fazit

Mathematische Altertumsforscher haben die höheren Errungenschaften der antiken Geometer aussehen lassen wie „Bunte Vielfalt in stummer Einfalt“. Diese Tradition wird perpetuiert und fortgesponnen („Archimedes‘ Einschiebelineal“), indem man sich auf andere beruft und einander „sorgfältige, detaillierte, historische Quellenarbeit“ (Jahnke) bescheinigt.

Bei den Relikten der Antike genauer hinsehen!

Das erweist sich als unverzichtbar nicht nur im Fall der Skulpturen.

Literatur

Knorr, W. R. (1989). Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry. Boston, Birkhäuser.

Lachtermann, D. R. (1989). The Ethics of Geometry. New York, Routledge.

Pape, B. v. (2017). Diedrich Uhlhorn (1764-1837) und die Großen Probleme der Antike. *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, XXXVII*, 29–59.

Uhlhorn, D. (1809). Entdeckungen in der Höhern Geometrie. Oldenburg, Schwarz.

Vieta, F. (1593). Supplementum Geometriae. Gesammelte Werke 1646 Leiden: Elsevier.