

HERRMANN, Janine & WESSEL, Lena
Paderborn

Ansprüche einer Fortbildung für Lehrkräfte zur Analytischen Geometrie

Im Zuge der Entwicklung von Fortbildungsinhalten zum Unterrichten analytischer Geometrie im Rahmen von *QuaMath* stellt sich die Frage: "Welche Expertise ist für verstehensorientierten analytischen Geometrieunterricht notwendig? Und über welche Expertise verfügen Lehrkräfte?"

Eine Beantwortung dieser Fragen durch empirische Forschung zur Expertise von Lehrkräften in diesem Bereich ist jedoch nach aktuellem Forschungsstand nicht möglich. In Befunden auf Lernendenebene (z.B. Girnat, 2016) zeichnet sich eine einseitige Orientierung am Kalkül ab. Die *QuaMath*-Prinzipien der "Verstehensorientierung" und "Durchgängigkeit" (Holzäpfel et al., 2024) werden demzufolge im Unterricht oft nicht ausreichend adressiert. Gemeinsam mit der von Tietze, Klika und Wolpers (2000) geprägten zentralen Idee des Algebraisierens und Geometrisierens, stellen vielfältige Vernetzungen zwischen algebraisierten und geometrisierten Darstellungen ein wesentliches Qualitätsmerkmal des analytischen Geometrieunterrichts dar.

Die Wahrnehmung oben genannter Qualitätsmerkmale in der unterrichtlichen Praxis ist Teil der gegenstandsbezogenen Expertise professioneller Lehrkräfte (Prediger, 2019). Die auf dem Poster dargestellte Vignette soll Aufschluss über die Expertise zum Gegenstand "Skalarprodukt" liefern, welche in einen Prä-Post Design im Rahmen der Fortbildungen genutzt wird.

Erste Ergebnisse aus einer Pilotierung der Vignette zeigen, dass Lehrkräfte nicht nur Schwierigkeiten im Umgang mit Lernendenlösungen haben, sondern auch auf inhaltlicher Ebene bei der geometrischen Interpretation des Skalarproduktes und dessen Anbindung an verschiedene weitere Themen Defizite aufweisen. Für die Konzeption von Fortbildungen impliziert dies sowohl eine inhaltliche Vertiefung schulischer Inhalte, als auch eine explizite Vernetzung von relevanten Darstellungen der analytischen Geometrie.

Literatur

- Girnat, B. (2016): *Schülerschwierigkeiten in der vektoriellen Geometrie*. DOI: 10.1007/978 3 658 15456 1.
- Holzäpfel, L. et al. (2024): Fünf Prinzipien für qualitätvollen Mathematikunterricht. *mathematik lehren*, 242. Friedrich Verlag, Seelze.
- Prediger, S. (2019): Investigating and promoting teachers' expertise for language-responsive mathematics teaching. *Mathematics Education Research Journal*.
- Tietze, U., Klika, M., Wolpers, H. (2000): *Mathematik in der Sekundarstufe II. Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra*. Vieweg Verlag, Braunschweig.

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.

Expertise und Bedarfe (angehender) Lehrkräfte zum Unterrichten von Inhalten der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra in der Sekundarstufe 2

Forschungshintergrund:

Im Rahmen von QuaMath werden Fortbildungen zur **analytischen Geometrie** entwickelt. Spezifische Expertise von Lehrkräften für den analytischen Geometrieunterricht und daraus resultierende Bedarfe für Fortbildungen lassen sich jedoch nur bedingt aus der Literatur ableiten (Törner, 1983; Tietze, et al. 2000).

Entwicklungsinteressen

- Analyse und Spezifizierung von Fortbildungsbedarfen zur analytischen Geometrie
- Entwicklung von Fortbildungen auf Grundlage der fünf **QuaMath-Prinzipien** (Prediger, et al., 2022)
- Entwicklung eines Modells zur Beschreibung von **Orientierungen und Kategorien** für den analytischen Geometrieunterricht unter Berücksichtigung der Idee des **Geometrisierens und Algebraisieren** (Tietze, et al. 2000)

- Kognitive Aktivierung
- Verstehensorientierung
- Durchgängigkeit
- Lernenden-Orientierung & Adaptivität
- Kommunikationsförderung

Wie werden Fortbildungsbedarfe ermittelt?

- Spezifizierung **inhaltspezifischer Anforderungen** der analytischen Geometrie (Artmann, Törner, 1983; Tietze, et al., 2000; Henn, Filler, 2015)
- Identifikation von empirisch rekonstruierbaren **Orientierungen und Denk- und Wahrnehmungskategorien** von Lehrkräfte (Prediger, 2019)
- Begründungen für Fortbildungsbedarfe durch **Analyse des Vorwissens** angehender und ausgebildeter Lehrkräfte (Rutsch et al., 2017; König et al., 2013)
- **Testung und Weiterentwicklung von Fortbildungsaktivitäten** im Rahmen von Studienseminaren und ersten Fortbildungsdurchläufen

Methode

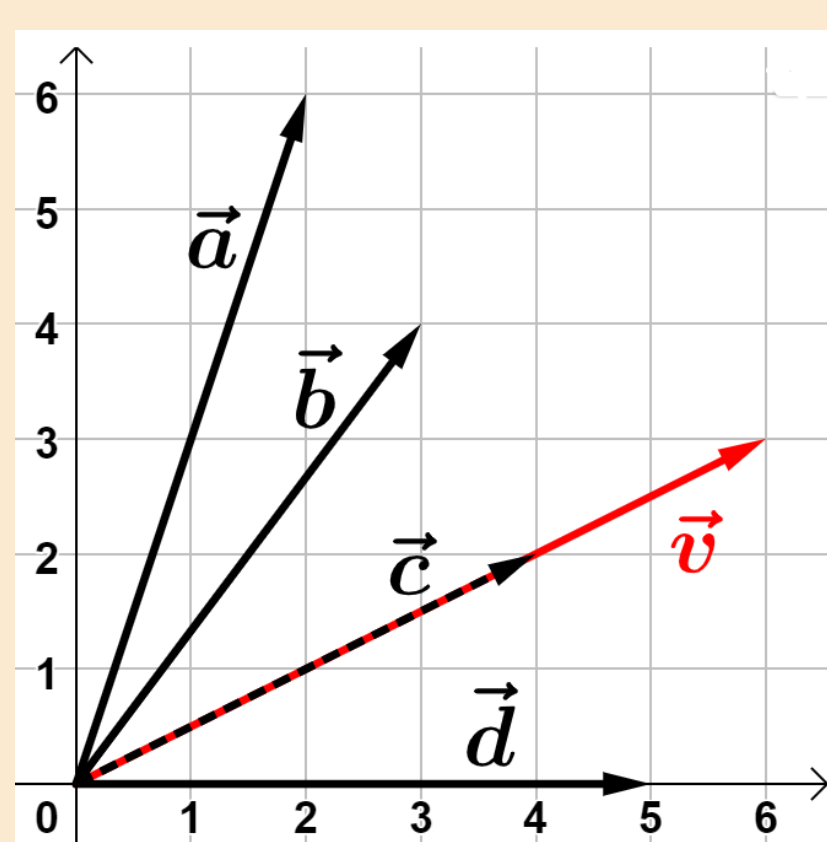
- **Design-Research-Projekt** (Prediger, 2019) mit Fundierung des Fortbildungsgegenstands sowie die Entwicklung und Überarbeitung von Fortbildungsaktivitäten und Forschungsinstrumenten der Fortbildungen
- Einsatz von **Vignetten** zur Rekonstruktion der Verstehensorientierung als Teil der Expertise von Lehrkräften (Benz, 2020; Kuntze, Friesen, 2020)

Was bedeutet „Verstehen“ im Sinne der unten dargestellten Aufgabe zum Skalarprodukt im fachlichen und unterrichtlichen Kontext?

Darstellung der Aufgabe

Schulbuchaufgabe: Skalarprodukt (SP)

In der nebenstehenden Abbildung sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ und \vec{v} durch Pfeile mit gemeinsamem Ursprung dargestellt.



Vergleiche die Skalarprodukte $\vec{a} \cdot \vec{v}, \vec{b} \cdot \vec{v}, \vec{c} \cdot \vec{v}$ und $\vec{d} \cdot \vec{v}$ jeweils miteinander.

Fachliches Verständnis (Lernendenebene)

Elemente einer verstehensorientierten Lösung:

- Die Pfeilspitzen liegen auf einer zu \vec{v} orthogonalen Geraden g .
- Das SP ist „unabhängig vom orthogonalen Teil“ (LiAnMU Paderborn) und daher sind die vier SPe gleich.
- Bezug zur Kosinusformel: $\vec{a} \cdot \vec{v} = \cos(\alpha) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{v}| = |\vec{c}| \cdot |\vec{v}| = \vec{c} \cdot \vec{v}$
- Der Wert der SPe ist größer als 0, da die Winkel zwischen den jeweiligen Pfeilen spitz, (bzw. 0°) sind.

Systemisierungswissen (Lehrkräteebene)

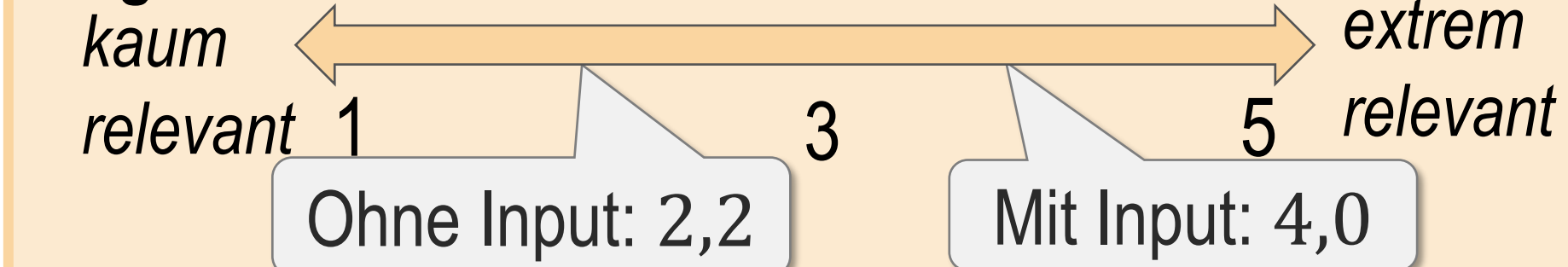
Denk- und Wahrnehmungskategorien zum SP:

- (Projekt LiAnMU Uni Paderborn)
- Produktoperation:** Das SP als Verknüpfung zweier Vektoren
- Monotonie bei Winkel- und Längenänderung:** Monotone Abhängigkeiten des SPs
- Winkelbetrachtung:** Qualitative und quantitative Aussagen über den eingeschlossenen Winkel
- Gleichheit von SPen:** Gleiche SPe bei gleicher orthogonaler Projektion

Welche Orientierungen, Verstehenshürden und Denkkategorien lassen sich bei (angehenden) Lehrkräften identifizieren?

Orientierungen

Durchschnittliche Einordnung der **Relevanz der Schulbuchaufgabe** auf einer Skala von 1 bis 5:



Lehrkräfte im Dienst $n = 5$ ohne vorherigem Input zum Skalarprodukt | Lehramtsstudierende $n = 16$ mit vorherigen Input zum Skalarprodukt

Lehrkräfteaussagen aus der Fortbildung:

- „Ich würde die Aufgabe nicht machen, weil man auch im Unterricht immer nur darauf trimmt: Du machst das SP, also *musst du rechnen*.“ (Stanislav, Gesamt-schullehrer)
- „Ich nutze das SP, [neben der Orthogonalität] in der Winkelformel. *Im Grundkurs fällt das vom Himmel. [...] Haken dran!*“ (Dorothea, Gymnasial-lehrerin)

Fachliche Verstehenshürden

Fehlvorstellungen zum Skalarprodukt (SP):

- „Bei $\vec{c} \cdot \vec{v}$ ist das Ergebnis am größten.“ (Silvia, Gymnasiallehrerin)
- „Das SP wird größer, wenn die Vektoren und der Winkel größer werden.“ (Mike, Lehramtsstudent)
- „Das SP von $\vec{c} \cdot \vec{v}$ ist kleiner als die anderen SPe.“ (Thea, Lehramtsstudentin)

Verstehenshürden bei geom. Zusammenhängen

- „Die SPe repräsentieren unterschiedliche Flächeninhalte.“ (Hannah, Lehramtsstudentin)
- „Das SP ist eine Projektion, also ein Vektor, aber eigentlich ja eine Zahl.“ (Mehmet, Lehrkraft am Weiterbildungskolleg)

Genutzte Kategorien

Ein/e Schüler/in hat das SP in der obigen Aufgabe (geometrisch) verstanden, wenn...

- er/ sie „die Ergebnisse im Kontext der Winkel, die die beiden Vektoren bilden“ deutet. (Mia, Lehramtsstudentin)
- er/ sie „die SPe berechnen und miteinander vergleichen kann.“ (Rainer, Gymnasiallehrer, sieht Winkel als „Hauptanwendung“ des SPs)
- er/sie erkennt, dass „keiner der Vektoren *senkrecht* zu \vec{v} steht und die SPe daher nicht 0 sein können.“ (Daniel, Gymnasial-lehrer, betont den Spezialfall „orthogonal“ übermäßig)
- er/sie weiß, dass „alle drei SPe gleich [sind], da das SP nur den *orthogonalen Anteil* [...] berücksichtigt“ (Sofia, Lehramtsstudentin, hatte bereits einen Input zum Skalarprodukt, vertauscht aber hier den orthogonalen mit dem parallelen Anteil).

Fazit – Folgerungen aus den Erprobungen:

- **Hypothese:** Die **Orientierungen** von Lehrkräften zur Relevanz der oben dargestellten Schulbuchaufgabe werden zum einen durch das **fachliche Verständnis** und zum anderen durch die **Denk- und Wahrnehmungskategorien** zum Skalarprodukt beeinflusst.
- Ohne Klärung fachlicher Kategorien können Lehrkräfte **Lernendenlösungen** zur Aufgabe nicht hinsichtlich der **Verstehensorientierung beurteilen**.
- Die **Gleichheit von Skalarprodukten** wird trotz der Relevanz für die obige Aufgabe **kaum adressiert**, während der Orthogonalitätsaspekt überbetont wird.
- Um kalkülorientierte Aufgaben abzulösen, müssen **verstehensorientierte Aufgaben** entwickelt und im Rahmen der Fortbildung weitergegeben werden.

