

Vorstellungen zum Skalarprodukt von Studienanfänger:innen

Innerhalb der Qualitätsoffensive Lehrerbildung (QLB) wird das DiBS-Projekt (Digitale Kompetenzen für die Lehrkräftebildung an der TU Braunschweig) vom BMBF gefördert, was dadurch ermöglicht wurde, dass eine 2018 ergänzte Förderrichtlinie u. a. das Thema „Digitalisierung in der Lehrerbildung“ als Förderschwerpunkt beinhaltet. Im Rahmen des DiBS-Projektes verfolgen die beteiligten fachdidaktischen Institute verschiedene Ansätze. Das mathematikdidaktische Teilprojekt beschäftigt sich mit diversen Vorstellungen zum Standardskalarprodukt (SP) im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 . Dabei wird insbesondere der Frage nachgegangen, wie möglichst flexible Vorstellungen zum Skalarprodukt unter der Verwendung von digitalen Werkzeugen bei Schüler:innen aufgebaut werden können. Ausgangspunkt der Forschung ist eine Erhebung zu Grundvorstellungen des Skalarprodukts, die erstmals im Wintersemester 2022/23 im Rahmen der Mathematik-Vorkurse an der TU Braunschweig mit Studienanfänger:innen durchgeführt worden ist. Der vorliegende Artikel widmet sich der Konzeption des Fragebogens zur Erhebung der Vorkenntnisse zum Skalarprodukt sowie der Auswertung der ersten Erhebung mit 422 Studierenden.

1. Grundvorstellungen des Skalarprodukts

Grundvorstellungen (GV) sind mentale Repräsentationen von mathematischen Objekten oder Verfahren, die u. a. den Übersetzungsprozess zwischen realen Anwendungssituationen und der innermathematischen Struktur erleichtern sollen. GV entwickeln sich in einem Netzwerk. Dabei wird ein Begriff oder ein mathematisches Konzept in der Regel erst durch mehrere GV erfasst, die als Ganzes ein flexibles und vernetztes Gedankenkonstrukt zu entsprechenden mathematischen Konzepten ergeben (vgl. v. Hofe, 1995). Frohn (2020) erarbeitete aus fachlichen Überlegungen heraus zunächst vier normative Grundvorstellungen zum Skalarprodukt und erweiterte diese etwas später um eine fünfte (Frohn, 2022):

Abk.	Bezeichnung	Erklärung
GV1	Produktvorstellung	$\vec{a} * \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ Distributivität und Kommutativität
GV2	Orthogonalitätsvorstellung	SP genau dann null, wenn die Vektoren orthogonal sind

GV3	Winkel- vorstellung	$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} }$ SP > 0 => spitzer Winkel SP < 0 => stumpfer Winkel
GV4	Projektions- vorstellung	SP hängt nur von parallelen Anteil ab und ist unabhängig vom orthogonalen Anteil (vgl. Abb 1)
GV5	Flächeninhalts- vorstellung	Betrag des SPs entspricht einem Rechtecks-flächeninhalt (vgl. Abb. 2)

2. Methodik und Fragestellung

Zu Beginn des Wintersemesters 2022/23 wurde ein Fragebogen als Erhebungsinstrument konzipiert, um die Vorstellungen zum Skalarprodukt von Studienanfänger:innen an der TU Braunschweig in verschiedenen Studiengängen zu erforschen und die folgende Frage zu beantworten:

Welche Grundvorstellungen vom Skalarprodukt können bei Studierenden unterschiedlicher Fachrichtungen an der TU Braunschweig nachgewiesen werden?

Hierzu wurden insgesamt 422 Studierende [S_ges] aus den Mathematik-Vorkursen befragt, wobei 358 (85 %) den MINT-Studienfächern [S_MINT], 52 (12 %) einem Lehramtsstudiengang mit Mathematik [S_LA] und 12 (3 %) sonstigen Studiengängen (Medienwissenschaften oder keine Angaben) [S_sonst] zugeordnet werden können. Die Gruppe S_LA beinhaltet 2 Personen des gymnasialen Lehramts Mathematik, während die übrigen 50 Studierenden dem GHR-Bereich zuzuordnen sind. Der Fragebogen enthielt insgesamt 15 Items, die den oben angesprochenen Grundvorstellungen nach Frohn zugeordnet werden können (siehe Kap. 3). Für die Bearbeitung des Fragebogens standen den Studierenden max. 30 Minuten zur Verfügung. Die Korrektur der einzelnen Fragebögen erfolgte händisch mithilfe eines zuvor erarbeiteten Erwartungshorizontes. Die anschließende Auswertung wurde mit SPSS durchgeführt. Der konzipierte Fragebogen enthielt rein rechenbasierte Items (z. B. konkrete Berechnung des Skalarproduktes zweier konkret gegebener Vektoren), Multiple-Choice-Items ebenso wie anspruchsvollere konzeptuelle Items, die zur korrekten Beantwortung bspw. die Projektions- und/oder die Flächeninhaltsvorstellung voraussetzen. Im Folgenden werden zwei exemplarische Items konzeptueller Art vorgestellt.

a) Welche Lage haben alle Vektoren, die mit dem gegebenen Vektor das gleiche Skalarprodukt bilden? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Begründen Sie anhand von Abb. 2, dass das Skalarprodukt dem Flächeninhalt des Rechtecks OPQA entspricht.

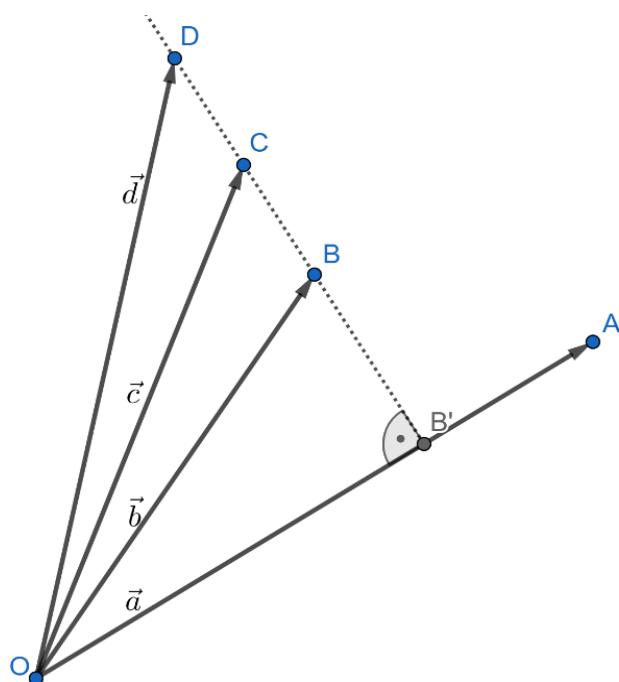


Abb. 1: Projektionsvorstellung [GV4]
© www.geogebra.org, S. Mercan

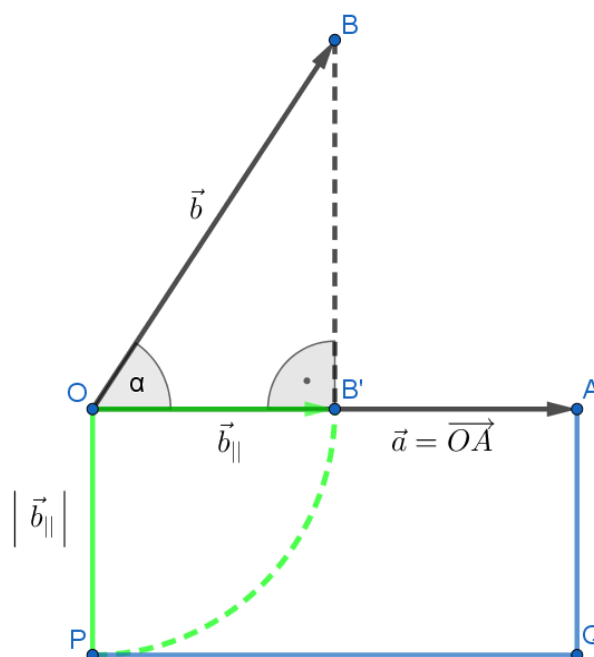


Abb. 2: Flächeninhaltsvorstellung [GV5]
© www.geogebra.org, S. Mercan

3. Ergebnisse

Die folgende Tabelle ordnet den Grundvorstellungen die Items aus dem Fragebogen zu und stellt die durchschnittlich erreichte Punktzahl für die oben genannten Studiengänge gegenüber.

Grundvorstellung	Items des Fragebogens	S_ges N = 422	S_MINT N = 358	S_LA N = 52	S_sonst N = 12
GV1	1c), 1d)	50,7 %	54,7 %	29,8 %	23,6 %
GV2	1f)	72,3 %	74,9 %	57,7 %	58,3 %
GV3	1g), 1h), 2d)	36,0 %	36,8 %	31,7 %	31,3 %
GV4	2a), 2b), 2c)	7,6 %	8,2 %	3,8 %	6,5 %
GV5	2e), 2f), 2g)	3,8 %	4,4 %	0,0 %	3,2 %

Rund die Hälfte der Teilnehmenden war in der Lage das Skalarprodukt zweier konkreter Vektoren bzw. die allgemeine Berechnungsformel anzugeben [GV1]. Die Orthogonalitätsvorstellung [GV2] kann bei fast drei Vierteln der Beteiligten nachgewiesen werden und stellt somit die dominierende GV

unter den Teilnehmenden dar. Die Winkelvorstellung [GV3] konnte bei etwas mehr als einem Drittel der Beteiligten nachgewiesen werden. Auffällig sind insbesondere die niedrigen Lösungsquoten der Projektions- [GV4] und der Flächeninhaltsvorstellung [GV5] von weniger als 10 % der Gesamtkohorte.

Insgesamt verwundert es nicht, dass die Vorstellungen zum Skalarprodukt von MINT-Studierenden tendenziell besser ausgebildet zu sein scheinen als bei Studierenden anderer Studiengänge und speziell den untersuchten Lehramtsstudierenden. Die Gesamtkohorte betreffend zeigt sich, dass die Grundvorstellungen zur Projektion und zum Flächeninhalt bei nahezu allen Teilnehmenden nicht nachgewiesen werden können. Es zeigt sich außerdem, dass sich die Fähigkeiten der Studienanfänger:innen beim Umgang mit dem Skalarprodukt im Wesentlichen auf Rechentechniken und die Orthogonalitätseigenschaft beschränken. Diese Ergebnisse lassen die Hypothese zu, dass der entsprechende Mathematikunterricht eher verfahrensorientiert geprägt war und die Lernenden in deutlich geringerem Maße vorstellungsbasiert ausgebildet wurden.

4. Ausblick

Für die zweite Durchführung im WiSe 23/24 wurden im Anschluss an die Auswertung einzelne Items in ihrer Formulierung überarbeitet bzw. sprachlich angepasst sowie drei neue Multiple-Choice-Items hinzugefügt. Der überarbeitete Fragebogen wurde bereits zu Beginn des WiSe 23/24 verwendet, um die Grundvorstellungen zum Skalarprodukt von knapp 500 Studierenden zu untersuchen, wobei zusätzlich der Stichprobenumfang der sonstigen Studierenden erhöht wurde, um möglichst repräsentative Daten zu generieren. Basierend auf den bisherigen Ergebnissen wurde eine Lerneinheit mit GeoGebra entwickelt, die aktuell erprobt wird. Perspektivisch bietet es sich an, eine detailliertere Schulbuchanalyse vorzunehmen, um festzustellen, welche Vorstellungen des Skalarproduktes in den gängigen Schulbüchern angesprochen werden.

Literatur

- Frohn, D. (2020). Mehr als Orthogonalität. Das Skalarprodukt beziehungsreich anwenden - mit Grundvorstellungen. *mathematik lehren*, 218, 33-38.
- Frohn, D. (2022). Grundvorstellungen in der analytischen Geometrie: Skalare Multiplikation, Skalarprodukt, Vektorprodukt. In IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2022. 56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 749-752.
- vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum, Heidelberg.