KROHN, Thomas & SCHUMACHER, Stefanie
Leipzig, Bielefeld

Das LUPI-Spiel: Zufall und Strategie vereint

1. Das LUPI-Spiel aus fachdidaktischer und spieltheoretischer Sicht

Zu den generellen Kernforderungen an eine schulische stochastische Grundbildung zählt u. a. die „Fähigkeit zur Interpretation und kritischen Bewertung stochastischer Informationen“ und „zur Modellierung stochastischer Phänomene, die mithilfe von Daten und/oder Wahrscheinlichkeitsmodellen“ auch in alltäglichen Kontexten beschrieben werden (Krüger et al. 2015, S. 2) mit dem Ziel, dass die Lernenden im späteren Leben Entscheidungsprozesse reflektiert bewältigen (NCTM 2000, S. 48f. sowie Eichler & Vogel 2013). Ein Blick in die curricularen Vorgaben sowohl der Primar- als auch der Sekundarstufe verdeutlicht ebenfalls die Relevanz der oben genannten zentralen Forderungen für den modernen Stochastikunterricht (vgl. u. a. BS 2022).

Das LUPI-Spiel (Lowest Unique Positive Integer) besitzt eine einfache Spielregel: Es wählen m Personen einer Gruppe einzeln und geheim eine Zahl von 1 bis n. Gewonnen hat, wessen Zahl möglichst klein ist, die niemand sonst gewählt hat. Aus spieltheoretischer Sicht fällt es in die Kategorie der statischen Spiele (vgl. Riechmann 2013, S. 21, S. 36ff.), bei denen die beteiligten Spielenden als Entscheidungsträger ihre Entscheidung gleichzeitig ohne Kenntnis der anderen Entscheidungen treffen und es daher auch als Spiel mit imperfekter Information bezeichnet wird. Es gibt ähnliche Spielvarianten – z. B. Schwedisches Lottospiel „Limbo“ (vgl. Östling et al. 2011), Zahlenwahlspiel (vgl. Selten & Nagel 1998) – die ihrerseits in verschiedenen Wissenschaftsdisziplinen in den letzten Jahren theoretisch und experimentell untersucht wurden (vgl. für einen Überblick mit Verweis auf weitere Quellen Yamada & Hanaki 2016, S. 2–4). Für detaillierte mathematische Untersuchungen u. a. zum Auffinden des spieltheoretisch wichtigen Nash-Gleichgewichts sei hier etwa auf Baek & Bernhardsson (2010) verwiesen, Ausführungen zu einer experimentellen Versuchsreihe von 50 Spielrunden mit 3–4 Personen und der Auswahl von 1–3 bzw. 1–4 in Yamada & Hanaki (2016).

Abgesehen von diesen wissenschaftlichen Studien gibt es keine Vorschläge oder Erfahrungen für den Einsatz des Spiels in Schulen. In diesem Beitrag soll daher das Potenzial des LUPI-Spiels für den Stochastikunterricht untersucht werden. Die zugrundeliegende Fragestellung lautet: Inwieweit lassen sich die drei Zugänge zur Wahrscheinlichkeit (theoretisch, frequentistisch, subjektiv) mit einem einfachen Spiel wie LUPI mit Zufalls- und Strategieeinflüssen gewinnbringend kombinieren und können die oben beschriebenen zentralen Anforderungen an den Stochastikunterricht erfüllt werden?

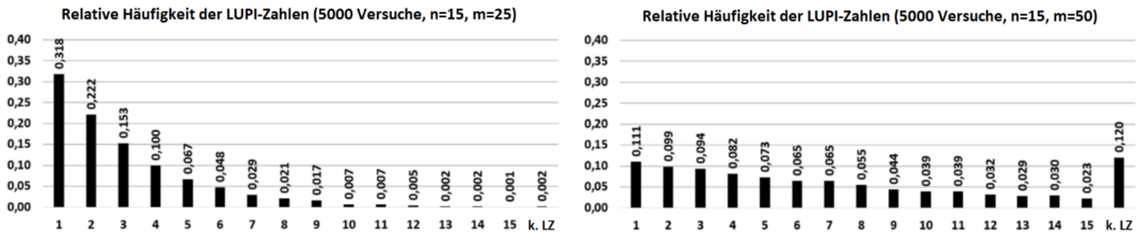
In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

2. Vorschläge für und Erfahrungen von LUPI im Stochastikunterricht

Im Folgenden werden Einsatzmöglichkeiten des LUPI-Spiels im Unterricht beschrieben. Abschließend wird kurz auf die mehrfache Durchführung des Spiels mit insgesamt 524 Spielenden eingegangen.

LUPI - Das Zufallsspiel: Drei Zugänge zur Wahrscheinlichkeit
In der *mathematisch-theoretischen* Variante des Spiels wählt jede Person einer Gruppe ihre Zahl zufällig und ohne weitere strategische Überlegungen aus (vergleichbar mit dem Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit Zurücklegen). Dem theoretischen A-priori-Wahrscheinlichkeitszugang folgend lassen sich Wahrscheinlichkeiten des Auftretens einzelner Zahlen bei LUPI beispielsweise mit $n = 15$ (Zahlen 1 bis 15) und $m = 25$ (z. B. Größe einer Schulkasse) im Mathematikunterricht im Kontext der Binomialverteilung zumindest für die Gewinnerzahl (= LUPI-Zahl) 1 berechnen. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Person die einzige ist, die rein zufällig eine Zahl k von 1 bis 15 wählt, ist $\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-1}$ und damit die Wahrscheinlichkeit p, dass eine beliebige Zahl k von allen Personen in der Gruppe genau einmal gewählt wurde $p = \frac{m}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-1}$. Im Fall $n = 15$ und $m = 25$ ist $p = \frac{25}{15} \cdot \left(\frac{14}{15}\right)^{24} \approx 0{,}318 \approx 32\,\%$. Diese bloße Rechnung sollte allerdings nicht das alleinige Unterrichtsziel sein, da es für viele Lernende dann unreflektiert ein inhaltsloser numerischer Wert ohne Verständnis bleibt. Zu beachten ist, dass LUPI-Zahlen $k > 1$ aufwendiger zu berechnen sind, da dann zusätzlich zur alleinigen Wahl von k alle kleineren Zahlen jeweils nicht genau einmal gewählt sein dürfen. Immerhin lässt sich im Sinne der Spielregel schlussfolgern, dass die Wahrscheinlichkeiten für LUPI-Zahlen größer als 1 tendenziell kleiner werden sollten, was eine einfache Simulation bestätigt.

Mit dem Potenzial der digitalen Medien, hier Tabellenkalkulation, lässt sich – dem *frequentistischen* A-posteriori-Wahrscheinlichkeitszugang folgend – LUPI effizient in sehr vielen Wiederholungen mit nur wenig Aufwand simulieren. Mit den (MS EXCEL-) Funktionen ZUFALLSBEREICH() lassen sich beliebig viele Zufallszahlen (hier von 1 bis 15) generieren, mit ZÄHLENWENN() die absoluten Häufigkeiten zählen und schließlich mit einem komplexeren WENN()-Befehl die kleinste einmalig auftretende Zahl bestimmen. Weitere Vorteile des digitalen Mediums sind die große Anzahl an unabhängigen Versuchsdurchführungen, variable Parameter n und m für Auswahlzahlen und Gruppengrößen und natürlich als besonderes Potenzial im Verständnisprozess (vgl. Duval 1999, S. 3ff.) die unmittelbare Visualisierung der LUPI-Zahlen als dynamisches Säulendiagramm (vgl. Abb. unten).



Beispiel-Simulationen für 5000 Durchführungen mit m=25 (links; oben beschriebenes Szenario) bzw. m=50 (rechts; geringere Wahrscheinlichkeiten der LUPI-Zahlen und der dominante Fall keiner Gewinnerzahl)

Diese Simulation kann so genutzt werden, um mit den Lernenden ihre individuellen *subjektiven* Vorstellungen „Was wäre, wenn…?“ in der Variation von m und n anschaulich und ohne Rechnung (und/oder im Zusammenhang mit der Interpretation des Terms für p) zu verdeutlichen. Auf diese Weise lassen sich die drei Wahrscheinlichkeitszugänge (theoretisch, frequentistisch, subjektiv) sinnvoll miteinander verknüpfen. Seit September 2023 werden in verschiedenen Klassenstufen weitere Daten erhoben, um mehr über die subjektiven Sichtweisen der Lernenden sowie ihre Argumentationsweisen zu erfahren. Die Lernenden verschiedener Klassenstufen ordnen dabei unterschiedliche visualisierte Häufigkeitsverteilungen des LUPI-Spiels den verschiedenen vorgegebenen Settings (konstantes $n = 15$, variable Werte für m mit $m = 1, 25, 50, 100$) begründet zu, um Rückschlüsse auf ihr vorhandenes Verständnis zum LUPI-Spiel zu ziehen. Erste Ergebnisse von ca. 200 Probanden zeigen, dass ab Klassenstufe 9 die Lernenden die Verteilung der Häufigkeiten nahezu fehlerfrei antizipieren und begründen können und selbst in den Klassenstufen 6 bis 8 bereits mehrheitlich korrekt zuordnen.

LUPI – Das Strategiespiel: Subjektiv-spieltheoretischer Ansatz

Selbstverständlich zeigt sich das LUPI-Spiel in der Umsetzung mit menschlichen Teilnehmenden in großem Maße nicht nur als Zufalls-, sondern v. a. auch als Strategiespiel. Eine Untersuchung mit n=524 Teilnehmenden (Lernende aus der Primar- und den Sekundarstufen, Lehramtsstudierende und Lehrkräfte) zeigte dies eindrucksvoll. Die *subjektiven* Erklärungen für die Zahlenwahl wurden mittels qualitativer Inhaltsanalyse nach Mayring (2015) codiert und in 10 Kategorien eingeteilt. Es zeigten sich dabei u. a. spieltheoretische Überlegungen, mathematische Ideen, aber auch individuelle, persönliche Begründungsmuster - allesamt mit ergiebigem und die Lernenden stets motivierendem Diskussionspotenzial im Stochastikunterricht.

Für nähere Informationen zum Untersuchungsdesign, den Begründungskategorien sowie den zentralen Ergebnissen sei auf den Beitrag „*Das LUPI-Spiel: Niemand traut sich, die 1 zu nehmen!*“ derselben Autoren in diesem Tagungsband verwiesen.

3. Zusammenfassung und Ausblick

Es hat sich gezeigt, dass das LUPI-Spiel ein breites Potenzial für den Einsatz im Unterricht, insbesondere in der Sekundarstufe, bietet und die Möglichkeit eröffnet, die drei zentralen Ansätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung in einer Lernumgebung zu kombinieren und auch mit Hilfe digitaler Medien zu simulieren. Es ist eine motivierende Lernumgebung im Spannungsfeld zwischen Zufall und Strategie mit leicht verständlichen Regeln und Wettbewerbscharakter. Die Lernenden können bei der Wahl ihrer Zahl eigene Ideen einbringen, das Experiment konkret im Unterricht oder als Simulation durchführen und sich theoretischen Wahrscheinlichkeiten nähern. Darüber hinaus stellt die Durchführung, Diskussion und Reflexion des Spiels eine Bereicherung für die Mathematiklehrkräfteausbildung dar. In Zukunft soll eine (digitale) Lernumgebung sowohl für den Unterricht als auch für den universitären Einsatz ausgearbeitet werden. Die weitere Untersuchung der individuellen, subjektiven Überzeugungen der Lernenden mit Hilfe von Interviews, auch vor dem Hintergrund der mehrfachen Wiederholung des LUPI-Spiels, ist ein weiteres interessantes zukünftiges Forschungsprojekt.

Literatur

Baek, S. K. & Bernhardsson, S. (2010). Equilibrium solution to the lowest unique positive integer game. *Fluctuation and Noise Letters*, Vol. 09, No. 01 (S. 61–68).

BS 2022 – Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik.*

Döring, N. & Bortz, J. (2016). *Forschungsmethoden und Evaluation in den Sozial- und Humanwissenschaften.* Springer.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in *Mathematical Thinking. Proceedings of the Meeting of the North American Chapter of the International Group Psychology of Mathematics Education* 1999 (S. 3–26).

Eichler, A. & Vogel, M. (2013). *Leitidee Daten und Zufall: Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik*. Springer.

Krüger, K., Sill, H-D. u. a. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I.* Springer.

Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken*. Beltz.

NCTM – The National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.*

Östling, R., J. T.-Y. Want, E. Y. Chou, C. F. Camerer (2011). Testing Game Theory in the Field: Swedish LUPI Lottery Games. American Economics Journal, *Microeconomics* 3, August 2011 (S. 1–33).

Riechmann, T. (2013). *Spieltheorie*. Vahlen.

Selten, R. & Nagel, R. (1998). Das Zahlenwahlspiel –Ergebnisse und Hintergrund. *Spektrum der Wissenschaft*, Februar 1998 (S. 16–22).

Yamada, T. & Hanaki, N. (2016). An Experiment on Lowest Unique Integer Games. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 463/2016 (S. 88–102).