OLDENBURG, Reinhard
Augsburg

Gibt es Beziehungen von Grundvorstellungen?

Das Grundvorstellungskonzept (vom Hofe, 1996) ist sehr erfolgreich, aber es hat ein Skalierungsproblem: Wenn jedes Konzept ca. 4 Grundvorstellungen hat, bringen n Begriffe $4n$ Grundvorstellungen mit sich. Wie könnte man der Fülle Herr werden? In diesem Beitrag wird vorgeschlagen, Beziehungen von Grundvorstellungen zu untersuchen. Die ursprüngliche Motivation für diese Untersuchung ergab sich aus der Frage, ob die Grundvorstellungen von Addition und Subtraktion unabhängig sind, oder ob sie systematisch zusammenhängen, da es Umkehroperationen zueinander sind.

1. Theoretische Rahmung

Grundvorstellungen sind "tragfähige mathematische Vorstellungen" (Roth & vom Hofe, 2023), oder, wie Greefrath et al. (2016) definiert haben: "Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt". Zur Sinngebung gehört sicher auch die Beziehung zu anderen Begriffen. Allerdings wird dies bisher in der Literatur nicht intensiv diskutiert. Roth und vom Hofe (2023) visualisieren je vier Grundvorstellungen zur Addition und zur Subtraktion, die aufgrund ihrer Verwendung von Zuständen bzw. Änderungen in Beziehung gesetzt werden, aber die Umkehroperationsbeziehung wird nicht genauer thematisiert. In einer zusammenfassenden Grafik (ein Ausschnitt ist in Abbildung 1 zu sehen) gibt es einzelne Grundvorstellung, die Addition und Subtraktion verbinden. Solche Verbindungen genauer zu verstehen, scheint ein sinnvolles Forschungsziel, aus dem sich die Meta-Forschungsfrage ergibt: Welche Beziehungen gibt es zwischen Grundvorstellungen?

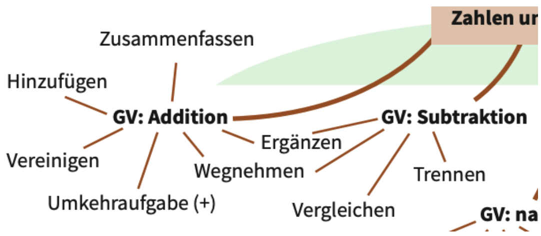

Abb. 1: Beziehungen von Grundvorstellungen bei Roth & vom Hofe (2023)

2. Einige Operationen mit Grundvorstellungen

Es sind verschiedene Kombinationen von Grundvorstellungen denkbar, und diese werden hier theoretisch elaboriert.

1) Zwei Grundvorstellungen werden kombiniert und bilden zusammen eine neue Vorstellung. Symbolisch $G_1 \otimes G_2 = G$. Beispiele:

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

a) Beim Integral ergibt eine Kombination von Flächeninhaltsvorstellung und Kumulationsvorstellung die Vorstellung, dass das Integral Grenzwert einer Streifensumme ist.

b) Ebenso beim Integral: Die Kombination von Kumulations- und Rekonstruktionsvorstellung ergibt die Vorstellung, dass die Gesamtänderung als Summe kleiner Änderungen $\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$ ausgedrückt werden kann, wenn f eine Änderungsrate ist.

c) Eine Grundvorstellung zur Summation und eine Grundvorstellung zum Grenzwert können kombiniert eine Vorstellung zu Reihen bilden.

2) Eine Grundvorstellung kann eine andere erklären $G_1 \to G_2$. Das bedeutet insbesondere, dass man auf Basis einer entwickelten G_1 die G_2 leicht erwerben kann. Beispiele:

a) Bei der Stetigkeit erklärt die (partielle) Grundvorstellung der Durchzeichenbarkeit des Graphens die Grundvorstellung der Sprungfreiheit.

b) Bei der Differenzierbarkeit erklärt die Vorstellung der lokalen Linearität, dass es eine Gerade gibt, die sich anschmiegt, also die Tangentenvorstellung.

c) Ebenfalls bei der Ableitung erklärt die Verstärkungsfaktorvorstellung, wonach $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ mittels einer Division die Änderungsratenvorstellung $f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$ und umgekehrt.

3) Die dritte Art einer Beziehung ist die komplexeste. Man betrachte zwei mathematische Konzepte, die in einer Relation zueinander stehen. Die Relation könnte die der Umkehroperation sein, etwa bei Addition und Subtraktion; oder auch Ableitung und Integral. Eine andere Relation ist die der Implikation, etwa dass differenzierbare Funktionen auch stetig sind. Dann sollten sich Paare von Grundvorstellungen finden lassen, die das Bestehen der Relation erklären. Die folgende Abb. 2 erklärt dies am Beispiel der Umkehroperationsbeziehung zwischen Addition und Subtraktion: Die Beziehung der Umkehroperation besteht auf der Fachebene zwischen den mathematischen Konzepten, und diese übersetzt sich also in die analoge Beziehung zwischen den Vorstellungen: Ein passendes Paar von Grundvorstellungen erklärt die Umkehrbeziehung.

Beim Beispiel von Differenziation und Integration, die über den Hauptsatz verbunden sind, ergeben sich analog zur Abbildung 2 etwa die Beziehungen zwischen der Änderungsratenvorstellung und der Rekonstruktionsvorstellung, sowie zwischen der Verstärkungsfaktorvorstellung und der Kumulationsvorstellung.

Ein generelles Problem, sowohl bei den Grundrechenarten, als auch in der Analysis ist, dass es Zusammenhänge gibt, für die es schwer ist, passende Paare von Grundvorstellung zu finden.

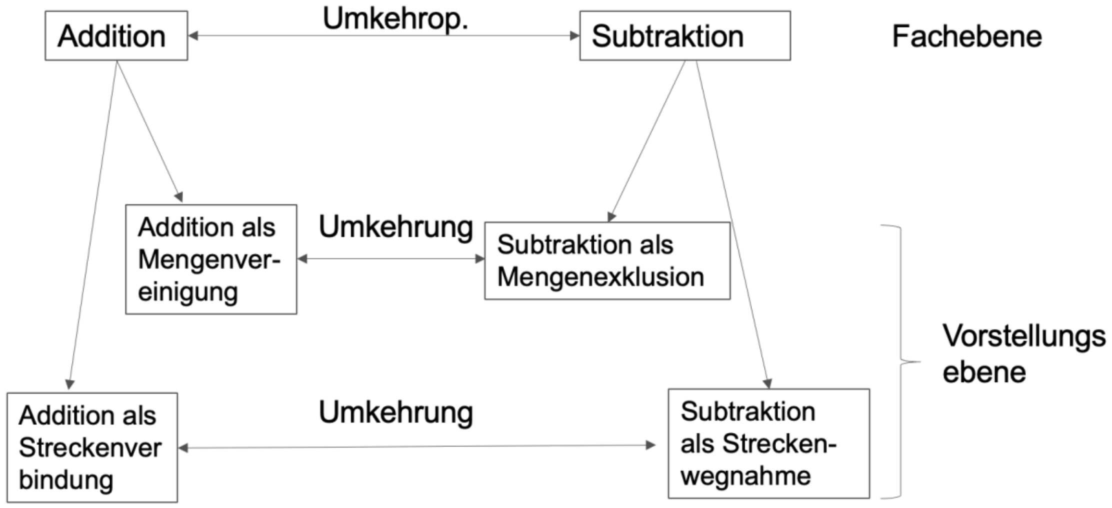

Abb. 2: Relationen zwischen Grundvorstellungen

3. Empirische Optionen

Könnten solche spekulativen Überlegungen überhaupt empirisch geprüft werden? Ein Ansatz ist der, Grundvorstellungen durch latente Variablen zu modellieren, deren Werte auf das Einheitsintervall eingeschränkt sind, und die Grundvorstellungsverknüpfung $G_1 \otimes G_2$ als Produkt der zugeordneten latenten Variablen $\chi_1 \cdot \chi_2$ sowie die Implikation $G_1 \rightarrow G_2$ als $1 - \chi_1 + \chi_1\chi_2$. Erste explorative Studien mit diesem Ansatz zeigen etwa, dass Testdaten zum 8-dimensionalen Modell von je 4 Grundvorstellungen zu Ableitung und Integral (Greefrath et al., 2021) vergleichbar gut mit nur 6 latenten Variablen (algebraisches Verständnis Alg, geometrische Interpretation Geo, Steigung St, Flächeninhalt FI, Summation Sum, Linearität Lin) erzielt werden können. Dabei wird etwa die Änderungsrate modelliert als $ÄR = St \cdot Alg$, die Tangentensteigung als $TS = St \cdot Geo$ und die Kumulationsvorstellung als $Sum \cdot Alg$. Dies genauer zu untersuchen, ist eine interessante Herausforderung, die allerdings darunter leidet, dass es kaum gute Schätzverfahren für solche Modelle gibt. Die oben angedeuteten Experimente wurden mittels der Methoden aus Oldenburg (2024) gemacht.

4. Kategoriale Interpretation

Die ursprünglich in der reinen Mathematik angesiedelte Kategorientheorie (MacLane, 1978) wurde in den letzten Jahrzehnten verstärkt auch in Anwendungsdisziplinen relevant. Dieser Umstand legitimiert möglicherweise die folgenden Spekulationen: Mathematische Konzepte könnten eine Kategorie M bilden, deren Objekte mathematische Aussagen sind. Dies soll Axiome, Definitionen und Sätze umfassen. Morphismen sind - wie in der kategorialen Logik üblich - Deduktionen. Des Weiteren gibt es die Kategorie V aller denkbaren sinnvollen Vorstellungen, wobei die Morphismen Erklärungen sind. In beiden Kategorien gibt es ein monoidales Produkt $\otimes$, das als "und"-Verküpfung gedeutet werden kann. Es gibt einen Funktor $F: V \to M$ der jeder mathematische Vorstellung das entsprechende mathematische Konzept zuordnet. Es wird typischerweise verschiedene Vorstellungen geben, die auf das gleiche Konzept abgebildet werden, der Funktor ist also nicht injektiv und deswegen gibt es mehrere Rechtsinverse $F_i: M' \to V$, die typischerweise nur auf einer gegebenenfalls kleinen Teilkategorie M' von M definiert sind. Die durch zwei solche Funktoren definierten Vorstellungen sind von ihrer Erklärkraft äquivalent, wenn es eine natürliche Transformation zwischen diesen Funktoren gibt. Entsprechend können weitere Konzepte der Kategorientheorie übertragen werden - und evtl. zu neuen Erkenntnissen führen.

5. Fazit

Die Betrachtung von Beziehungen von Grundvorstellungen löst ein ganz praktisches Problem der Lehre: Ist es eine Grundvorstellung zur Division, Umkehrung der Multiplikation zu sein? Darüber hinaus gibt es ggf. das Potential der Vereinfachung: Man kommt mit relativ wenigen Grundvorstellungen und ihren Kombinationen aus.

Literatur

Greefrath, G. et al. (2016). *Didaktik der Analysis*. Springer.

Greefrath, et al. (2021). Test zur Erfassung von Grundvorstellungen zu Ableitungen und Integralen (GV-AI): empirische Erfassung von Grundvorstellungen zur ersten Ableitung einer Funktion an einer Stelle und zum bestimmten Integral. *HAL: science ouverte, CCSD - Centre pour la Communication Scientifique Directe*.

MacLane, S. (1978). *Categories for the Working Mathematician*. Springer.

Oldenburg, R. (2024). Least square estimation of non-linear structural models. *Statistics, Optimization & Information Computing* 12, 281-297.

Roth, J. & vom Hofe, R. (2023). Grundvorstellungen entwickeln. *Mathematik lehren*, 236.

Vom Hofe, R. (1996). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum.