

JENSEN, Solveig; LÜKEN, Miriam; GASTEIGER, Hedwig; PETER-KOOP, Andrea

Osnabrück, Bielefeld, Osnabrück, Bielefeld

## **Schriftliche Subtraktionsalgorithmen verstehen: Ergebnisse einer vergleichenden Studie**

### **Theoretischer und empirischer Hintergrund**

Für die schriftliche Subtraktion gibt es verschiedene Verfahren. Sie unterscheiden sich in der Differenzbildung - Abziehen und Ergänzen - und im Umgang damit, wenn an einer Stelle der Ziffernwert im Minuenden kleiner ist als der im Subtrahenden (gelöst über Erweitern, Entbündeln oder Auffüllen). In vielen Bundesländern ist die Wahl eines Verfahrens den Lehrkräften überlassen. Zur Entscheidung für ein Verfahren lassen sich verschiedene Argumente bzgl. möglicher verfahrensspezifischer Fehlerquellen und dem Verständnis des jeweiligen Verfahrens heranziehen (Jensen & Gasteiger, 2019). Ziel einer aktuellen vergleichenden Studie zum Abziehen mit Entbündeln (AE) und Ergänzen mit Erweitern (EE) ist es, empirische Grundlagen für die bislang weitgehend sachanalytischen Argumente zu gewinnen (siehe Gasteiger et al. in diesem Band). Um den Schülerinnen und Schülern ein Verständnis des jeweiligen Verfahrens zu ermöglichen, müssen sie u.a. lernen, wie und warum das Verfahren funktioniert (Vollrath & Roth, 2012). Für die Planung des Unterrichts, der im Rahmen der Studie vorgegeben wurde, wurde herausgearbeitet, wie die jeweiligen Verfahrensschritte verständnisbasiert dargestellt und die mathematischen Grundlagen zum Funktionieren der Verfahren aufgegriffen werden können (insb. das Bündelungsprinzip für das Entbündeln und die Konstanz der Differenz für das Erweitern, vgl. Jensen & Gasteiger, 2021). Nach Hiebert und Carpenter (1992) muss für ein Verstehen die Möglichkeit des Aufbaus und der Vernetzung mentaler Repräsentationen geschaffen werden. Eine sinnvolle Anknüpfung ist u.a. durch die Arbeit mit Dienes-Material zur Thematisierung des Stellenwertsystems gegeben. Um das gewonnene Verständnis zu erheben, wurde der Zugang über Erklärungen gewählt (Wittmann, 2009). Dabei werden die Erklärtypen (Erklären-WIE und -WARUM) nach Klein (2009) beachtet, die die Verstehensaspekte von Vollrath und Roth (2012, "wie es geht" und "warum es funktioniert") widerspiegeln. Die Frage ist, welche Elemente des Verstehens die Schülerinnen und Schüler in ihren Erklärungen je nach Verfahren beachten.

### **Forschungsdesign**

Das Design der Studie ist in Gasteiger et al. (in diesem Band) beschrieben. Im vorliegenden Beitrag wird eine differenzierte Analyse der Erklärungen der Kinder im Nachtest direkt nach der Unterrichtseinheit und einem Follow-

Up-Test Mitte Jahrgangsstufe 4 vorgestellt. Bezüglich der herausgestellten Aspekte der Funktionsweise der Verfahren wurde im Unterricht im Sinne einer verständnisbasierten Thematisierung des jeweiligen Verfahrens mit Dienes-Material als fachdidaktischem Arbeitsmittel gearbeitet, um die Vernetzung mit dem Vorwissen bzgl. des Stellenwertsystems zu bieten. Die Begründung der Funktionsweise wurde im Unterricht jeweils verfahrensspezifisch herausgearbeitet: Beim Erweitern wurde auf das Gesetz der Konstanz der Differenz aufgebaut und die Gleichheit der Veränderung von Minuend und Subtrahend durch die Erweiterung thematisiert. Beim Entbündeln wurde der Zusammenhang zwischen den Bündelungseinheiten (z.B. zehn Einer sind gleich viel wie ein Zehner) thematisiert. In der Beschreibung der Verfahrensschritte beider Vorgehensweisen wurde im Unterricht darauf geachtet, dass die in die Übergangs-/Übertragstechnik involvierten Bündelungseinheiten benannt wurden. Um einen Zugang zum Verständnis der Schülerinnen und Schüler zu erhalten, wurden sie in Nachtest (NT) und Follow-Up-Test (FUT) u.a. gebeten, eine Aufgabe mit Hunderterübergang (AE) bzw. Übertrag in die Hunderterspalte (EE) zu rechnen und die Vorgehensweise zu beschreiben sowie die Notationsweise in einer schon gerechneten Aufgabe zu erklären ("Lisa wundert sich: Das verstehe ich nicht. Warum steht da jetzt [Referenz auf die verwendeten Merckzahlen]? Erkläre mir das bitte!").

### **Datenauswertung**

Die Antworten beider Aufgaben wurden mittels qualitativer Inhaltsanalyse (Mayring, 2015) ausgewertet. Sie wurden daraufhin analysiert, welche Elemente von Erklärungen zum WIE und WARUM des jeweiligen Verfahrens genannt wurden. Dazu wurde mit induktiver Kategorienbildung ein Bewertungsschema gebildet, in dem für eine differenziertere Analyse zwei Ideen unterschieden wurden.

"Idee A" greift die genaue Vorgehensweise bei der Übertragstechnik auf. Beim Erweitern wird darunter gefasst, dass beide Zahlen um die gleiche Zahl vergrößert werden (in unserem Fall um 10 Z und 1H, wobei  $10Z = 1H$ ). Beim Entbündeln wird die Beschreibung des Entbündelungsvorgangs von 1H in 10Z erfasst. Kodiert wird, ob die Idee jeweils präzise oder unpräzise beschrieben wird oder ob sie in der Beschreibung nicht vorkommt.

"Idee B" greift die Begründung dafür auf, dass das jeweilige Verfahren zu einem mathematisch korrekten Ergebnis führt. Beim Erweitern ist dies der Bezug auf die Konstanz der Differenz (der Unterschied zwischen den Zahlen bzw. das Ergebnis bleibt gleich), beim Entbündeln wird das Bündelungsprinzip aufgegriffen (der Wert des Minuenden verändert sich durch die Entbündelung nicht).

## Ergebnisse und Diskussion

Tabelle 1 und 2 geben einen Überblick über die Kombinationen der zugewiesenen Kategorien bezüglich beider Ideen.

|        |                 | Idee B          |           |         |
|--------|-----------------|-----------------|-----------|---------|
|        |                 | nicht vorhanden | unpräzise | präzise |
| Idee A | nicht vorhanden | 45 / 64,6       | 0 / 0     | 0 / 0   |
|        | unpräzise       | 34,4 / 23,2     | 0 / 0     | 0 / 0   |
|        | präzise         | 19,7 / 12,1     | 0,5 / 0   | 0,5 / 0 |

Tabelle 1: AE (Prozentwerte für NT (218 Kinder) / FUT (198 Kinder))

|        |                 | Idee B          |           |           |
|--------|-----------------|-----------------|-----------|-----------|
|        |                 | nicht vorhanden | unpräzise | präzise   |
| Idee A | nicht vorhanden | 75,8 / 79,3     | 9,8 / 8,6 | 3,4 / 1,7 |
|        | unpräzise       | 6,3 / 2,2       | 1,1 / 4   | 0 / 0,6   |
|        | präzise         | 0,6 / 0,6       | 1,1 / 1,7 | 1,7 / 1,1 |

Tabelle 2: EE (Prozentwerte für NT (174 Kinder) / FUT (174 Kinder))

Zu beiden Testzeitpunkten werden deutlich mehr Antworten aus der Gruppe EE gegeben, in denen beide Ideen nicht vorhanden sind, was auf eine falsche oder mechanische Beschreibung hinweist (z.B. "...die 10 steht da, weil 2-5 ja nicht geht also muss man da noch ein Zehner hinzufügen so heist es dann 12-5 das kan man rechnen und immer wenn mann eine 10 Oben hin schreibt, muss man auch eine 1 bei den Hundern hinschreiben."). Bzgl. der Idee A werden deutlich mehr Antworten aus der Gruppe AE mindestens der Kategorie "unpräzise" eingeordnet (siehe Tab. 1, in AE 54% im NT ggü. 7% in EE, im FUT in AE 35% ggü. 3% in EE). Bspw. beschreibt ein Kind: "Ich musste Von Den Hundertan 1 nen Weg nehmen um in zu Den Zehnern zu Tuhen", unpräzise ist die fehlende Benennung der Anzahlen der Zehner, in die entbündelt wird. Idee B kommt beim EE deutlich häufiger in den Antworten der Kinder vor, indem auf das ohne die Ergänzung von einem Hunderter falsche Ergebnis verwiesen wird (z.B. "...abr wir müssen noch die zehn ausbügeln den sonst wäre das agebnis anders"). Ein Kind in der Gruppe AE beschreibt im NT präzise beide Ideen ("... deshalb nehme ich mir einen Hunderter und zerlege sie in 10 zehner dann hat sich die zahl nich verander da 10 zehner ein Hunderter ist"). Von der Gruppe EE werden 3 Antworten

so kodiert (z.B. "... Deshalb rechne ich zu den 2 zehnern oben 10 dazu und zu den der 3 von den Hunderten einen dazu. Denn wenn man zu der 1. und der 2. Zahl das selbe dazutut dann kommt das selbe Ergebnis raus. Und 10 Zehner und 1 Hunderter ist das selbe."). Insgesamt scheint die Begründung für das Funktionieren des Verfahrens (Idee B) beim EE relevanter in der Beschreibung der Vorgehensweise. Dass man 1H in 10Z entbündeln kann, scheint in der Benennung so selbsterklärend und bedarf für die Kinder, die das AE erklären, keiner Legitimierung, dass nur in einem Fall im NT Idee B genannt wird. Insofern ist zu überlegen, inwiefern der Aspekt von Verstehen eines Verfahrens "warum es funktioniert" nach Vollrath und Roth (2012) in den Erklärungen explizit erwartet werden kann. Beim EE erscheinen den Kindern verschiedene Aspekte der beiden Ideen in einer Erklärung des Verfahrens relevant, was die Anforderungen beim Erklären des EE komplexer zu machen scheint, da mehr Informationen verstanden und behalten werden müssen.

## Literaturverzeichnis

- Gasteiger, H., Jensen, S., Lüken, M., Peter-Koop, A., Grommé, E. & Nonte, S. (im Druck). „Abziehen mit Entbündeln“ und „Ergänzen mit Erweitern“: Eine vergleichende Studie zu den beiden Subtraktionsverfahren. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2024*.
- Hiebert, J.; Carpenter, T. P. (1992): Learning and Teaching with Understanding. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (S. 65–97). New York: Macmillan Publishing Co.
- Jensen, S. & Gasteiger, H. (2021). Warum geht das so? Verständnis der Subtraktionsverfahren „Entbündeln“ und „Erweitern“ erfassen. In A. S. Steinweg (Hrsg.). *Blick auf Schulcurricula Mathematik: Empirische Fundierung? – Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2021*. Bamberg 2021, S. 57-60.
- Jensen, S. & Gasteiger, H. (2019). „Ergänzen mit Erweitern“ und „Abziehen mit Entbündeln“ – Eine explorative vergleichende Studie zu spezifischen Fehlern und Verständnis des Algorithmus. *Journal für Mathematikdidaktik* 40(2), 135–167.
- Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. Beltz.
- Klein, J. (2009). ERKLÄREN-WAS, ERKLÄREN-WIE, ERKLÄREN-WARUM. Typologie und Komplexität zentraler Akte der Welterschließung. In R. Vogt (Hrsg.), *Erklären. Gesprächsanalytische und fachdidaktische Perspektiven* (S. 25–36). Tübingen: Stauffenberg.
- Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. 2. Auflage*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Wittmann, G. (2009). Erklärsituationen als Schlüssel zu individuellen Konzepten mathematischer Begriffe und Verfahren. Ein Überblick über mathematikdidaktische Forschungsansätze. In J. Spreckels (Hrsg.), *Erklären im Kontext. Neue Perspektiven aus der Gesprächs- und Unterrichtsforschung* (S. 94–118). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.