GARNELO, Irene & LIEBENDÖRFER, Michael
Paderborn

Ein Designprinzip für Lernumgebungen zu interaktiven Theorembeweisern

1. Einleitung

Der mathematische Formalismus und insbesondere das mathematische Beweisen sind für Studierende beim Übergang Schule-Hochschule sehr herausfordernd (Liebendörfer, 2018). Erste Ergebnisse deuten darauf hin, dass interaktive Theorembeweiser die Entwicklung von Beweisverständnis und Beweisfähigkeiten von Studierenden unterstützen können (Thoma & Iannone, 2022). Um dieses Potenzial weiter auszuloten, haben wir eine digitale Lernumgebung entwickelt, in der Beweisaufgaben mit dem interaktivem Theorembeweiser Lean eingebettet sind (Garnelo & Liebendörfer, 2024). Dabei stellt sich die Frage, wie man so eine Lernumgebung zielführend gestaltet.

Lean bietet viele Möglichkeiten, muss aber wie jedes Werkzeug zunächst als eigenständiger Inhalt gelernt werden, bevor es eingesetzt werden kann (Hoyles, 2018). Dabei ist Lean aufgrund seiner Komplexität nicht leicht zu erlernen (Avigard, 2019). Um den Lernprozess haben wir versucht, Resultate aus der Informatikdidaktik heranzuziehen. Bayman und Mayer (1983) betrachten drei Wissensebenen für das Erlernen von Programmiersprachen sowie die damit verbundenen Herausforderungen. Diese lassen sich sinnvoll auf das Lernen mit Lean übertragen (Garnelo & Liebendörfer, 2024). Darauf aufbauend stellen wir in diesem Beitrag ein Designprinzip vor und zeigen, wie wir es umgesetzt haben. Für weitere Prinzipien verweisen wir auf (Garnelo & Liebendörfer, eingereicht).

2. Theorie und Hintergründe

Interaktive Theorembeweiser sind Softwaretools, in denen mathematische Inhalte und insbesondere Beweise in einer computerformalisierten Sprache dargestellt werden können. Diese Beweise können von Theorembeweisern auf Korrektheit überprüft werden. Das Potenzial dieser Tools liegt unter anderem in ihrer Fähigkeit, während der Entwicklung eines Beweises interaktiv Feedback zu geben (Massot, 2021). Eine Studie von Thoma & Iannone (2022) zeigt, dass Studierende, die mit Lean gearbeitet haben, mathematische Notation genauer verwenden und Beweise besser strukturieren.

Um das Potenzial von Lean weiter zu erforschen, haben wir eine digitale Lernumgebung entwickelt, die aus zwei Komponenten besteht. Einerseits gibt es eine interaktive Komponente, in der Lean-Aufgaben eingebettet sind. Zu jeder Aufgabe wird eine Einführung in das mathematische Thema sowie

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

in die benötigten Lean-Techniken bereitgestellt, ergänzt durch ausklappbare Hinweise. Die zweite Komponente besteht aus Begleitaufgaben, die den Einstieg in Lean erleichtern sollen. Thematisch geht es um die natürlichen Zahlen und wie ihre Eigenschaften aus den Peano-Axiomen hergeleitet werden.

Zur Untersuchung, wie Studierende Lean lernen, ziehen wir ein Modell aus der Informatikdidaktik heran, welche das Wissen, welches man zum Erlernen einer Programmiersprache braucht, in drei Ebenen einteilt (Baymann & Mayer, 1983): die syntaktische Ebene (z. B. Klammersetzung), die konzeptuelle Ebene (z. B. Variablenverständnis) und strategisches Wissen (z. B. Debuggen). Diese Ebenen bauen aufeinander auf und sind entscheidend für den Lernerfolg (McGill & Volet, 1997).

3. Herleitung des Designprinzips

Wir haben in einem Kurs für Mathematik-Lehramtsstudierende für Gymnasial und Gesamtschulen mit 24 Personen Lean implementiert (vgl. Garnelo & Liebendörfer, 2024). Der Zeitliche Umfang lag bei ca. 3 Stunden, inhaltlich lag der Fokus auf Aussagen zu Rechengesetzen natürlicher Zahlen.

Studierende müssen beim Arbeiten mit Lean unterschiedliche Fähigkeiten auf der interdisziplinären Ebene (vgl. Hoyles, 2018) und auf der Lean-spezifischen Ebene (Bayman & Mayer, 1983) erwerben. Dabei sind klare Schwerpunkte wichtig, wann welche Fähigkeiten vermittelt werden sollen. In der ersten Iteration haben wir den Schwerpunkt daraufgelegt, Lean als Werkzeug zu lehren, anstatt neues mathematisches Fachwissen zu übermitteln. Dazu wurde insbesondere ein den Studierenden bekanntes Thema gewählt. Bei der Vermittlung des Lean-Wissens haben wir uns an dem Modell von Bayman und Mayer (1983) orientiert.

Die Studierende in unserer Studie erlebten Herausforderungen die sich entsprechend unserer Erwartung gut durch die drei Ebenen nach Baymann und Mayer (1983) gliedern ließen. Zunächst standen Probleme mit der Lean-Syntax im Vordergrund, später dominierten konzeptuelle und strategische Schwierigkeiten. Dadurch begründen wir das Prinzip, ein Scaffolding durch Begleitaufgaben für die Lernumgebung einzusetzen, welches die drei Ebenen (syntaktisch, konzeptuell und strategisch) explizit und gestuft adressiert und ihnen ermöglicht, sich auf ihr aktuelles Wissensniveau zu konzentrieren.

4. Anwendung des Designprinzips

Die Begleitaufgaben in der Lernumgebung wurden auf Basis dieses Designprinzips angepasst. Während Studierende in der ursprünglichen Umgebung an vollständigen Beweisen arbeiteten, liegt der Fokus nun zunächst auf Teilaufgaben wie gegebene Lean-Beweise und deren Beweiszustände zu lesen, Beweisansätze zu vervollständigen oder zu korrigieren oder das Übersetzen von Beweisen zwischen mathematischer und Lean-Notation. Diese Aufgaben ermöglichen es Studierende, sich zunächst auf das die Lean-Syntax zu konzentrieren, bevor sie Aufgaben bearbeiten, die sich auf konzeptuelles und anschließend strategisches Wissen beziehen. Spätere Übungen setzen auf vorgegebenes strategisches Wissen wie Beweisstrukturen oder unvollständige Beweise, um den Fokus auf das konzeptuelle Verständnis zu lenken.

Die Aufgaben wurden darauf ausgerichtet, konkret die in unserer Studie identifizierten Herausforderungen auf den drei Ebenen aufzugreifen. Die identifizierten Probleme auf konzeptueller Ebene schließen unter anderem die falsche Interpretation von Lean-Meldungen sowie Probleme im Umgang mit Scopes und Variablen ein. In Abbildung 1 ist eine Begleitaufgabe zu sehen, die zu diesem Zweck in eine Lean-Aufgabe der neuen Lernumgebung integriert wurde. In dieser Aufgabe wird kein strategisches Wissen vorausgesetzt, da die Beweisstruktur und auch die Idee für die fehlende Beweisergänzung gegeben ist. Die Studierenden werden dafür aufgefordert, sich mit den Rückmeldungen von Lean auseinanderzusetzen und sich insbesondere darüber Gedanken zu machen, wie Scopes und die darin definierten Variablen anhand des Beispiels des Induktionsbeweises in Lean funktionieren.

Für den Beweis kannst du mit diesem unvollständigem Beweis starten:

```
induction a with d hd,
{rw [add_zero],},
{rw [add_succ],
sorry,},
```

Klicke dich durch den Beweis und achte dabei auf den Beweiszustand. Kannst du den Induktionsanfang und Induktionsschritt identifizieren? Wo sorry steht muss jetzt nur noch die Induktionshypothese `hd` angewandt werden. Das kannst du wie üblich mit dem `rw` Befehl machen.

Abb. 1: Begleitaufgabe zu dem Beweis: Sei a eine natürliche Zahl, dann gilt $0 + a = a$.

5. Diskussion

Interaktive Theorembeweiser haben sowohl in der mathematischen Forschung als auch in der Didaktik zunehmende Aufmerksamkeit erlangt. Dabei ist offen, wie Theorembeweiser möglichst effizient in die Lehre integriert werden könnten. Wir haben daher begonnen, mögliche Designprinzipien aus Theorien der Mathematik- und Informatikdidaktik sowie aus unseren empirischen Ergebnissen abzuleiten und in einer Lernumgebung umzusetzen.

Eines dieser Prinzipien ist die Gestaltung eines Scaffoldings, welches höhere Lean-Wissensebenen entlastet, sodass sich die Studierenden zunächst auf das Erlernen der grundlegenden Wissensebenen konzentrieren können. Zu diesem Zweck schlagen wir vor, Übungen einzuführen, bei denen sich die Studierenden auf Teile eines Beweises anstelle eines vollständigen Beweises konzentrieren. Wir haben konkret gezeigt, wie eine solche Aufgabe aussehen könnte und das Prinzip bei der Entwicklung einer neuen Version der Lernumgebung angewandt, mit der wir hoffen, Einblicke über den Einfluss des Designprinzips auf das Lernen mit der Lernumgebung zu erforschen.

Wie Hoyles (2018) diskutiert, haben digitale Werkzeuge in der Lehre zwei Rollen. Insbesondere erfordert das Beherrschen von Lean einen anfänglichen Aufwand, der sich ausschließlich auf Lean in der Rolle des Lerngegenstands konzentriert. Wir haben die Herausforderungen analysiert, denen Studierende beim Erlernen von Lean begegnen, und versucht, einige davon mit unseren Designprinzipien abzumildern. Dennoch wird das Erlernen der Sprache immer zusätzlichen Aufwand erfordern. Ob sich der anfängliche Lernaufwand lohnt, muss zukünftige Forschung zur Rolle von Theorembeweisern als Werkzeug beim Erlernen von Beweisen zeigen.

Literatur

Avigad, J. (2019). Learning logic and proof with an interactive theorem prover. In: Hanna, G., Reid, D. & de Villiers, M. (Hrsg.), *Proof technology in mathematics research and teaching,* 277–290.

Bayman, P., & Mayer, R. E. (1983). A diagnosis of beginning programmers' misconceptions of basic programming statements. *Communications of the ACM*, 26(9), 677-679.

Garnelo, I. & Liebendörfer, M. (2024) Herausforderungen beim Einsatz interaktiver Theorembeweiser in der Hochschullehre. In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2024*.

Garnelo, I., & Liebendörfer, M. (eingereicht). Towards design principles for learning environments based on theorem provers. In: ERME (Hrsg.), *Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14).*

Hoyles, C. (2018) Transforming the mathematical practices of learners and teachers through digital technology. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 209-228.

Liebendörfer, M. (2018). *Motivationsentwicklung in Mathematikstudium*. Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH.

Massot, P. (2021). *Why formalize mathematics?* Abgerufen am 08.01.2024, von https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~patrick.massot/files/exposition/why_formalize.pdf

McGill, T. J. & Volet, S. E. (1997). A Conceptual Framework for Analyzing Students' Knowledge of Programming. *Journal of Research on Computing in Education, 29*(3), 276-297.

Thoma, A., & Iannone, P. (2022). Learning about proof with the theorem prover lean: the abundant numbers task. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 8*(1), 64–93.