Optionspreistheoretische Modellierung des Kreditrisikos von Unternehmensanleihen

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktor rerum politicarum
(Dr. rer. pol.)

an der
Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Dortmund

Lehrstuhl für Investition und Finanzierung
Prof. Dr. Jack Wahl

vorgelegt von

Dipl.-Kfm. Marco Kleweken

Dortmund, 08.01.2003

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Optionspreistheorie wurde zu Beginn der Siebzigerjahre von Black/Scholes (1973) zur Bewertung von Aktienoptionen entwickelt. Black/Scholes unterstellen, dass die betrachtete Option ebenso wie die zu Grunde liegende Aktie auf einem vollkommenen Kapitalmarkt kontinuierlich gehandelt wird. Die zufallsabhängige Aktienkursentwicklung folgt einer geometrischen Brown'schen Bewegung, während der Optionspreis als stetige, zweimal differenzierbare Funktion in der Zeitvariablen und im Aktienkurs dargestellt wird. Der Grundgedanke von Black/Scholes besteht darin, ein risikoloses Portefeuille aus der Option und der zu Grunde liegenden Aktie zusammenzustellen. Bei Arbitragefreiheit muss die Rendite dieses per Konstruktion risikolosen Portefeuilles, das annahmegemäß kontinuierlich und selbstfinanzierend revidiert wird, mit dem risikolosen Zinssatz übereinstimmen. Dies führt zu einer partiellen Differenzialgleichung, die der arbitragefreie Optionspreis erfüllen muss. Unter Berücksichtigung der entsprechenden Randbedingungen gelingt es Black/Scholes, die partielle Differenzialgleichung für einen europäischen Call auf eine dividendenlose Aktie analytisch zu lösen. Die Lösung ist die bekannte Black/Scholes-Formel, die mit Hilfe der Put-Call-Parität auch zur Bewertung eines europäischen Puts herangezogen werden kann.

Als neuere optionspreistheoretische Methode eröffnet die Martingalmaß-Technik einen Weg zur Bewertung von Aktienoptionen, der nicht unmittelbar auf der Bestimmung und Lösung von partiellen Differenzialgleichungen basiert. Die Martingalmaß-Technik wurde von Cox/Ross (1976) erstmalig eingesetzt und von Harrison/Pliska (1981) verallgemeinert. Letztere leiten die Black/Scholes-Formel her, indem sie den Erwartungswert des mit dem risikolosen Zinssatz diskontierten Zahlungsstroms der betrachteten Option unter einem äquivalenten Martingalmaß berechnen. Das äquivalente Martingalmaß ist im Black/Scholes-Modell definiert als das Wahrscheinlichkeitsmaß, unter dem die zu Grunde liegende Aktie eine erwartete Rendite in Höhe des risikolosen Zinssatzes besitzt. Die Bewertung der Option mittels der Martingalmaß-Technik beruht auf der Duplikation des entsprechenden Zahlungsstroms durch eine selbstfinanzierende Handelsstrategie aus risikoloser Anlage und Verschuldung sowie aus Kauf und Verkauf der zu Grunde liegenden Aktie. Der Marktwert dieses Duplikationsportefeuilles entspricht dem oben genannten Erwartungswert. Um die Arbitragefreiheit des betrachteten Kapitalmarkts zu gewährleisten, muss der Optionspreis demzufolge mit diesem Erwartungswert übereinstimmen.

Die Optionspreistheorie zeichnet sich dadurch aus, dass sie nicht nur das Bewertungsproblem für Aktienoptionen löst, sondern auch auf andere finanzwirtschaftliche Problemstellungen anwendbar ist. Die vorliegende Arbeit greift die aktuelle Diskussion um die Bewertung von Unternehmensanleihen mittels optionspreistheoretischer Methoden auf. Dabei werden mit den unternehmenswert- und den intensitätsbasierten Kreditrisikomodellen die beiden in der Literatur vorrangig diskutierten Ansätze zur Abbildung des Kreditrisikos dieser Finanzierungstitel berücksichtigt.

Ausgangspunkt der unternehmenswertbasierten Kreditrisikomodelle ist die Analogie zwischen Aktienoptionen und Anleihen, die sich ebenfalls als zustandsbedingte Ansprüche interpretieren lassen, allerdings auf den Marktwert der Vermögensgegenstände des emittierenden Unternehmens, den so genannten Unternehmenswert, und nicht auf eine Aktie. Erreicht der Unternehmenswert eine von der Verschuldungssituation des Unternehmens abhängige Ausfallschranke, erleiden die Anleiheinhaber einen Kreditausfall, d.h. versprochene Zins- und Tilgungszahlungen werden nicht fristgerecht und/oder nicht vollständig erfüllt. Der auf diese Weise mit der Unternehmenswertentwicklung verknüpfte, kreditrisikobehaftete Zahlungsstrom einer Anleihe wird dann wie der Zahlungsstrom einer Aktienoption mittels der Optionspreistheorie bewertet.

Sucht man nach einer geeigneten Vergleichsbasis für die Analyse unternehmenswertbasierter Kreditrisikomodelle, bietet sich die Arbeit von Merton (1974) an. Merton unterstellt eine einfache Kapitalstruktur des betrachteten Unternehmens, das neben Eigenkapital in Form eines dividendenlosen, beschränkt haftenden Residualanspruchs ausschließlich mit Fremdkapital in Form eines Zerobonds finanziert ist. Weiterhin ist in den vertraglichen Vereinbarungen zwischen den Kapitalgebern des Unternehmens die Beibehaltung der Kapitalstruktur bis zur Fälligkeit des Zerobonds festgelegt. Merton geht von einem vollkommenen Kapitalmarkt aus und gibt die Entwicklung des dort kontinuierlich gehandelten Unternehmenswerts durch eine geometrische Brown'sche Bewegung exogen vor. Die Zinsstrukturkurve verläuft flach und ändert sich im Zeitablauf nicht, so dass das Zinsänderungsrisiko vernachlässigt wird. Ob der Zerobond bei Fälligkeit zurückgezahlt wird, hängt vom Unternehmenswert in diesem Zeitpunkt ab. Ist der Unternehmenswert höher als der Rückzahlungsbetrag des Zerobonds, sind die Gesellschafter bereit, zusätzliches Beteiligungskapital zu dessen Rückzahlung zur Verfügung zu stellen, da sie die Differenz aus Unternehmenswert und Rückzahlungsbetrag gewinnen. Ist der Unternehmenswert niedriger als der Rückzahlungsbetrag des Zerobonds, stellen die Gesellschafter keine Mittel zur Verfügung, um den Zerobond zurückzuzahlen. Der resultierende Liquiditätsengpass führt zu einer Neuordnung der Eigentumsverhältnisse des Unternehmens. Im Zuge der Neuordnung der Eigentumsverhältnisse übernehmen die Zerobondinhaber das Unternehmen und erleiden einen Kreditausfall in Höhe der Differenz aus Rückzahlungsbetrag und Unternehmenswert. Sie besitzen damit ein Portefeuille aus einem gekauften kreditrisikolosen Zerobond mit gleichem Fälligkeitstermin und Rückzahlungsbetrag und einem verkauften europäischen Put auf den Unternehmenswert, der das Kreditrisiko erfasst. Der Rückzahlungsbetrag des Zerobonds definiert den Basispreis dieses „Ausfall-Puts“. Merton zeigt, dass der Ausfall-Put nach einer Anpassung der entsprechenden Variablen mit der Black/Scholes-Formel bewertet werden kann.

Das Modell von Merton hat im Zeitablauf viele Erweiterungen erfahren. So stellen Jensen/Meckling (1976) heraus, dass im Modell von Merton für die Gesellschafter des Unternehmens auf Grund des optionalen Charakters ihres Anspruchs ein Anreiz besteht, das Investitionsrisiko, definiert als die Volatilität des Unternehmenswerts, zu steigern. Mit zunehmender Unternehmenswertvolatilität erhöht sich ceteris paribus das Kreditrisiko und der Wert des Ausfall-Puts, was zu Vermögensverlusten der Zerobondinhaber führt. Black/Cox (1976) analysieren Sicherungsklauseln, die derartigen Anreizeffekten entgegenstehen und das Kreditrisiko begrenzen sollen. Sie erweitern das Modell von Merton um eine Sicherungsklausel, die eine vorzeitige Neuordnung der Eigentumsverhältnisse und Übernahme des Unternehmens durch die Zerobondinhaber vorsieht, wenn der Unternehmenswert vor Fälligkeit des Zerobonds eine vertraglich festgelegte untere Schranke erreicht. Diese von Black/Cox definierte Ausfallschranke ist in der Regel niedriger als der Barwert des Rückzahlungsbetrages des Zerobonds, so dass die Zerobondinhaber trotz der Übernahme des Unternehmens bei Erreichen der Ausfallschranke einen Kreditausfall erleiden. Im Gegensatz zum Merton-Modell ist der Zeitpunkt eines Kreditausfalls zufallsabhängig und entspricht der ersten Durchgangszeit des Unternehmenswerts durch die Ausfallschranke. Nur wenn die Ausfallschranke bis zur Fälligkeit des Zerobonds nicht erreicht wird, wirken dieselben Mechanismen wie im Modell von Merton. Die Bewertung des Zerobonds kann mit den aus der Optionspreistheorie bekannten Formeln für Barrier-Optionen vorgenommen werden.

Die bisher angeführten Modelle eignen sich nicht zur Bewertung von Anleihen, wenn das betrachtete Unternehmen eine komplexere Kapitalstruktur besitzt. Emittiert das Unternehmen etwa neben Zerobonds auch fest oder variabel verzinsliche Anleihen mit unterschiedlicher Fristigkeit, kann es durch laufende Zins- und Tilgungszahlungen jederzeit zu einem Liquiditätsengpass kommen. Es erweist sich allerdings als schwierig, für ein solches Unternehmen sämtliche Szenarien, in denen die Anleiheinhaber einen Kreditausfall erleiden, unter Berücksichtigung aller in den Finanzierungsverträgen getroffenen Vereinbarungen zu definieren. In diesem Fall müssten die unterschiedliche Fristigkeit und der Umfang der versprochenen Zins- und Tilgungszahlungen ebenso berücksichtigt werden wie den Anleiheinhabern eingeräumte Sicherungsklauseln und die Rechte und Pflichten der Gesellschafter des Unternehmens.

Longstaff/Schwartz (1995) tragen den mit einer komplexeren Kapitalstruktur des betrachteten Unternehmens verbundenen Problemen bei der Abbildung des Kreditrisikos Rechnung. Aufbauend auf der Arbeit von Black/Cox (1976) unterstellen sie, dass der Zeitpunkt eines Kreditausfalls für alle von einem Unternehmen emittierten Anleihen, unabhängig von der zeitlichen Struktur der Zins- und Tilgungszahlungen und weiteren Vereinbarungen in den Finanzierungsverträgen, als erste Durchgangszeit des Unternehmenswerts durch eine Ausfallschranke exogen vorgegeben ist. Sobald der Unternehmenswert die annahmegemäß konstante Ausfallschranke erreicht, kommt es zu Schwierigkeiten im Finanzbereich des Unternehmens, die eine Neuordnung der Eigentumsverhältnisse nach sich ziehen. Dabei wird offen gelassen, ob sich die Neuordnung der Eigentumsverhältnisse im Rahmen einer außergerichtlichen Einigung oder eines Insolvenzverfahrens abspielt und aus der Zahlungsunfähigkeit des Unternehmens oder der Verletzung von Bilanzstrukturnormen resultiert. Durch die Neuordnung der Eigentumsverhältnisse des Unternehmens erleiden die Anleiheinhaber einen Kreditausfall, da sich nachfolgende Zins- und Tilgungszahlungen um eine ebenfalls konstante Abschreibungsrate verringern. Wie in den Arbeiten von Nielsen/Saá-Requejo/Santa-Clara (1993), Briys/de Varenne (1997) und Collin-Dufresne/Goldstein (2001), die allerdings zufallsabhängige Ausfallschranken unterstellen, wird der Modellrahmen von Merton auch dahingehend erweitert, dass mögliche zukünftige Änderungen der Zinsstruktur integriert werden, was eine gemeinsame Erfassung des Kredit- und des Zinsänderungsrisikos erlaubt. Die Bewertung von Anleihen in einem solchen Modellrahmen erfolgt mittels der Martingalmaß-Technik. Der arbitragefreie Preis einer Anleihe entspricht dem Erwartungswert des von der ersten Durchgangszeit des Unternehmenswerts durch die Ausfallschranke abhängigen Zahlungsstroms, berechnet unter dem äquivalenten

Martingalmaß und nach Diskontierung mit dem risikolosen Zinssatz.

Neben der unternehmenswertbasierten Sichtweise hat sich in letzter Zeit der auf Jarrow/Turnbull (1995), Madan/Unal (1998) und Duffie/Singleton (1999) zurückgehende, intensitätsbasierte Ansatz zur Bewertung von Unternehmensanleihen etabliert. Im Unterschied zu den unternehmenswertbasierten Kreditrisikomodellen entspricht der Zeitpunkt eines Kreditausfalls nicht der ersten Durchgangszeit des Unternehmenswerts durch eine von der Verschuldungssituation des Unternehmens abhängige Ausfallschranke. Es wird vielmehr vorausgesetzt, dass sich dieser Zeitpunkt als erste Sprungzeit eines Zählprozesses mit gegebener Intensität spezifizieren lässt, wobei die in der Literatur auch als Hazardrate bezeichnete Intensität die Wahrscheinlichkeit eines unmittelbar bevorstehenden Kreditausfalls bestimmt. Zur Bewertung von Anleihen in intensitätsbasierten Modellen wird weiterhin die Martingalmaß-Technik herangezogen. Die zufallsabhängige Entwicklung der Zinsstruktur, der Intensität und der bei Eintritt eines Kreditausfalls auftretenden Verluste unter einem äquivalenten Martingalmaß wird exogen vorgegeben. Unter bestimmten Annahmen hinsichtlich der Verluste bei Eintritt eines Kreditausfalls entspricht der Preis einer Anleihe auf einem arbitragefreien Kapitalmarkt dem Erwartungswert des diskontierten versprochenen Zahlungsstroms, berechnet unter dem äquivalenten Martingalmaß. Der risikolose Zinssatz, der den Diskontierungsfaktor bisher bestimmte, ist dabei additiv um die Intensität des zu Grunde liegenden Zählprozesses zu erhöhen.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, zunächst die optionspreistheoretischen Grundlagen unternehmenswertbasierter Kreditrisikomodelle herauszuarbeiten. Dies erlaubt es, eine bestehende Lücke in der Literatur zu schließen: Grundlegende unternehmenswertbasierte Kreditrisikomodelle können in einem einheitlichen Modellrahmen dargestellt und verglichen werden. Darauf aufbauend wird der Versuch unternommen, einen Brückenschlag zwischen unternehmenswert- und intensitätsbasierten Kreditrisikomodellen zu vollziehen. Dies geschieht, indem die Intensität des zu Grunde liegenden Zählprozesses als Funktion des annahmegemäß stationären Verschuldungsgrades des betrachteten Unternehmens vorgegeben wird. Dabei ist der Verschuldungsgrad definiert als das Verhältnis zwischen dem Volumen der emittierten Forderungstitel und dem Unternehmenswert.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: Im Anschluss an diese Einleitung widmet sich Kapitel 2 den institutionellen Grundlagen des Problemkreises von Kreditfinanzierung und Kreditrisiko. Dabei werden unter anderem die Auswirkungen des Kreditrisikos auf die vertragliche Ausgestaltung von Unternehmensanleihen und die Verschuldungspolitik von Unternehmen untersucht. Weiterhin erfolgt ein kurzer Überblick zum Kreditgeschäft und zur Risikopolitik von Banken.

In Kapitel 3 wird ein optionspreistheoretischer Modellrahmen für die später vorzustellenden unternehmenswertbasierten Kreditrisikomodelle entwickelt. Dazu wird ein Kapitalmarkt modelliert, auf dem kreditrisikolose fest verzinsliche Wertpapiere und als Wertpapiere verbriefte riskante Vermögensgegenstände gehandelt werden. Um die Unsicherheit hinsichtlich der Preisentwicklung der gehandelten Wertpapiere abzubilden, wird ein mehrdimensionaler Wiener-Prozess als universeller „Fluktuationsprozess“ herangezogen. Zunächst werden hinreichende Bedingungen für die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes abgeleitet. Sodann werden die Bewertung von zustandsbedingten Ansprüchen auf die gehandelten Wertpapiere mittels der Martingalmaß-Technik und Möglichkeiten zur Vereinfachung der Lösung des Bewertungsproblems beschrieben.

Kapitel 4 vergleicht grundlegende unternehmenswertbasierte Kreditrisikomodelle. Die Bewertung der Anleihen erfolgt im Modellrahmen aus Kapitel 3 und kann somit durch die Verwendung der Martingalmaß-Technik vereinheitlicht werden. Die resultierenden Bewertungsgleichungen werden analytisch oder numerisch gelöst und diskutiert. Komparativ-statische Analysen verdeutlichen, wie die als Credit-Spreads bezeichneten bonitätsinduzierten Renditedifferenzen der Anleihen auf Änderungen unternehmensspezifischer Merkmale, etwa des Verschuldungsgrades oder der Unternehmenswertvolatilität, reagieren, gegebenenfalls in Verbindung mit Änderungen von Zinsstrukturgrößen.

In Kapitel 5 wird zunächst der Modellrahmen aus Kapitel 3 angepasst, um Anleihen auch in einem intensitätsbasierten Kreditrisikomodell mittels der Martingalmaß-Technik bewerten zu können. Sodann wird die Intensität des zu Grunde liegenden Zählprozesses als Funktion des Verschuldungsgrades des betrachteten Unternehmens spezifiziert. Die resultierenden Bewertungsgleichungen für Anleihen lassen sich analytisch lösen. Abschließend werden die Credit-Spreads der Anleihen einer komparativ-statischen Analyse unterzogen und die Ergebnisse mit denen der unternehmenswertbasierten Modelle verglichen.

Kapitel 6 fasst die Untersuchungsergebnisse zusammen.

Kapitel 2

Kreditfinanzierung und Kreditrisiko – Institutionelle Grundlagen

Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit den institutionellen Grundlagen des Problemkreises von Kreditfinanzierung und Kreditrisiko. Kapitel 2.1 zeigt dabei die finanzierungstheoretischen Aspekte dieses Problemkreises auf. Zunächst wird das Kreditrisiko, dem sich die Gläubiger eines Unternehmens ausgesetzt sehen, mit den für Kreditvertragsbeziehungen charakteristischen Informationsasymmetrien und dem opportunistischen Verhalten der Gesellschafter in Verbindung gebracht. Sodann werden Sicherungsklauseln als Instrument zur Begrenzung des Kreditrisikos von Unternehmensanleihen vorgestellt und der Stellenwert gesetzlicher Regelungen in diesem Zusammenhang untersucht. Darauf aufbauend erfolgt eine kurze Diskussion der Verschuldungspolitik von Unternehmen. Kapitel 2.2 skizziert neuere Entwicklungen im Kreditgeschäft von Banken, wobei insbesondere die Rolle von Kreditderivaten und Asset-Backed-Securities bei der Gestaltung des Kreditrisikos dargestellt wird.

2.1 Finanzierungstheoretische Aspekte

Ein Unternehmen kann sich die zur Finanzierung seines Investitionsprogramms benötigten liquiden Mittel mit Hilfe von Kapitalgebern beschaffen. Dabei stellt sich die Frage nach der optimalen Finanzierungspolitik des Unternehmens. Die finanzierungspolitischen Entscheidungen des Unternehmens beschränken sich nicht nur auf die Festlegung des Verschuldungsgrades, der das Verhältnis zwischen dem Volumen von Forderungs- und Beteiligungstiteln angibt, sondern beinhalten auch die vertragliche Ausgestaltung der einzelnen Finanzierungstitel. Indem monetäre Rechte und Pflichten sowie Gestaltungs-, Einwirkungs- und Informationsrechte der Titelinhaber festgelegt werden, erfolgt eine Zuweisung von Risiken an die verschiedenen Kapitalgeber des Unternehmens. Die Gesellschafter als Inhaber von Beteiligungstiteln besitzen bedingte, an die wirtschaftliche Lage des Unternehmens geknüpfte Zahlungsansprüche, während die im Rahmen der Kreditfinanzierung abgeschlossenen Verträge als Forderungstitel unbedingte Zahlungsansprüche verbriefen.[1]

Obwohl unbedingt, implizieren die Zahlungsansprüche aus Forderungstiteln nicht notwendigerweise einen sicheren Zahlungseingang. Treten etwa auf Grund einer wirtschaftlichen Schieflage Schwierigkeiten im Finanzbereich des emittierenden Unternehmens auf, sind die vorleistenden Gläubiger der Gefahr ausgesetzt, versprochene Gegenleistungen in Form der vertraglich vereinbarten Zins- und Tilgungszahlungen nicht fristgerecht und/oder nicht vollständig zu erhalten und einen Kreditausfall zu erleiden. Dieses Kreditrisiko versuchen die Gläubiger schon bei Abschluss der Kreditverträge durch Vereinbarungen hinsichtlich Zinszahlungs- und Tilgungsmodalitäten, Laufzeit, Volumen und Sicherungsformen zu begrenzen. Das Vorhandensein des Kreditrisikos an sich vermag allerdings die zu beobachtenden, komplexen Vereinbarungen in Kreditverträgen ebenso wenig zu erklären wie die Entscheidung eines Unternehmens für einen hohen, mittleren oder niedrigen Verschuldungsgrad und eine kurz- oder langfristige Verschuldung. Auf Jensen/Meckling (1976) zurückgehende Erklärungsansätze rücken daher zwei mögliche Charakteristika der Kreditfinanzierung von Unternehmen in den Vordergrund: Die asymmetrische Verteilung der Informationen zwischen Gesellschaftern und Gläubigern und das opportunistische Verhalten der Gesellschafter nach Vertragsabschluss.[2]

2.1.1 Effiziente Vertragsgestaltung

Informationsasymmetrien in Kreditvertragsbeziehungen bedingen neben Problemen aus einer ungleichen Informationsverteilung zwischen Schuldnern und Gläubigern vor Abschluss der Kreditverträge („adverse selection") auch „moral hazard", d.h. Unsicherheit der Gläubiger hinsichtlich des Verhaltens der Schuldner nach Vertragsabschluss. Aus Sicht der Gläubiger erschweren diese Informationsasymmetrien die Abschätzung des Kreditrisikos und können negative Vermögenseffekte zur Folge haben, wenn op-

[1] Vgl. Franke/Hax (1999): S. 30ff.

[2] Vgl. ebenda: S. 409ff. Harris/Raviv (1991, 1995) geben einen Überblick der entsprechenden Literatur.

portunistisches Verhalten der Schuldner vorliegt. Letzteres gilt insbesondere für die Kreditvergabe an ein Unternehmen mit beschränkt haftenden Gesellschaftern. Angenommen, in den Kreditverträgen werden lediglich Ansprüche auf Zins- und Tilgungszahlungen vereinbart. Die Gesellschafter (oder das die Interessen der Gesellschafter vertretende Management) haben dann nach Abschluss der Kreditverträge keinen Anreiz, Dispositionen vorzunehmen, um die Position der Gläubiger in Situationen, in denen es möglicherweise zur Insolvenz des Unternehmens kommt, zu verbessern. Dies liegt darin begründet, dass die Gesellschafter wegen der beschränkten Haftung im Fall der Insolvenz nicht zur Bedienung der Ansprüche der Gläubiger verpflichtet sind. Gewinne und Verluste des Unternehmens verändern in einer solchen Situation ausschließlich die Position der Gläubiger und nicht die der Gesellschafter. Ist eine Insolvenz von vornherein nicht ausgeschlossen und wird der Handlungsspielraum der Gesellschafter seitens des Gesetzgebers nicht beschränkt, können diese nach Abschluss der Kreditverträge sogar ihre eigene Vermögensposition zu Lasten des Vermögens der Gläubiger verbessern. In der Literatur werden die folgenden investitions- und finanzierungspolitischen Maßnahmen der Gesellschafter, die mit einer Schädigung der Gläubiger verbunden sind, genannt:[3]

1. [„dividend policy“]. Die Gesellschafter des Unternehmens können nach Abschluss der Kreditverträge durch Teilliquidationen des Unternehmensvermögens die ihnen zufließenden Ausschüttungen erhöhen. Die dadurch verringerte Haftungsmasse des Unternehmens führt zu einem höheren Kreditausfall der Gläubiger bei einer Insolvenz des Unternehmens. Dies wirkt sich nachteilig auf die Marktwerte der aufgenommenen Kredite aus und zieht Vermögensverluste der Gläubiger nach sich.

2. [„claim dilution“]. Die Gesellschafter des Unternehmens können nach Abschluss der Kreditverträge zusätzliche Kredite aufnehmen, die im Insolvenzfall gleich- oder vorrangige Ansprüche gegenüber den bisher aufgenommenen Krediten verbriefen. Eine Ausschüttung der dem Unternehmen aus dieser späteren Kreditaufnahme zufließenden Beträge an die Gesellschafter führt bei einer Insolvenz zu einem höheren Kreditausfall der bisherigen Gläubiger. Diese erleiden durch die damit verbundene Abwertung der bereits aufgenommenen Kredite Vermögensverluste.

[3] Die nachfolgende Auflistung ist angelehnt an Smith/Warner (1979): S. 118f.

3. [„asset substitution"]. Jensen/Meckling (1976) zeigen, dass die Gesellschafter des Unternehmens nach Abschluss der Kreditverträge an der Durchführung von riskanteren Investitionsprojekten interessiert sind.[4] Durch eine solche Investitionspolitik droht bei einer Insolvenz ein höherer Kreditausfall als in der Ausgangssituation. Dies hat niedrigere Marktwerte der aufgenommenen Kredite und Vermögensverluste der Gläubiger zur Folge.

4. [„underinvestment"]. Myers (1977) stellt fest, dass die Gesellschafter des Unternehmens nach Abschluss der Kreditverträge Anreize haben, Investitionsprojekte mit positiven Beitrag zum Marktwert des Gesamtkapitals des Unternehmens zu unterlassen, wenn die Gewinne aus diesen Investitionsprojekten in erster Linie den Kreditausfall der Gläubiger bei einer Insolvenz vermindern.[5] Diese Investitionspolitik ist für die Gläubiger suboptimal, da sie bei einer Insolvenz einen höheren Kreditausfall erleiden als bei Durchführung der Investitionsprojekte. Die Vermögensverluste der Gläubiger ergeben sich gemessen an der aus ihrer Sicht optimalen Investitionspolitik.

Die Gläubiger versuchen dem opportunistischen Verhalten der Gesellschafter schon bei Abschluss der Kreditverträge Rechnung zu tragen. Aus diesem Grund werden zusätzlich zu den Vereinbarungen hinsichtlich Zins- und Tilgungsmodalitäten, Laufzeit und Volumen häufig Sicherungsformen, insbesondere so genannte Sicherungsklauseln, in das Vertragswerk mit aufgenommen. Sicherungsklauseln beschränken wie die „traditionellen" Sicherungsformen, etwa die Besicherung von Krediten durch dingliche Rechte (Grundpfandrechte, Sicherungsübereignung, Eigentumsvorbehalt) oder Bürgschaften, die Handlungsspielräume der Gesellschafter und verhindern ein die Gläubiger schädigendes Verhalten.[6] Bei der Kreditfinanzierung von Unternehmen über den Anleihemarkt sind Sicherungsklauseln wesentlicher Bestandteil der Anleihebedingungen. So kann das emittierende Unternehmen durch Sicherungsklauseln zur Einhaltung von auf den Verschuldungsgrad oder den Anlagendeckungsgrad bezogenen Bilanzstrukturnormen verpflichtet werden. Diese Sicherungsklauseln gewähren den Anleiheinhabern bei einer Verletzung der Bilanzstrukturnormen entweder das Recht zur vorzeitigen Fälligstellung der Forderung oder führen zu einer Anpassung der ausstehenden Zins- und Tilgungszahlungen. Zu einer derartigen Beschränkung der Verschuldungspolitik des

[4] Vgl. Jensen/Meckling (1976): S. 334ff.

[5] Vgl. Myers (1977): S. 149.

[6] In der anglo-amerikanischen Literatur spricht man von „safety covenants", „protective covenants" oder „bond covenants". Vgl. etwa Black/Cox (1976) und Smith/Warner (1979). Letztere liefern eine ausführliche Analyse der Wirkung verschiedener Sicherungsklauseln.

Unternehmens kommt es, da die nachteiligen Anreizeffekte der Gesellschafter für hohe Verschuldungsgrade besonders ausgeprägt sind.[7] Ein weiteres Beispiel für Sicherungsklauseln sind Negativerklärungen, in denen sich das emittierende Unternehmen gegenüber den Anleiheinhabern verpflichtet, bestimmte Vermögensgegenstände in Zukunft nicht höher zu belasten oder anderen Gläubigern keine gleich- oder vorrangige Besicherung einzuräumen.

Sicherungsklauseln begrenzen das von den Gläubigern zu tragende Kreditrisiko, indem sie ein opportunistisches Verhalten der Gesellschafter unterbinden. Sie stellen daher wichtige Elemente einer effizienten Gestaltung von Kreditverträgen dar.[8] Es ist allerdings zu beachten, dass die Einhaltung der in den Kreditverträgen getroffenen Vereinbarungen laufend überwacht werden muss. Die Summe aus den damit verbundenen Informations- und Transaktionskosten und den noch verbleibenden Vermögensverlusten auf Grund des opportunistischen Verhaltens der Gesellschafter lassen sich Jensen/Meckling (1976) folgend als Agency-Kosten der Kreditfinanzierung definieren.[9] Schätzen potenzielle Kreditgeber die von ihnen zu tragenden Agency-Kosten als zu hoch ein und lässt sich eine Abgeltung durch entsprechend höhere Zinssätze nicht gewährleisten, werden Kreditverträge nicht in gewünschtem Umfang abgeschlossen. Das Ergebnis könnte eine Kreditrationierung seitens der Kreditgeber sein. Dies wirft die Frage auf, ob nicht eine Normierung der Kreditverträge durch gesetzliche Regelungen im Hinblick auf eine Senkung der Agency-Kosten und effiziente Vertragsgestaltung gerechtfertigt ist. Ein Vergleich mit Rechtsordnungen anderer Länder zeigt, dass gesetzlichen Regelungen in Deutschland gerade im Rahmen der Kreditfinanzierung von Unternehmen ein höheres Gewicht eingeräumt wird.[10] Dies äußert sich vor allem in den Vorschriften der Insolvenzordnung und in den Ausschüttungssperrziffern des Aktiengesetzes. Während letztere die Gläubiger eines Unternehmens grundsätzlich vor „unangemessen“ hohen Ausschüttungen an die beschränkt haftenden Gesellschafter des Unternehmens schützen, werden insolvenzrechtliche Regelungen erst wirksam, wenn einer der insolvenzauslösenden Tatbestände Zahlungsunfähigkeit, drohende Zahlungsunfähigkeit oder Überschuldung eines Unternehmens vorliegt. Um ein die Gläubiger

[7]Vergleichbare Sicherungsklauseln sind seit Ende der Achtzigerjahre in den USA unter dem Begriff „event risk covenants“ populär geworden. Eine typische Wirkungsweise von „event risk covenants“ ist die Sanktionierung von Bonitätsverschlechterungen des Emittenten infolge einer Ratingherabstufung, verursacht etwa durch eine Erhöhung des Verschuldungsgrades nach einer fremdfinanzierten Übernahme („leveraged buyout“).Vgl. Crabbe (1991): S. 696.

[8]Nach Franke/Hax (1999) kommt ein effizienter Vertrag zu Stande, wenn einer der Beteiligten die Konditionen so setzt, dass sie für den anderen gerade noch akzeptabel sind und sein eigener finanzieller Nutzen maximiert wird. Vgl. Franke/Hax (1999): S. 416f.

[9]Vgl. Jensen/Meckling (1976): S. 308 und S. 337f.

[10]Vgl. Franke (2000a): S. 238 und Franke/Hax (1999): S. 447f.

schädigendes Verhalten in diesen Situationen zu unterbinden, geht das Verwaltungs- und Verfügungsrecht über das zur Insolvenzmasse gehörende Vermögen eines Unternehmens nach Eröffnung eines Insolvenzverfahrens an einen vom Insolvenzgericht bestellten Insolvenzverwalter über und wird der Einflussnahme der Gesellschafter weitestgehend entzogen.[11]

2.1.2 Optimale Verschuldungspolitik

Die bisherigen Ausführungen haben gezeigt, dass die Ausgestaltung der einzelnen Finanzierungstitel vor allem die Zuweisung von Risiken an die verschiedenen Kapitalgeber eines Unternehmens bedeutet. Einhergehend mit der Gestaltung der Finanzierungsverträge stellt sich einem Unternehmen die Frage nach der optimalen Verschuldungspolitik. Folgt man Modigliani/Miller (1958) und vernachlässigt Kapitalmarktunvollkommenheiten, ist diese Frage einfach zu beantworten, da die Irrelevanz der Verschuldungspolitik gilt. Die Entscheidung eines Unternehmens für einen hohen, mittleren oder niedrigen Verschuldungsgrad und eine kurz- oder langfristige Verschuldung beeinflusst demnach weder den Marktwert des Gesamtkapitals noch den finanziellen Nutzen seiner Kapitalgeber. So bedeutet jede Umfinanzierung lediglich eine andere Aufteilung des Zahlungsstroms aus dem Investitionsprogramm des Unternehmens zwischen den Kapitalgebern, die den Marktwert des Gesamtkapitals als Summe der Marktwerte aller vom Unternehmen emittierten Finanzierungstitel unverändert lässt. Auch der finanzielle Nutzen der Kapitalgeber bleibt unverändert, da diese annahmegemäß bereits ihre optimalen Portefeuilles halten und die Wirkungen einer Umfinanzierung auf den Ertag und das Risiko ihrer Positionen durch private Transaktionen neutralisieren.

Berücksichtigt man allerdings Kapitalmarktunvollkommenheiten wie Steuern und Insolvenzkosten, ist die Irrelevanz der Verschuldungspolitik nicht mehr zwingend. Ein höherer Verschuldungsgrad vermindert ceteris paribus die gewinnabhängigen Steuerzahlungen eines Unternehmens und führt zu einer Erhöhung des Marktwerts des Gesamtkapitals.[12] Dieser Vorteil kann durch die mit einem höheren Verschuldungsgrad

[11]Vgl. Franke/Hax (1999): S. 480ff. Das Insolvenzverfahren kann zu einer unmittelbaren Verwertung des Unternehmensvermögens durch Liquidation mit anschließender Aufteilung des Erlöses führen. Eine von der unmittelbaren Verwertung abweichende Regelung kann im Rahmen eines Insolvenzplans zu Stande kommen, wenn durch Mehrheitsentscheidung der Gläubiger doch noch die Fortführung eines insolventen Unternehmens beschlossen wird. In den USA sind die insolvenzrechtlichen Regelungen im U.S. Bankruptcy Code aufgeführt, wobei die Regelungen in Chapter 7 und Chapter 11 einen vergleichbaren Verfahrensverlauf nach sich ziehen.

[12]Miller (1977) kritisiert diese Ceteris-paribus-Sichtweise, da sie die Wirkung von Steuern auf das Kapitalmarktgleichgewicht vernachlässigt. Vgl. auch Franke/Hax (1999): S. 473f.

einhergehende höhere Insolvenzwahrscheinlichkeit aufgehoben oder sogar überlagert werden. Mit der höheren Insolvenzwahrscheinlichkeit steigen ceteris paribus die erwarteten direkten und indirekten Insolvenzkosten, was marktwertmindernd wirkt. Auch die Agency-Kosten der Kreditfinanzierung steigen ceteris paribus mit einem höheren Verschuldungsgrad, da die für die Gläubiger nachteiligen Anreizeffekte der Gesellschafter bei hohen Verschuldungsgraden größer sind. Aus diesen Überlegungen heraus hat sich die Tradeoff-Theorie entwickelt. Die Tradeoff-Theorie sieht die Bestimmung des optimalen Verschuldungsgrades eines Unternehmens als ein Abwägen zwischen den steuerlichen Vorteilen und den Kosten eines höheren Verschuldungsgrades.[13]

Eine ähnliche Argumentation lässt sich hinsichtlich der optimalen Fristigkeit der Verschuldung führen. Die längerfristige Verschuldung eines Unternehmens nutzt wegen der damit einhergehenden geringeren Insolvenzwahrscheinlichkeit steuerliche Vorteile aus der Verschuldung besser aus als eine kurzfristig revolvierende Verschuldung. Dies spricht tendenziell für eine längere Fristigkeit der Verschuldung von Unternehmen. Mit der längeren Fristigkeit der Verschuldung sind allerdings höhere Agency-Kosten verbunden, da beispielsweise die Anreize für die Gesellschafter des Unternehmens, das Investitionsrisiko nach Abschluss der Kreditverträge zu steigern („asset substitution"), größer sind. Die Vorteile einer kürzeren Fristigkeit der Verschuldung liegen demnach in einer Reduktion dieser Agency-Kosten. Bei der Bestimmung der optimalen Fristigkeit der Verschuldung ist daher wiederum zwischen den steuerlichen Vorteile einer längerfristigen Verschuldung und den entstehenden Kosten abzuwägen.[14]

[13]Vgl. Myers (2001): S. 81ff.
[14]Vgl. Leland/Toft (1996): S. 996ff.

2.2 Kreditgeschäft und Risikopolitik von Banken

Banken gelten auf Grund ihrer Vorteile bei der Abschätzung und Gestaltung des Kreditrisikos als Spezialisten für die Kreditfinanzierung. Das Kreditgeschäft von Banken ist heutzutage allerdings geprägt von den einschneidenden Veränderungen der Kreditmärkte in den letzten Jahren. Die unter Begriffen wie Internationalisierung, Liberalisierung und Deregulierung zusammengefassten Entwicklungen führen zu einem verstärkten Wettbewerb auf den Kreditmärkten. Damit einhergehend erzielen Banken niedrigere Erträge im Kreditgeschäft, haben gleichzeitig aber höhere Risiken zu tragen. Novellierungen in der Bankenaufsicht, man denke an die jüngsten Vorschläge des Baseler Ausschusses für Bankenaufsicht zur Eigenkapitalausstattung von Banken, begleiten diesen Wandel auf den Kreditmärkten und lassen weiteren Handlungsbedarf seitens der Banken entstehen.[15] Die veränderten Rahmenbedingungen eröffnen den Banken aber auch zusätzliche Handlungsspielräume. So existieren eine Vielzahl neuer Möglichkeiten, mit dem Kreditgeschäft verbundene Risiken zu gestalten, etwa durch den Verkauf dieser Risiken über entsprechende Finanzderivate.

2.2.1 Strategische Ausrichtung auf den Kreditmärkten

Die zahlreichen Bankenkrisen der letzten Jahre, verursacht durch hohe Kreditausfälle aus der Kreditvergabe an Unternehmen, wie während der internationalen Verschuldungskrise Ende der Neunzigerjahre, oder durch starke Zinsschwankungen, wie bei den Savings and Loans Associations in den USA, haben die Diskussion um einen angemessenen Umgang der Banken mit den Risiken aus dem Kreditgeschäft intensiviert.[16] Dabei sind sowohl die Banken selbst als auch die Aufsichtsbehörden daran interessiert, dass existenzbedrohende Verluste aus dem Kreditgeschäft möglichst vermieden werden.[17] Welche risikopolitischen Maßnahmen eine Bank diesbezüglich ergreifen will

[15] Vgl. Basel Committee on Banking Supervision (1999, 2001). Im Mittelpunkt der in Deutschland sehr kontrovers geführten Diskussion um das zweite Konsultationspapier des Baseler Ausschusses für Bankenaufsicht („Basel II") steht die Frage, ob die vorgeschlagenen Regelungen zu einer Benachteiligung mittelständischer Unternehmen bei der Kreditversorgung führen.

[16] Vgl. Franke (2000a): S. 236f.

[17] Aus aufsichtsrechtlicher Sicht ist dieses Interesse vorhanden, da der Bankensektor einem besonderen, systemischen Risiko ausgesetzt ist: Auf Grund der Geschäftsverbindungen untereinander – beispielsweise refinanzieren sich Banken häufig durch Kredite anderer Kreditinstitute – kann die Insolvenz einzelner Banken die Insolvenz vieler Banken nach sich ziehen. Die Insolvenz einer Bank kann daher einen Dominoeffekt auslösen, dessen Endresultat der Zusammenbruch des gesamten Bankensystems ist. Dies hätte weitreichende Auswirkungen auf das Wirtschaftsgeschehen, da die Funktionen Kreditversorgung von Unternehmen und Privatpersonen und Abwicklung des Zahlungsverkehrs von den Banken nicht mehr wahrgenommen werden könnten. Vgl. Franke (2000a) und Hellwig (1998).

oder auf Grund aufsichtsrechtlicher Vorschriften ergreifen muss, hängt nicht zuletzt von ihrer strategischen Ausrichtung auf den Kreditmärkten ab.

Die Frage nach der strategischen Ausrichtung einer Bank stellt sich schon bei der Kreditvergabe, da die Bank entweder die Möglichkeit hat, Kredite in ihr Kreditportefeuille aufzunehmen, oder die Kredite verbriefen und Dritten zur Zeichnung anbieten kann. Betreibt die Bank das klassische Kreditgeschäft, nimmt sie die Kredite in ihr Kreditportefeuille auf. Damit setzt sie sich der Gefahr von Kreditausfällen aus und hat das Kreditrisiko zu tragen. Erwerben Dritte die verbrieften Kredite von der Bank, übernehmen diese das Kreditrisiko. Die Bank erfüllt nur eine Vermittlungsfunktion. Durch die Verbriefung des Kreditrisikos ist die Bank selbst diesem Risiko nicht mehr ausgesetzt. Dies ist verstärkt in den USA zu beobachten, wo ein großer Teil der Kreditfinanzierung von Unternehmen durch die Begebung von Anleihen erfolgt. Als Vermittler zwischen den kreditsuchenden Unternehmen und den Investoren treten häufig Investment Banken auf, die sich auf die Verbriefung des Kreditrisikos über Anleihen und das Emissionsgeschäft im Allgemeinen spezialisiert haben. In Deutschland macht die Verbriefung des Kreditrisikos über Anleihen traditionell nur einen geringen Anteil der gesamten Kreditfinanzierung von Unternehmen aus. Ende 1998 betrug das Volumen der von Produktionsunternehmen emittierten Schuldverschreibungen 50 Mrd. €, das der bei Banken in Anspruch genommenen Kredite 1.102 Mrd. €.[18] Das Kreditrisiko aus der Kreditvergabe an Unternehmen verbleibt in Deutschland demnach ebenso wie das aus den vergebenen Konsumentenkrediten weitestgehend bei den Banken. Wegen sinkender Transaktions- und Informationskosten auf den Kreditmärkten und der Abschaffung regulativer Hemmnisse ist nach Ansicht der Deutschen Bundesbank allerdings auch in Deutschland bei der Kreditfinanzierung von Unternehmen mit einer verstärkten Zunahme der verbrieften Kreditaufnahme zu rechnen.[19]

Obwohl dem Emissionsgeschäft und der Übernahme ausschließlich vermittelnder Funktionen bei der Kreditvergabe wachsende Bedeutung beigemessen wird, bleibt das klassische Kreditgeschäft ein wichtiger Bestandteil des Aktivgeschäfts vieler Banken. Das damit verbundene Kreditrisiko weist demnach ein großes Gefährdungspotenzial für die Existenz einer Bank auf und rückt in den Mittelpunkt risikopolitischer Maßnahmen.

[18] Die Banken nutzen allerdings ihrerseits die verbriefte Kreditaufnahme in erheblichem Umfang, um das Kreditgeschäft zu refinanzieren. So waren Mitte 1999 von deutschen Banken emittierte Schuldverschreibungen mit einem Volumen von 1.233 Mrd. € im Umlauf, etwa 33 % des gesamten Kreditvolumens in Deutschland zu dieser Zeit. Vgl. Deutsche Bundesbank (2000): S. 34f.

[19] Vgl. Deutsche Bundesbank (2000): S. 33 ff. und Franke (1998, 2000a). Ob sich damit für das Kreditgeschäft in Deutschland ein Wandel von einem „bankorientierten“ hin zu einem „marktorientierten“ System vollzieht, bleibt abzuwarten.

Insbesondere eine übermäßige Konzentration von Schuldnern aus einer Region oder Branche im Kreditportefeuille führt dazu, dass die Gefahr existenzbedrohender Verluste durch Kreditausfälle auf Grund wirtschaftlicher Schieflagen in den entsprechenden Regionen oder Branchen zunimmt. Dieses so genannte Konzentrationsrisiko versuchen Banken im Allgemeinen durch eine ausreichende Risikostreuung im Kreditportefeuille zu vermeiden. Die Erfordernis der Risikostreuung engt allerdings die Handlungsspielräume von Banken im Kreditgeschäft ein. So können Großkredite nicht zuletzt wegen der vom Gesetzgeber vorgesehenen Großkreditobergrenzen oft nur über eine Kreditsyndizierung, also die Teilnahme an einem Kreditkonsortium, vergeben werden. Regional tätige Banken oder Banken, die sich auf bestimmte Branchen spezialisiert haben, können das Kreditpotenzial einer Region oder Branche nicht ausschöpfen, so dass aus der Spezialisierung resultierende Kompetenzvorteile nicht ausgenutzt werden. Einen Ausweg bietet der Verkauf des Kreditrisikos über Kreditderivate und die Verbriefung von Krediten als Asset-Backed-Securities. Der partielle Handel des Kreditrisikos mittels dieser Instrumente kann helfen, das Konzentrationsrisiko zu korrigieren, und eröffnet neue Handlungsspielräume im Kreditgeschäft.[20]

2.2.2 Einsatz von Kreditderivaten und Asset-Backed-Securities

Unter dem Begriff Kreditderivate werden all diejenigen Finanzderivate zusammengefasst, deren Zahlungsströme in irgendeiner Weise vom Kreditrisiko eines Basiswerts oder mehrerer Basiswerte abhängen und die einen Verkauf des Kreditrisikos erlauben.[21] Kreditderivate weisen verschiedenste Konstruktionsmerkmale auf, die von der angestrebten Sicherungswirkung abhängen. Die wichtigsten Instrumente sind Credit-Default-Swaps, Total-Rate-of-Return-Swaps, Credit-Spread-Options und Credit-Lin-

[20] Vgl. Franke (2000a,b) und Das (1998).

[21] Die deutsche Bankenaufsicht definiert Kreditderivate als „[...] Instrumente [...], mittels derer die mit Darlehen, Anleihen oder anderen Risikoaktiva bzw. Marktrisikopositionen verbundenen Kreditrisiken auf als sogenannte Sicherungsgeber auftretende Parteien übertragen werden. Dabei werden die ursprünglichen Kreditbeziehungen der sogenannten Sicherungsnehmer (die Parteien, die die Kreditrisiken veräußern) weder verändert noch neu begründet. Kreditderivate unterscheiden sich von anderen, traditionellen Formen der Übertragung von Kreditrisiken, wie Gewährleistungen oder dingliche Besicherung, dadurch, daß diese als Derivate üblicherweise unter standardisierten Rahmenverträgen abgeschlossen werden, einer laufenden Marktbewertung unterliegen [und] einem besonderen Risikocontrolling und -management unterworfen sind. Ein weiterer Unterschied besteht darin, daß die Inanspruchnahme des Sicherungsgebers aus dem Kreditderivat nicht unmittelbar eine Forderung gegenüber dem Schuldner der zugrundeliegenden Position begründet.“ Vgl. Bundesaufsichtsamt für das Kreditwesen (1999).

ked-Notes.[22] Als Asset-Backed-Securities (ABS) bezeichnet man Wertpapiere, die Zahlungsansprüche gegen eine ausschließlich für die Durchführung der Asset-Backed-Transaktion gegründete Zweckgesellschaft („special purpose vehicle") verbriefen. Die Zahlungsansprüche aus ABS werden in der Regel durch einen Bestand nicht-börsengehandelter Kredite gedeckt. Diese werden von einer Bank, dem Originator, auf die Zweckgesellschaft, deren Vermögensgegenstände nur aus diesen Krediten bestehen, übertragen und stehen damit den Inhabern der ABS als Haftungsmasse zur Verfügung.

Gibt eine regional tätige oder auf eine Branche spezialisierte Bank das regional- bzw. branchenbedingte Kreditrisiko über Kreditderivate oder Asset-Backed-Transaktionen weiter, lassen sich das vorhandene Kreditpotenzial und Kompetenzvorteile ausnutzen und höhere Erträge erwirtschaften. Auf der Kostenseite kann die „teure" Unterlegung des Kreditrisikos mit Eigenkapital reduziert werden.[23] Zu beachten ist in diesem Zusammenhang auch, dass der Verkauf des Kreditrisikos mit zum Teil nicht unerheblichen Transaktionskosten verbunden ist. Weiterhin entstehen möglicherweise Kosten aus Effekten von „adverse selection" und „moral hazard", die auf die asymmetrische Informationsverteilung zwischen dem Verkäufer und dem Käufer des Kreditrisikos zurückzuführen sind. So muss die Bank als Originator einer Asset-Backed-Transaktion häufig Garantien („credit enhancements") übernehmen, da der Käufer der ABS zum einen die Qualität des zu Grunde liegenden Kreditpools schlecht abschätzen kann und zum anderen ein sinkendes Interesse der Bank an der Überwachung der Schuldner befürchten muss.[24]

Während die Weitergabe des Zinsänderungsrisikos über Zinsderivate schon seit längerem von den Banken praktiziert wird und entsprechende Märkte existieren, befinden sich die Märkte für Kreditderivate noch im Aufbau. Eine Weitergabe des Kreditrisikos über Kreditderivate ist überhaupt erst seit Anfang der Neunzigerjahre möglich, da es vorher einen Handel dieser Instrumente in nennenswertem Umfang nicht gab. Zu Beginn des Jahres 2000 belief sich das Volumen aller von deutschen Banken gehaltenen Kreditderivate auf etwa 60 Mrd. €.[25]

[22]Vgl. Franke (2000a,b) und Das (1998).

[23]Voraussetzung dafür ist, dass der Gesetzgeber die erzielbare Verringerung des Kreditrisikos im Kreditportefeuille anerkennt und eine niedrigere Eigenkapitalunterlegung zulässt. Die Diskussion um eine bankenaufsichtsrechtliche Anerkennung der Sicherungswirkung von Kreditderivaten oder Asset-Backed-Transaktionen ist allerdings noch nicht abgeschlossen. Vgl. Burghoff/Henke (2000b) und Schulte-Mattler/Meyer-Ramloch (2000).

[24]Trotz dieser Probleme und der noch zu klärenden Fragen hält Franke (2000b) im Zuge der Verbreitung von Kreditderivaten und Asset-Backed-Securities und der so geschaffenen Handlungsspielräume eine „Renaissance der Spezialkreditinstitute" für möglich. Franke (2000b): S. 271.

[25]Vgl. Burghoff/Henke (2000a): S. 148.

Kapitel 3

Optionspreistheoretischer Modellrahmen

Das folgende Kapitel arbeitet die optionspreistheoretischen Grundlagen unternehmenswertbasierter Kreditrisikomodelle heraus. Ziel ist es, einen einheitlichen Modellrahmen für die in Kapitel 4 vorzunehmende vergleichende Analyse grundlegender Modelle aus dieser Klasse zu entwickeln. Kapitel 3.1 beschäftigt sich mit der Modellierung der Zinsstruktur. Um eine arbitragefreie Zinsstrukturentwicklung zu gewährleisten, werden aufbauend auf dem Modell von Heath/Jarrow/Morton (1992) Bedingungen für die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes angegeben. Der entsprechende Anleihemarkt wird in Kapitel 3.2 erweitert, so dass neben kreditrisikolosen fest verzinslichen Wertpapieren auch als Wertpapiere verbriefte riskante Vermögensgegenstände gehandelt werden können. Dabei werden Amin/Jarrow (1992) folgend Bedingungen für die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes auf dem erweiterten Kapitalmarkt bestimmt. Kapitel 3.3 zeigt, wie eine Bewertung zustandsbedingter Ansprüche auf die dort gehandelten Wertpapiere mittels der Martingalmaß-Technik vorgenommen werden kann. Im Anschluss an die Herleitung des grundlegenden Bewertungszusammenhangs werden mit dem Wechsel auf das Forwardmaß sowie einem Zeitwechsel Möglichkeiten genannt, um die Bewertung zustandsbedingter Ansprüche rechnerisch zu vereinfachen.

3.1 Dynamik der Zinsstruktur

Alle theoretischen Modelle, die sich mit der zufallsabhängigen Entwicklung der Zinsstruktur im Zeitablauf befassen, haben einer grundlegenden Anforderung zu genügen:

Es muss gewährleistet sein, dass die abgebildete Zinsstrukturentwicklung arbitragefrei ist, sich also mit den auf dem Anleihemarkt gehandelten, fest verzinslichen Wertpapieren keine Arbitragegewinne erzielen lassen. Die verschiedenen in der finanzwirtschaftlichen Literatur diskutierten Zinsstrukturmodelle weisen trotz dieser gemeinsamen Grundlage unterschiedliche Charakteristika auf. Die „klassischen“ Zinsstrukturmodelle von Vasicek (1977), Brennan/Schwartz (1979) oder Cox/Ingersoll/Ross (1985) beschreiben die Entwicklung der Zinsstruktur durch eine einzige, unter Umständen mehrdimensionale Zustandsvariable, den kurzfristigen Kassazinssatz. Heath/Jarrow/Morton (1992) präsentieren ein alternatives Zinsstrukturmodell, welches die gesamte Forwardratekurve als Zustandsvariable verwendet, um die Entwicklung der Zinsstruktur zu beschreiben. Letzteres führt zu einem sehr weitgefassten Modellrahmen, aus dem sich die meisten anderen Zinsstrukturmodelle als Spezialfälle ableiten lassen.[1]

Bevor das Zinsstrukturmodell von Heath/Jarrow/Morton diskutiert wird, sollen einige Begriffsabgrenzungen vorgenommen werden.

Definition [Kassazinssatz]. *Sei $P(t,T)$ der Preis eines kreditrisikolosen Zerobonds im Zeitpunkt t, $t \geq 0$, mit einem vertraglich vereinbarten Rückzahlungsbetrag von einem € und Fälligkeit in T Jahren. Dann ist der Kassazinssatz (pro Jahr) für den Anlagezeitraum $T-t > 0$, $r(t,T)$, definiert als*

$$r(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}, \tag{3.1}$$

wobei ln *der natürliche Logarithmus ist. Der kurzfristige Kassazinssatz $r(t)$ bezeichne den Kassazinssatz für einen möglichst kurzen Anlagezeitraum.*

Der Kassazinssatz für einen bestimmten Anlagezeitraum ergibt sich gemäß der Definition aus der Rendite eines kreditrisikolosen Zerobonds der entsprechenden Restlaufzeit. Ein kreditrisikoloser Zerobond wird bei Fälligkeit mit Sicherheit zurückgezahlt, so dass $P(T,T) = 1$ gilt.[2] Die (Kassa-)Zinsstrukturkurve bildet die in einem Zeitpunkt beobachtbaren Renditen von kreditrisikolosen Zerobonds in Abhängigkeit von deren Restlaufzeit ab. Davon zu unterscheiden ist die Renditestrukturkurve, welche die restlaufzeitabhängigen Renditen von kreditrisikolosen Kuponanleihen abbildet.

Terminzinssätze geben die Verzinsung für zukünftige Anlagezeiträume an und lassen sich unter der Annahme eines vollkommenen, arbitragefreien Anleihemarktes aus der

[1] Vgl. Heath et al. (1992): S. 77 oder Duffie (2001): S. 135.

[2] Die Rendite eines beliebigen Wertpapiers ist im Rahmen dieser Arbeit immer als interner Zinsfuß der Zahlungsreihe des Wertpapiers auf Basis der vertraglich vereinbarten Zahlungen zu ermitteln. Soweit nicht anders erwähnt wird eine stetige Zinsverrechnung unterstellt.

heutigen Zinsstrukturkurve ableiten. Zwischen dem im Zeitpunkt t vereinbarten Terminzinssatz (pro Jahr) für einen Anlagezeitraum $U - T > 0$, $f(t,T,U)$, und den in t, $t \geq 0$ und $t \leq T$, geltenden Kassazinssätzen, muss die Beziehung

$$f(t,T,U) = \frac{r(t,U)(U-t) - r(t,T)(T-t)}{U-T} = -\frac{\ln P(t,U) - \ln P(t,T)}{U-T}$$

bestehen, wobei die letzte Umformung unter Verwendung von Gleichung (3.1) vorgenommen wurde.

Definition [Forwardrate]. *Der Terminzinssatz (pro Jahr) mit Fälligkeit in T Jahren und möglichst kurzem zukünftigen Anlagezeitraum wird als Forwardrate $f(t,T)$ bezeichnet. Die Forwardrate ist durch*

$$\lim_{T \to U} f(t,T,U) = f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln\, P(t,T) \tag{3.2}$$

gegeben.

Die Existenz der Ableitung aus (3.2) wird in der gesamten Arbeit ebenso wie die Bedingung $P(t,T) > 0$ vorausgesetzt. Die Forwardratekurve in einem Zeitpunkt stellt die Verzinsung für einen möglichst kurzen zukünftigen Anlagezeitraum in Abhängigkeit von der Fälligkeit dar.

Mit $\ln P(t,t) = 0$ folgt aus (3.2) unmittelbar

$$\begin{aligned} \ln P(t,T) &= \int_t^T \frac{\partial}{\partial T} \ln P(t,s)ds \\ &= -\int_t^T f(t,s)ds, \end{aligned}$$

so dass

$$P(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t,s)ds\right\} \tag{3.3}$$

den Zusammenhang zwischen Forwardrates und Zerobondpreisen auf einem vollkommenen, arbitragefreien Anleihemarkt angibt. Dies verdeutlicht, dass sich die Zerobondpreise und die resultierende Zinsstrukturkurve unmittelbar aus der Forwardratekurve ableiten lassen und umgekehrt. Weiterhin stimmt im Zeitpunkt t die sofort fällige Forwardrate mit dem kurzfristigen Kassazinssatz überein, es gilt

$$f(t,t) = r(t). \tag{3.4}$$

Anzumerken bleibt, dass der Preis einer kreditrisikolosen Kuponanleihe auf einem vollkommenen, arbitragefreien Anleihemarkt in einer bestimmten Beziehung zu den Preisen kreditrisikoloser Zerobonds stehen muss. Angenommen, eine Anleihe verbrieft im

Zeitpunkt t, $t \geq 0$, neben dem Rückzahlungsbetrag von einem € bei Fälligkeit im Zeitpunkt T, $T > t$, Kuponzahlungen in Höhe von C €, $0 < C < 1$, in den Zeitpunkten T_j, mit $j = 1, \ldots, n$ und $t < T_1 < \ldots < T_n = T$. Der Preis einer kreditrisikolosen Anleihe ergibt sich dann als

$$P_C(t,T) = \sum_{j=1}^{n} P(t,T_j)C + P(t,T), \tag{3.5}$$

wobei durch $P(t,T_j)$ die Preise kreditrisikoloser Zerobonds gegeben sind, deren Fälligkeit mit den einzelnen Kuponterminen übereinstimmt. Ist der Preis der Kuponanleihe geringer als $P_C(t,T)$, lässt sich durch Kauf der Anleihe und durch Verkauf des durch die rechte Seite von Gleichung (3.5) bestimmten Portefeuilles ein Arbitragegewinn realisieren, da beide Transaktionen in Zukunft denselben Zahlungsstrom generieren. Ist der Preis der Kuponanleihe höher als $P_C(t,T)$, führt der Verkauf der Anleihe und Kauf des so genannten Duplikationsportefeuilles zu einem Arbitragegewinn.

3.1.1 Das Modell von Heath/Jarrow/Morton

Heath/Jarrow/Morton (1992) unterstellen einen vollkommenen Anleihemarkt, so dass Informations- und Transaktionskosten, einkommen-, gewinn- und vermögenabhängige Steuern oder Marktzugangsbeschränkungen nicht existieren. Auf dem Anleihemarkt werden kreditrisikolose Zerobonds mit beliebigen Fälligkeitszeitpunkten gehandelt. Alle gehandelten Zerobonds sind beliebig teilbar und können zu gegebenen Marktpreisen in beliebigem Umfang kontinuierlich ge- und verkauft werden. Leerverkäufe sind ebenso unbeschränkt möglich. Die Marktteilnehmer maximieren ihren finanziellen Nutzen, wobei der Grenznutzen strikt positiv ist.

Als Zustandsvariablen der Entwicklung der Zinsstruktur dienen die Forwardrates. Die Dynamik der Forwardrates wird in Anlehnung an Heath/Jarrow/Morton wie folgt vorgegeben:

Annahme HJM1 [Dynamik der Forwardrates]. *Angenommen, durch* $\{\hat{W}_i(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$, $i = 1, \ldots, n < \infty$, *sind voneinander unabhängige Wiener-Prozesse auf dem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *gegeben, wobei* $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$ *die entsprechende Standardfiltration darstellt.*[3] *Für alle Fälligkeitszeitpunkte* T, $0 \leq t \leq T \leq \mathcal{T}$, *lässt*

[3]Für die Standardfiltration gilt

$$\mathcal{F}(t) = \sigma\left(\sigma(\{\hat{W}(s) : s \leq t\}) \cup \mathcal{N}_0\right), \text{ für alle } t \in [0,\mathcal{T}],$$

mit $\hat{W}(s) = (\hat{W}_1(s), \ldots, \hat{W}_n(s))$ als n-dimensionaler Wiener-Prozess. $\mathcal{N}_0$ gibt die Nullmengen von $\mathcal{F}$

sich die Entwicklung der entsprechenden Forwardrate durch den Prozess $\{f(t,T) : t \in [0,T]\}$*, mit*

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)ds + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \eta_i(s,T)d\hat{W}_i(s) \tag{3.6}$$

bzw.

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sum_{i=1}^{n} \eta_i(t,T)d\hat{W}_i(t), \tag{3.7}$$

beschreiben. Dabei sind $\alpha(t,T)$ *und* $\eta_i(t,T)$*,* $i = 1,\ldots,n$*, als Driftfunktion und Volatilitätskoeffizienten des Forwardrateprozesses adaptiert und messbar. Es gilt weiterhin* $\int_0^T |\alpha(t,T)|dt < \infty$ *und* $\int_0^T \eta_i^2(t,T)dt < \infty$*, für alle* $i = 1,\ldots,n$*, fast sicher. Als Anfangswert dient die heute beobachtbare Forwardratekurve* $\{f(0,T) : T \in [0,\mathcal{T}]\}$*. Diese Forwardratekurve ist eine ausschließlich zeitabhängige Funktion und genügt der Bedingung* $\int_0^T f(0,t)dt < \infty$*.*[4]

Wie Annahme HJM1 zeigt, wird die Dynamik der Forwardrates durch n voneinander unabhängige Wiener-Prozesse bestimmt, wobei die stochastische Differenzialgleichung (3.7) lediglich die kompaktere, symbolische Schreibweise für den Zusammenhang (3.6) ist. Die angegebenen Wiener-Prozesse sind Störgrößen der Entwicklung der Forwardrates, die sich für verschiedene Fälligkeitszeitpunkte der Forwardrates unterschiedlich auswirken. Die Auswirkungen werden durch die Volatilitätskoeffizienten $\eta_i(t,T)$ bestimmt. Diese können vom Fälligkeitszeitpunkt und von der Höhe der Forwardrates selbst, aber auch von den Pfaden der Wiener-Prozesse abhängen. Der Ausdruck $\sqrt{\sum_{i=1}^n \eta_i^2(t,T)}$ wird als Volatilität der Forwardrate mit Fälligkeitszeitpunkt T bezeichnet.[5]

Die Entwicklung des kurzfristigen Kassazinssatzes kann unter Verwendung des Zusammenhangs $r(t) = f(t,t)$ aus (3.4) und der Darstellung der Forwardrates aus Annahme HJM1 durch den Prozess $\{r(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$, mit

$$r(t) = f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)ds + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \eta_i(s,t)d\hat{W}_i(s), \tag{3.8}$$

an.

[4] Vgl. Heath et al. (1992): S. 80. Die hier verwendeten Regularitätsbedingungen gewährleisten, dass durch (3.6) bzw. (3.7) ein Itô-Prozess beschrieben wird. Die Definition eines Itô-Prozesses ist im Anhang zu finden.

[5] Obwohl der Begriff Volatilität lediglich im Sinne einer Definition zu verstehen ist, wird der Ausdruck $\sqrt{\sum_{i=1}^n \eta_i^2(t,T)dt}$ häufig als „Standardabweichung des Zuwachses $df(t,T)$" interpretiert. Da $df(t,T)$ keine Zufallsvariablen darstellt, ist dies mathematisch nicht korrekt. Duffie (2001) spricht in einem ähnlichen Zusammenhang von einem „Missbrauch der Notation". Vgl. Duffie (2001): S. 87.

dargestellt werden. Das Geldmarktkonto gibt den Wert eines revolvierend zum Zinssatz $r(t)$ angelegten € an. Die Entwicklung des Geldmarktkontos folgt dann einem Prozess $\{A(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$, mit

$$A(t) = \exp\left\{\int_0^t r(s)ds\right\}$$

und $A(0) = 1$. Um zu gewährleisten, dass das Geldmarktkonto nur positive Werte annimmt und nicht „explodiert“, gilt $\int_0^{\mathcal{T}} \int_0^t |\alpha(s,t)|dsdt < \infty$ fast sicher.[6]

Der Prozess für die Entwicklung der Zerobondpreise, $\{P(t,T) : t \in [0,T]\}$, für alle Fälligkeitszeitpunkte T, lässt sich unter Verwendung des Zusammenhangs

$$P(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t,s)ds\right\}$$

aus (3.3) und der Darstellung der Forwardrates aus Annahme HJM1 bestimmen.[7] Wie Björk (1998) zeigt, besitzt das Integral $I(t,T) = -\int_t^T f(t,s)ds$ die stochastische Differenzialgleichung

$$dI(t,T) = \left(f(t,t) - \int_t^T \alpha(t,s)ds\right)dt - \sum_{i=1}^n \int_t^T \eta_i(t,s)dsd\hat{W}_i(t).$$

In vektorieller Schreibweise ergibt dies

$$dI(t,T) = f(t)dt + G(t)d\hat{W}(t),$$

mit

$$f(t) = f(t,t) - \int_t^T \alpha(t,s)ds, \quad G^T(t) = \begin{pmatrix} -\int_t^T \eta_1(t,s)ds \\ \vdots \\ -\int_t^T \eta_n(t,s)ds \end{pmatrix}, \quad d\hat{W}(t) = \begin{pmatrix} d\hat{W}_1(t) \\ \vdots \\ d\hat{W}_n(t) \end{pmatrix}.$$

$G^T(t)$ entspricht dem transponierten Zeilenvektor $G(t)$. Der Prozess für die Zerobondpreisentwicklung kann unter Anwendung der mehrdimensionalen Version von Itôs Lemma[8] auf $P(t,T) = \exp\{I(t,T)\}$ bestimmt werden. Es gilt

$$dP(t,T) = \left(P(t,T)f(t) + \frac{1}{2}P(t,T)G(t)G^T(t)\right)dt + P(t,T)G(t)d\hat{W}_i(t),$$

[6] Vgl. Heath et al. (1992): S. 80f.

[7] Die „rigorose“ Herleitung ist bei Heath et al. (1992): S. 98ff. zu finden. Hier wird eine eher „heuristische“ Herleitung angegeben. Vgl. Björk (1998): S. 232ff. oder Duffie (2001): S. 153f.

[8] Vgl. Satz A2 im Anhang.

was sich nach Berechnen der Skalarprodukte in

$$\begin{aligned} dP(t,T) &= \left(f(t,t) - \int_t^T \alpha(t,s)ds + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(-\int_t^T \eta_i(t,s)ds\right)^2\right) P(t,T)dt \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \int_t^T \eta_i(t,s)dsP(t,T)d\hat{W}_i(t) \end{aligned}$$

umformen lässt. Unter Berücksichtigung von $f(t,t) = r(t)$ entspricht dies der stochastischen Differenzialgleichung

$$dP(t,T) = (r(t) + b(t,T))P(t,T)dt + \sum_{i=1}^n a_i(t,T)P(t,T)d\hat{W}_i(t), \tag{3.9}$$

mit

$$b(t,T) = -\int_t^T \alpha(t,s)ds + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i^2(t,T), \tag{3.10}$$

$$a_i(t,T) = -\int_t^T \eta_i(t,s)ds. \tag{3.11}$$

Der Anfangswert ist durch die heute beobachtbaren Zerobondpreise $\{P(0,T) : T \in [0,\mathcal{T}]\}$ gegeben. Die so genannte „Momentanrendite“ eines Zerobonds mit Restlaufzeit $T-t$ pro Zeiteinheit ist definiert als $R(t) = dP(t,T)/(P(t,T)dt)$. Die Terme $r(t) + b(t,T)$ und $b(t,T)$ werden als „erwartete Momentanrendite“ und „erwartete momentane Risikoprämie“ bezeichnet.[9] Der Ausdruck $\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2(t,T)}$ gibt die Volatilität des Zerobonds an. Die Lösung der stochastischen Differenzialgleichung aus (3.9) lautet

$$\begin{aligned} P(t,T) &= P(0,T)\exp\left\{\int_0^t \left(r(s) + b(s,T) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i^2(s,T)\right)ds \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n \int_0^t a_i(s,T)d\hat{W}_i(s)\right\}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

wie eine erneute Anwendung von Itôs Lemma zeigt: Der stochastische Prozess für $X(t) = \ln P(t,T)$ lässt sich durch die folgende vektorielle stochastische Differenzialgleichung

$$dX(t) = f(t)dt + G(t)d\hat{W}(t),$$

mit

$$f(t) = r(t) - \int_t^T \alpha(t,s)ds, \quad G^T(t) = \begin{pmatrix} a_1(t,T) \\ \vdots \\ a_n(t,T) \end{pmatrix}, \quad d\hat{W}(t) = \begin{pmatrix} d\hat{W}_1(t) \\ \vdots \\ d\hat{W}_n(t) \end{pmatrix}$$

[9] Auch diese Bezeichnungen sind im Sinne einer Definition zu verstehen, da die Momentanrendite $R(t)$ keine Zufallsvariable darstellt.

und Anfangswert $X(0) = \ln P(0,T)$, beschreiben. Für die Funktion $Y(t) = \exp\{X(t)\}$ erhält man mittels Itôs Lemma das stochastische Differenzial

$$dY(t) = \left(Y(t)f(t) + \frac{1}{2}Y(t)G(t)G(t)^T\right)dt + Y(t)G(t)d\hat{W}(t).$$

Berechnen der Skalarprodukte führt zu

$$dY(t) = \left(r(t) - \int_t^T \alpha(t,s)ds + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i^2(t,T)\right)Y(t)dt + \sum_{i=1}^n a_i(t,T)Y(t)d\hat{W}_i(t).$$

Nach Zusammenfassen der Terme ergibt sich die stochastische Differenzialgleichung (3.9).

Angenommen, man legt nun die Driftfunktion und die Volatilitätskoeffizienten der Forwardrates, $\alpha(t,T)$ und $\eta_i(t,T)$, $i = 1,\ldots,n$, für alle Fälligkeitszeitpunkte T fest und ermittelt die heutige Forwardratekurve $\{f(0,T) : T \in [0,\mathcal{T}]\}$. Damit ist die zufallsabhängige Entwicklung der Zinsstruktur im Zeitablauf festgelegt. Da bezüglich der Auswahl der heutigen Forwardratekurve kein Freiheitsgrad besteht, tritt die Frage auf, ob die Driftfunktion und die Volatilitätskoeffizienten des Forwardrateprozesses beliebig wählbar sind oder in einer bestimmten Beziehung stehen müssen, um eine arbitragefreie Zinsstrukturentwicklung und somit einen arbitragefreien Anleihemarkt zu gewährleisten. Der Anleihemarkt ist arbitragefrei, wenn es keine Arbitragemöglichkeiten gibt, sich also unter Einbeziehung des Geldmarktkontos und der Zerobonds keine selbstfinanzierende Handelsstrategie konstruieren lässt, die eine Anschaffungsauszahlung von Null besitzt und in Zukunft mit Sicherheit einen nicht-negativen Einzahlungsüberschuss sowie mit positiver Wahrscheinlichkeit einen positiven Einzahlungsüberschuss erzeugt.[10] Seit Harrison/Kreps (1979) und Harrison/Pliska (1981) ist bekannt, dass das Postulat der Arbitragefreiheit eng mit der Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes verknüpft ist. Genau genommen impliziert die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes in diesem Modellrahmen, dass es auf dem Anleihemarkt keine Arbitragemöglichkeiten gibt. Der entsprechende Beweis lässt sich wie folgt skizzieren: Das äquivalente Martingalmaß für den Anleihemarkt ist definiert als ein zum subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$, unter dem der Prozess für die Entwicklung der mit dem Geldmarktkonto diskontierten Zerobondpreise

[10] Diese Definition einer Arbitragemöglichkeit schließt gleichzeitig aus, dass es eine selbstfinanzierende Handelsstrategie gibt, die eine negative Anschaffungsauszahlung besitzt und in Zukunft mit Sicherheit einen nicht-negativen Einzahlungsüberschuss erzeugt. Eine solche Handelsstrategie ließe sich durch die sichere Anlage der negativen Anschaffungsauszahlung immer in die im Text genannte Handelsstrategie überführen. Weiterhin wird implizit unterstellt, dass die Preise von Kuponanleihen die Arbitragefreiheitsbedingung aus Gleichung (3.5) erfüllen.

einem Martingal folgt. Es wird weiterhin unterstellt, dass die betrachteten selbstfinanzierenden Handelsstrategien zulässig sind. Zulässigkeit bedeutet hier, dass auch der Prozess für die diskontierte Marktwertentwicklung einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ einem Martingal folgt. Eine zulässige selbstfinanzierende Handelsstrategie, die unter $\mathbb{Q}$ mit Sicherheit einen nicht-negativen und mit positiver Wahrscheinlichkeit einen positiven (diskontierten) Einzahlungsüberschuss erzeugt, muss heute eine positive Anschaffungsauszahlung besitzen. Da dies auf Grund gleicher Nullmengen nicht nur unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$, sondern auch unter dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ gilt, sind Arbitragemöglichkeiten auf Basis zulässiger Handelsstrategien ausgeschlossen. Die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes impliziert demzufolge die Arbitragefreiheit des Anleihemarkts.[11]

Der nachfolgende Satz formuliert hinreichende Bedingungen für die Existenz eines äquivalentes Martingalmaßes auf dem betrachteten Anleihemarkt. Dies setzt voraus, dass zunächst die Entwicklung der mit dem Geldmarktkonto diskontierten Zerobondpreise für alle Fälligkeitszeitpunkte T unter dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ bestimmt wird. Mit $Z_P(t,T) = P(t,T)/A(t)$ gilt

$$\begin{aligned} Z_P(t,T) &= Z_P(0,T)\exp\left\{\int_0^t \left(b(s,T) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i^2(s,T)\right) ds \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{i=1}^n \int_0^t a_i(s,T) d\hat{W}_i(s)\right\} \end{aligned} \tag{3.13}$$

als Lösung des stochastischen Differenzials

$$dZ_P(t,T) = b(t,T)Z_P(t,T)dt + \sum_{i=1}^n a_i(t,T)Z_P(t,T)d\hat{W}_i(t). \tag{3.14}$$

Satz HJM1 [Äquivalentes Martingalmaß bei Heath/Jarrow/Morton]. *Gegeben sei die Dynamik der Forwardrates aus Annahme HJM1. Ein zum subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$ existiert für den Anleihemarkt, wenn es adaptierte und messbare „Marktpreise für Risiko" $\lambda_i(t)$ gibt, die für alle $i = 1, \ldots, n$ die Bedingung $\int_0^t \lambda_i^2(s)ds < \infty$ fast sicher erfüllen, so dass der Prozess $\{\Lambda(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$, mit*

$$\Lambda(t) = \exp\left\{\sum_{i=1}^n \int_0^t \lambda_i(s)d\hat{W}_i(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_0^t \lambda_i^2(s)ds\right\}, \tag{3.15}$$

[11] Vgl. auch Kapitel 3.3.1.1.

ein Martingal unter $\mathbb{P}$ ist, und für alle $t, T \geq 0$, mit $t \leq T$,

$$b(t,T) = -\sum_{i=1}^{n} a_i(t,T)\lambda_i(t) \tag{3.16}$$

gilt.[12]

Beweis: Der Beweis von Satz HJM1 kann wie folgt skizziert werden. Gemäß dem Theorem von Girsanov[13] ist gewährleistet, dass ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ existiert, unter dem durch $dW_i(t) = d\hat{W}_i(t) - \lambda_i(t)d(t)$, $i = 1, \ldots, n$, voneinander unabhängige Wiener-Prozesse gegeben sind. Dabei ist $\{\Lambda(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ der zur Radon-Nikodym Ableitung

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}(\mathcal{T})} = \Lambda(\mathcal{T}) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\mathcal{T}} \lambda_i(s)d\hat{W}_i(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\mathcal{T}} \lambda_i^2(s)ds\right\}$$

gehörende Dichteprozess, mit

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}(t)} = \Lambda(t).$$

Die Entwicklung der diskontierten Zerobondpreise unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ ist nach der Ersetzung $d\hat{W}_i(t) = dW_i(t) + \lambda_i(t)d(t)$, $i = 1, \ldots, n$, in (3.14) durch die stochastische Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} dZ_P(t,T) &= b(t,T)Z_P(t,T)dt + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,T)Z_P(t,T)(dW_i(t) + \lambda_i(t)dt) \\ &= \left(b(t,T) + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,T)\lambda_i(t)\right) Z_P(t,T)dt + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,T)Z_P(t,T)dW_i(t) \end{aligned}$$

gegeben. Der entsprechende Prozess ist ein Martingal, wenn die Driftfunktion dieser stochastischen Differenzialgleichung den Wert Null annimmt, so dass

$$dZ_P(t,T) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t,T)Z_P(t,T)dW_i(t) \tag{3.17}$$

[12] Die Bezeichnung Marktpreise für Risiko ist angelehnt an Heath et al. (1992): S. 83.
[13] Vgl. Satz A6 im Anhang.

gilt.[14] Dies ist genau dann erfüllt, wenn die Marktpreise für Risiko der Bedingung

$$\begin{aligned} b(t,T) + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,T)\lambda_i(t) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad b(t,T) = -\sum_{i=1}^{n} a_i(t,T)\lambda_i(t), \end{aligned}$$

für alle $t, T \geq 0$, mit $t \leq T$, genügen.[15] $\square$

Die Entwicklung der Zerobondpreise unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ lässt sich unter Berücksichtigung der Bedingung (3.16) aus Satz HJM1 bestimmen:

$$\begin{aligned} dP(t,T) &= (r(t) + b(t,T))\, P(t,T)dt + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,T)P(t,T)(dW_i(t) + \lambda_i(t)dt) \\ &= \left(r(t) + b(t,T) + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,T)\lambda_i(t) \right) P(t,T)dt + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,T)P(t,T)dW_i(t) \\ &= r(t)P(t,T)dt + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,T)P(t,T)dW_i(t). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Gleichung (3.18) liefert eine alternative Charakterisierung des äquivalenten Martingalmaßes für den Anleihemarkt: Das äquivalente Martingalmaß ist ein zum subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, unter dem die erwartete Momentanrendite der Zerobonds für alle Fälligkeitszeitpunkte gleich dem kurzfristigen Kassazinssatz ist.[16] Die stochastische Differenzialgleichung (3.18) besitzt die Lösung

$$\begin{aligned} P(t,T) &= P(0,T)\exp\left\{ \int_0^t \left(r(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i(s,T)^2 \right) ds \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t a_i(s,T)dW_i(s) \right\}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Ein wichtiger Beitrag von Heath/Jarrow/Morton ist die Formulierung einer Bedingung, welche die Driftfunktion des Forwardrateprozesses unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ erfüllen muss.

[14] Hinreichend dafür, dass (3.17) ein Martingal beschreibt, ist Novikov-Bedingung

$$E^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left\{ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \int_0^T a_i^2(t,T)dt \right\} \right] < \infty,$$

die annahmegemäß hier erfüllt sein soll. Vgl. Baxter/Rennie (1996): S. 79.

[15] Vgl. Björk (1997): S. 91f.

[16] Da dies ein Gleichgewicht auf einen Kapitalmarkt mit ausschließlich risikoneutralen Marktteilnehmern charakterisiert, wird das äquivalente Martingalmaß in der Literatur auch als „risikoneutrales“ Wahrscheinlichkeitsmaß bezeichnet. Vgl. Hull (2000): S. 510f.

Satz HJM2 [Forwardrate-Drift-Bedingung unter $\mathbb{Q}$]. *Gegeben sei die Dynamik der Forwardrates aus Annahme HJM1. Unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ gilt für alle Fälligkeitszeitpunkte T*

$$\alpha(t,T) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(t,T) \int_t^T \eta_i(t,s)ds.$$

Beweis: Satz HJM2 kann unmittelbar aus Satz HJM1 abgleitet werden, indem man zunächst Bedingung (3.16) ausschreibt:

$$-\int_t^T \alpha(t,s)ds + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(-\int_t^T \eta_i(t,s)ds\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\int_t^T \eta_i(t,s)ds\lambda_i(t).$$

Da dies für alle Fälligkeitszeitpunkte gilt, genügt es, die Ableitung dieser Bedingung nach T zu betrachten. Unter Anwendung der Kettenregel auf den zweiten Summanden der linken Seite der Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} & -\alpha(t,T) + \sum_{i=1}^{n} \eta_i(t,T)\int_t^T \eta_i(t,s)ds = \sum_{i=1}^{n}\eta_i(t,T)\lambda_i(t) \\ \Leftrightarrow\quad & \alpha(t,T) = -\sum_{i=1}^{n}\eta_i(t,T)\left(\lambda_i(t) - \int_t^T \eta_i(t,s)ds\right). \end{aligned}$$

Ersetzen der Driftfunktion des Forwardrateprozesses aus (3.7) durch diesen Ausdruck erzeugt

$$df(t,T) = -\sum_{i=1}^{n}\eta_i(t,T)\left(\lambda_i(t) - \int_t^T \eta_i(t,s)ds\right)dt + \sum_{i=1}^{n}\eta_i(t,T)d\hat{W}_i(t).$$

Analog zum Beweis von Satz HJM1 führt der Übergang auf das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{Q}$ zu

$$\begin{aligned} df(t,T) &= -\sum_{i=1}^{n}\eta_i(t,T)\left(\lambda_i(t) - \int_t^T \eta_i(t,s)ds\right)dt + \sum_{i=1}^{n}\eta_i(t,T)(dW_i(t) + \lambda_i(t)dt) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\eta_i(t,T)\int_t^T \eta_i(t,s)dsdt + \sum_{i=1}^{n}\eta_i(t,T)dW_i(t).^{17} \end{aligned}$$

□

Satz HJM2 sagt aus, dass die Driftfunktionen des Forwardrateprozesses unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ ausschließlich von den entsprechenden Volatilitätskoeffizienten abhängt. Für die Forwardrates und den kurzfristige Kassazinssatz unter $\mathbb{Q}$ gilt

[17] Vgl. Björk (1997): S. 93.

somit

$$\begin{aligned} f(t,T) &= f(0,T) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \eta_i(s,T) \int_s^T \eta_i(s,v)dvds \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \eta_i(s,T)dW_i(s), \qquad (3.20) \\ r(t) &= f(0,t) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \eta_i(s,t) \int_s^t \eta_i(s,v)dvds \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \eta_i(s,t)dW_i(s). \qquad (3.21) \end{aligned}$$

Die Zerobondpreise unter $\mathbb{Q}$ können mittels (3.20) in Verbindung mit (3.3) bestimmt werden. Dies führt zu folgender Schlussfolgerung: Gegeben die aktuelle, am Markt zu beobachtende Forwardratekurve und die Volatilitätskoeffizienten der Forwardrates, ist die Entwicklung der Zinsstruktur unter dem äquivalenten Martingalmaß im Heath/Jarrow/Morton-Modell eindeutig festgelegt.

3.1.2 Gauß'sche 1-Faktor-Zinsstrukturmodelle

Heath/Jarrow/Morton (1992) stellen einen sehr weitgefassten Rahmen zur Modellierung der Zinsstruktur bereit. Nachfolgend soll ein spezieller Typ von Zinsstrukturmodellen betrachtet werden, die so genannten Gauß'schen 1-Faktor-Zinsstrukturmodelle. Ausgehend vom Heath/Jarrow/Morton-Modell lassen sich Gauß'sche Zinsstrukturmodelle wie folgt definieren:

Definition [Gauß'sches Zinsstrukturmodell]. *Die Volatilitätskoeffizienten der Forwardrates aus Annahme HJM1 seien ausschließlich zeitabhängige Funktionen. Ein Zinsstrukturmodell, das diese Voraussetzung erfüllt, wird Gauß'sches Zinsstrukturmodell genannt.*

In einem Gauß'schen Zinsstrukturmodell gehorchen die unbedingten und bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Forwardrates und des kurzfristigen Kassazinssatzes aus (3.20) und (3.21) einer Normalverteilung.[18] Die Entwicklung der Forwardrates und des kurzfristigen Kassazinssatzes unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ wird daher durch Gauß'sche Prozesse beschrieben. Dies hat den Nachteil, dass negative Realisationen mit positiver Wahrscheinlichkeit auftreten können.[19] Ein Gauß'sches 1-Faktor-Zinsstrukturmodell ist dadurch gekennzeichnet, dass die Entwicklung der Forwardrates und des kurzfristigen Kassazinssatzes einem eindimensionalen Gauß'schen Prozess folgt, d.h. nur ein Wiener-Prozess bestimmt als Störgröße die Entwicklung der Forwardrates. In diesem Fall gilt $n = 1$ für die Gleichungen (3.20) und (3.21).

3.1.2.1 Das Modell von Hull/White

Das von Hull/White (1990) entwickelte Gauß'sche 1-Faktor-Zinsstrukturmodell kann aus dem Heath/Jarrow/Morton-Modell abgeleitet werden, wenn man die Volatilität der Forwardrates für alle Fälligkeitszeitpunkte T durch die Funktion

$$\eta(t,T) = \eta e^{-\kappa(T-t)}, \tag{3.22}$$

[18] Vgl. Satz A8 im Anhang.

[19] Für eine ausführliche Diskussion dieser Eigenschaft von Gauß'schen Zinsstrukturmodellen vgl. Duffie (2001): S. 140f.

mit $\eta, \kappa > 0$, vorgibt. Für die Forwardrates gilt unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} f(t,T) &= f(0,T) + \eta^2 \int_0^t e^{-\kappa(T-s)} \int_s^T e^{-\kappa(v-s)} dv ds + \eta \int_0^t e^{-\kappa(T-s)} dW(s) \\ &= f(0,T) + \eta^2 \int_0^t e^{-\kappa(T-s)} \frac{1}{\kappa} \left(1 - e^{-\kappa(T-s)}\right) ds + \eta \int_0^t e^{-\kappa(T-s)} dW(s) \\ &= f(0,T) + \frac{\eta^2}{\kappa} \int_0^t \left(e^{-\kappa(T-s)} - e^{-2\kappa(T-s)}\right) ds + \eta \int_0^t e^{-\kappa(T-s)} dW(s) \\ &= f(0,T) + \frac{\eta^2}{2\kappa^2} \left(2e^{-\kappa T}\left(e^{\kappa t} - 1\right) - e^{-2\kappa T}\left(e^{2\kappa t} - 1\right)\right) \\ &\quad + \eta \int_0^t e^{-\kappa(T-s)} dW(s). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Wegen $r(t) = f(t,t)$ genügt der kurzfristige Kassazinssatz unter $\mathbb{Q}$

$$r(t) = f(0,t) + \frac{\eta^2}{2\kappa^2}\left(1 - e^{-\kappa t}\right)^2 + \eta \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW(s). \tag{3.24}$$

Die stochastischen Integrale aus (3.23) und (3.24) sind normalverteilt, mit

$$\eta \int_0^t e^{-\kappa(T-s)} dW(s) \sim \mathrm{N}\left(0, \eta^2 \int_0^t e^{-2\kappa(T-s)} ds\right)$$

und

$$\eta \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW(s) \sim \mathrm{N}\left(0, \eta^2 \int_0^t e^{-2\kappa(t-s)} ds\right).$$ [20]

Auf Grund der Normalverteilung dieser Integrale sind die Forwardrates und der kurzfristige Kassazinssatz unter $\mathbb{Q}$ ebenfalls normalverteilt. So gilt für den kurzfristigen Kassazinssatz

$$r(t) \sim \mathrm{N}\left(f(0,t) + \frac{\eta^2}{2\kappa^2}\left(1 - e^{-\kappa t}\right)^2, \frac{\eta^2}{2\kappa}\left(1 - e^{-2\kappa t}\right)\right), \tag{3.25}$$

nach Berechnung der Varianz als

$$\eta^2 \int_0^t e^{-2\kappa(t-s)} ds = \frac{\eta^2}{2\kappa}\left(1 - e^{-2\kappa t}\right).$$

Die Zerobondpreise unter $\mathbb{Q}$ ergeben sich für alle Fälligkeitszeitpunkte T unter Verwendung des Zusammenhangs

$$P(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t,s) ds\right\}$$

[20] Vgl. Satz A8 im Anhang.

aus (3.2) und der Darstellung der Forwardrates aus (3.23) als

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \exp\left\{ -\int_t^T f(0,s)ds - \frac{\eta^2}{2\kappa^2}\int_t^T \left(2e^{-\kappa s}\left(e^{\kappa t}-1\right) - e^{-2\kappa s}\left(e^{2\kappa t}-1\right)\right) ds \right. \\ &\quad \left. -\eta \int_t^T \int_0^t e^{-\kappa(s-v)} dW(v) ds \right\}. \end{aligned}$$

Mit der Umformung

$$\begin{aligned} \eta \int_t^T \int_0^t e^{-\kappa(s-v)} dW(v) ds &= \eta \int_t^T \int_0^t e^{-\kappa(s-t+t-v)} dW(v) ds \\ &= \eta \int_0^t e^{-\kappa(t-v)} dW(v) \int_t^T e^{-\kappa(s-t)} ds \\ &= \eta \int_0^t e^{-\kappa(t-v)} dW(v) \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) \end{aligned}$$

lassen sich die Zerobondpreise durch

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp\left\{ \frac{\eta^2}{4\kappa^3}\left(4\left(e^{-\kappa T} - e^{-\kappa t}\right)\left(e^{\kappa t}-1\right) - \left(e^{-2\kappa T} - e^{-2\kappa t}\right)\left(e^{2\kappa t}-1\right)\right) \right. \\ &\quad \left. -\eta \int_0^t e^{-\kappa(t-v)} dW(v) \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) \right\} \end{aligned} \tag{3.26}$$

beschreiben. Die Zerobondpreise sind somit lognormalverteilt unter $\mathbb{Q}$ und werden üblicherweise als Funktion des kurzfristigen Kassazinssatzes angegeben. Mit (3.24) folgt für das stochastische Integral aus (3.26)

$$\eta \int_0^t e^{-\kappa(t-v)} dW(v) = r(t) - f(0,t) - \frac{\eta^2}{2\kappa^2}\left(1 - e^{-\kappa t}\right)^2,$$

so dass gilt

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp\left\{ \frac{\eta^2}{4\kappa^3}\left(4\left(e^{-\kappa T} - e^{-\kappa t}\right)\left(e^{\kappa t}-1\right) - \left(e^{-2\kappa T} - e^{-2\kappa t}\right)\left(e^{2\kappa t}-1\right)\right) \right. \\ &\quad \left. -\left(r(t) - f(0,t) + \frac{\eta^2}{2\kappa^2}\left(1 - e^{-\kappa t}\right)^2\right) \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) \right\} \\ &= \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp\left\{ f(0,t)\frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) - \frac{\eta^2}{4\kappa}\left(1 - e^{-2\kappa t}\right)\frac{1}{\kappa^2}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. -r(t)\frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Die Zerobondpreise werden in der Regel als Exponentialfunktion in Abhängigkeit von $r(t)$ dargestellt:

$$P(t,T) = \exp\left\{A(t,T) - r(t)B(t,T)\right\}, \tag{3.27}$$

mit den zeitabhängigen Funktionen

$$A(t,T) = \ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)} + f(0,t)B(t,T) - \frac{\eta^2}{4\kappa}\left(1 - e^{-2\kappa t}\right)B^2(t,T)$$

und

$$B(t,T) = \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right),$$

für alle Fälligkeitszeitpunkte T. Die zugehörige stochastische Differenzialgleichung für die Entwicklung der Zerobondpreise unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ kann leicht mittels (3.18) bestimmt werden:

$$dP(t,T) = r(t)P(t,T)dt + a(t,T)P(t,T)dW(t), \tag{3.28}$$

wobei

$$a(t,T) = -\eta\int_t^T e^{-\kappa(s-t)}ds = -\frac{\eta}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) = -\eta B(t,T) \tag{3.29}$$

gilt. Der Ausdruck $\eta B(t,T)$ gibt somit die Volatilität eines Zerobonds mit Restlaufzeit $T-t$ im Hull/White-Modell an.

Abschließend soll gezeigt werden, wie sich aus dem Hull/White-Modell die stetige Version des von Ho/Lee (1986) entwickelten Zinsstrukturmodells ableiten lässt. Im Ho/Lee-Modell ist der kurzfristige Kassazinssatz unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ ebenfalls normalverteilt, allerdings mit

$$r(t) \sim \mathrm{N}\left(f(0,t) + \frac{1}{2}\eta^2t^2, \eta^2t\right).^{21} \tag{3.30}$$

Für $\kappa \to 0$ konvergieren die Parameter der Normalverteilung des kurzfristigen Kassazinssatzes im Hull/White-Modell aus (3.25) gegen die im Ho/Lee-Modell aus (3.30). Unter Anwendung der L' Hospital-Regel gilt

$$\begin{aligned}\lim_{\kappa\to 0} f(0,t) + \frac{\eta^2}{2\kappa^2}\left(1 - e^{-\kappa t}\right)^2 &= f(0,t) + \lim_{\kappa\to 0} -\frac{1}{2}\eta^2t^2e^{-\kappa t} + \eta^2t^2e^{-2\kappa t}\\ &= f(0,t) + \frac{1}{2}\eta^2t^2\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\lim_{\kappa\to 0}\frac{\eta^2}{2\kappa}\left(1 - e^{-2\kappa t}\right) &= \lim_{\kappa\to 0}\eta^2te^{-2\kappa t}\\ &= \eta^2t.\end{aligned}$$

Gleiches kann auch für die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Forwardrates und der Zerobondpreise gezeigt werden.

[21] Vgl. Heath et al. (1990, 1992).

3.1.2.2 Das Modell von Vasicek

Anders als das auf der Dynamik der Forwardrates aufbauende Heath/Jarrow/Morton-Modell, gehen die „klassischen“ Zinsstrukturmodelle von der Dynamik des kurzfristigen Kassazinssatzes aus. Stellvertretend für diesen Ansatz wird hier das bereits Ende der Siebzigerjahre von Vasicek (1977) entwickelte Gauß'sche 1-Faktor-Zinsstrukturmodell vorgestellt. Das Vasicek-Modell ist eng verwandt mit dem Hull/White-Modell, so dass sich bezugnehmend auf das vorangegangene Kapitel die Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen der klassischen und der von Heath/Jarrow/Morton entwickelten Vorgehensweise bei der Modellierung einer arbitragefreien Zinsstrukturentwicklung analysieren lassen.

Vasiceks Ausgangspunkt ist die Dynamik des kurzfristigen Kassazinssatzes unter dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$, die er durch die (lineare) stochastische Differenzialgleichung[22]

$$dr(t) = \kappa(\beta - r(t))dt + \eta d\hat{W}(t), \tag{3.31}$$

mit $\kappa, \beta, \eta > 0$, vorgibt.[23] Der heutige kurzfristige Kassazinssatz $r(0) = \text{const.}$ dient als Anfangswert.[24] Der von Vasicek verwendete Prozess besitzt die Mean-Reversion-Eigenschaft. Die Konstante β gibt das Mean-Reversion-Niveau des Prozesses an, also den kurzfristigen Kassazinssatz, gegen den $r(t)$ im „langfristigen Mittel“ tendiert. Die Driftfunktion des Prozesses nimmt für $r(t) < \beta$ ($r(t) > \beta$) einen positiven (negativen) Wert an. Liegt $r(t)$ unter (über) β ist ein höherer (niedrigerer) kurzfristiger Kassazinssatz zu erwarten. Der kurzfristige Kassazinssatz wird daher immer wieder an β „herangezogen“, wobei κ die „Anpassungsgeschwindigkeit“ angibt. Der Term η entspricht der Volatilität des kurzfristigen Kassazinssatzes und wird verkürzend Zinsvolatilität genannt.

Vasicek unterstellt, dass die Zerobondpreise stetige, zweimal differenzierbare Funktionen in der Zeitvariablen und im kurzfristigen Kassazinssatz sind. Somit gilt für alle Fälligkeitszeitpunkte T

$$P(t,T) = F^T(t, r(t)),$$

[22] Vgl. die entsprechende Definition im Anhang.

[23] Genaugenommen ist das auf der stochastischen Differenzialgleichung aus (3.31) aufbauende Zinsstrukturmodell ein von Vasicek behandelter Spezialfall, der aber in der Literatur als „Vasicek-Modell“ bezeichnet wird.

[24] Gemäß Satz A9 aus dem Anhang folgt der kurzfristige Kassazinssatz einem Gauß'schen Prozess, so dass $r(t)$ als Lösung der stochastischen Differenzialgleichung (3.31) normalverteilt ist. Der zu (3.31) gehörende Gauß'sche Prozess wird häufig als Ornstein-Uhlenbeck-Prozess bezeichnet, wobei dies strenggenommen nur im Fall $\beta = 0$ korrekt ist. Vgl. Arnold (1973): S. 146ff.

wobei die relevanten partiellen Ableitungen durch

$$F_t^T(t,r(t)) = \frac{\partial}{\partial t}F^T(t,r(t)),\ F_r^T(t,r(t)) = \frac{\partial}{\partial r}F^T(t,r(t)),\ F_{rr}^T(t,r(t)) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}F^T(t,r(t))$$

symbolisiert werden. Der Prozess für die Entwicklung der Zerobondpreise lässt sich mittels Itôs Lemma bestimmen. Das entsprechende stochastische Differenzial lautet

$$dF^T(t,r(t)) = \alpha^{F^T}(t,r(t))F^T(t,r(t))dt + \sigma^{F^T}(t,r(t))F^T(t,r(t))d\hat{W}(t), \qquad (3.32)$$

mit

$$\alpha^{F^T}(t,r(t)) = \frac{F_t^T(t,r(t)) + F_r^T(t,r(t))\kappa(\beta - r(t)) + \frac{1}{2}F_{rr}^T(t,r(t))\eta^2}{F^T(t,r(t))}, \qquad (3.33)$$

$$\sigma^{F^T}(t,r(t)) = \frac{F_r^T(t,r(t))\eta}{F^T(t,r(t))}. \qquad (3.34)$$

Im nächsten Schritt stellt Vasicek ein risikoloses Portefeuille aus zwei Zerobonds mit unterschiedlichen Fälligkeitszeitpunkten zusammen. Wie schon im Black/Scholes-Modell muss die Rendite dieses Portefeuilles, das annahmegemäß kontinuierlich und selbstfinanzierend revidiert wird, auf einem vollkommenen, arbitragefreien Anleihemarkt mit dem risikolosen Zinssatz übereinstimmen. Aus dieser Überlegung leitet Vasicek sein zentrales Ergebnis ab: Die erwartete momentane Risikoprämie eines Zerobonds muss sich auf einem vollkommenen, arbitragefreien Anleihemarkt proportional zum Volatilitätsterm $-\sigma^{F^T}(t,r(t))$ verhalten, wobei der Proportionalitätsfaktor unabhängig vom Fälligkeitszeitpunkt für alle Zerobonds gleich ist. Wird Vasicek folgend der Spezialfall eines konstanten Proportionalitätsfaktors λ_r betrachtet, ergibt sich die Arbitragefreiheitsbedingung

$$\alpha^{F^T}(t,r(t)) - r(t) = -\sigma^{F^T}(t,r(t))\lambda_r. \qquad (3.35)$$

Der Term λ_r wird wiederum als Marktpreis für Risiko bezeichnet. Einsetzen dieser Bedingung in (3.33) führt in Verbindung mit (3.34) zu

$$F_t^T(t,r(t)) + F_r^T(t,r(t))(\kappa(\beta + \lambda_r\eta/\kappa - r(t)) + \frac{1}{2}F_{rr}^T(t,r(t))\eta^2 - r(t)F^T(t,r(t)) = 0. \qquad (3.36)$$

Gleichung (3.36) impliziert, dass F^T die partielle Differenzialgleichung

$$F_t^T(t,r) + F_r^T(t,r)(\kappa(\beta + \lambda_r\eta/\kappa - r)) + \frac{1}{2}F_{rr}^T(t,r)\eta^2 - rF^T(t,r) = 0, \qquad (3.37)$$

für $(t,r) \in [0,T] \times \mathbb{R}$ erfüllt. Die Zerobondpreise auf einem arbitragefreien Anleihemarkt sind somit durch die von Vasicek als „term structure equation" bezeichnete partielle Differenzialgleichung (3.37) unter Berücksichtigung der Randbedingung

$$F^T(T,r) = 1 \tag{3.38}$$

bestimmt.[25]

Mittels der Feynman/Kač-Formel kann gezeigt werden, dass die Lösung der partiellen Differenzialgleichung (3.37) in Verbindung mit der Randbedingung (3.38) die Darstellung

$$F^T(t,r) = E\left[\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}|t,r\right] \tag{3.39}$$

besitzt, wobei die Entwicklung des kurzfristigen Kassazinssatzes einem stochastischen Differenzial der Form

$$\begin{aligned} dr(s) &= \kappa(\beta + \lambda_r \eta/\kappa - r(s))ds + \eta dW(s), \quad s < t \\ r(s) &= r, \quad s \leq t, \end{aligned} \tag{3.40}$$

genügt.[26] Definiert man $\{W(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$ wie bisher als Wiener-Prozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ mit der Standardfiltration[27] $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$, kann (3.39) für alle Fälligkeitszeitpunkte T dargestellt werden als

$$P(t,T) = E^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}|\mathcal{F}(t)\right]. \tag{3.41}$$

Dies lässt sich umformen in

$$\begin{aligned} \exp\left\{-\int_0^t r(s)ds\right\}P(t,T) &= E^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left\{-\int_0^T r(s)ds\right\}P(T,T)|\mathcal{F}(t)\right] \\ &= E^{\mathbb{Q}}\left[E^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left\{-\int_0^T r(s)ds\right\}P(T,T)|\mathcal{F}(u)\right]|\mathcal{F}(t)\right] \\ &= E^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left\{-\int_0^u r(s)ds\right\}P(u,T)|\mathcal{F}(t)\right], \end{aligned} \tag{3.42}$$

für alle $t < u \leq T$.[28] Gleichung (3.42) verdeutlicht, dass die mit dem Geldmarktkonto diskontierten Zerobondpreise unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ die Martingaleigenschaft besitzen, was $\mathbb{Q}$ definitionsgemäß zu einem Martingalmaß macht. Weiterhin ist

[25] Vgl. Vasicek (1977): S. 181f.

[26] Vgl. Björk (1998): S. 249 oder Satz A5 im Anhang.

[27] Vgl. Annahme AHJM1 in Kapitel 3.1.1 zur Definition der Standardfiltration.

[28] Wegen $\mathcal{F}(t) \subset \mathcal{F}(u)$ konnten hier die Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte angewendet werden. Vgl. Arnold (1973): S. 34.

$\mathbb{Q}$ äquivalent zum subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$, wie mit dem Theorem von Girsanov nachgewiesen werden kann. Wird $\mathbb{Q}$ durch die Radon-Nikodym Ableitung

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}(\mathcal{T})} = \Lambda(\mathcal{T}) = \exp\left\{\int_0^{\mathcal{T}} \lambda_r d\hat{W}(s) - \frac{1}{2}\int_0^{\mathcal{T}} \lambda_r^2 ds\right\}$$

definiert, ist die Äquivalenz zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{P}$ gewährleistet. Der durch

$$\Lambda(t) = \exp\left\{\int_0^{t} \lambda_r d\hat{W}(s) - \frac{1}{2}\int_0^{t} \lambda_r^2 ds\right\}$$

gegebene zugehörige Dichteprozess ist ein Martingal unter $\mathbb{P}$.[29] Gemäß dem Theorem von Girsanov wird dann durch

$$dW(t) = d\hat{W}(t) - \lambda_r dt$$

ein Wiener-Prozess unter $\mathbb{Q}$ beschrieben. Der Prozess für den kurzfristigen Kassazinssatz unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ ergibt sich nach der Ersetzung $d\hat{W}(t) = dW(t) + \lambda_r dt$ in (3.31) als

$$\begin{aligned} dr(t) &= \kappa(\beta - r(t))dt + \eta(dW(t) + \lambda_r dt) \\ &= \kappa(\bar{r} - r(t))dt + \eta dW(t), \end{aligned} \tag{3.43}$$

mit $\bar{r} = \beta + \eta\lambda_r/\kappa$, was (3.40) entspricht. Der Übergang auf das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{Q}$ ist somit durch eine Anpassung des Mean-Reversion-Niveaus des kurzfristigen Kassazinssatzes um eine vom Marktpreis für Risiko abhängige Konstante gekennzeichnet. Die Anpassungsgeschwindigkeit und die Volatilität bleiben trotz des Maßwechsels unverändert.

Gleichung (3.41) sagt aus, dass die Zerobondpreise auf einem arbitragefreien Anleihemarkt dem Erwartungswert des Diskontierungsfaktors, berechnet unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$, entsprechen. Um den Erwartungswert ausrechnen und eine Bewertungsformel für die Zerobondpreise bestimmen zu können, muss zunächst die Lösung der stochastischen Differenzialgleichung (3.43) angegeben werden. Diese lautet

$$\begin{aligned} r(t) &= r(s)e^{-\kappa(t-s)} + \kappa\bar{r}\int_s^t e^{-\kappa(t-v)}dv + \eta\int_s^t e^{-\kappa(t-v)}dW(v) \\ &= r(s)e^{-\kappa(t-s)} + \bar{r}\left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right) + \eta\int_s^t e^{-\kappa(t-v)}dW(v), \end{aligned} \tag{3.44}$$

für $0 \leq s < t$.[30] Gemäß Gleichung (3.44) ist der kurzfristige Kassazinssatz unter $\mathbb{Q}$ normalverteilt, mit

$$r(t) \sim \mathrm{N}\left(r(s)e^{-\kappa(t-s)} + \bar{r}\left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right), \frac{\eta^2}{2\kappa}\left(1 - e^{-2\kappa(t-s)}\right)\right).$$ [31]

[29] Die für die Martingaleigenschaft hinreichende Novikov-Bedingung ist wegen $\lambda_r = \text{const.}$ erfüllt.
[30] Vgl. Korrolar A2 im Anhang.

Dies verdeutlicht, dass die Entwicklung des kurzfristigen Kassazinssatzes unter $\mathbb{Q}$ einem Gauß'schen Prozess folgt. Wie die Grenzwertbetrachtung

$$\lim_{t\to\infty} r(s)e^{-\kappa(t-s)} + \bar{r}\left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right) = \bar{r}$$

zeigt, gibt $\bar{r}$ als risikoadjustiertes Mean-Reversion-Niveau den kurzfristigen Kassazinssatz an, der sich unter $\mathbb{Q}$ im langfristigen Mittel einstellt. Das Integral $I(t,T) = -\int_t^T r(s)ds$ aus (3.41) kann unter Berücksichtigung des Prozesses aus (3.44) wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} I(t,T) &= -r(t)\int_t^T e^{-\kappa(s-t)}ds - \bar{r}\int_t^T \left(1 - e^{-\kappa(s-t)}\right)ds - \eta\int_t^T\int_t^s e^{-\kappa(s-v)}dW(v)ds \\ &= -\bar{r}(T-t) - (r(t)-\bar{r})\int_t^T e^{-\kappa(s-t)}ds - \eta\int_t^T\int_v^T e^{-\kappa(s-v)}dsdW(v) \\ &= -\bar{r}(T-t) - (r(t)-\bar{r})\frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) - \eta\int_t^T \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-v)}\right)dW(v).^{32} \end{aligned} \tag{3.45}$$

Da das Integral $I(t,T)$ normalverteilt ist mit Erwartungswert $E[I(t,T)]$ und Varianz $\mathrm{Var}[I(t,T)]$, gehorchen die Zerobondpreise im Vasicek-Modell einer Lognormalverteilung. Es gilt somit für alle Fälligkeitszeitpunkte T

$$P(t,T) = \exp\left\{E[I(t,T)] + \frac{\mathrm{Var}[I(t,T)]}{2}\right\}. \tag{3.46}$$

Der Erwartungswert und die Varianz in (3.46) sind gegeben durch

$$\begin{aligned} E[I(t,T)] &= -\bar{r}(T-t) - (r(t)-\bar{r})\frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) \\ &= -\bar{r}\left((T-t) - \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right)\right) - r(t)\frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[I(t,T)] &= \eta^2\int_t^T \frac{1}{\kappa^2}\left(1 - e^{-\kappa(T-v)}\right)^2 dv = \frac{\eta^2}{\kappa^2}\int_t^T \left(1 - 2e^{-\kappa(T-v)} + e^{-2\kappa(T-v)}\right)dv \\ &= \frac{\eta^2}{\kappa^2}\left((T-t) - \frac{2}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) + \frac{1}{2\kappa}\left(1 - e^{-2\kappa(T-t)}\right)\right) \\ &= \frac{\eta^2}{2\kappa^3}\left(2\kappa(T-t) + 4e^{-\kappa(T-t)} - e^{-2\kappa(T-t)} - 3\right) \\ &= \frac{\eta^2}{2\kappa^3}\left(2\kappa(T-t) - 2 + 2e^{-\kappa(T-t)} - \left(1 - 2e^{-\kappa(T-t)} + e^{-2\kappa(T-t)}\right)\right) \\ &= \frac{\eta^2}{\kappa^2}\left((T-t) - \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right)\right) - \frac{\eta^2}{2\kappa}\frac{1}{\kappa^2}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right)^2. \end{aligned}$$

[31] Vgl. Satz A8 im Anhang.

[32] Der Austausch der Integrationsgrenzen in der zweiten Zeile geht auf eine Anwendung der Regeln zur partiellen Integration zurück. Vgl. Nielsen (1999): S. 70ff.

Die Zerobondpreise lassen sich nun wie im Hull/White-Modell als Exponentialfunktionen in Abhängigkeit von $r(t)$ ausdrücken:

$$P(t,T) = \exp\left\{A(t,T) - r(t)B(t,T)\right\}, \tag{3.47}$$

mit den zeitabhängigen Funktionen

$$A(t,T) = \left(\frac{\eta^2}{\kappa^2} - \bar{r}\right)((T-t) - B(t,T)) - \frac{\eta^2}{4\kappa}B^2(t,T)$$

und

$$B(t,T) = \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right),$$

für alle Fälligkeitszeitpunkte T. Wie im Hull/White-Modell ist die durch Gleichung (3.47) bestimmte Zinsstrukturkurve

$$r(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t} = -\frac{A(t,T) - B(t,T)r(t)}{T-t}$$

eine lineare Funktionen des kurzfristigen Kassazinssatzes $r(t)$.[33]

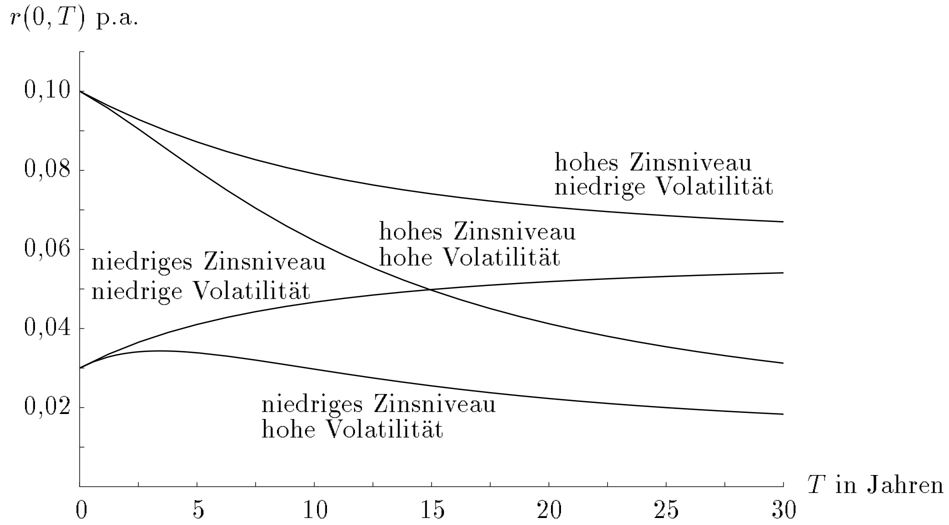

Abbildung 3.1: Zinsstrukturkurven im Vasicek-Modell

Abbildung 3.1 zeigt, dass das Vasicek-Modell geeignet ist, ein breites Spektrum von möglichen Verläufen der Zinsstrukturkurve abzubilden. Mit einer Anpassungsgeschwindigkeit $\kappa = 0,18$ und einem risikoadjustierten Mean-Reversion-Niveau $\bar{r} = 0,065$ ergeben sich für ein hohes Zinsniveau $r(0) = 0,1$ fallende Zinsstrukturkurven. Bei hoher

[33] Duffie (2001) bezeichnet Zinsstrukturmodelle, die diese Eigenschaft aufweisen, als „affine term-structure models". Vgl. Duffie (2001): S. 142.

Volatilität $\eta = 0,06$ verläuft die Zinsstrukturkurve steiler als bei niedriger Volatilität $\eta = 0,02$. Für ein niedriges Zinsniveau $r(0) = 0,03$ und eine niedrige Volatilität $\eta = 0,02$ verläuft die Zinsstrukturkurve steigend. Ein niedriges Zinsniveau führt in Verbindung mit einer hohen Volatilität $\eta = 0,06$ zu einem „buckligen" Verlauf der Zinsstrukturkurve, d.h. für kürzere Restlaufzeiten steigen die Kassazinssätze, um dann für Restlaufzeiten größer als 4 Jahre wieder zu fallen.[34]

Zum Abschluss dieses Kapitels soll ein kurzer Vergleich der Zinsstrukturmodelle von Vasicek und Hull/White erfolgen:

Aus Gleichung (3.47) geht hervor, dass sowohl die heutigen Zerobondpreise als auch die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der zukünftigen Zerobondpreise im Vasicek-Modell von dem durch $\bar{r}$ symbolisierten, risikoadjustierten Mean-Reversion-Niveau des kurzfristigen Kassazinssatzes abhängen. Da $\bar{r}$ den nicht unmittelbar am Anleihemarkt beobachtbaren Marktpreis für Risiko beinhaltet, ist diese Größe, verglichen mit anderen Parametern wie der Zinsvolatilität, schwierig abzuschätzen. Weiterhin stimmen die theoretischen Zerobondpreise im Zeitpunkt $t = 0$ nicht notwendigerweise mit den aktuellen, am Anleihemarkt beobachtbaren Zerobondpreisen überein. Diese Eigenschaften des Vasicek-Modells erweisen sich insbesondere bei der Bewertung von zustandsbedingten Ansprüchen als nachteilig. Allerdings können diese Probleme durch die so genannte Inversion der Zinsstrukturkurve gelöst werden.[35]

Im Hull/White-Modell sind weder die heutigen Zerobondpreise noch die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der zukünftigen Zerobondpreise in irgendeiner Form mit dem Marktpreis für Risiko verknüpft, wie Gleichung (3.27) zeigt. Auch stimmen die theoretischen Zerobondpreise im Zeitpunkt $t = 0$ immer mit den aktuellen, am Anleihemarkt beobachtbaren Zerobondpreisen überein. Dies wurde dadurch erreicht, dass die Zerobondpreise mittels der Entwicklung der Forwardrates unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ bestimmt wurden. Wie Satz HJM2 zeigt, hängt diese zum einen nicht vom Marktpreis für Risiko ab und berücksichtigt zum anderen die im Zeitpunkt $t = 0$ beobachtbare Forwardratekurve. Eine Inversion der Zinsstrukturkurve ist im Hull/White-Modell daher nicht nötig.[36] Hull/White (1990) zeigen, dass die resultierende Bewertungsgleichung (3.27) auch anhand der Dynamik des kurzfristigen Kassazinssatzes unter $\mathbb{Q}$ hergeleitet werden kann. Sie erreichen dies, indem sie von einem zeitabhängigen Mean-Reversion-Niveau des kurzfristigen Kassazinssatzes unter $\mathbb{Q}$ aus-

[34]Vgl. Nielsen (1999): S. 276 für ein ähnliches Beispiel.
[35]Vgl. Björk (1998): S. 254ff.
[36]Dies gilt für alle Zinsstrukturmodelle aus der Heath/Jarrow/Morton-Klasse.

gehen. Die entsprechende stochastische Differenzialgleichung geben Hull/White als

$$dr(t) = \kappa(a(t) - r(t))dt + \eta dW(t), \tag{3.48}$$

mit $\kappa, \eta > 0$ und

$$a(t) = f(0,T) + \frac{\eta^2}{2\kappa^2}\left(1 - e^{-2\kappa t}\right) + \frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial T}f(0,T),$$

vor. Die Berechnung des Erwartungswerts aus (3.41) unter Berücksichtigung des Prozesses aus (3.48) führt zu Gleichung (3.27) und damit zum selben Ergebnis wie die auf der Dynamik der Forwardrates basierende Formulierung à la Heath/Jarrow/Morton.[37]

Durch die Anwendung von Itôs Lemma auf (3.47) lässt sich analog zum Hull/White-Modell auch im Vasicek-Modell eine stochastische Differenzialgleichung für die Zerobondpreisentwicklung unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ bestimmen. Da $P(t,T)$ für alle Fälligkeitszeitpunkte T eine Funktion von t und $r(t)$ ist, ergibt sich mittels Itôs Lemma die stochastische Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} dP(t,T) &= (A_t(t,T) - r(t)B_t(t,T) - B(t,T)\kappa(\bar{r} - r(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2}B^2(t,T)\eta^2)P(t,T)dt - \eta B(t,T)P(t,T)dW(t), \end{aligned} \tag{3.49}$$

mit den partiellen Ableitungen

$$A_t(t,T) = \frac{\partial}{\partial t}A(t,T) \text{ und } B_t(t,T) = \frac{\partial}{\partial t}B(t,T). \tag{3.50}$$

Unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ muss definitionsgemäß die erwartete Momentanrendite eines Zerobonds dem kurzfristigen Kassazinssatz entsprechen, d.h. die Bedingung

$$r(t) = A_t(t,T) - r(t)B_t(t,T) - B(t,T)\kappa(\bar{r} - r(t)) + \frac{1}{2}B^2(t,T)\eta^2$$

muss in Gleichung (3.49) erfüllt sein. Die Zerobondpreisentwicklung genügt unter $\mathbb{Q}$ demzufolge der stochastischen Differenzialgleichung

$$dP(t,T) = r(t)P(t,T)dt - \eta B(t,T)P(t,T)dW(t). \tag{3.51}$$

[37] Vgl. Hull (2000): S. 574ff. Dieses Ergebnis lässt sich dahingehend verallgemeinern, dass Zinsstrukturmodelle, die auf der Dynamik des kurzfristigen Kassazinssatzes aufbauen, fast immer in ein auf der Dynamik der Forwardrates basierendes Heath/Jarrow/Morton-Modell „umformuliert“ werden können. Baxter (1997) zeigt, dass

$$E^{\mathbb{Q}}\left[\int_0^T |r(u)| \exp\left\{-\int_0^u r(s)ds\right\} du | \mathcal{F}(0)\right] < \infty$$

eine hinreichende Bedingung dafür ist. Vgl. Baxter (1997): S. 321.

Abgesehen vom Anfangswert, entspricht dies Gleichung (3.28) aus dem Hull/White-Modell. Die Volatilität eines Zerobonds mit Restlaufzeit $T-t$ ist somit auch im Vasicek-Modell durch $\eta B(t,T)$ gegeben.[38]

Die Zerobondpreisentwicklung unter dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ im Vasicek-Modell kann mittels des Theorems von Girsanov aus (3.51) abgeleitet werden. Die Preisentwicklung unter $\mathbb{P}$ ist nach der entsprechenden Ersetzung $dW(t) = d\hat{W}(t) - \lambda_r dt$ in (3.51) durch die stochastische Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} dP(t,T) &= r(t)P(t,T)dt - \eta B(t,T)P(t,T)(d\hat{W}(t) - \lambda_r dt) \\ &= (r(t) + \eta B(t,T)\lambda_r)P(t,T)dt - \eta B(t,T)P(t,T)d\hat{W}(t) \qquad (3.52) \end{aligned}$$

gegeben. Der Ausdruck $\eta B(t,T)\lambda_r$ gibt die erwartete momentane Risikoprämie eines Zerobonds mit Restlaufzeit $T-t$ unter dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ an. Die Volatilität entspricht $\eta B(t,T)$, was verdeutlicht, dass der Übergang auf das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{Q}$ die Volatilität des Zerobonds unverändert lässt. Weiterhin zeigt ein Vergleich von (3.52) und (3.9), dass sich das Vasicek-Modell in den Modellrahmen von Heath/Jarrow/Morton einbinden lässt. Neben der Spezifikation der Zerobondvolatilität, die der aus dem bereits vorgestellten Hull/White-Modell gleicht, ist das Vasicek-Modell insbesondere durch den konstanten Marktpreis für Risiko λ_r, der die erwartete momentane Risikoprämie eines Zerobonds unter dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ bestimmt, gekennzeichnet.

[38] Anders als die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zerobondpreise aus (3.47) hängt die stochastische Differenzialgleichung (3.51) nicht vom risikoadjustierten Mean-Reversion-Niveau des kurzfristigen Kassazinssatzes ab.

3.2 Dynamik der Preise riskanter Vermögensgegenstände

Amin/Jarrow (1992) erweitern den in Kapitel 3.1 beschriebenen Anleihemarkt, so dass neben fest verzinslichen Wertpapieren auch als Wertpapiere verbriefte, so genannte riskante Vermögensgegenstände auf dem Kapitalmarkt gehandelt werden.

3.2.1 Das Modell von Amin/Jarrow

Amin/Jarrow (1992) unterstellen, dass auch der um die riskanten Vermögensgegenstände erweiterte Kapitalmarkt vollkommen ist. Weiterhin wird angenommen, dass ein kontinuierlicher Handel in den Zerobonds sowie sämtlichen riskanten Vermögensgegenständen möglich ist. Die nicht beschränkte Indexmenge der verschiedenen auf dem Kapitalmarkt gehandelten riskanten Vermögensgegenstände sei $\mathcal{I}$, wobei $x \in \mathcal{I}$ ein beliebiges Element dieser Menge ist. Es werden $d - n$ weitere voneinander unabhängige Wiener-Prozesse, mit $n < d < \infty$, betrachtet. Diese Wiener-Prozesse stellen Störgrößen der Preisentwicklung der riskanten Vermögensgegenstände dar, die keine Auswirkungen auf die Entwicklung der verschiedenen Forwardrates aus Annahme AHJM1 haben. Dies schließt nicht aus, dass die n Wiener-Prozesse, welche die Entwicklung der verschiedenen Forwardrates als Störgröße beeinflussen, auch auf die Preisentwicklung der riskanten Vermögensgegenstände einwirken. Dadurch lässt sich eine (stochastische) Abhängigkeit zwischen der Zinsstrukturentwicklung und der Preisentwicklung der riskanten Vermögensgegenstände erzeugen.

Annahme AJ1 [Dynamik der Preise riskanter Vermögensgegenstände]. *Angenommen, durch $\{\hat{W}_i(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$, $i = 1, \dots, d < \infty$, sind voneinander unabhängige Wiener-Prozesse auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gegeben, wobei $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ die entsprechende Standardfiltration darstellt.*[39] *Die Preisentwicklung eines beliebigen riskanten Vermögensgegenstandes x lässt sich durch den Prozess $\{V(t, x) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$,*

[39]Für die Standardfiltration gilt

$$\mathcal{F}(t) = \sigma\left(\sigma(\{\hat{W}(s) : s \leq t\}) \cup \mathcal{N}_0\right), \text{ für alle } t \in [0, \mathcal{T}].$$

Dabei gibt $\hat{W}(s) = (\hat{W}_1(s), \dots, \hat{W}_d(s))$ den entsprechenden d-dimensionalen Wiener-Prozess und $\mathcal{N}_0$ die Nullmengen von $\mathcal{F}$ an.

mit

$$V(t,x) = V(0,x)\exp\left\{\int_0^t \left(\mu(s,x) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \sigma_i^2(s,x)\right) ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \sigma_i(s,x) d\hat{W}_i(s)\right\}, \tag{3.53}$$

beschreiben. Dabei sind $\mu(t,x)$ und $\sigma_i(t,x)$, mit $i = 1,\dots,d$, adaptiert und messbar. Es gilt weiterhin $\int_0^{\mathcal{T}} |\mu(t,x)|dt < \infty$ und $\int_0^{\mathcal{T}} \sigma_i^2(t,x)dt < \infty$, für alle $i = 1,\dots,d$, fast sicher. Als Anfangswert dienen die heute beobachtbaren Preise der riskanten Vermögensgegenstände, $\{V(0,x) : x \in \mathcal{I}\}$.[40]

Gleichung (3.53) ist die Lösung des stochastischen Differenzials

$$dV(t,x) = \mu(t,x)V(t,x)dt + \sum_{i=1}^d \sigma_i(t,x)V(t,x)d\hat{W}_i(t), \tag{3.54}$$

wie sich analog zu (3.12) mittels Itôs Lemma zeigen lässt. Der Ausdruck $\mu(t,x)$ wird wiederum als erwartete Momentanrendite des riskanten Vermögensgegenstandes x pro Zeiteinheit, definiert durch $R(t) = dV(t,x)/(V(t,x)dt)$, bezeichnet, $\sqrt{\sum_{i=1}^d \sigma_i^2(t,x)}$ gibt die Volatilität von x an.

Aus Annahme AJ1 kann unmittelbar der im Black/Scholes-Modell verwendete stochastische Prozess für die Kursentwicklung der dividendenlosen Aktie, die der zu bewertenden Option zu Grunde liegt, abgeleitet werden. Da im Black/Scholes-Modell keine Unsicherheit bezüglich der Entwicklung der (flachen) Zinsstrukturkurve existiert, entfallen die n Wiener-Prozesse, welche die Entwicklung der verschiedenen Forwardrates als Störgrößen beeinflussen. Die Kursentwicklung der Aktie wird ausschließlich von einem Wiener-Prozess, also einer (aktienspezifischen) Störgröße, beeinflusst, so dass $d = 1$ gilt. Weiterhin unterstellen Black/Scholes eine konstante erwartete Momentanrendite und eine konstante Volatilität. Es gilt demnach $\mu(s) = \mu$ und $\sigma_1(t) = \sigma$. Einsetzen in (3.53) bzw. (3.54) führt dann zu der von Black/Scholes für die Preisentwicklung der zu Grunde liegenden Aktie verwendeten geometrischen Brown'schen Bewegung, mit

$$V(t) = V(0)\exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\hat{W}(t)\right\} \tag{3.55}$$

bzw. dem stochastischen Differenzial

$$dV(t) = \mu V(t)dt + \sigma V(t)d\hat{W}(t). \tag{3.56}$$

[40] Vgl. Amin/Jarrow (1992): S. 219. Die hier verwendeten Regularitätsbedingungen gewährleisten wiederum, dass durch (3.53) ein Itô-Prozess beschrieben wird.

In Kapitel 3.1.1 wurden Heath/Jarrow/Morton (1992) folgend hinreichende Bedingungen für die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes auf dem Anleihemarkt aufgeführt. Die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes impliziert die Arbitragefreiheit des betrachteten Anleihemarkts. Dieses Ergebnis kann auf den um die riskanten Vermögensgegenstände erweiterten Kapitalmarkt übertragen werden.[41] Das äquivalente Martingalmaß ist jetzt definiert als ein Wahrscheinlichkeitsmaß, unter dem die Prozesse für die Entwicklung der mit dem Geldmarktkonto diskontierten Preise der Zerobonds und der riskanten Vermögensgegenstände Martingale sind. Der diskontierte Preis eines beliebigen riskanten Vermögensgegenstandes x, $Z_V(t,x) = V(t,x)/A(t)$, genügt unter dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$

$$\begin{aligned} Z_V(t,x) &= Z_V(0,x)\exp\left\{\int_0^t \left(\mu(s,x) - r(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \sigma_i^2(s,x)\right) ds \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{i=1}^d \int_0^t \sigma_i(s,x) d\hat{W}_i(s)\right\} \end{aligned} \tag{3.57}$$

als Lösung des stochastischen Differenzials

$$dZ_V(t,x) = (\mu(t,x) - r(s))\, Z_V(t,x)dt + \sum_{i=1}^d \sigma_i(t,x) Z_V(t,x) d\hat{W}_i(t). \tag{3.58}$$

Der nachfolgende Satz formuliert hinreichende Bedingungen für die Existenz eines zum subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ auf dem erweiterten Kapitalmarkt.

Satz AJ1 [Äquivalentes Martingalmaß bei Amin/Jarrow]. *Gegeben sei die Dynamik der Forwardrates aus Annahme HJM1 und die Preisdynamik der riskanten Vermögensgegenstände aus Annahme AJ1. Ein zum subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$ existiert für erweiterten Kapitalmarkt, wenn es „Marktpreise für Risiko“ $\lambda_i(t)$ gibt, die für alle $i = 1, \ldots, d$ die Bedingung $\int_0^t \lambda_i^2(s)ds < \infty$ fast sicher erfüllen, so dass der Prozess $\{\Lambda(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$, mit*

$$\Lambda(t) = \exp\left\{\sum_{i=1}^d \int_0^t \lambda_i(s) d\hat{W}_i(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \int_0^t \lambda_i^2(s)ds\right\}, \tag{3.59}$$

ein Martingal unter $\mathbb{P}$ ist, und für alle $t, T \geq 0$, mit $t \leq T$,

$$b(t,T) = -\sum_{i=1}^n a_i(t,T)\lambda_i(t) \tag{3.60}$$

[41] Dies wird in Kapitel 3.3.1.1 gezeigt.

und für alle $t \geq 0$ *und* x

$$\mu(t,x) - r(t) = -\sum_{i=1}^{d} \sigma_i(t,x)\lambda_i(t) \tag{3.61}$$

gilt.

Beweis: Im Beweis zu Satz HJM1 wurde bereits gezeigt, dass mit $d = n$ und (3.60) ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$ existiert, unter dem die mit dem Geldmarktkonto diskontierten Zerobondpreise die Martingaleigenschaft besitzen. Der Beweis für die riskanten Vermögensgegenstände unterscheidet sich kaum. Gemäß dem Theorem von Girsanov ist wiederum gewährleistet, dass ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ existiert, unter dem durch $dW_i(t) = d\hat{W}_i(t) - \lambda_i(t)d(t)$, $i = 1, \ldots, d$, voneinander unabhängige Wiener-Prozesse gegeben sind. Dabei ist $\{\Lambda(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ der zur Radon-Nikodym Ableitung

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}(\mathcal{T})} = \Lambda(\mathcal{T}) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{d}\int_0^{\mathcal{T}} \lambda_i(s)d\hat{W}_i(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\int_0^{\mathcal{T}} \lambda_i^2(s)ds\right\}$$

gehörende Dichteprozess, mit

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}(t)} = \Lambda(t).$$

Die diskontierte Preisentwicklung eines beliebigen riskanten Vermögensgegenstandes x unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ folgt nach der Ersetzung $d\hat{W}_i(t) = dW_i(t) + \lambda_i(t)d(t)$, $i = 1, \ldots, d$, in (3.58) dem stochastischen Differenzial

$$\begin{aligned} dZ_V(t,x) &= (\mu(t,x) - r(s))\, Z_V(t,x)dt + \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(t,x)Z_V(t,x)(dW_i(t) + \lambda_i(t)dt) \\ &= \left(\mu(t,x) - r(s) + \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(t,x)\lambda_i(t)\right) Z_V(t,x)dt + \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(t,x)Z_V(t,x)dW_i(t). \end{aligned}$$

Analog zum Beweis von Satz HJM1 ist der entsprechende Prozess ein Martingal, wenn die Driftfunktionen der stochastischen Differenzialgleichung den Wert Null annimmt, so dass sich

$$dZ_V(t,x) = \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(t,x)Z_V(t,x)dW_i(t) \tag{3.62}$$

ergibt.[42] Dies ist für alle $t \geq 0$ und x genau dann erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} & \mu(t,x) - r(t) + \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(t,x)\lambda_i(t) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \mu(t,x) - r(t) = -\sum_{i=1}^{d} \sigma_i(t,x)\lambda_i(t) \end{aligned}$$

gilt. Die Bedingungen (3.59), (3.60) und (3.61) sind hinreichend dafür, dass ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$ auch für den um die riskanten Vermögensgegenstände erweiterten Kapitalmarkt existiert.[43] □

Betrachtet man nun die Preisentwicklung eines riskanten Vermögensgegenstandes x aus Annahme AJ1 unter dem zu $\mathbb{P}$ äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$, ergibt unter Berücksichtigung der Bedingung (3.61) aus Satz AJ1 die stochastische Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} dV(t,x) &= \mu(t,x)V(t,x)dt + \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(t,x)V(t,x)(dW_i(t) + \lambda_i(t)dt) \\ &= \left(\mu(t,x) + \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(t,x)\lambda_i(t)\right) V(t,x)dt + \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(t,x)V(t,x)dW_i(t) \\ &= r(t)V(t,x)dt + \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(t,x)V(t,x)dW_i(t). \end{aligned} \tag{3.63}$$

Wie für die Zerobonds gilt auch bezüglich der riskanten Vermögensgegenstände, dass die erwartete Momentanrendite unter dem äquivalenten Martingalmaß gleich dem kurzfristigen Kassazinssatz ist. Die Lösung der stochastischen Differenzialgleichung (3.63) lautet

$$\begin{aligned} V(t,x) &= V(0,x)\exp\left\{ \int_0^t \left(r(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \sigma_i^2(s,x) \right) ds \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \sigma_i(s,x)d\hat{W}_i(s) \right\}. \end{aligned} \tag{3.64}$$

[42] Wie in (3.17) ist die Novikov-Bedingung

$$E^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\int_0^{\mathcal{T}} \sigma_i^2(t,x)dt\right\}\right] < \infty$$

hinreichend dafür, dass (3.62) ein Martingal beschreibt. Diese Bedingung sei auch hier erfüllt.

[43] Vgl. Amin/Jarrow (1992): S. 219ff.

3.2.2 Gauß'sche Mehr-Faktoren-Modelle

Ausgehend vom Amin/Jarrow-Modell lässt sich ein Gauß'sches Mehr-Faktoren-Modell wie folgt definieren:

Definition [Gauß'sches Mehr-Faktoren-Modell]. *Die Volatilitätskoeffizienten der Forwardrates, des kurzfristigen Kassazinssatzes und der logarithmierten Preise der Zerobonds und der riskanten Vermögensgegenstände seien ausschließlich zeitabhängige Funktionen. Ein Kapitalmarktmodell, das diese Voraussetzung erfüllt, wird Gauß'sches Mehr-Faktoren-Modell genannt.*

In einem Gauß'schen Mehr-Faktoren-Modell sind die Forwardrates und der kurzfristige Kassazinssatz unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ normalverteilt.[44] Betrachtet man die logarithmierten Preise der Zerobonds und eines beliebigen riskanten Vermögensgegenstandes x unter $\mathbb{Q}$, mit

$$\ln P(t,T) = \ln P(0,T) + \int_0^t \left(r(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2(s,T) \right) ds + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t a_i(s,T) dW_i(s)$$

und

$$\ln V(t,x) = \ln V(0,x) + \int_0^t \left(r(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \sigma_i^2(s,x) \right) ds + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \sigma_i(s,x) d\hat{W}_i(s),$$

zeigt sich, dass diese für ausschließlich zeitabhängige Volatilitätskoeffizienten ebenfalls normalverteilt sind.[45] Die Entwicklung der logarithmierten Preise der Zerobonds und der riskanten Vermögensgegenstände unter $\mathbb{Q}$ folgt somit einem Gauß'schen Prozess.

[44] Vgl. Kapitel 3.1.2.
[45] Vgl. Satz A8 im Anhang.

3.3 Bewertung zustandsbedingter Ansprüche

Satz AJ1 aus Kapitel 3.2 nennt hinreichende Bedingungen für die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes auf dem um die riskanten Vermögensgegenstände erweiterten Kapitalmarkt. Im Folgenden wird unterstellt, dass ein solches äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$ existiert. Es wird gezeigt, wie das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{Q}$ im Rahmen der Martingalmaß-Technik eingesetzt werden kann, um das Bewertungsproblem für zustandsbedingte Ansprüche zu lösen.

3.3.1 Die Martingalmaß-Technik

3.3.1.1 Selbstfinanzierende Handelsstrategien

Der Grundgedanke der Bewertung zustandsbedingter Ansprüche mittels der Martingalmaß-Technik beruht auf der Duplikation der entsprechenden Zahlungsströme durch selbstfinanzierende Handelsstrategien.[46]

Definition [Selbstfinanzierende Handelsstrategie]. *Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie ist eine Handelsstrategie aus risikoloser Anlage und Verschuldung über das Geldmarktkonto sowie aus Kauf und Verkauf von auf dem erweiterten Kapitalmarkt gehandelten Wertpapieren, die abgesehen von der Anschaffungsauszahlung und des Einzahlungsüberschusses bei Liquidation im Zeitablauf keine weiteren Ein- und Auszahlungen erzeugt.*

Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie wird charakterisiert durch einen d-dimensionalen Prozess $\{\phi(t) : t \in [0,T]\}$, mit $\phi(t) = (h_0(t), \ldots, h_d(t))$. Die entsprechenden Komponenten sind adaptiert und messbar und erfüllen $\int_0^T |h_0(t)|dt < \infty$ sowie $\int_0^T h_j^2(t)dt < \infty$, für alle $j = 1, \ldots, d$, fast sicher.[47] Dabei ist $h_0(t)$ der im Zeitpunkt t über das Geldmarktkonto risikolos angelegte oder aufgenommene Betrag, $h_j(t)$ gibt die im Zeitpunkt t von Wertpapier j, $j = 1, \ldots, d$, gehaltenen Stücke an. Der Zeitpunkt T symbolisiert den Liquidationszeitpunkt. Zur Vereinfachung der Notation werden die Prozesse für die Preisentwicklung der auf dem erweiterten Kapitalmarkt gehandelten

[46] Die Ausführungen in Kapitel 3.3.1 orientieren sich an Harrison/Pliska (1981): S. 237ff., wobei der dort betrachtete allgemeinere Modellrahmen den hier vorgestellten Modellrahmen im Wesentlichen abdeckt.

[47] Zwischen der von Harrison/Pliska (1981) unterstellten Vorhersehbarkeit und der hier vorausgesetzten Adaptiertheit und Messbarkeit der Komponenten einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie besteht in diesem Modellrahmen kein signifikanter Unterschied. Dies liegt darin begründet, dass die zu Grunde liegende Filtration die Standardfiltration eines mehrdimensionalen Wiener-Prozesses ist. Vgl. Elliot/Kopp (1998): S. 153 oder Nielsen (1999): S. 44ff.

Wertpapiere in allgemeiner Form angegeben. Der Prozess für die Preisentwicklung von Wertpapier j, $\{X_j(t) : t \in [0,T]\}$, $j = 1, \ldots, d$, wird durch die stochastische Differenzialgleichung

$$dX_j(t) = v_j(t)X_j(t)dt + \sum_{i=1}^{d} H_{ji}(t)X_i(t)dW_i(t) \tag{3.65}$$

beschrieben. Der Term $v_j(t)$ symbolisiert die erwartete Momentanrendite von Wertpapier j. Die entsprechende Volatilität ist definiert als $\sqrt{\sum_{i=1}^{d} H_{ji}^2(t)}$. Je nachdem, ob Wertpapier j ein Zerobond oder ein riskanter Vermögensgegenstand ist, gilt entweder (3.9) oder (3.54). Die Marktwertentwicklung einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie lässt sich durch einen Prozess $\{S(t) : t \in [0,T]\}$, mit

$$\begin{aligned} S(t) &= h_0(t)A(t) + \sum_{j=1}^{d} h_j(t)X_j(t) \\ &= S(0) + \int_0^t h_0(s)dA(s) + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t h_j(s)dX_j(s) \end{aligned} \tag{3.66}$$

und $S(0) = h_0(0)A(0) + \sum_{j=1}^{d} h_j(0)X_j(0)$ darstellen. In Differenzialschreibweise lautet (3.66)

$$dS(t) = h_0(t)dA(t) + \sum_{j=1}^{d} h_j(t)dX_j(t). \tag{3.67}$$

Die Gleichungen (3.66) und (3.67) sind im Sinne einer Definition zu verstehen und führen dazu, dass die Marktwertzuwächse der Handelsstrategie ausschließlich auf kontinuierliche Umschichtungen der Bestandteile ohne Zuführung zusätzlicher Mittel zurückgehen.[48] Für spätere Anwendungen bleibt festzuhalten, dass eine Handelsstrategie genau dann selbstfinanzierend ist, wenn die mit dem Geldmarktkonto diskontierte Marktwertentwicklung $Z_S(t) = A^{-1}(t)S(t)$ einem Prozess $\{Z_S(t) : t \in [0,T]\}$ folgt, für den

$$Z_S(t) = S(0) + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t h_j(s)dZ_j(s) \tag{3.68}$$

gilt.[49] Der Prozess $\{Z_j(t) : t \in [0,T]\}$, mit $Z_j(t) = A^{-1}(t)X_j(t)$, als diskontierte Preisentwicklung von Wertpapier j wird durch das stochastische Differenzial

$$dZ_j(t) = (v_j(t) - r(t))Z_j(t)dt + \sum_{i=1}^{d} H_{ji}(t)Z_j(t)dW_i(t) \tag{3.69}$$

[48] Dies wird deutlich, wenn man die Gleichungen als Grenzfall einer Handelsstrategie mit diskreten Umschichtungen interpretiert. Vgl. Björk (1998): S. 69ff.

[49] Diese alternative Charakterisierung der Selbstfinanzierungseigenschaft einer Handelsstrategie folgt aus einer Anwendung von Itôs Lemma. Vgl. Harrison/Pliska (1981): S. 238.

beschrieben, wobei $v_j(t) - r(t)$ die erwartete momentane Risikoprämie von Wertpapier j angibt. In Differenzialschreibweise lautet (3.68)

$$dZ_S(t) = \sum_{j=1}^{d} h_j(t) dZ_j(t). \tag{3.70}$$

Die Menge der möglichen selbstfinanzierenden Handelsstrategien wird im Folgenden weiter beschränkt, indem nur zulässige selbstfinanzierende Handelsstrategien betrachtet werden.

Definition [Zulässige selbstfinanzierende Handelsstrategie]. *Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie wird als zulässig bezeichnet, wenn der Prozess für die mit dem Geldmarktkonto diskontierte Marktwertentwicklung unter dem äquivalenten Martingalmaß* $\mathbb{Q}$ *einem Martingal folgt, d.h. die Gleichung*

$$Z_S(t) = E^{\mathbb{Q}}\left[Z_S(u)|\mathcal{F}(t)\right] \tag{3.71}$$

gilt für alle $t \leq u \leq T$.

Die Beschränkung auf zulässige selbstfinanzierende Handelsstrategien hat den Vorteil, dass die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ eine hinreichende Bedingung für die Arbitragefreiheit des betrachteten Kapitalmarkts darstellt.[50] Dieses Resultat, auf das schon in Kapitel 3.1.1 und 3.2.1 hingewiesen wurde, folgt unmittelbar aus der Definition einer Arbitragemöglichkeit als selbstfinanzierende Handelsstrategie mit $S(0) = 0, \mathbb{Q}\{S(T) \geq 0\} = 1$ und $\mathbb{Q}\{S(T) > 0\} > 0$, wobei die letzten beiden Bedingungen auf Grund der gleichen Nullmengen nicht nur unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$, sondern auch unter dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ gelten. Für eine zulässige selbstfinanzierende Handelsstrategie, die die letzten beiden Bedingungen erfüllt, gilt zum einen $E^{\mathbb{Q}}[S(T)] > 0 \Rightarrow E^{\mathbb{Q}}[Z_S(T)] > 0$, da der Diskontierungsfaktor $A^{-1}(T)$ strikt positiv ist. Zum anderen ist wegen $S(0) = Z_V(0) = E^{\mathbb{Q}}[Z_S(T)] > 0$ der heutige Marktwert strikt positiv, was der Bedingung $S(0) = 0$ widerspricht. Eine zulässige selbstfinanzierende Handelsstrategie kann somit keine gewinnbringende Arbitragemöglichkeit erzeugen.

3.3.1.2 Herleitung der Bewertungsgleichung

Ein zustandsbedingter Anspruch, der mittels Martingalmaß-Technik zu bewerten ist, soll die folgenden Bedingungen erfüllen:

[50] Vgl. Harrison/Pliska (1981): S. 239f. Aus der stochastischen Differenzialgleichung (3.70) ist zu ersehen, dass eine selbstfinanzierende Handelsstrategie zulässig ist, wenn die Komponenten h_j, $j = 1, \ldots, d$, beschränkt sind.

Annahme MM1 [Zustandsbedingter Anspruch].[51] *Sei X ein im Zeitpunkt T, $T \in [0, \mathcal{T}]$, fälliger zustandsbedingter Anspruch, der auf dem erweiterten Kapitalmarkt gehandelt wird. Es gilt:*

1. *Der mit dem Geldmarktkonto diskontierte zustandsbedingte Anspruch, $A^{-1}(T)X$, ist eine $\mathcal{F}(T)$-messbare und integrierbare Zufallsvariable, mit $E^{\mathbb{Q}}\left[|A^{-1}(T)X|\right] < \infty$.*

2. *X ist „erreichbar“. Erreichbarkeit bedeutet, dass X ein redundantes Wertpapier ist und durch eine selbstfinanzierende Handelsstrategie dupliziert werden kann. Eine solche selbstfinanzierende Handelsstrategie wird als Duplikationsportefeuille bezeichnet. Bei Fälligkeit von X im Zeitpunkt T muss demzufolge fast sicher die Bedingung*

$$S(T) = X \tag{3.72}$$

erfüllt sein, wobei $S(T)$ den Marktwert des Duplikationsportefeuilles in diesem Zeitpunkt angibt.

Aus ökonomischer Sicht sind der zustandsbedingte Anspruch und das Duplikationsportefeuille „gleichwertig“, d.h. kein Marktteilnehmer würde den Besitz des einen dem des anderen vorziehen.[52] Da X im Fälligkeitszeitpunkt T definitionsgemäß mit dem Marktwert des Duplikationsportefeuilles übereinstimmt, ist eine gewinnbringende Arbitrage durch Handel des zustandsbedingten Anspruchs und des Duplikationsportefeuilles genau dann ausgeschlossen, wenn der Preis des zustandsbedingten Anspruchs jederzeit dem Marktwert des Duplikationsportefeuilles entspricht. Gegeben die Bedingung (3.71) lässt sich der Marktwert des Duplikationsportefeuilles darstellen als

$$S(t) = A(t)Z_S(t) = E^{\mathbb{Q}}\left[A(t)Z_S(T)|\mathcal{F}(t)\right] = E^{\mathbb{Q}}\left[A^{-1}(T-t)S(T)|\mathcal{F}(t)\right], \tag{3.73}$$

für alle $t \in [0, T]$, mit $A^{-1}(T-t) = A^{-1}(T)A(t)$. Betrachtet man den Prozess $\{\pi(t, X) : t \in [0, T]\}$ für die Preisentwicklung des zustandsbedingten Anspruchs X, ergibt sich unter Verwendung von (3.73) in Verbindung mit (3.72) die Arbitragefreiheitsbedingung

$$S(t) = E^{\mathbb{Q}}\left[A^{-1}(T-t)S(T)|\mathcal{F}(t)\right] = E^{\mathbb{Q}}\left[A^{-1}(T-t)X|\mathcal{F}(t)\right] = \pi(t, X), \tag{3.74}$$

[51] Vgl. Harrison/Pliska (1981): S. 239f.

[52] Dies verdeutlicht den partialanalytischen Charakter des hier vorgestellten Bewertungsansatzes, d.h. Angebot und Nachfrage eines redundanten Wertpapiers im Kapitalmarktgleichgewicht werden nicht modelliert.

für alle $t \in [0, T]$. Existieren mehrere Duplikationsportefeuilles für X, müssen diese die gleiche Marktwertentwicklung aufweisen, um Arbitragemöglichkeiten weiterhin auszuschließen. Dies führt unmittelbar zu folgendem Satz:

Satz MM1 [Martingalmaß-Technik]. *Angenommen, für den erweiterten Kapitalmarkt existiert ein äquivalentes Martingalmaß* $\mathbb{Q}$. *Der erweiterte Kapitalmarkt ist genau dann arbitragefrei, wenn der Preis eines zustandsbedingten Anspruchs* X, *der die Bedingungen aus Annahme MM1 erfüllt, durch*

$$\pi(t, X) = E^{\mathbb{Q}}\left[A^{-1}(T-t)X|\mathcal{F}(t)\right], \tag{3.75}$$

für alle $t \in [0, T]$, *gegeben ist.*

Beweis: Wie bereits in Kapitel 3.3.1.1 gezeigt wurde, impliziert die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes für den erweiterten Kapitalmarkt, dass unter Einbeziehung des Geldmarktkontos, der Zerobonds und der riskanten Vermögensgegenstände keine (zulässige) selbstfinanzierende Handelsstrategie konstruiert werden kann, die eine Arbitragemöglichkeit darstellt. Die obigen Ausführungen zeigen, dass die Bewertung eines erreichbaren zustandsbedingten Anspruchs X gemäß (3.75) notwendig und hinreichend dafür ist, dass der erweiterte Kapitalmarkt arbitragefrei bleibt. □

Satz MM1 sagt aus, dass der arbitragefreie Preis eines erreichbaren zustandsbedingten Anspruchs X dem Erwartungswert des mit dem Geldmarktkonto diskontierten Zahlungsstroms, berechnet unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$, entspricht. Dabei ist ausgehend von dem durch $\mathcal{F}(t)$ symbolisierten Informationsstand im Zeitpunkt t sowohl X als auch der entsprechende Diskontierungsfaktor $A^{-1}(T-t)$ unsicher. X wird durch die Preisentwicklung der zu Grunde liegenden Wertpapiere bis zum Fälligkeitszeitpunkt bestimmt, $A^{-1}(T-t)$ wiederum hängt von der Entwicklung des kurzfristigen Kassazinssatzes ab. Zur Berechnung des Erwartungswerts aus Gleichung (3.75) muss die gemeinsame (bedingte) Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und $A^{-1}(T-t)$ unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ bekannt sein. Mathematisch gesehen ist im Rahmen der Erwartungswertbildung die Dichtefunktion der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung unter $\mathbb{Q}$ zu integrieren, was im Allgemeinen kein einfaches Unterfangen ist. Wesentlich vereinfacht wird die Berechnung des Erwartungswerts aus (3.75) durch eine Vernachlässigung des Zinsänderungsrisikos. So unterstellen Black/Scholes (1973) in ihrer grundlegenden Arbeit zur Bewertung von europäischen Aktienoptionen, dass die im Ausgangszeitpunkt flach verlaufende Zinsstrukturkurve bis zur Fälligkeit der Option keine Änderungen erfährt. Bezogen auf den Bewertungszusammenhang aus (3.75) bedeutet dies, dass der Diskontierungsfaktor, der jetzt durch $A^{-1}(T-t) = e^{-r(T-t)}$

gegeben ist, keine Zufallsvariable darstellt und aus dem Erwartungswertoperator herausgezogen werden kann. Der arbitragefreie Preis des zustandsbedingten Anspruchs X ist dann durch

$$\pi(t, X) = e^{-r(T-t)} E^{\mathbb{Q}} \left[X | \mathcal{F}(t) \right], \tag{3.76}$$

für alle $t \in [0, T]$, gegeben, so dass lediglich die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ bekannt sein muss.

3.3.1.3 Vollständigkeit des Kapitalmarkts

Die Bewertung des zustandsbedingten Anspruchs X mittels der Martingalmaß-Technik setzt voraus, dass X erreichbar ist, also durch eine selbstfinanzierende Handelsstrategie dupliziert werden kann. Die Erreichbarkeit eines zustandsbedingten Anspruchs ist eng verknüpft mit dem Konzept eines vollständigen Kapitalmarkts. Ein Kapitalmarkt wird als vollständig bezeichnet, wenn jeder zustandsbedingte Anspruch erreichbar ist. Die Vollständigkeit des Kapitalmarkts erweist sich als vorteilhaft, da zustandsbedingte Ansprüche mittels der Martingalmaß-Technik bewertet werden können, ohne die Existenz eines Duplikationsportefeuilles im Einzelfall nachweisen zu müssen.

Harrison/Pliska (1981) liefern ein in diesem Zusammenhang wichtiges Resultat. Sie zeigen in einem allgemeinen Modellrahmen, dass die Existenz eines eindeutigen äquivalenten Martingalmaßes die Vollständigkeit des betrachteten Kapitalmarkts gewährleistet.[53] Ein vergleichbares Ergebnis lässt sich auch für den erweiterten Kapitalmarkt ableiten. Dazu werden zunächst n Zerobonds mit den Fälligkeitszeitpunkten T_j, $j = 1, \ldots, n$ und $0 < T_1 < \ldots < T_n \leq \mathcal{T}$, sowie $d - n$ riskante Vermögensgegenstände, indexiert mit x_k, $k = n+1, \ldots, d-n$, als „Benchmark"-Wertpapiere festgelegt.[54] Der d-dimensionale Spaltenvektor der erwarteten momentanen Risikoprämien der Benchmark-Wertpapiere lässt sich unter Verwendung der Gleichungen (3.9) und (3.54) durch

$$v(t) - r(t)\mathbf{1} = \begin{pmatrix} b(t, T_1) \\ \vdots \\ b(t, T_n) \\ \mu(t, x_{n+1}) - r(t) \\ \vdots \\ \mu(t, x_{d-n}) - r(t) \end{pmatrix}$$

[53] In ihrem 83er Artikel beweisen Harrison/Pliska die Äquivalenz dieser beiden Aussagen. Vgl. Harrison/Pliska (1983): S. 314.

[54] Vgl. auch Amin/Jarrow (1992): S. 220ff.

darstellen. Dabei gibt $v(t)$ den d-dimensionalen Spaltenvektor der erwarteten Momentanrenditen der Benchmark-Wertpapiere und $\mathbf{1}$ einen d-dimensionalen, nur aus Einsen bestehenden Spaltenvektor an. Die entsprechende $d \times d$-Volatilitätsmatrix wird definiert als

$$H(t) = \begin{pmatrix} a_1(t,T_1) & \dots & a_n(t,T_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1(t,T_n) & \dots & a_n(t,T_n) & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_1(t,x_{n+1}) & \dots & \sigma_n(t,x_{n+1}) & \sigma_{n+1}(t,x_{n+1}) & \dots & \sigma_d(t,x_{n+1}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_1(t,x_{d-n}) & \dots & \sigma_n(t,x_{d-n}) & \sigma_{n+1}(t,x_{d-n}) & \dots & \sigma_d(t,x_{d-n}) \end{pmatrix}.$$

Die Invertierbarkeit der Matrix $H(t)$ vorausgesetzt, existiert ein d-dimensionalen Spaltenvektor $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_d(t))$, der sich als Lösung aus

$$v(t) - r(t)\mathbf{1} = -H(t)\lambda(t)$$

ergibt. Die einzelnen Komponenten von $\lambda(t)$ sind durch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} b(t,T_j) &= -\sum_{i=1}^{n} a_i(t,T_j)\lambda_i(t), \\ \mu(t,x_k) - r(t) &= -\sum_{i=1}^{d} \sigma_i(t,x_k)\lambda_i(t), \end{aligned}$$

mit $j = 1, \dots, n$ und $k = n+1, \dots, d-n$, eindeutig bestimmt. Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems liefert eindeutige Marktpreise für Risiko, die gemäß Satz AJ1 ein eindeutiges, zum subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$ bestimmen, unter dem der Prozess für die diskontierte Preisentwicklung der Benchmark-Wertpapiere einem Martingal folgt. In verallgemeinerter Form lässt sich die diskontierte Preisentwicklung der Benchmark-Wertpapiere unter $\mathbb{Q}$ durch das stochastische Differenzial

$$dZ_j(t) = Z_j(t) \sum_{i=1}^{d} H_{ji}(t) dW_i(t), \tag{3.77}$$

mit $j = 1, \dots, d$ und $H_{ji}(t)$ als Element der Volatilitätsmatrix $H(t)$, beschreiben. Da $\mathbb{Q}$ ein äquivalentes Martingalmaß für den gesamten erweiterten Kapitalmarkt sein soll, d.h. die Preise aller dort gehandelten Wertpapiere sollen die Martingaleigenschaft unter $\mathbb{Q}$ besitzen, sind die erwarteten momentanen Risikoprämien der Nicht-Benchmark-Wertpapiere durch die Bedingungen (3.60) und (3.61) aus Satz AJ1 ebenfalls festgelegt.

Gegeben die d Benchmark-Wertpapiere, gewährleistet die Invertierbarkeit der Volatilitätsmatrix nicht nur die Existenz eines eindeutigen äquivalenten Martingalmaßes, sondern auch, dass jeder zustandsbedingte Anspruch, der auf dem erweiterten Kapitalmarkt gehandelt wird, erreichbar ist.[55] Um dies nachzuweisen, wird wiederum ein im Zeitpunkt T, $T \in [0, \mathcal{T}]$, fälliger zustandsbedingter Anspruch X betrachtet. Es wird unterstellt, dass der mit dem Geldmarktkonto diskontierte zustandsbedingte Anspruch $\mathcal{F}(T)$-messbar und quadrat-integrierbar, mit $E^{\mathbb{Q}}\left[(A^{-1}(T)X)^2\right] < \infty$, ist.[56] Gemäß dem Darstellungssatz für Martingale[57] besitzt ein aus dem diskontierten zustandsbedingten Anspruch gewonnenes Martingal

$$M(t) = E^{\mathbb{Q}}\left[A^{-1}(T)X|\mathcal{F}(t)\right] \tag{3.78}$$

die stochastische Integraldarstellung

$$M(t) = M(0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \zeta_i(s)dW_i(s),$$

für alle $t \in [0, T]$ und mit eindeutig bestimmten $\zeta_i(t)$, $i = 1, \ldots, d$. In differentieller Schreibweise ergibt sich

$$dM(t) = \sum_{i=1}^{d} \zeta_i(t)dW_i(t).$$

Dies kann unter Verwendung von (3.77) umgeformt werden in

$$dM(t) = \sum_{j=1}^{d} h_j(t)dZ_j(t), \tag{3.79}$$

wobei sich $h_1(t), \ldots, h_d(t)$ für alle $t \in [0, T]$ auf Grund der vorausgesetzten Invertierbarkeit der Volatilitätsmatrix $H(t)$ als eindeutige Lösung des Gleichungssystems

$$\sum_{j=1}^{d} h_j(t)Z_j(t)H_{ji}(t) = \zeta_i(t), \quad i = 1, \ldots, d, \tag{3.80}$$

bestimmen lässt. Ein Vergleich mit der stochastischen Differenzialgleichung (3.68) zeigt, dass (3.79) die diskontierte Marktwertentwicklung einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie beschreibt. Dabei sind die $h_j(t)$, $j = 1, \ldots, d$, als im Zeitpunkt t gehaltene

[55] Vgl. Björk (1997): S. 96ff. für ein entsprechendes Ergebnis im Heath/Jarrow/Morton-Modell.

[56] Dies ist eine leichte Modifikation des ersten Bedingung aus Annahme MM1, die rein formaler Natur ist.

[57] Vgl. Satz A7 im Anhang.

Stücke von Wertpapier j durch (3.80) eindeutig bestimmt. Mit einem im Zeitpunkt t risikolos angelegten oder aufgenommenen Betrag

$$h_0(t) = M(t) - \sum_{j=1}^{d} h_j(t) A^{-1}(t) X_j(t) \tag{3.81}$$

ist der Marktwert der resultierenden selbstfinanzierenden Handelsstrategie unter Verwendung von (3.66) durch

$$S(t) = \left(M(t) - \sum_{j=1}^{d} h_j(t) A^{-1}(t) X_j(t) \right) A(t) + \sum_{j=1}^{d} h_j(t) X_j(t) = A(t) M(t)$$

gegeben. Die Anschaffungsauszahlung beläuft sich auf $S(0) = M(0)$. Im Zeitpunkt T gilt

$$S(T) = A(T)M(T) = A(T)E^{\mathbb{Q}}\left[A^{-1}(T)X|\mathcal{F}(T)\right] = E^{\mathbb{Q}}\left[X|\mathcal{F}(T)\right] = X,$$

so dass die angegebene selbstfinanzierende Handelsstrategie den zustandsbedingten Anspruch X dupliziert. Zusammenfassend bleibt das folgende Resultat festzuhalten: Vorausgesetzt die entsprechende Volatilitätsmatrix ist invertierbar, lässt sich durch die oben beschriebene Auswahl der Benchmark-Wertpapiere ein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß für den erweiterten Kapitalmarkt bestimmen. Die Benchmark-Wertpapiere „spannen“ den Kapitalmarkt auf, so dass jeder beliebige zustandsbedingte Anspruch durch eine selbstfinanzierende Handelsstrategie aus risikoloser Anlage und Verschuldung über das Geldmarktkonto sowie aus Kauf und Verkauf der Benchmark-Wertpapiere dupliziert werden kann. Das entsprechende Duplikationsportefeuille ist durch (3.80) und (3.81) eindeutig bestimmt. Jeder zustandsbedingte Anspruch, der auf dem erweiterten Kapitalmarkt gehandelt wird, ist somit erreichbar und kann mittels der Martingalmaß-Technik bewertet werden.

3.3.2 Anpassungen der Martingalmaß-Technik

3.3.2.1 Wechsel des Numéraires und Forwardmaße

Gegenstand des Kapitels 3.3.1 war die Bewertung zustandsbedingter Ansprüche mittels der Martingalmaß-Technik. Das äquivalente Martingalmaß für den erweiterten Kapitalmarkt ist dadurch gekennzeichnet, dass die mit dem Geldmarktkonto diskontierten Preise der Zerobonds, der riskanten Vermögensgegenstände und der zustandsbedingten Ansprüche die Martingaleigenschaft aufweisen. Das Geldmarktkonto kann als

Numéraire der Bewertung interpretiert werden, d.h. der Preis eines Zerobonds, der Preis eines riskanten Vermögensgegenstandes und der Preis eines zustandsbedingten Anspruchs X werden als $P(t,T)/A(t)$, $V(t,x)/A(t)$ und $\pi(t,X)/A(t)$ Einheiten des Geldmarktkontos angegeben. Viele finanzwirtschaftliche Bewertungsprobleme lassen sich vereinfachen, wenn statt des Geldmarktkontos ein anderes Numéraire herangezogen wird. Bereits Merton (1973) bediente sich in seinem grundlegenden Aufsatz zur Bewertung von Aktienoptionen eines solchen Numéraire-Wechsels. Verallgemeinert wurde diese Technik von Geman/El Karoui/Rochet (1995). Sie definieren ein Numéraire allgemein als ein Wertpapier, dessen Preisentwicklung durch einen strikt positiven stochastischen Prozess bestimmt wird, und zeigen, dass die Wahl des Numéraires in Abhängigkeit vom betrachteten Bewertungsproblem getroffen werden kann. Auf dem erweiterten Kapitalmarkt sind neben dem Prozess für die Entwicklung des Geldmarktkontos die Prozesse für die Preisentwicklung der Zerobonds und der riskanten Vermögensgegenstände strikt positiv. Zerobonds und riskante Vermögensgegenstände kommen damit als Kandidaten für einen Numéraire-Wechsel in Frage.

Merton (1973), Jamshidian (1989) und Geman et al. (1995) zeigen, dass die Auswahl von Zerobonds als Numéraire die Bewertung von zustandsbedingten Ansprüchen vereinfacht, wenn das Zinsänderungsrisiko zu berücksichtigen ist. Ein Numéraire-Wechsel auf Zerobonds bedeutet, dass zur Bewertung von zustandsbedingten Ansprüchen statt der aktuellen Preise, sprich der Kassakurse, die Terminkurse der zu Grunde liegenden Wertpapiere herangezogen werden, also ein Übergang vom Kassa- auf den Terminmarkt erfolgt. Diese Vorgehensweise wird im Anschluss an die Definition des Begriffs Terminkurs verdeutlicht.

Definition [Terminkurs]. *Sei $F_Y(t,T)$ der bei Abschluss eines Termingeschäfts im Zeitpunkt t zwischen dem Terminkäufer und dem Terminverkäufer vereinbarte Terminkurs eines Basiswerts Y zum Liefertermin T, wobei $t \leq T$, $T \in [0,\mathcal{T}]$, gilt.*[58] *Die Erfüllung des Termingeschäfts erfolge im Zeitpunkt T durch Barausgleich, so dass der Einzahlungsüberschuss des Terminkäufers aus dem Termingeschäft durch*

$$G_Y(T) = Y(T) - F_Y(t,T),$$

der des Terminverkäufers durch

$$-G_Y(T) = -Y(T) + F_Y(t,T)$$

[58] Der Begriff Termingeschäft wird im Rahmen dieser Arbeit verkürzend für Terminfixgeschäft verwendet.

gegeben ist. $Y(T)$ kennzeichnet den Kassakurs des Basiswerts in T. Im Abschlusszeitpunkt t erzeugt das Termingeschäft einen Einzahlungsüberschuss von Null. Fallen Abschlusszeitpunkt und Liefertermin T zusammen, gilt $F_Y(T,T) = Y(T)$.[59]

Angenommen, der Basiswert eines Termingeschäfts sei ein im Zeitpunkt T fälliger zustandsbedingter Anspruch X. Mittels der Martingalmaß-Technik lässt sich der arbitragefreie Terminkurs von X zum Liefertermin T bestimmen.

Satz T1 [Eigenschaften des Terminkurses]. *Für den Terminkurs eines im Zeitpunkt T, $T \in [0, \mathcal{T}]$, fälligen zustandsbedingtes Anspruchs X zum Liefertermin T gilt*

$$F_X(t,T) = \frac{\pi(t,X)}{P(t,T)}, \tag{3.82}$$

für alle Abschlusszeitpunkte $t \in [0,T]$, und mit $\pi(t,X)$ als Kassakurs von X in t.

Beweis: Da Termingeschäfte im Abschlusszeitpunkt einen Einzahlungsüberschuss von Null erzeugen, gilt unter Verwendung der Martingalmaß-Technik

$$G_X(t) = E^{\mathbb{Q}}\left[A^{-1}(T-t)(X - F_X(t,T))|\mathcal{F}(t)\right] = 0. \tag{3.83}$$

Gleichung (3.83) sagt aus, dass der erwartete, mit dem Geldmarktkonto auf den Abschlusszeitpunkt abgezinste Einzahlungsüberschuss des Terminkäufers aus dem Termingeschäft in T unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ Null beträgt, und kann umgeformt werden zu

$$\begin{aligned}
& E^{\mathbb{Q}}\left[A^{-1}(T-t)X|\mathcal{F}(t)\right] - E^{\mathbb{Q}}\left[A^{-1}(T-t)F_X(t,T)|\mathcal{F}(t)\right] = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & E^{\mathbb{Q}}\left[A^{-1}(T-t)X|\mathcal{F}(t)\right] - F_X(t,T)E^{\mathbb{Q}}\left[A^{-1}(T-t)|\mathcal{F}(t)\right] = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & F_X(t,T) = \frac{E^{\mathbb{Q}}\left[A^{-1}(T-t)X|\mathcal{F}(t)\right]}{E^{\mathbb{Q}}\left[A^{-1}(T-t)|\mathcal{F}(t)\right]} \\
\Leftrightarrow\quad & F_X(t,T) = \frac{\pi(t,X)}{P(t,T)}.^{60}
\end{aligned} \tag{3.84}$$

□

Der Zusammenhang (3.82) aus Satz T1 gewährleistet, dass bei dem vereinbarte Terminkurs keine Arbitragemöglichkeiten existieren. So ließe sich bei

$$F_X(t,T) > \frac{\pi(t,X)}{P(t,T)} \tag{3.85}$$

[59] Die im Rahmen dieser Definition getroffenen Annahmen bezüglich der Liefermenge und der Erfüllung des Termingeschäfts stellen nur eine Möglichkeit der Vertragsgestaltung eines Termingeschäfts dar. Ein Termingeschäft, das bei Fälligkeit durch Barausgleich (oder Lieferung des Basiswerts) abgerechnet wird, wird als Forward bezeichnet. Bei den als Futures bezeichneten börsengehandelten Kontrakten erfolgt die Abrechnung in der Regel am Ende eines Handelstages. „Terminkurs von Y“ steht in dieser Arbeit daher verkürzend für „Terminkurs eines Forwards auf Y“.

[60] Vgl. Elliot/Kopp (1998) S. 213ff.

durch den kreditfinanzierten Kauf und gleichzeitigen Terminverkauf von X, ein Arbitragegewinn erzielen. Diese Strategie erzeugt bei Abschluss des Termingeschäfts einen Einzahlungsüberschuss von

$$\pi(t, X) - \pi(t, X) + 0 = 0 \tag{3.86}$$

und bei Fälligkeit einen Einzahlungsüberschuss von

$$-\frac{\pi(t, X)}{P(t, T)} + X - X + F_X(t, T) > 0. \tag{3.87}$$

Für ein umgekehrtes Ungleichheitszeichen in (3.85) führt der Verkauf und gleichzeitige Terminkauf von X zum gleichen Arbitragegewinn.

Generell kommen alle auf einem Kapitalmarkt gehandelten Wertpapiere als Basiswerte eines Termingeschäfts in Frage. Satz T1 gilt daher auf dem erweiterten Kapitalmarkt sowohl für Zerobonds unterschiedlicher Laufzeiten als auch für riskante Vermögensgegenstände, vorausgesetzt diese erzeugen bis zum Liefertermin keine Ein- und Auszahlungen. Die Terminkurse eines riskanten Vermögensgegenstandes x und in U fälligen Zerobonds zum Liefertermin T, $T \leq U$, lassen sich dann mit Gleichung (3.82) im Abschlusszeitpunkt t als

$$F_V(t, x, T) = \frac{V(t, x)}{P(t, T)} \tag{3.88}$$

bzw.

$$F_P(t, U, T) = \frac{P(t, U)}{P(t, T)}, \tag{3.89}$$

für alle $t \leq T \leq U$, darstellen. Fallen Abschlusszeitpunkt und Liefertermin zusammen, gilt $F_P(T, U, T) = P(T, U)$ bzw. $F_V(T, x, T) = V(T, x)$. Der Übergang vom Kassa- auf den Terminmarkt erfolgt also, indem man die zu den entsprechenden Lieferterminen fälligen Zerobonds als Numéraire wählt.

Satz T1 zeigt, dass der Terminkurs des zustandsbedingten Anspruchs X im Abschlusszeitpunkt t vom Kassakurs und vom entsprechenden Zerobondpreis abhängt. Daraus folgt im Umkehrschluss, dass bei gegebenem Terminkurs und Zerobondpreis der Kassakurs von X bei Abschluss des Termingeschäfts im Zeitpunkt t festliegt. Aus diesem Zusammenhang kann mittels des so genannten Forwardmaßes eine alternative Vorgehensweise zur Bewertung von X abgeleitet werden.

Definition [Forwardmaß]. *Sei ein zu $\mathbb{Q}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}^T$ durch*

$$\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}|_{\mathcal{F}(T)} = \Lambda^T(T) = \frac{A^{-1}(T)}{E^{\mathbb{Q}}[A^{-1}(T)|\mathcal{F}(0)]} = \frac{1}{A(T)P(0, T)}$$

definiert. Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}^T$ wird Forwardmaß (zum Liefertermin T) genannt.

Der zur angegebenen Radon-Nikodym Ableitung gehörende Dichteprozess $\{\Lambda^T(t) : t \in [0,T]\}$ ist durch

$$\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}|_{\mathcal{F}(t)} = \Lambda^T(t) = E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{A(T)P(0,T)}|\mathcal{F}(t)\right] = \frac{P(t,T)}{A(t)P(0,T)}$$

gegeben. Unter Verwendung des Zerobondpreises aus (3.19) lässt sich dies darstellen als

$$\Lambda^T(t) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\int_0^t a_i(s,T)dW_i(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t a_i^2(s,T)ds\right\}. \tag{3.90}$$

Aus der Martingaleigenschaft dieses Prozesses unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ folgt nach dem Theorem von Girsanov, dass durch

$$dW_i^T(t) = dW_i(t) - a_i(t,T)dt, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.91}$$

voneinander unabhängige Wiener-Prozesse unter dem Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ beschrieben werden.[61]

Sowohl Termin- als auch Kassakurs des zustandsbedingten Anspruchs X lassen sich nun unter Rückgriff auf das Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ angeben.

Satz T2 [Terminkurs, Kassakurs und Forwardmaß]. *Für den Terminkurs eines im Zeitpunkt $T \in [0,\mathcal{T}]$ fälligen zustandsbedingten Anspruchs X zum Liefertermin T gilt*

$$F_X(t,T) = E^{\mathbb{Q}^T}[X|\mathcal{F}(t)], \tag{3.92}$$

für alle Abschlusszeitpunkte $t \in [0,T]$, d.h. die durch den Prozess $\{F_X(t,T) : t \in [0,T]\}$ beschriebene Terminkursentwicklung folgt einem Martingal unter dem Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$. Für den Kassakurs von X gilt

$$\pi(t,X) = P(t,T)E^{\mathbb{Q}^T}[X|\mathcal{F}(t)], \tag{3.93}$$

für alle $t \in [0,T]$.

[61]Wie schon in (3.17) ist die Novikov-Bedingung

$$E^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T a_i^2(t,T)dt\right\}\right] < \infty.$$

hinreichend für die Martingaleigenschaft von (3.90).

Beweis: Da das Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ ein zum Martingalmaß $\mathbb{Q}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß definiert, gilt

$$E^{\mathbb{Q}^T}\left[X|\mathcal{F}(t)\right] = E^{\mathbb{Q}}\left[\Lambda^T(T)\frac{1}{\Lambda^T(t)}X|\mathcal{F}(t)\right].^{62}$$

Mit $\Lambda^T(T) = \frac{1}{A(T)P(0,T)}$ und $\frac{1}{\Lambda^T(t)} = \frac{A(t)P(0,T)}{P(t,T)}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{Q}^T}\left[X|\mathcal{F}(t)\right] &= E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{A(t)}{A(T)P(t,T)}X|\mathcal{F}(t)\right] \\ &= \frac{E^{\mathbb{Q}}\left[A^{-1}(T-t)X|\mathcal{F}(t)\right]}{P(t,T)} = \frac{\pi(t,X)}{P(t,T)} = F_X(t,T). \end{aligned}$$

Die letzten beiden Umformungen lassen sich wiederum durch die Martingaleigenschaft von X begründen, womit (3.92) bewiesen ist. Unter Verwendung von (3.82) kann (3.92) dann in (3.93) umgeformt werden.[63] □

Die Darstellung in (3.93) verdeutlicht, dass die Bewertung zustandsbedingter Ansprüche nicht notwendigerweise mittels des äquivalenten Martingalmaßes erfolgen muss, sondern alternativ auch auf das Forwardmaß zurückgegriffen werden kann. Dies erweist sich als vorteilhaft, wenn das Zinsänderungsrisiko zu berücksichtigen ist. Statt wie in (3.75) die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung von $A^{-1}(T-t)$ und X unter dem äquivalenten Martingalmaß bestimmen zu müssen, reicht bei der Bewertung mit (3.93) die Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X unter dem Forwardmaß aus, der Preis des Zerobonds mit Restlaufzeit $T-t$ ist durch das zu Grunde liegende Zinsstrukturmodell vorgegeben. Dies verdeutlicht das Beispiel eines europäischen Call auf einen riskanten Vermögensgegenstand x. Die Ausübungsgewinne der Option können durch

$$X = \max(V(T,x)-K,0) = \max(F_V(T,x,T)-K,0)$$

beschrieben werden, da $F_V(T,x,T)$ als Terminkurs von x zum Liefertermin T bei Abschluss des Termingeschäfts im Zeitpunkt T dem Kassakurs $V(T,x)$ entspricht. Der Optionspreis ergibt sich unter Verwendung der Bewertungsgleichung (3.93) als

$$\pi(t,X) = P(t,T)E^{\mathbb{Q}^T}\left[\max(F_V(T,x,T)-K,0)|\mathcal{F}(t)\right], \tag{3.94}$$

für alle $t \in [0,T]$. Gleichung (3.94) zeigt, dass zur Bewertung des zustandsbedingten Anspruchs X lediglich die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Terminkurses des riskanten Vermögensgegenstandes x unter dem Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ ermittelt werden muss. Ist

[62]Vgl. Nielsen (1999): S. 366.
[63]Vgl. Musiela/Rutkowski (1997) S. 317.

das der Option zu Grunde liegende Wertpapier ein im Zeitpunkt U fälliger Zerobond, verläuft die Bewertung analog. Der nachfolgende Satz gibt Aufschluss über die Dynamik der Terminkurse des riskanten Vermögensgegenstandes x und des im Zeitpunkt U fälligen Zerobonds unter $\mathbb{Q}^T$.

Satz T3 [Dynamik der Terminkurse unter $\mathbb{Q}^T$]. *Die Terminkursentwicklung eines riskanten Vermögensgegenstandes x und eines im Zeitpunkt U fälligen Zerobonds wird unter dem Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ für alle Liefertermine T, $T \leq U$, durch*

$$dF_V(t,x,T) = \sum_{i=1}^{d} (\sigma_i(t,x) - a_i(t,T)) F_V(t,x,T) dW_i^T(t) \tag{3.95}$$

bzw.

$$dF_P(t,U,T) = \sum_{i=1}^{n} (a_i(t,U) - a_i(t,T)) F_P(t,U,T) dW_i^T(t) \tag{3.96}$$

beschrieben. Dabei entspricht $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2(t,T)}$ der Volatilität des Zerobonds, dessen Fälligkeitszeitpunkt mit dem entsprechenden Liefertermin übereinstimmt.

Beweis: Für den Terminkurs von x unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ gilt wegen (3.88) in Verbindung mit (3.64) und (3.19)

$$\begin{aligned} F_V(t,x,T) = \frac{V(t,x)}{P(t,T)} &= F_V(0,x,T) \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \left(\sigma_i^2(s,x) - a_i^2(s,T)\right) ds \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t (\sigma_i(s,x) - a_i(s,T)) dW_i(s) \right\}. \end{aligned}$$

Der Übergang auf das Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ erfolgt unter Verwendung von (3.91) durch die Ersetzung $dW_i(t) = dW_i^T(t) + a_i(t,T)dt$ für $i = 1, \ldots, n$ und $dW_i(t) = dW_i^T(t)$ für $i = n+1, \ldots, d$. Dabei werden durch $dW_i^T(t)$, $i = 1, \ldots, d$ voneinander unabhängige Wiener-Prozesse unter $\mathbb{Q}^T$ beschrieben. Es gilt

$$\begin{aligned} F_V(t,x,T) &= F_V(0,x,T) \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \left(\sigma_i^2(s,x) - a_i^2(s,T)\right) ds \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t (\sigma_i(s,x) - a_i(s,T)) \left(dW_i^T(s) + a_i(s,T)ds\right) \right\}. \end{aligned}$$

Dies lässt sich weiter vereinfachen zu

$$
\begin{aligned}
F_V(t,x,T) &= F_V(0,x,T)\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\int_0^t \left(\sigma_i^2(s,x)-a_i^2(s,T)\right)ds\right.\\
&\quad+\sum_{i=1}^{d}\int_0^t \left(\sigma_i(s,x)a_i(s,T)-a_i^2(s,T)\right)ds\\
&\quad\left.+\sum_{i=1}^{d}\int_0^t (\sigma_i(s,x)-a_i(s,T))dW_i^T(s)\right\}\\
&= F_V(0,x,T)\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\int_0^t \left(\sigma_i^2(s,x)-2\sigma_i(s)a_i(s,T)+a_i^2(s,T)\right)ds\right.\\
&\quad\left.+\sum_{i=1}^{d}\int_0^t (\sigma_i(s,x)-a_i(s,T))dW_i^T(s)\right\}\\
&= F_V(0,x,T)\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\int_0^t (\sigma_i(s,x)-a_i(s,T))^2\,ds\right.\\
&\quad\left.+\sum_{i=1}^{d}\int_0^t (\sigma_i(s,x)-a_i(s,T))dW_i^T(s)\right\}. \qquad (3.97)
\end{aligned}
$$

Gleichung (3.97) ist die Lösung der stochastischen Differenzialgleichung aus (3.95), wie eine Anwendung von Itôs Lemma zeigt. Der Beweis für den Terminkurs des Zerobonds läuft analog. Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
F_P(t,U,T) &= F_P(0,U,T)\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t (a_i(s,U)-a_i(s,T))^2\,ds\right.\\
&\quad\left.+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t (a_i(s,U)-a_i(s,T))dW_i^T(s)\right\} \qquad (3.98)
\end{aligned}
$$

als Lösung der stochastischen Differenzialgleichung aus (3.96). □

3.3.2.2 Zeitwechsel in Gauß'schen Modellen

Geht man von einem Gauß'schen Mehr-Faktoren-Modell aus, d.h. die Volatilitätskoeffizienten der Prozesse für die logarithmierte Preisentwicklung der Zerobonds und der riskanten Vermögensgegenstände sind gemäß der Definition aus Kapitel 3.2.2 ausschließlich zeitabhängige Funktionen, sind die in Satz T3 beschriebenen Terminkurse lognormalverteilt unter dem Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$. Die entsprechenden logarithmierten Terminkurse

$$\begin{aligned}\ln F_V(t,x,T) &= \ln F_V(0,x,T) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\int_0^t (\sigma_i(s,x) - a_i(s,T))^2\, ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^{d}\int_0^t (\sigma_i(s,x) - a_i(s,T))dW_i^T(s) \end{aligned} \tag{3.99}$$

und

$$\begin{aligned}\ln F_P(t,U,T) &= \ln F_P(0,U,T) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t (a_i(s,U) - a_i(s,T))^2\, ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t (a_i(s,U) - a_i(s,T))dW_i^T(s) \end{aligned} \tag{3.100}$$

gehorchen für alle $t \in [0,T]$ unter $\mathbb{Q}^T$ daher einer Normalverteilung.[64] Es gilt

$$\begin{aligned}\ln F_V(t,x,T) &\sim \mathrm{N}\Bigg(\ln F_V(0,x,T) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\int_0^t (\sigma_i(s,x) - a_i(s,T)))^2\, ds, \\ &\quad \sum_{i=1}^{d}\int_0^t (\sigma_i(s,x) - a_i(s,T))^2 ds\Bigg) \end{aligned} \tag{3.101}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\ln F_P(t,U,T) &\sim \mathrm{N}\Bigg(\ln F_P(0,U,T) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t (a_i(s,U) - a_i(s,T))^2\, ds, \\ &\quad \sum_{i=1}^{n}\int_0^t (a_i(s,U) - a_i(s,T))^2 ds\Bigg). \end{aligned} \tag{3.102}$$

Die insbesondere bei der Lösung bestimmter Bewertungsprobleme nachteilige Zeitabhängigkeit der Terminkursvolatilitäten in Gauß'schen Modellen lässt sich durch einen Zeitwechsel wie folgt vermeiden.[65] Mit der durch

$$C(t) = \sum_{i=1}^{d}\int_0^t (\sigma_i(s,x) - a_i(s,T))^2 ds, \tag{3.103}$$

für alle $t \in [0,T]$, definierten „Zeittransformationsvariablen" ist der logarithmierte Terminkurs des riskanten Vermögensgegenstandes x aus (3.99) als

$$\ln F_V(t,x,T) = \ln F_V(0,x,T) - \frac{1}{2}C(t) + W(C(t)) \tag{3.104}$$

[64]Vgl. Satz A8 im Anhang.
[65]Vgl. Satz A9 im Anhang.

gegeben. Dabei stellt $W(s)$ einen (eindimensionalen) Wiener-Prozess bezüglich der zeittransformierten Filtration $\{\mathcal{F}^C(s) : s \in [0, T^C]\}$, mit $T^C = C(T)$, dar. Gleichung (3.104) zeigt, dass der Zeitwechsel keine Auswirkungen auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung des logarithmierten Terminkurses hat. Es gilt weiterhin die Normalverteilung aus (3.101), mit

$$\ln F_V(t, x, T) \sim \mathrm{N}\left(\ln F_V(0, x, T) - \frac{1}{2}C(t), C(t)\right).$$

Der Terminkurs des riskanten Vermögensgegenstandes x unter dem Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ lässt sich nach dem Zeitwechsel darstellen als

$$F_V(t, x, T) = F_V(0, x, T) \exp\left\{-\frac{1}{2}C(t) + W(C(t))\right\}, \tag{3.105}$$

für alle $t \in [0, T]$.

Die Zeitabhängigkeit der Terminkursvolatilität der Zerobonds kann auf dieselbe Weise vermieden werden. Mit der Zeittransformationsvariablen

$$C(t) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^t (a_i(s, U) - a_i(s, T))^2 ds,$$

für alle $t \in [0, T]$, gilt für den logarithmierten Terminkurs aus (3.100)

$$\ln F_P(t, U, T) \quad = \quad \ln F_P(0, U, T) - \frac{1}{2}C(t) + W(C(t)). \tag{3.106}$$

Auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung des logarithmierten Terminkurses hat der Zeitwechsel wiederum keine Auswirkungen, es gilt die Normalverteilung aus (3.102), mit

$$\ln F_P(t, U, T) \sim \mathrm{N}\left(\ln F_P(0, U, T) - \frac{1}{2}C(t), C(t)\right).$$

Für den Terminkurs des Zerobonds mit Fälligkeitszeitpunkt U unter dem Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ gilt demzufolge

$$F_P(t, U, T) = F_P(0, U, T) \exp\left\{-\frac{1}{2}C(t) + W(C(t))\right\},$$

für alle $t \in [0, T]$.

Kapitel 4

Unternehmenswertbasierte Kreditrisikomodelle

Im vorliegenden Kapitel werden grundlegende unternehmenswertbasierte Kreditrisikomodelle im Modellrahmen aus Kapitel 3 dargestellt und verglichen. Das in Kapitel 4.1 diskutierte Modell von Merton (1974) ist gleichzeitig Ausgangspunkt und Vergleichsbasis. Die anschließend vorgestellten Modelle können als Erweiterungen des Merton-Modells angesehen werden. Der Arbeit von Shimko/Tejima/van Deventer (1993) folgend integriert Kapitel 4.2 das Zinsänderungsrisiko in das Merton-Modell. Dies erlaubt eine gemeinsame Erfassung von Kredit- und Zinsänderungsrisiko. Aufbauend auf diesem Modellrahmen untersucht Kapitel 4.3 in Anlehnung an Black/Cox (1976) und Briys/de Varenne (1997) die Wirkung von Sicherungsklauseln zur Begrenzung des Kreditrisikos, während sich Kapitel 4.4 der von Longstaff/Schwartz (1995) vorgeschlagenen Erweiterung auf Unternehmen mit komplexer Kapitalstruktur widmet.

4.1 Der Ausgangspunkt – Das Modell von Merton

4.1.1 Annahmen

Merton (1974) trifft die folgenden Annahmen zur Dynamik der Zinsstruktur und des Unternehmenswerts, zur Finanzierungspolitik des betrachteten Unternehmens und zur Kapitalmarktform:

1. Die Zinsstrukturkurve verläuft flach und ändert sich im relevanten Zeitintervall $[0, \mathcal{T}]$ nicht. Der entsprechende kurzfristige Kassazinssatz ist durch r gegeben. Die

Entwicklung des Geldmarktkontos, das den Wert eines revolvierend zum Zinssatz r angelegten € angibt, wird durch die gewöhnliche Differenzialgleichung

$$dA(t) = rA(t)dt, \tag{4.1}$$

mit der Ausgangsbedingung $A(0) = 1$, beschrieben. Die Lösung dieser Differenzialgleichung ergibt sich für alle $t \in [0, \mathcal{T}]$ als $A(t) = e^{rt}$.

2. Die Unternehmenswertentwicklung folgt einer geometrischen Brown'schen Bewegung und wird unter dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ durch die stochastische Differenzialgleichung

$$dV(t) = \mu V(t)dt + \sigma V(t)d\hat{W}(t) \tag{4.2}$$

beschrieben, wobei die Konstanten $\mu, \sigma > 0$ die erwartete Momentanrendite und die Volatilität des Unternehmenswerts angeben.

3. Das Unternehmen ist neben Eigenkapital in Form eines beschränkt haftenden Residualanspruchs ausschließlich mit Fremdkapital in Form eines Zerobonds finanziert. Die vertraglichen Vereinbarungen zwischen den Kapitalgebern sehen weiterhin vor, dass es dem Unternehmen bis zur Fälligkeit des Zerobonds nicht erlaubt ist, Ausschüttungen an die Gesellschafter vorzunehmen oder zusätzliche Finanzierungstitel zu emittieren. Ein Rückkauf der bereits emittierten Finanzierungstitel wird ebenso ausgeschlossen.

4. Der Unternehmenswert und die emittierten Finanzierungstitel sind als Wertpapiere verbrieft und werden kontinuierlich auf einem vollkommenen Kapitalmarkt gehandelt.

Auf Grund des vollkommenen Kapitalmarkts existieren im Merton-Modell keine Informations- und Transaktionskosten, einkommen-, gewinn- und vermögenabhängigen Steuern oder Marktzugangsbeschränkungen. Die Vernachlässigung von Informations- und Transaktionskosten, letztere beinhalten annahmengemäß auch Insolvenzkosten, sowie von Steuern gewährleistet, dass neben den Kapitalgebern des Unternehmens keine weiteren Gruppen wie Insolvenzgerichte oder der Fiskus Ansprüche auf den Unternehmenswert besitzen. Auch gibt es keine Agency-Kosten aus Interessenkonflikten zwischen Gesellschaftern und Management oder zwischen Gesellschaftern und Gläubigern des Unternehmens. Die bereits in Kapitel 2.1.1 angesprochenen Interessenkonflikte zwischen Gesellschaftern und Gläubigern sind im Merton-Modell allerdings schon von vornherein ausgeschlossen, da der investitions- und finanzierungspolitische Handlungsspielraum des betrachteten Unternehmens stark eingeschränkt ist. So ist das Investitionsrisiko des Unternehmens, das durch die konstante Volatilität des Unternehmenswerts repräsentiert wird, exogen vorgegeben und nicht veränderbar. Auch Ausschüttungen aus Teilliquidationen des Unternehmensvermögens oder aus der zusätzlichen Aufnahme gleich- oder vorrangigen Fremdkapitals können nicht vorgenommen werden. Weiterhin folgt aus der Annahme eines vollkommenen Kapitalmarkts, dass die dort gehandelten Wertpapiere beliebig teilbar sind und zu gegebenen Marktpreisen in beliebigem Umfang ge- und verkauft werden können. Leerverkäufe sind ebenso unbeschränkt möglich. Die Marktteilnehmer maximieren ihren finanziellen Nutzen, wobei der Grenznutzen strikt positiv ist. Weitere Annahmen an das Risikoverhalten der Marktteilnehmer werden nicht getroffen.

4.1.2 Bewertung der Finanzierungstitel

In unternehmenswertbasierten Kreditrisikomodellen werden die von einem Unternehmen emittierten Finanzierungstitel als zustandsbedingte Ansprüche auf den Unternehmenswert interpretiert und die entsprechenden Zahlungsströme mit der zufallsabhängigen Unternehmenswertentwicklung verknüpft. Dabei ist im Merton-Modell wegen der vereinfachenden Annahmen zur Finanzierungspolitik des betrachteten Unternehmens nur der Fälligkeitszeitpunkt des Zerobonds von Bedeutung. Zwei Szenarien sind in diesem Zeitpunkt zu unterscheiden:

1. Ist der Unternehmenswert höher als der Rückzahlungsbetrag des Zerobonds, sind die Gesellschafter des Unternehmens bereit, zusätzliches Beteiligungskapital zur Bedienung der Ansprüche der Zerobondinhaber bereitzustellen, da sie die Differenz aus Unternehmenswert und Rückzahlungsbetrag des Zerobonds gewinnen. Eine gleichwertige Handlungsalternative der Gesellschafter ist es, die Vermögensgegenstände des Unternehmens zu liquidieren und die Zerobondinhaber auszuzahlen.

2. Ist der Unternehmenswert niedriger als der Rückzahlungsbetrag des Zerobonds, sind die Gesellschafter des Unternehmens nicht gewillt, zusätzliches Beteiligungskapital zur Bedienung der Ansprüche der Zerobondinhaber bereitzustellen, da sie ansonsten die Differenz aus Unternehmenswert und Rückzahlungsbetrag des Zerobonds verlieren würden. Auch außerhalb der Gruppe der Gesellschafter lassen

sich keine neuen Kapitalgeber finden, die liquide Mittel in entsprechender Höhe zur Verfügung stellen.

Im ersten Szenario kommt das Unternehmen seinen finanziellen Verpflichtungen gegenüber den Zerobondinhabern nach, so dass kein Kreditausfall auftritt.[1] Anders im zweiten Szenario. Die Weigerung der Gesellschafter, zusätzliches Beteiligungskapital zur Bedienung der Ansprüche der Zerobondinhaber bereitzustellen, führt zur Zahlungsunfähigkeit des Unternehmens. Durch die Zahlungsunfähigkeit wird eine Neuordnung der Eigentumsverhältnisse des Unternehmens nötig, wobei die Frage, ob die Neuordnung der Eigentumsverhältnisse durch eine außergerichtliche Einigung oder in einem Insolvenzverfahren erfolgt und die Liquidation oder die Fortführung des Unternehmens nach sich zieht, in diesem Zusammenhang keine Rolle spielt. Im Zuge der Neuordnung der Eigentumsverhältnisse erlangen die Zerobondinhaber zwar die Verfügungsgewalt über das Unternehmen bzw. über die Vermögensgegenstände des Unternehmens, erleiden aber einen Kreditausfall in Höhe der Differenz aus Rückzahlungsbetrag und Unternehmenswert. Die Gesellschafter gehen bei der Neuordnung der Eigentumsverhältnisse leer aus, ihr Privatvermögen kann allerdings auf Grund der beschränkten Haftung nicht zur vollständigen Erfüllung der finanziellen Verpflichtungen des Unternehmens gegenüber den Zerobondinhabern herangezogen werden.

Die oben beschriebenen Szenarien bei Fälligkeit des Zerobonds lassen sich in den Mengen D_1 und D_2 zusammenfassen:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{\omega \in \Omega : V(T) > K\}, \\ D_2 &= \{\omega \in \Omega : V(T) < K\}. \end{aligned}$$

Dabei ist T, $T \in [0, \mathcal{T}]$, der Fälligkeitszeitpunkt des Zerobonds und K der vertraglich vereinbarte Rückzahlungsbetrag. Stellt man den Einzahlungsüberschuss der Gesellschafter bei Fälligkeit des Zerobonds als Funktion des Unternehmenswerts dar, ergibt sich

$$E(T) = \max(V(T) - K, 0) = (V(T) - K)\mathbf{1}_{\{D_1\}}. \tag{4.3}$$

Dies entspricht einem in T fälligen europäischen Call auf den Unternehmenswert mit einem Basispreis in Höhe des Rückzahlungsbetrages K des Zerobonds. Alternativ lässt

[1] Letzteres gilt auch, wenn der Unternehmenswert dem Rückzahlungsbetrag des Zerobonds entspricht. Die Eintrittswahrscheinlichkeit eines solchen Szenarios geht auf Grund der stetigen Verteilung des Unternehmenswerts allerdings gegen Null, so dass dieser Fall nicht ausdrücklich berücksichtigt wird.

sich die Position der Gesellschafter wegen

$$\begin{aligned}\max(V(T)-K,0) &= V(T)-K+\max(K-V(T),0)\\ &= V(T)-K+(K-V(T))\mathbf{1}_{\{D_2\}} \qquad (4.4)\end{aligned}$$

als Portefeuille aus einer Anwartschaft auf den Unternehmenswert abzüglich des Rückzahlungsbetrages K des Zerobonds und aus einem in T fälligen, gekauften europäischen Put auf den Unternehmenswert mit Basispreis K interpretieren. Der Einzahlungsüberschuss der Zerobondinhaber bei Fälligkeit ihrer Forderung,

$$D(T,T) = K - \max(K-V(T),0) = K-(K-V(T))\mathbf{1}_{\{D_2\}}, \qquad (4.5)$$

besteht aus dem Rückzahlungsbetrag K abzüglich des Ausübungsgewinns des in T fälligen europäischen Puts aus (4.4). Die Zeroboninhaber sind demnach Stillhalter des Puts. Dieser „Ausfall-Put“ wird von den Gesellschaftern nur bei Überschuldung des Unternehmens ausgeübt und repräsentiert aus Sicht der Zerobondinhaber die Gefahr eines Kreditausfalls.

Abweichend von Merton erfolgt die Bewertung der Ansprüche der Gesellschafter und der Zerobondinhaber aus (4.3) und (4.5) mittels der Martingalmaß-Technik. Die Verwendung der Martingalmaß-Technik ist zulässig, da das Merton-Modell ein Spezialfall des allgemeineren Modellrahmens aus Kapitel 3 ist und insbesondere alle dort genannten Voraussetzungen für die Existenz eines eindeutigen äquivalenten Martingalmaßes erfüllt. Durch die Vernachlässigung des Zinsänderungsrisikos ist das äquivalente Martingalmaß im Merton-Modell definiert als ein zum subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, unter dem der Prozess für die mit dem Geldmarktkonto diskontierte Unternehmenswertentwicklung einem Martingal folgt. Die stochastische Differenzialgleichung für die diskontierte Unternehmenswertentwicklung unter dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ lässt sich unmittelbar aus (3.58) ablesen oder kann mittels Itôs Lemma bestimmt werden. Mit $Z_V(t) = e^{-rt}V(t)$ gilt

$$\begin{aligned}dZ_V(t) &= \left(-re^{-rt}V(t)+e^{-rt}\mu V(t)\right)dt + e^{-rt}\sigma V(t)dW(t)\\ &= (\mu-r)Z_V(t)dt+\sigma Z_V(t)dW(t). \qquad (4.6)\end{aligned}$$

Die Bestimmung des äquivalenten Martingalmaßes im Merton-Modell erfolgt unter Anwendung des Theorems von Girsanov. Ausgehend von einem konstanten Marktpreis für Risiko λ_V definiert man anhand der Radon-Nikodym Ableitung

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}(\mathcal{T})} = \Lambda(\mathcal{T}) = \exp\left\{\int_0^{\mathcal{T}} \lambda_V d\hat{W}(s) - \frac{1}{2}\int_0^{\mathcal{T}} \lambda_V^2 ds\right\}$$

zunächst ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$. Der durch

$$\Lambda(t) = \exp\left\{\int_0^t \lambda_V d\hat{W}(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda_V^2 ds\right\}$$

gegebene zugehörige Dichteprozess ist ein Martingal unter $\mathbb{P}$.[2] Gemäß dem Theorem von Girsanov beschreibt dann

$$dW(t) = d\hat{W}(t) - \lambda_V dt$$

einen Wiener-Prozess unter $\mathbb{Q}$. Nach der Ersetzung $d\hat{W}(t) = dW(t) + \lambda_V dt$ in (4.6) erhält man für die diskontierte Unternehmenswertentwicklung unter $\mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} dZ_V(t) &= (\mu - r)Z_V(t)dt + \sigma Z_V(t)(dW(t) + \lambda_V dt) \\ &= (\mu - r + \sigma\lambda_V)Z_V(t)dt + \sigma Z_V(t)dW(t). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Der zu (4.7) gehörende Prozess folgt einem Martingal, wenn die Driftfunktion dieser stochastischen Differenzialgleichung den Wert Null annimmt, so dass

$$dZ_V(t) = \sigma Z_V(t)dW(t) \tag{4.8}$$

gilt.[3] Dies ist genau dann erfüllt, wenn der Marktpreis für Risiko in (4.7) der Bedingung

$$\begin{aligned} & \mu - r + \sigma\lambda_V = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_V = -(\mu - r)\sigma^{-1} \end{aligned} \tag{4.9}$$

genügt. Da der Marktpreis für Risiko durch Gleichung (4.9) eindeutig bestimmt ist, stellt das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ ein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß dar. Die Unternehmenswertentwicklung unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ ergibt sich mit (4.9) als

$$\begin{aligned} dV(t) &= \mu V(t)dt + \sigma V(t)\left(dW(t) + \lambda_V dt\right) \\ &= (\mu + \sigma\lambda_V)V(t)dt + \sigma V(t)dW(t) \\ &= rV(t)dt + \sigma V(t)dW(t), \end{aligned} \tag{4.10}$$

so dass die erwartete Momentanrendite des Unternehmenswerts unter $\mathbb{Q}$ dem kurzfristigen Kassazinssatz entspricht.

[2] Die für die Martingaleigenschaft hinreichende Novikov-Bedingung ist wegen $\lambda_V = \text{const.}$ erfüllt.

[3] Auch hier ist die für die Martingaleigenschaft hinreichende Novikov-Bedingung wegen $\sigma = \text{const.}$ erfüllt.

Unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus Kapitel 3.3.1.3 gewährleistet die „Invertierbarkeit“ der Unternehmenswertvolatilität gemäß Gleichung (4.9) nicht nur Existenz eines eindeutigen äquivalenten Martingalmaßes im Merton-Modell. Vielmehr „spannt“ der Unternehmenswert den betrachteten Kapitalmarkt auf, so dass sich die Einzahlungsüberschüsse der Gesellschafter und der Zerobondinhaber durch selbstfinanzierende Handelsstrategien aus risikoloser Anlage und Verschuldung und Kauf und Verkauf von Anteilen am Unternehmenswert duplizieren lassen. Dies rechtfertigt die Anwendung der Martingalmaß-Technik: Bei Arbitragefreiheit entspricht der Marktwert eines Finanzierungstitels dem Erwartungswert des diskontierten Einzahlungsüberschusses, berechnet unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$. Bewertet man die Ansprüche der Gesellschafter aus (4.3) und die der Zerobondinhaber aus (4.5) mittels der Martingalmaß-Technik, ergeben sich die heutigen Marktwerte als

$$E(0) = e^{-rT} E^{\mathbb{Q}} \left[(V(T) - K) \mathbf{1}_{\{D_1\}} \right] \tag{4.11}$$

und

$$\begin{aligned} D(0,T) &= e^{-rT} E^{\mathbb{Q}} \left[K - (K - V(T)) \mathbf{1}_{\{D_2\}} \right] \\ &= e^{-rT} K - e^{-rT} E^{\mathbb{Q}} \left[(K - V(T)) \mathbf{1}_{\{D_2\}} \right].^4 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Zur Berechnung der Erwartungswerte in (4.11) und (4.12) ist die eindeutige Lösung der stochastischen Differenzialgleichung für die Unternehmenswertentwicklung aus (4.10) heranzuziehen. Diese lautet

$$V(t) = V(0) \exp\left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right\}, \tag{4.13}$$

wie sich mit Itôs Lemma nachweisen lässt. Aus Gleichung (4.13) geht hervor, dass der Unternehmenswert lognormalverteilt ist und der logarithmierte Unternehmenswert

$$\ln V(t) = \ln V(0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \tag{4.14}$$

einer Normalverteilung mit Erwartungswert

$$E[\ln V(t)] = \ln V(0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \tag{4.15}$$

[4] Vgl. Satz MM1 bzw. Gleichung (5.7). Unter Verwendung von Gleichung (3.80) und (3.81) aus Kapitel 3.3.1.3 lässt sich das entsprechende Duplikationsportefeuille bestimmen. Es besteht im Zeitpunkt $t = 0$ aus $h_V(0) = \frac{\zeta(0)\sigma^{-1}}{V(0)}$ ge- oder verkauften Anteilen am Unternehmenswert und $h_r(0) = M(0) - \zeta(0)\sigma^{-1}$ risikolos angelegten oder aufgenommenen €. Je nachdem, ob der Einzahlungsüberschuss der Gesellschafter oder der der Zerobondinhaber dupliziert werden soll, ist $M(0)$ durch (4.11) oder (4.12) gegeben. Es lässt sich weiterhin zeigen, dass $h_V(0)$ der Ableitung dieser Bewertungsgleichungen nach $V(0)$ entspricht und somit das aus der Duplikation von Aktienoptionen bekannte „Delta“ darstellt. Die Lösungen der Bewertungsgleichungen werden in Satz U1 angegeben.

und Standardabweichung

$$\sqrt{\mathrm{Var}[\ln V(t)]} = \sqrt{\mathrm{Var}[\sigma W(t)]} = \sigma\sqrt{t} \tag{4.16}$$

gehorcht. Dies erlaubt es, die Bewertungsgleichungen (4.11) und (4.12) unter Verwendung der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung analytisch zu lösen, wie der nachfolgende Satz zeigt.

Satz U1 [Marktwerte der Finanzierungstitel]. *Die Marktwerte von Eigenkapital und Zerobond gemäß Gleichung (4.11) und (4.12) sind gegeben durch*

$$E(0) = V(0)\Phi(d_1) - e^{-rT}K\Phi(d_2)$$

und

$$D(0,T) = V(0)\Phi(-d_1) + e^{-rT}K\Phi(d_2),$$

mit

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{V(0)}{Ke^{-rT}}\right) \pm \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

$\Phi(\cdot)$ *ist die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.*

Beweis: Mit der Bewertungsformel für einen europäischen Call aus (6.18) im Anhang ergibt sich der Marktwert des Eigenkapitals. Der Marktwert des Zerobonds kann mit der Bewertungsformel für einen europäischen Put aus (6.21) im Anhang als $D(0,T) = e^{-rT}K - e^{-rT}K\Phi(-d_2) + V(0)\Phi(-d_1)$ bestimmt werden. Unter Berücksichtigung der Symmetrie der Normalverteilung folgt $D(0,T) = e^{-rT}K\Phi(d_2) + V(0)\Phi(-d_1)$. □

Satz U1 sagt aus, dass die Bewertung der Finanzierungstitel im Merton-Modell mit den bereits von Black/Scholes (1973) hergeleiteten Formeln für europäische Calls und Puts auf dividendenlose Aktien vorgenommen werden kann. Lediglich eine Anpassung der entsprechenden Variablen ist notwendig. Diese Analogie wird im Wesentlichen durch die Vernachlässigung des Zinsänderungsrisikos, die einfache Kapitalstruktur und die Einschränkung des investitions- und finanzierungspolitischen Handlungsspielraums des betrachteten Unternehmens sowie die Handelbarkeit des Unternehmenswerts „erkauft". Während die ersten Annahmen später gelockert werden, kann die letzte Annahme nicht aufgegeben werden, ohne die grundsätzliche Vorgehensweise bei der Lösung des Bewertungsproblems in Frage zu stellen. Die Nicht-Handelbarkeit des Unternehmenswerts bedeutet, dass der Unternehmenswert nicht als Wertpapier verbrieft ist und Anteile am Unternehmenswert auf dem Kapitalmarkt nicht kontinuierlich gehandelt werden können. Dies entspricht etwa einer Situation, in der die emittierten Finanzierungstitel auf dem Kapitalmarkt in beliebigem Umfang kontinuierlich ge- und verkauft werden können, die Vermögensgegenstände des Unternehmens aber nur als Ganzes und/oder nur bei Fälligkeit des Zerobonds zu veräußern sind. Der Unternehmenswert als Marktwert der Vermögensgegenstände des Unternehmens ist zwar beobachtbar, die Einzahlungsüberschüsse der Gesellschafter und der Zerobondinhaber lassen sich aber nicht durch selbstfinanzierende Handelsstrategien aus risikoloser Anlage und Verschuldung und Kauf und Verkauf von Anteilen am Unternehmenswert duplizieren. Eine Bewertung der Finanzierungstitel mittels der Martingalmaß-Technik, so wie sie bisher diskutiert wurde, ist in diesem Fall nicht durchführbar.

In der Literatur finden sich verschiedene Lösungsvorschläge für das Problem der Nicht-Handelbarkeit des Unternehmenswerts. So kann unter Verwendung der Ergebnisse von Rubinstein (1976) und Brennan (1979) gezeigt werden, dass die Bewertungsformeln für die Finanzierungstitel aus Satz U1 auch in einem Modell mit lediglich zwei Handelszeitpunkten, heute und dem Fälligkeitszeitpunkt des Zerobonds, gelten. Voraussetzung dafür ist allerdings, dass der Unternehmenswert und das aggregierte Vermögen aller Marktteilnehmer bei Fälligkeit des Zerobonds bivariat normal- oder lognormalverteilt sind und der repräsentative Marktteilnehmer ein bestimmtes Risikoverhalten besitzt. Letzteres ist der entscheidende Unterschied zur bisherigen Vorgehensweise, die ohne explizite Annahmen bezüglich des Risikoverhaltens der Marktteilnehmer ausgekommen ist. Es bleibt somit festzuhalten, dass die so genannte „präferenzfreie“ Bewertung der Finanzierungstitel im Merton-Modell auf die Handelbarkeit des Unternehmenswerts zurückzuführen ist.[5]

4.1.3 Komparative Statik der Credit-Spreads

Auf den Kapitalmärkten wird das Kreditrisiko von Unternehmensanleihen üblicherweise anhand der als Credit-Spreads bezeichneten bonitätsinduzierten Renditedifferenzen beurteilt. Der Credit-Spread einer kreditrisikobehafteten Anleihe ist definiert als die Differenz zwischen der Rendite der Anleihe, ermittelt auf Basis der versprochenen Zins- und Tilgungszahlungen und der Rendite einer in allen Ausstattungsmerkmalen

[5]Auch wenn im Merton-Modell keine expliziten Annahmen bezüglich des Risikoverhaltens der Marktteilnehmer getroffen werden, stellt sich dennoch die Frage, welche impliziten Annahmen mit der vorgegebenen Dynamik und der unterstellten Handelbarkeit des Unternehmenswerts verbunden sind. Anders formuliert: Wie lässt sich ein Kapitalmarktgleichgewicht modellieren, wenn die Entwicklung des kontinuierlich gehandelten Unternehmenswerts der stochastischen Differenzialgleichung aus (4.2) folgt? Mit dieser Frage beschäftigt sich unter anderem Bick (1987, 1990).

identischen, aber kreditrisikolosen Anleihe. Ceteris paribus nimmt der Credit-Spread zu, wenn das Kreditrisiko der Anleihe steigt. Dies liegt darin begründet, dass sich ein höheres Kreditrisiko nachteilig auf den Marktwert der Anleihe auswirkt und Marktwert und Rendite der Anleihe in einem inversen Verhältnis stehen.[6]

Das Merton-Modell besitzt den Vorteil, dass es eine relativ einfach zu handhabende Formel für den Credit-Spread eines Zerobonds liefert. Für eine gegebene Restlaufzeit von T Jahren ist zunächst die Rendite des kreditrisikobehafteten Zerobonds pro Jahr unter Berücksichtigung des vertraglich vereinbarten Rückzahlungsbetrages durch Auflösen der Gleichung

$$D(0,T) = e^{-Y_D T} K \tag{4.17}$$

nach Y_D zu ermitteln, wobei $D(0,T)$ den Marktwert des Zerobonds aus Satz U1 angibt. Die durch Y_0 symbolisierte Rendite eines in allen Ausstattungsmerkmalen identischen, aber kreditrisikolosen Zerobonds pro Jahr lässt sich aus der Gleichung

$$P(0,T) = e^{-Y_0 T} \tag{4.18}$$

bestimmen. Dabei ist $P(0,T)$ der Preis des kreditrisikolosen Zerobonds nach Normierung des Rückzahlungsbetrages auf einen €. Der Preis dieses Zerobonds ergibt unter Berücksichtigung der im Merton-Modell flach verlaufenden Zinsstrukturkurve bei Arbitragefreiheit des Kapitalmarkts als

$$P(0,T) = e^{-rT}. \tag{4.19}$$

Dies zeigt, dass die Rendite des kreditrisikolosen Zerobonds im Merton-Modell mit dem kurzfristigen Kassazinssatz übereinstimmt. Der Credit-Spread des kreditrisikobehafteten Zerobonds wird dann mittels der Renditen aus (4.17) und (4.18) in Verbindung mit (4.19) als

$$\Delta(0,T) = Y_D - Y_0 = -\frac{1}{T}\ln\left(\frac{D(0,T)}{K}\right) - r \tag{4.20}$$

berechnet. Er ist somit eine Funktion des Unternehmenswerts $V(0)$, des Rückzahlungsbetrages K, der Unternehmenswertvolatilität σ und des kurzfristigen Kassazinssatzes r.

Tabelle 4.1 zeigt die Ergebnisse einer komparativ-statischen Analyse der Credit-Spreads von Zerobonds bezüglich der oben genannten Bestimmungsgrößen. Die Tabelle enthält

[6] In der Literatur wird der Credit-Spread häufig als „default risk premia" („Ausfallrisikoprämie") bezeichnet, obwohl die Rendite der kreditrisikobehafteten Anleihe auf Basis der versprochenen und nicht der erwarteten Zins- und Tilgungszahlungen ermittelt wird.

Credit-Spreads im Merton-Modell (in Bp p.a.) Ausgangsdaten: $r = 0,05$, $V(0) = 100$, $\sigma = 0,25$									
	Verschuldungsgrad 30 %			Verschuldungsgrad 50 %			Verschuldungsgrad 70 %		
	Restlaufzeit in Jahren			Restlaufzeit in Jahren			Restlaufzeit in Jahren		
	5	10	20	5	10	20	5	10	20
Ausgangsdaten	3,27	9,70	13,84	33,10	39,71	34,16	107,10	85,27	57,28
Parameter σ									
$0,20$	0,28	1,54	2,78	8,89	12,73	10,98	48,58	38,70	23,67
$0,30$	14,27	29,87	37,25	76,20	82,76	71,03	183,03	145,91	103,55
Parameter r									
$0,02$	6,93	23,06	39,40	57,69	78,94	82,55	166,91	152,89	125,77
$0,08$	1,45	3,63	3,92	17,99	18,04	11,64	65,51	43,40	21,84

Tabelle 4.1: Komparative Statik der Credit-Spreads im Merton-Modell

die in Basispunkten pro Jahr (Bp p.a.) angegebenen Credit-Spreads von Zerobonds mit Restlaufzeiten von 5, 10 und 20 Jahren. Die Zerobonds sind nach dem aktuellen Verschuldungsgrad des emittierenden Unternehmens, definiert als das Verhältnis zwischen dem Rückzahlungsbetrag K und dem Unternehmenswert $V(0)$, in drei Kreditrisikoklassen eingeteilt. Betrachtet werden zunächst Credit-Spreads für die Ausgangsdaten. Abbildung 4.1 als grafische Darstellung der entsprechenden Credit-Spread-Kurven im Restlaufzeitintervall von 0 bis 20 Jahren ergänzt die punktweisen Angaben aus Tabelle 4.1 für diese Datenkonstellation. Dabei wird deutlich, dass der Credit-Spread eines Zerobonds unabhängig von der Restlaufzeit mit höherem Verschuldungsgrad des emittierenden Unternehmens zunimmt. Ein Verschuldungsgrad von 30 % kennzeichnet somit ein niedriges Kreditrisiko, während Verschuldungsgrade von 50 % und 70 % ein mittleres und ein hohes Kreditrisiko für die Zerobondinhaber bedeuten.

Die in Abbildung 4.1 dargestellte Zeitstruktur der Credit-Spreads wird von den Abhängigkeiten zwischen dem Marktwert und der Restlaufzeit des emittierten Zerobonds bestimmt. Dabei entspricht der Marktwert des Zerobonds im Merton-Modell dem Barwert des Rückzahlungsbetrages abzüglich des Werts des Ausfall-Puts. Der Ausfall-Put, der für die hier betrachteten Verschuldungsgrade kleiner 100 % „aus dem Geld“ ist, wird bei einer kurzen Restlaufzeit mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht ausgeübt. Mit längerer Restlaufzeit wird die Ausübung wahrscheinlicher und der Wert des Ausfall-Puts steigt, was sich marktwertmindernd auf den Zerobond auswirkt. Die höhere Ausübungswahrscheinlichkeit des Ausfall-Puts ist auf die größere Schwankungsbreite

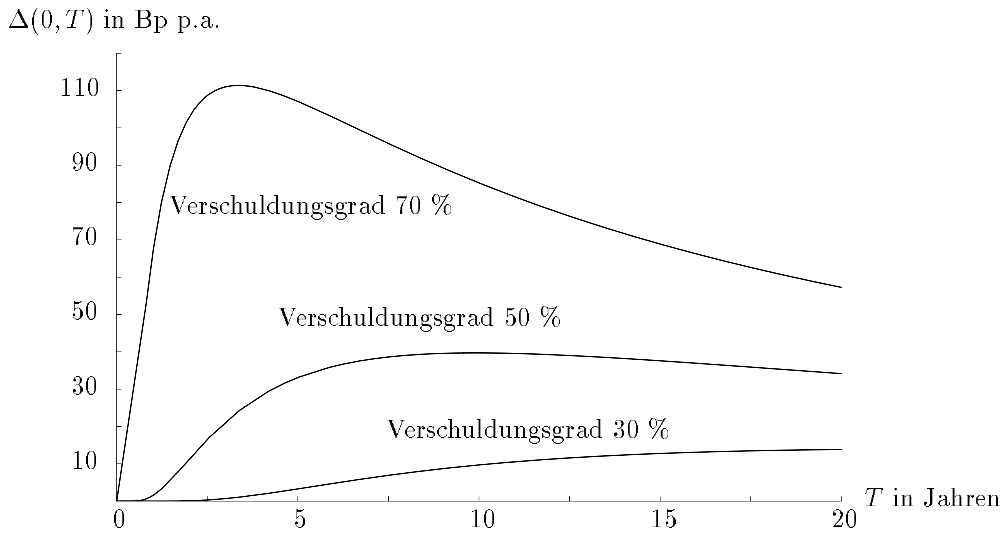

Abbildung 4.1: Credit-Spread-Kurven im Merton-Modell

des Unternehmenswerts bei Fälligkeit des Zerobonds zurückzuführen. Gemessen wird die Schwankungsbreite anhand der Standardabweichung des logarithmierten Unternehmenswerts in diesem Zeitpunkt, die sich unter Verwendung von (4.16) als

$$\sqrt{\mathrm{Var}[\ln V(T)]} = \sigma\sqrt{T} \tag{4.21}$$

berechnen lässt und mit längerer Restlaufzeit zunimmt.[7] Weiterhin ist zu beachten, dass mit einer längeren Restlaufzeit der Barwert des Rückzahlungsbetrages des emittierten Zerobonds sinkt. Dies wirkt sich einerseits marktwerterhöhend auf den Zerobond aus, da der Wert des Ausfall-Puts sinkt. Andererseits besitzen die Zerobondinhaber eine Anwartschaft auf den Rückzahlungsbetrag, so dass bei einer längeren Restlaufzeit der Marktwert des Zerobonds wiederum sinkt.

Da die beschriebenen Abhängigkeiten teilweise in unterschiedliche Richtungen wirken, ist von vornherein nicht klar, welche Auswirkungen eine längere Restlaufzeit auf den Marktwert des emittierten Zerobonds hat und wie sich demzufolge die Zeitstruktur der Credit-Spreads darstellt. Abbildung 4.1 zeigt, dass der Credit-Spread für einen Verschuldungsgrad von 30 % mit längerer Restlaufzeit steigt. Für einen Verschuldungsgrad von 50 % und 70 % weitet sich der Credit-Spread zunächst mit längerer Rest-

[7]Die Standardabweichung des logarithmierten Unternehmenswerts ist unter dem Martingalmaß und unter dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß gleich, da der Übergang zwischen äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßen unter Verwendung des Theorems von Girsanov nur die Driftfunktion eines stochastischen Prozesses betrifft.

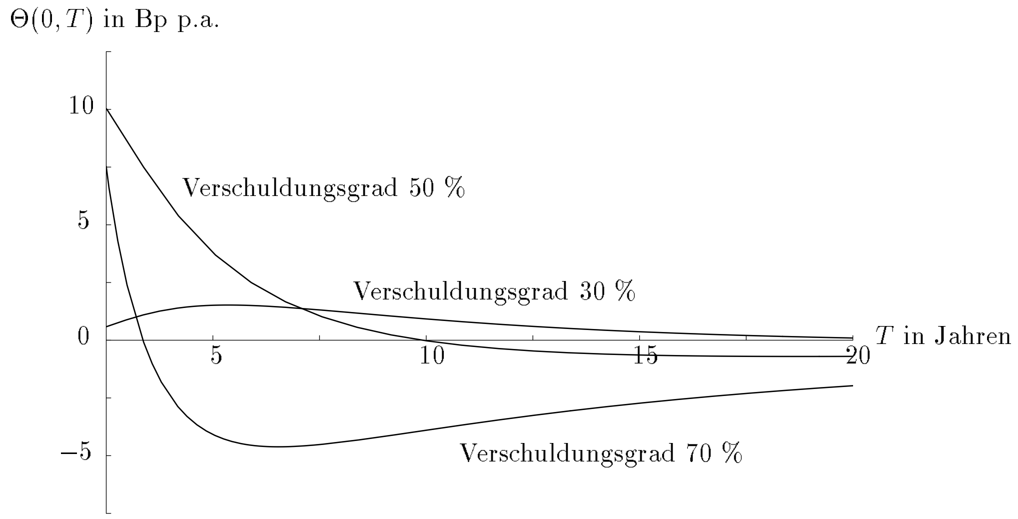

Abbildung 4.2: Theta der Credit-Spreads im Merton-Modell

laufzeit aus, um ab einer gewissen Restlaufzeit wieder zu sinken. Dabei ist der „bucklige“ Verlauf der Credit-Spread-Kurven ausgeprägter, je höher der Verschuldungsgrad des Unternehmens ist. Aus mathematischer Sicht ausschlaggebend für den Verlauf der Credit-Spread-Kurven ist die Ableitung des Credit-Spreads nach der Restlaufzeit des Zerobonds, die unter Berücksichtigung von (4.20) als

$$\Theta(0,T) = \frac{\partial \Delta(0,T)}{\partial T} \tag{4.22}$$

definiert wird. Abbildung 4.2 stellt das so genannte „Theta“ des Credit-Spreads aus (4.22) im Restlaufzeitintervall von 2,5 bis 20 Jahren für das Ausgangsszenario dar. Für einen Verschuldungsgrad von 30 % besitzt das Theta ein positives Vorzeichen, während es für einen Verschuldungsgrad von 50 % und 70 % im kurzen Restlaufzeitbereich positive und bei längeren Restlaufzeiten negative Werte annimmt.[8] Nicht abgebildet sind die Credit-Spread-Kurven überschuldeter Unternehmen, d.h. von Unternehmen mit einem Verschuldungsgrad größer 100 %. In diesem Fall erzeugt das Merton-Modell immer fallende Credit-Spread-Kurven. Die formale Begründung dafür liefert wiederum das Theta des Credit-Spreads, das restlaufzeitunabhängig ein negatives Vorzeichen

[8]Für Restlaufzeiten kleiner 2,5 Jahre ist das Theta für einen niedrigen Verschuldungsgrad annähernd Null, für einen mittleren und hohen Verschuldungsgrad zunächst stark ansteigend und dann stark fallend. Da das Theta insbesondere für einen hohen Verschuldungsgrad in diesem Restlaufzeitbereich sehr große Werte annimmt, wurden die entsprechenden Kurven nicht abgebildet. Von Interesse sind in erster Linie die Bereiche, in denen das Theta sein Vorzeichen wechselt und sich somit das Steigungsverhalten der Credit-Spread-Kurven ändert.

aufweist.

Aus Tabelle 4.1 lässt sich ablesen, welche Auswirkungen Änderungen der Unternehmenswertvolatilität σ und des kurzfristigen Kassazinssatzes r auf den Credit-Spread eines Zerobonds haben. Dabei kann man feststellen, dass unabhängig vom Verschuldungsgrad des Unternehmens und der Restlaufzeit des Zerobonds der Credit-Spread steigt (sinkt), wenn σ zunimmt (abnimmt) bzw. r abnimmt (zunimmt). Die Auswirkungen einer Änderung der Unternehmenswertvolatilität sind dadurch zu erklären, dass die Ausübungswahrscheinlichkeit des Ausfall-Puts mit zunehmendem σ steigt. Der Wert des Ausfall-Puts erhöht sich, was einen sinkenden Marktwert des Zerobonds und einen steigenden Credit-Spread zur Folge hat. Der umgekehrte Effekt tritt bei abnehmendem σ auf. Um die Auswirkungen einer Änderung des kurzfristigen Kassazinssatzes analysieren zu können, ist zu beachten, dass mit zunehmendem r der Barwert des Rückzahlungsbetrages des Zerobonds sinkt. Dies führt einerseits zu einem niedrigeren Wert des Ausfall-Puts, so dass der Marktwert des Zerobonds steigt und der Credit-Spread sinkt. Wie bereits erwähnt, besitzen die Zerobondinhaber aber auch eine Anwartschaft auf den Rückzahlungsbetrag, was bei zunehmendem r zu einem sinkenden Marktwert des Zerobonds und zu einem steigenden Credit-Spread führt. Allerdings scheint der zuletzt genannte Effekt dominiert zu werden. Ein abnehmender kurzfristiger Kassazinssatz wirkt entgegengesetzt. Anzumerken bleibt, dass die Zeitstruktur der Credit-Spreads bei Änderungen der Unternehmenswertvolatilität und des kurzfristigen Kassazinssatzes im Wesentlichen erhalten bleibt, auch wenn dies aus den punktweisen Angaben in Tabelle 4.1 nicht unmittelbar hervor geht. So weisen die Credit-Spread-Kurven wie im Ausgangsszenario für einen Verschuldungsgrad von 30 % einen steigenden und für Verschuldungsgrade von 50 % und 70 % einen buckligen Verlauf auf.

4.2 Berücksichtigung des Zinsänderungsrisikos

4.2.1 Annahmen

Merton unterstellt eine flach verlaufende Zinsstrukturkurve, die sich im Zeitablauf nicht ändert. Diese Vereinfachung wird jetzt aufgegeben und eine zufallsabhängige Entwicklung der Zinsstruktur zugelassen. Das Zinsänderungsrisiko wird durch das in Kapitel 3.1.2.2 vorgestellte Gauß'sche 1-Faktor-Zinsstrukturmodell von Vasicek (1977) erfasst. Im Vasicek-Modell wird die Dynamik des kurzfristigen Kassazinssatzes unter dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ durch die stochastische Differenzialgleichung

$$dr(t) = \kappa(\beta - r(t))dt + \eta d\hat{W}_r(t), \tag{4.23}$$

mit $\kappa, \beta, \eta > 0$, beschrieben. Die Entwicklung des Geldmarktkontos ist ebenfalls zufallsabhängig und für alle $t \in [0, \mathcal{T}]$ durch $A(t) = e^{\int_0^t r(s)ds}$ gegeben. Für die Dynamik der Preise kreditrisikoloser Zerobonds gilt

$$dP(t,T) = (r(t) + b(t,T))P(t,T)dt + a(t,T)P(t,T)d\hat{W}_r(t), \tag{4.24}$$

mit

$$a(t,T) = -\frac{\eta}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right).$$

Der Ausdruck $b(t,T)$ gibt die erwartete momentane Risikoprämie eines kreditrisikolosen Zerobonds mit Restlaufzeit $T-t$ an, wobei $t \leq T$ und $T \in [0, \mathcal{T}]$ gilt, $\sqrt{a^2(t,T)}$ repräsentiert die Volatilität des Zerobonds. Die Dynamik des Unternehmenswerts genügt unter $\mathbb{P}$ der stochastischen Differenzialgleichung

$$dV(t) = \mu(t)V(t)dt + \sigma\rho V(t)d\hat{W}_r(t) + \sigma\sqrt{1-\rho^2}V(t)d\hat{W}_V(t), \tag{4.25}$$

mit $\sigma > 0$ und $-1 < \rho < 1$. Der Term $\mu(t)$ als erwartete Momentanrendite des Unternehmenswerts ist im Unterschied zum Modell von Merton nicht notwendigerweise konstant, erfüllt aber die Regularitätsbedingungen aus Annahme AAJ1 in Kapitel 3.2.1. Der Term σ stellt weiterhin die Unternehmenswertvolatilität dar.[9] Die Konstante ρ als „momentaner Korrelationskoeffizient“ erfasst die stochastische Abhängigkeit zwischen der Entwicklung des Unternehmenswerts und des kurzfristigen Kassazinssatzes.[10]

[9] Es gilt $\sqrt{\sigma^2\rho^2 + \sigma^2(1-\rho^2)} = \sigma$.

[10] Dabei wird der Fall einer vollkommen positiven oder negativen Korrelation zwischen Unternehmenswert und kurzfristigem Kassazinssatz, d.h. $\rho = 1$ oder $\rho = -1$, zunächst ausgeschlossen. In diesem Fall beeinflusst lediglich der durch $\hat{W}_r(t)$ beschriebene Wiener-Prozess die Entwicklung des Unterneh-

Die von Merton getroffenen Annahmen zur Finanzierungspolitik des betrachteten Unternehmens und zur Kapitalmarktform werden beibehalten, da in diesem Kapitel ausschließlich die Wirkungen einer Berücksichtigung des Zinsänderungsrisikos zu untersuchen sind.

4.2.2 Bewertung der Finanzierungstitel

Die Einzahlungsüberschüsse der Gesellschafter und der Zerobondinhaber unterscheiden sich nicht von denen aus dem Merton-Modell. Bei Fälligkeit des emittierten Zerobonds im Zeitpunkt T gelten daher weiterhin die Gleichungen (4.3) und (4.5). Auch die Bewertung dieser Ansprüche soll mittels der Martingalmaß-Technik erfolgen. Die Anwendung der Martingalmaß-Technik im hier vorgestellten Modell ist zulässig, da es wie das Merton-Modell ein Spezialfall des allgemeineren Modellrahmens aus Kapitel 3 ist. Zur Bestimmung eines äquivalenten Martingalmaßes wird erneut auf das Theorem von Girsanov zurückgegriffen. Geht man beispielsweise von konstanten Marktpreisen für Risiko λ_r und λ_V aus, lässt sich durch die Radon-Nikodym Ableitung

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}(\mathcal{T})} = \Lambda(\mathcal{T}) = \exp\left\{\int_0^{\mathcal{T}} (\lambda_r + \lambda_V)\, d\hat{W}(s) - \frac{1}{2}\int_0^{\mathcal{T}} \left(\lambda_r^2 + \lambda_V^2\right) ds\right\}$$

ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ definieren.[11] Der durch

$$\Lambda(t) = \exp\left\{\int_0^{t} (\lambda_r + \lambda_V)\, d\hat{W}(s) - \frac{1}{2}\int_0^{t} \left(\lambda_r^2 + \lambda_V^2\right) ds\right\}$$

gegebene zugehörige Dichteprozess ist ein Martingal unter $\mathbb{P}$.[12] Gemäß dem Theorem von Girsanov werden durch

$$dW_r(t) = d\hat{W}_r(t) - \lambda_r dt$$

menswerts und des kurzfristigen Kassazinssatzes als Störgröße und der vorliegende Modellrahmen reduziert sich auf ein Ein-Faktor-Modell. Die aufgeführten Annahmen zur Entwicklung der Zinsstruktur und des Unternehmenswerts orientieren sich an der Arbeit von Shimko/Tejima/van Deventer (1993). Allerdings wurde die Darstellung der Unternehmenswertentwicklung an den Modellrahmen aus Kapitel 3 angepasst. So unterstellen Shimko/Tejima/van Deventer, dass die erwartete Momentanrendite des Unternehmenswerts konstant ist und nur ein Wiener-Prozess als Störgröße die Unternehmenswertentwicklung bestimmt. Dieser Wiener-Prozess und der Wiener-Prozess aus der Entwicklung des kurzfristigen Kassazinssatzes sind stochastisch abhängig. Vgl. Shimko et al. (1993): S. 59ff.

[11]Die Annahme konstanter Marktpreise für Risiko ist für den hier vorgestellten Modellrahmen charakteristisch. Vgl. etwa Brennan/Xia (2000), die in ihrem Modell der intertemporalen Portefeuilleoptimierung auf einen vergleichbaren Modellrahmen zurückgreifen.

[12]Die für die Martingaleigenschaft hinreichende Novikov-Bedingung ist wegen $\lambda_r = \text{const.}$ und $\lambda_V = \text{const.}$ erfüllt.

und

$$dW_V(t) = d\hat{W}_V(t) - \lambda_V dt$$

voneinander unabhängige Wiener-Prozesse unter $\mathbb{Q}$ beschrieben. Die Prozesse für die diskontierte Preisentwicklung der kreditrisikolosen Zerobonds und die diskontierte Unternehmenswertentwicklung lassen sich unmittelbar aus (3.14) und ablesen (3.58). Mit $Z_P(t,T) = e^{-\int_0^t r(s)ds} P(t,T)$ und $Z_V(t) = e^{-\int_0^t r(s)ds} V(t)$ ergeben sich nach Ersetzen von $d\hat{W}_r(t) = dW_r(t) + \lambda_r dt$ und $d\hat{W}_V(t) = dW_V(t) + \lambda_V dt$ die stochastischen Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned} dZ_P(t,T) &= b(t,T)Z_P(t,T)dt + a(t,T)Z_P(t,T)\left(dW_r(t) + \lambda_r dt\right) \\ &= (b(t,T) + a(t,T)\lambda_r)Z_P(t,T)dt + a(t,T)Z_P(t,T)dW_r(t) \qquad (4.26) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} dZ_V(t) &= (\mu(t) - r(t))Z_V(t)dt + \sigma\rho Z_V(t)\left(dW_r(t) + \lambda_r dt\right) \\ &\quad + \sigma\sqrt{1-\rho^2} Z_V(t)\left(dW_V(t) + \lambda_V dt\right) \\ &= \left(\mu(t) - r(t) + \sigma\rho\lambda_r + \sigma\sqrt{1-\rho^2}\lambda_V\right) Z_V(t)dt + \sigma\rho Z_V(t)dW_r(t) \\ &\quad + \sigma\sqrt{1-\rho^2} Z_V(t)dW_V(t). \qquad (4.27) \end{aligned}$$

Die durch (4.26) und (4.27) bestimmten Prozesse sind Martingale, wenn die Driftfunktionen der stochastischen Differenzialgleichungen den Wert Null annehmen, so dass

$$dZ_P(t,T) = a(t,T)Z_P(t,T)dW_r(t)$$

und

$$dZ_V(t) = \sigma\rho Z_V(t)dW_r(t) + \sigma\sqrt{1-\rho^2} Z_V(t)dW_V(t)$$

gilt.[13] Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ stellt somit ein äquivalentes Martingalmaß dar, wenn die Marktpreise für Risiko in (4.26) und (4.27) die Bedingungen

$$b(t,T) = -a(t,T)\lambda_r = \frac{\eta}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right)\lambda_r, \qquad (4.28)$$

für alle $T \geq 0$ und $t \leq T$, sowie

$$\mu(t) - r(t) = -\sigma\rho\lambda_r - \sigma\sqrt{1-\rho^2}\lambda_V, \qquad (4.29)$$

[13]Die für die Martingaleigenschaft hinreichende Novikov-Bedingung ist in beiden Fällen auf Grund der ausschließlich zeitabhängigen bzw. konstanten Volatilität erfüllt.

für alle $t \geq 0$, erfüllen. Um mittels des Gleichungssystems (4.28)–(4.29) eindeutige Marktpreise für Risiko und ein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß bestimmen zu können, müssen entsprechend der Vorgehensweise in Kapitel 3.3.1.3 zwei Benchmark-Wertpapiere ausgewählt werden. Dazu bieten sich der kreditrisikolose Zerobond, der denselben Fälligkeitszeitpunkt T wie der vom betrachteten Unternehmen emittierte Zerobond besitzt, und der Unternehmenswert an. In kompakterer Schreibweise ergibt sich dann für das Gleichungssystem (4.28)–(4.29)

$$\begin{pmatrix} b(t,T) \\ \mu(t) - r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\eta}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) & 0 \\ \sigma\rho & \sigma\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_r \\ -\lambda_V \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die 2×2-Volatilitätsmatrix invertierbar ist. Die Berechnung der Determinante der Volatilitätsmatrix als

$$-\frac{\eta}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) \cdot \sigma\sqrt{1-\rho^2} - 0 \cdot \sigma\rho \neq 0,$$

für alle $\eta, \kappa, \sigma > 0$ und $-1 < \rho < 1$, zeigt, dass die Volatilitätsmatrix invertierbar ist und somit eindeutige Marktpreise für Risiko sowie ein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß existieren. Die Preisentwicklung des kreditrisikolosen Zerobonds und die Entwicklung des Unternehmenswerts unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ ist unter Verwendung von (4.28) und (4.29) durch

$$dP(t,T) = r(t)P(t,T)dt - \eta B(t,T)P(t,T)dW_r(t) \tag{4.30}$$

bzw.

$$dV(t) = r(t)V(t)dt + \sigma\rho V(t)dW_r(t) + \sigma\sqrt{1-\rho^2}V(t)dW_V(t) \tag{4.31}$$

gegeben, so dass die erwartete Momentanrendite des kreditrisikolosen Zerobonds und des Unternehmenswerts unter $\mathbb{Q}$ dem kurzfristigen Kassazinssatz entspricht. Die Entwicklung des kurzfristigen Kassazinssatzes unter $\mathbb{Q}$ lässt sich nach Ersetzen von $d\hat{W}_r(t) = dW_r(t) + \lambda_r dt$ in (4.23) durch die stochastische Differenzialgleichung

$$dr(t) = \kappa\left(\bar{r} - r(t)\right)dt + \eta dW_r(t), \tag{4.32}$$

mit $\bar{r} = \beta + \eta\lambda_r/\kappa$, beschreiben.[14]

Wie in Kapitel 3.3.1.3 für den allgemeineren Modellrahmen gezeigt wurde, gewährleistet die Invertierbarkeit der Volatilitätsmatrix nicht nur die Existenz eines eindeutigen

[14]Vgl. auch Gleichung (3.43) in Kapitel 3.1.2.2.

äquivalenten Martingalmaßes, sondern auch, dass die Benchmark-Wertpapiere den betrachteten Kapitalmarkt „aufspannen“. Die Einzahlungsüberschüsse der Gesellschafter und der Zerobondinhaber können demzufolge durch selbstfinanzierende Handelsstrategien aus risikoloser Anlage- und Verschuldung und Kauf und Verkauf der Benchmark-Wertpapiere dupliziert werden. Eine Bewertung der Ansprüche der Gesellschafter und der Zerobondinhaber mittels der Martingalmaß-Technik ist gerechtfertigt. Bei Arbitragefreiheit ergeben sich die heutigen Marktwerte von Eigenkapital und Zerobond als

$$E(0) = E^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r(s)ds}(V(T)-K)\mathbf{1}_{\{D_1\}}\right] \tag{4.33}$$

und

$$\begin{aligned} D(0,T) &= E^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r(s)ds}\left(K-(K-V(T))\mathbf{1}_{\{D_2\}}\right)\right] \\ &= E^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r(s)ds}\right]K - E^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r(s)ds}(K-V(T))\mathbf{1}_{\{D_2\}}\right] \\ &= P(0,T)K - E^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r(s)ds}(K-V(T))\mathbf{1}_{\{D_2\}}\right].^{15} \end{aligned} \tag{4.34}$$

Dabei sind D_1 und D_2 wie im Merton-Modell definiert. $P(0,T)$ symbolisiert den heutigen Preis eines kreditrisikolosen Zerobonds mit Fälligkeitszeitpunkt T im Vasicek-Modell, der unter Verwendung von Gleichung (3.47) als

$$P(0,T) = \exp\left\{A(0,T) - r(0)B(0,T)\right\}, \tag{4.35}$$

mit

$$A(0,T) = \left(\frac{\eta^2}{\kappa^2} - \bar{r}\right)(T - B(0,T)) - \frac{\eta^2}{4\kappa}B^2(0,T)$$

und

$$B(0,T) = \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa T}\right)$$

bestimmt werden kann.

Durch die Berücksichtigung des Zinsänderungsrisikos ist die Berechnung der Erwartungswerte aus (4.33) und (4.34) verglichen mit dem Modell von Merton schwieriger, kann allerdings durch den in Kapitel 3.3.2.1 beschriebenen Wechsel auf das Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ vereinfacht werden. Da der Terminkurs des Unternehmenswerts zum Liefertermin T im Zeitpunkt T gerade dem Unternehmenswert in diesem Zeitpunkt entspricht, so dass $F_V(T,T) = V(T)$ gilt, ergibt sich für (4.33) und (4.34)

$$E(0) = P(0,T)E^{\mathbb{Q}^T}\left[(F_V(T,T)-K)\mathbf{1}_{\{D_1\}}\right] \tag{4.36}$$

[15] Vgl. Satz MM1.

und

$$D(0,T) = P(0,T)K - P(0,T)E^{\mathbb{Q}^T}\left[(K - F_V(T,T))\mathbf{1}_{\{D_2\}}\right].^{16} \tag{4.37}$$

Die Mengen D_1 und D_2 sind definiert als

$$\begin{aligned} D_1 &= \{\omega \in \Omega : F_V(T,T) > K\}, \\ D_2 &= \{\omega \in \Omega : F_V(T,T) < K\}. \end{aligned}$$

Die Terminkursentwicklung des Unternehmenswerts unter dem Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ für den hier vorgestellten Modellrahmen kann unmittelbar aus Satz T3 abgeleitet werden. Es gilt

$$\begin{aligned} F_V(t,T) &= F_V(0,T)\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_0^t (\sigma_i(s) - a_i(s,T))^2\, ds \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{2}\int_0^t (\sigma_i(s) - a_i(s,T))dW_i^T(s)\right\} \end{aligned} \tag{4.38}$$

als Lösung der stochastischen Differenzialgleichung

$$dF_V(t,T) = \sum_{i=1}^{2}(\sigma_i(t) - a_i(t,T))F_V(t,T)dW_i^T(t), \tag{4.39}$$

mit

$$\begin{array}{lll} W_1^T = W_r^T, & \sigma_1(t) = \sigma\rho, & a_1(t,T) = -\frac{\eta}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right), \\ W_2^T = W_V^T, & \sigma_2(t) = \sigma\sqrt{1-\rho^2}, & a_2(t,T) = 0. \end{array}$$

Dabei werden durch $dW_r^T(t)$ und $dW_V^T(t)$ voneinander unabhängige Wiener-Prozesse unter $\mathbb{Q}^T$ beschrieben. Der Ausdruck $\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(\sigma_i(t) - a_i(t,T))^2}$ gibt die Volatilität des Terminkurses des Unternehmenswerts an. Da sämtliche Integranden in (4.38) ausschließlich zeitabhängig sind, ist der Terminkurs des Unternehmenswerts lognormalverteilt unter dem Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$, der logarithmierte Terminkurs gehorcht einer Normalverteilung.[17] Als weitere Vereinfachung von Bewertungsproblemen in einem solchen Modellrahmen wurde in Kapitel 3.3.2.2 ein Zeitwechsel vorgeschlagen. Die entsprechende „Zeittransformationsvariable" lässt sich für alle $t \in [0,T]$ bestimmen als

$$C(t) = \sum_{i=1}^{2}\int_0^t (\sigma_i(s) - a_i(s,T))^2 ds.$$

[16] Vgl. Satz T2.
[17] Vgl. Satz A8 im Anhang.

Unter Berücksichtigung der Parameter aus (4.39) ergibt sich

$$\begin{aligned}
C(t) &= \int_0^t \left(\sigma\rho + \frac{\eta}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-s)}\right)\right)^2 ds + \int_0^t \left(\sigma\sqrt{1-\rho^2}\right)^2 ds \\
&= \left(\sigma^2\rho^2 + \sigma^2 - \sigma^2\rho^2\right) t + 2\frac{\sigma\rho\eta}{\kappa}\int_0^t \left(1 - e^{-\kappa(T-s)}\right) ds + \frac{\eta^2}{\kappa^2}\int_0^t \left(1 - e^{-\kappa(T-s)}\right)^2 ds \\
&= 2\frac{\sigma\rho\eta}{\kappa}t - 2\frac{\sigma\rho\eta}{\kappa}\int_0^t e^{-\kappa(T-s)}ds + \frac{\eta^2}{\kappa^2}t - 2\frac{\eta^2}{\kappa^2}\int_0^t e^{-\kappa(T-s)}ds \\
&\quad + \frac{\eta^2}{\kappa^2}\int_0^t e^{-2\kappa(T-s)}ds \\
&= \left(\sigma^2 + 2\frac{\sigma\rho\eta}{\kappa} + \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right) t - 2\frac{\sigma\rho\eta}{\kappa}e^{-\kappa T}\int_0^t e^{\kappa s}ds - 2\frac{\eta^2}{\kappa^2}e^{-\kappa T}\int_0^t e^{\kappa s}ds \\
&\quad + \frac{\eta^2}{\kappa^2}e^{-2\kappa T}\int_0^t e^{2\kappa s}ds.
\end{aligned}$$

Berechnen der Integrale und Zusammenfassen der Terme führt zu

$$\begin{aligned}
C(t) &= \left(\sigma^2 + 2\frac{\sigma\rho\eta}{\kappa} + \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right) t - 2\frac{\sigma\rho\eta}{\kappa}e^{-\kappa T}\left(\frac{1}{\kappa}e^{\kappa t} - \frac{1}{\kappa}\right) - 2\frac{\eta^2}{\kappa^2}e^{-\kappa T}\left(\frac{1}{\kappa}e^{\kappa t} - \frac{1}{\kappa}\right) \\
&\quad + \frac{\eta^2}{\kappa^2}e^{-2\kappa T}\left(\frac{1}{\kappa}e^{2\kappa t} - \frac{1}{2\kappa}\right) \\
&= \left(\sigma^2 + 2\frac{\sigma\rho\eta}{\kappa} + \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right) t - 2\frac{\sigma\rho\eta}{\kappa}\left(\frac{1}{\kappa}e^{-\kappa(T-t)} - \frac{1}{\kappa}e^{-\kappa T}\right) \\
&\quad - 2\frac{\eta^2}{\kappa^2}\left(\frac{1}{\kappa}e^{-\kappa(T-t)} - \frac{1}{\kappa}e^{-\kappa T}\right) + \frac{\eta^2}{\kappa^2}\left(\frac{1}{2\kappa}e^{-2\kappa(T-t)} - \frac{1}{2\kappa}e^{-2\kappa T}\right) \\
&= \left(\sigma^2 + 2\frac{\sigma\rho\eta}{\kappa} + \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right) t - \left(2\frac{\sigma\rho\eta}{\kappa^2} + 2\frac{\eta^2}{\kappa^3}\right)\left(e^{-\kappa(T-t)} - e^{-\kappa T}\right) \\
&\quad + \frac{\eta^2}{2\kappa^3}\left(e^{-2\kappa(T-t)} - e^{-2\kappa T}\right).
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Der lognormalverteilte Terminkurs des Unternehmenswerts unter dem Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ genügt nach dem Zeitwechsel demzufolge

$$F_V(t,T) = F_V(0,T)\exp\left\{-\frac{1}{2}C(t) + W(C(t))\right\}, \tag{4.41}$$

für alle $t \in [0,T]$. Dabei stellt $W(s)$ einen (eindimensionalen) Wiener-Prozess bezüglich der zeittransformierten Filtration $\{\mathcal{F}^C(s) : s \in [0,T^C]\}$, mit $T^C = C(T)$, dar. Der logarithmierte Terminkurs des Unternehmenswerts

$$\ln F_V(t,T) = \ln F_V(0,T) - \frac{1}{2}C(t) + W(C(t)) \tag{4.42}$$

ist normalverteilt mit Erwartungswert

$$E[\ln F_V(t,T)] = \ln F_V(0,T) - \frac{1}{2}C(t) \tag{4.43}$$

und Standardabweichung

$$\sqrt{\mathrm{Var}[\ln F_V(t,T)]} = \sqrt{\mathrm{Var}[W(C(t))]} = \sqrt{C(t)}. \tag{4.44}$$

Der nachfolgende Satz zeigt, dass es analog zum Merton-Modell möglich ist, die Bewertungsgleichungen (4.36) und (4.37) analytisch zu lösen.

Satz U2 [Marktwerte der Finanzierungstitel]. *Die Marktwerte von Eigenkapital und Zerobond gemäß Gleichung (4.36) und (4.37) sind gegeben durch*

$$E(0) = V(0)\Phi(d_1^F) - P(0,T)K\Phi(d_2^F)$$

und

$$D(0,T) = V(0)\Phi(-d_1^F) + P(0,T)K\Phi(d_2^F),$$

mit

$$d_{1,2}^F = \frac{\ln\left(\frac{V(0)}{KP(0,T)}\right) \pm \frac{1}{2}C(T)}{\sqrt{C(T)}}$$

und

$$C(T) = \left(\sigma^2 + 2\frac{\sigma\rho\eta}{\kappa} + \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right)T - \left(2\frac{\sigma\rho\eta}{\kappa^2} + 2\frac{\eta^2}{\kappa^3}\right)\left(1 - e^{-\kappa T}\right) + \frac{\eta^2}{2\kappa^3}\left(1 - e^{-2\kappa T}\right).$$

$\Phi(\cdot)$ *ist die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.* $P(0,T)$ *gibt den Preis eines kreditrisikolosen Zerobonds mit Laufzeit* T *im Vasicek-Modell gemäß Gleichung (4.35) an.*

Beweis: Mit der Bewertungsformel für einen europäischen Call aus (6.26) im Anhang ergibt sich der Marktwert des Eigenkapitals. Der Marktwert der Zerobonds kann mit der Bewertungsformel für einen europäischen Put aus (6.28) im Anhang als $D(0,T) = P(0,T)K - P(0,T)K\Phi(-d_2^F) + V(0)\Phi(-d_1^F)$ bestimmt werden. Unter Berücksichtigung der Symmetrie der Normalverteilung folgt $D(0,T) = P(0,T)K\Phi(d_2^F) + V(0)\Phi(-d_1^F)$.
$\square$

Ein Vergleich der Bewertungsformeln für die Finanzierungstitel aus Satz U2 mit denen aus Satz U1 zeigt, dass zwei Anpassungen bei einer Berücksichtigung des Zinsänderungsrisikos vorzunehmen sind. Zum einen ist der Diskontierungsfaktor durch den Preis eines kreditrisikolosen Zerobonds im Zinsstrukturmodell von Vasicek gegeben, was unmittelbar einleuchtet. Die zweite Anpassung bezieht sich auf die Unternehmenswertvolatilität. Diese bestimmt im Merton-Modell die Schwankungsbreite des

Unternehmenswerts bei Fälligkeit des vom betrachteten Unternehmen emittierten Zerobonds unter dem bewertungsrelevanten äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$. Gemessen wird sie anhand der Standardabweichung des logarithmierten Unternehmenswerts in diesem Zeitpunkt aus Gleichung (4.21). Anders als im Merton-Modell erfolgt die Bewertung der Finanzierungstitel bei einer Berücksichtigung des Zinsänderungsrisikos nicht mehr unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$, sondern unter dem Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$. Dies dient ausschließlich einer (rechnerischen) Vereinfachung des Bewertungsproblems und ist gleichbedeutend mit dem Übergang vom Kassa- auf den Terminmarkt. Statt des Unternehmenswerts wird zur Bewertung der Finanzierungstitel der Terminkurs des Unternehmenswerts zum Liefertermin T herangezogen. Bei Fälligkeit des zu bewertenden Zerobonds stimmen Terminkurs und Unternehmenswert überein, es gilt $F_V(T,T) = V(T)$. Der logarithmierte Unternehmenswert bei Fälligkeit des Zerobonds ist wie im Merton-Modell normalverteilt, wobei die entsprechende Standardabweichung unter Verwendung von (4.44) als

$$\sqrt{\mathrm{Var}[\ln V(T)]} = \sqrt{C(T)} \tag{4.45}$$

berechnet werden kann. Dies zeigt, dass bei einer Berücksichtigung des Zinsänderungsrisikos die Unternehmenswertvolatilität σ alleine kein geeignetes Maß für die Schwankungsbreite des Unternehmenswerts bei Fälligkeit des Zerobonds darstellt. Vielmehr bestimmen jetzt auch die Parameter κ und η aus der Dynamik des kurzfristigen Kassazinssatzes sowie der Parameter ρ als momentaner Korrelationskoeffizient zwischen Unternehmenswert und kurzfristigem Kassazinssatz die Standardabweichung des logarithmierten Unternehmenswerts.[18]

4.2.3 Komparative Statik der Credit-Spreads

Im Modell von Merton ist der Credit-Spread eines Zerobonds gemäß (4.20) bei gegebener Restlaufzeit T eine Funktion des Unternehmenswerts $V(0)$, des Rückzahlungsbetrages K, der Unternehmenswertvolatilität σ und des kurzfristigen Kassazinssatzes r. Durch die Berücksichtigung des Zinsänderungsrisikos wird der funktionale Zusammenhang für den Credit-Spread komplizierter, da auch die Parameter κ, η und $\bar{r}$ aus der Dynamik des kurzfristigen Kassazinssatzes sowie der Korrelationskoeffizient ρ in die

[18]Die Standardabweichung des logarithmierten Unternehmenswerts ist wie bisher unabhängig vom zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeitsmaß, da der Übergang zwischen äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßen unter Verwendung des Theorems von Girsanov nur die Driftfunktion eines stochastischen Prozesses betrifft.

Bewertungsformeln für den Zerobond eingehen. Unter Verwendung des in Satz U2 bestimmten Marktwerts gilt für den Credit-Spread eines Zerobonds mit einer Restlaufzeit von T Jahren

$$\Delta(0,T) = -\frac{1}{T}\ln\left(\frac{D(0,T)}{K}\right) + \frac{1}{T}\ln P(0,T). \tag{4.46}$$

Credit-Spreads bei Berücksichtigung des Zinsänderungsrisikos

(in Bp p.a.)

Ausgangsdaten: $r(0) = 0,05$, $V(0) = 100$, $\kappa = 0,4$, $\eta = 0,06$, $\bar{r} = 0,06$, $\sigma = 0,25$, $\rho = 0,25$

	Verschuldungsgrad 30 %			Verschuldungsgrad 50 %			Verschuldungsgrad 70 %		
	Restlaufzeit in Jahren			Restlaufzeit in Jahren			Restlaufzeit in Jahren		
	5	10	20	5	10	20	5	10	20
Ausgangsdaten	9,75	30,43	45,10	60,80	83,68	82,20	157,23	146,99	116,91
Parameter ρ									
$-0,25$	2,69	9,64	15,36	29,52	39,48	36,90	99,23	84,79	60,99
0	5,57	18,72	28,79	44,24	60,62	58,60	128,04	115,72	88,54
Parameter σ									
$0,20$	2,04	11,30	20,70	25,36	43,71	45,90	90,33	91,22	72,65
$0,30$	28,05	62,24	80,90	113,35	136,70	129,24	238,49	213,77	170,82
Parameter $r(0)$									
$0,02$	12,64	35,65	49,51	74,11	95,28	89,17	184,91	164,64	125,91
$0,08$	7,45	25,86	41,00	49,52	73,21	75,66	132,82	130,78	108,39
Parameter κ									
$0,20$	16,18	71,51	148,84	83,10	154,84	216,82	195,59	239,90	271,77
$0,60$	7,05	19,42	26,20	49,95	61,12	53,66	137,32	115,15	81,43
Parameter η									
$0,01$	3,28	9,02	11,72	32,25	36,58	29,08	103,39	78,44	49,06
$0,10$	25,66	82,62	128,26	109,78	171,52	191,36	236,81	259,97	243,17
Parameter $\bar{r}$									
$0,04$	12,25	41,90	68,66	72,34	108,76	118,50	181,27	184,78	163,19
$0,08$	7,71	21,69	28,43	50,82	63,35	54,97	135,69	115,25	80,99

Tabelle 4.2: Komparative Statik der Credit-Spreads bei Berücksichtigung des Zinsänderungsrisikos

Die folgende komparativ-statische Analyse geht der Frage nach, wie sich eine Berücksichtigung des Zinsänderungsrisikos auf die Credit-Spreads von Zerobonds auswirkt. Tabelle 4.2 führt zunächst die Credit-Spreads von Zerobonds für die Ausgangsdaten auf. Abbildung 4.3 stellt die entsprechenden Credit-Spread-Kurven im Restlaufzeitintervall von 0 bis 20 Jahren dar. Wie im als Vergleichsbasis dienenden Modell von Merton steigt der Credit-Spread eines Zerobonds unabhängig von der Restlaufzeit mit

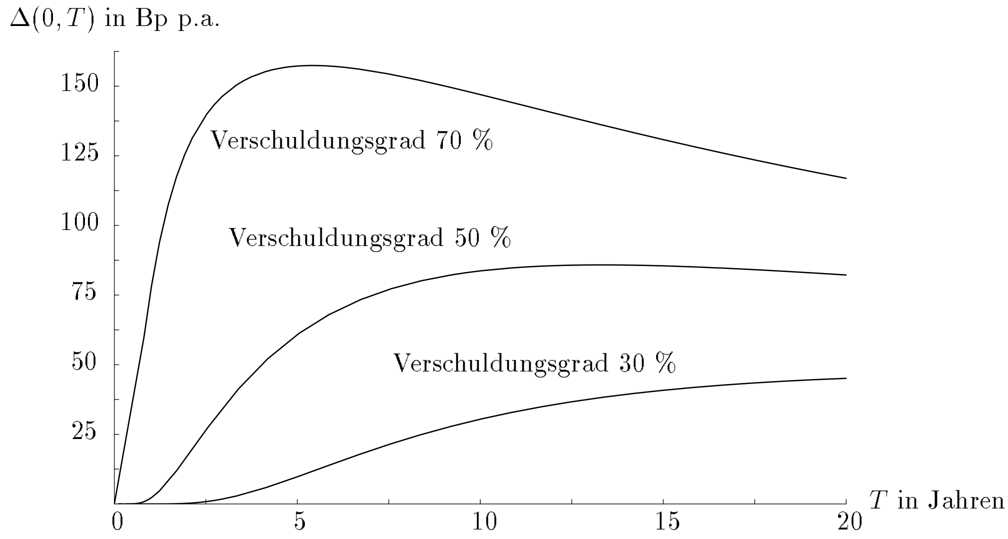

Abbildung 4.3: Credit-Spread-Kurven bei Berücksichtigung des Zinsänderungsrisikos

höherem Verschuldungsgrad des emittierenden Unternehmens. Allerdings ist der Credit Spread höher als im Merton-Modell. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Schwankungsbreite des Unternehmenswerts bei Fälligkeit des Zerobonds, die wiederum anhand der in (4.45) definierten Standardabweichung des logarithmierten Unternehmenswerts in diesem Zeitpunkt gemessen wird, auf Grund des im Ausgangsszenario positiven Korrelationskoeffizienten größer ist. Die gleichgerichtete Entwicklung des Unternehmenswerts und des kurzfristigen Kassazinssatzes führt somit zu einer höheren Ausübungswahrscheinlichkeit und zu einem höheren Wert des Ausfall-Puts als im Merton-Modell. Der resultierende niedrigere Marktwert des Zerobonds impliziert einen höheren Credit-Spread. Bei negativem Korrelationskoeffizienten kann sich der Effekt umkehren, so dass der Credit-Spread im Vergleich zum Merton-Modell sinkt. Dies bestätigt ein Blick auf Tabelle 4.2. Der dort für einen Korrelationskoeffizienten $\rho = -0,25$ aufgeführte Credit-Spread ist unabhängig vom Verschuldungsgrad des Unternehmens zumindest im kurzen und mittleren Restlaufzeitbereich des Zerobonds niedriger als im Merton-Modell. Ein negativer Korrelationskoeffizient sorgt in diesem Restlaufzeitbereich für eine Diversifikation des Kreditrisikos, da die geringere Schwankungsbreite des Unternehmenswerts bei Fälligkeit des Zerobonds die Ausübungswahrscheinlichkeit des Ausfall-Puts senkt und dessen Wert mindert.[19] Der damit verbundene höhere Marktwert des Zerobonds hat einen niedrigeren Credit-Spread zur Folge.

[19] Collin-Dufresne/Goldstein (2001) sprechen in einem ähnlichen Zusammenhang von einem „natural hedge against credit risk". Vgl. Collin-Dufresne/Goldstein (2001): S. 1945f.

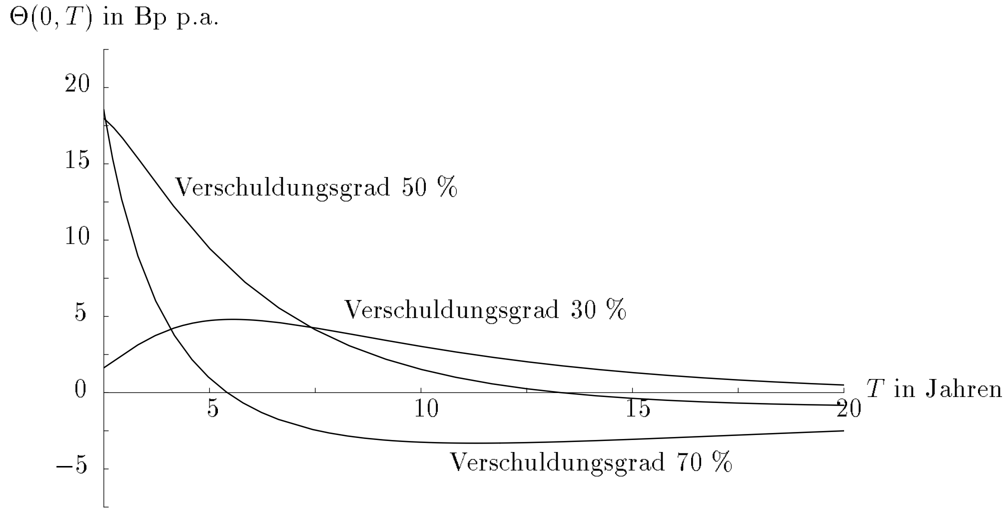

Abbildung 4.4: Theta der Credit-Spreads bei Berücksichtigung des Zinsänderungsrisikos

Die Zeitstruktur der Credit-Spreads weist trotz der Berücksichtigung des Zinsänderungsrisikos im Wesentlichen die gleichen Eigenschaften auf wie im Merton-Modell. Wie Abbildung 4.3 zeigt, steigt der Credit Spread für einen Verschuldungsgrad von 30 % mit längerer Restlaufzeit, während er sich für einen Verschuldungsgrad von 50 % und 70 % zunächst mit längerer Restlaufzeit ausweitet, um ab einer gewissen Restlaufzeit wieder abzunehmen. Der vergleichbare Verlauf der Credit-Spread-Kurven ist aus mathematischer Sicht auf das Theta des Credit-Spreads, definiert als Ableitung von Gleichung (4.46) nach der Restlaufzeit des Zerobonds, zurückzuführen. Gemäß Abbildung 4.4 stellt sich das Theta bei der vorliegenden Datenkonstellation ähnlich wie im Merton-Modell dar, allerdings kommt es für einen mittleren und hohen Verschuldungsgrad erst mit im Vergleich zum Merton-Modell längeren Restlaufzeiten zu einem Vorzeichenwechsel und somit zu fallenden Credit-Spread-Kurven. Der Verlauf der Credit-Spread-Kurven ist weitestgehend unabhängig davon, welches Vorzeichen der Korrelationskoeffizient besitzt. Auch wenn man von einem negativen Korrelationskoeffizienten, also von einer gegenläufigen Entwicklung des Unternehmenswerts und des kurzfristigen Kassazinssatzes ausgeht, verlaufen die Credit-Spread-Kurven etwa wie in Abbildung 4.3, allerdings auf einem niedrigeren Niveau.

Wie sich Änderungen der Unternehmenswertvolatilität σ und der Zinsstrukturparameter $r(0), \kappa, \eta$ und $\bar{r}$ auf den Credit-Spread eines Zerobonds auswirken, kann aus Tabelle 4.2 abgelesen werden: Der Credit-Spread steigt (sinkt) unabhängig vom Verschuldungsgrad des Unternehmens und der Restlaufzeit des Zerobonds, wenn σ oder η zunimmt (abnimmt) bzw. $r(0), \kappa$ oder $\bar{r}$ abnimmt (zunimmt). Die Auswirkungen von Änderungen der Unternehmenswertvolatilität und des kurzfristigen Kassazinssatzes können analog zum Merton-Modell damit begründet werden, dass die Ausübungswahrscheinlichkeit des Ausfall-Puts durch die mit zunehmendem σ oder η höhere Schwankungsbreite des Unternehmenswerts steigt. Der Wert des Ausfall-Puts erhöht sich, was einen sinkenden Marktwert des Zerobonds und einen steigenden Credit-Spread zur Folge hat. Der umgekehrte Effekt tritt bei abnehmendem σ oder η auf. Die beschriebenen Auswirkungen der Parameteränderungen treten dabei unabhängig vom Vorzeichen des Korrelationskoeffizienten ρ auf. Auch die Auswirkungen einer Änderung des kurzfristigen Kassazinssatzes lassen sich analog zum Merton-Modell erklären. So sinkt mit zunehmendem $r(0)$ der Barwert des Rückzahlungsbetrages des Zerobonds. Einerseits führt dies zu einem niedrigeren Wert des Ausfall-Puts, so dass der Marktwert des Zerobonds steigt und der Credit-Spread sinkt. Andererseits besitzen die Zerobondinhaber eine Anwartschaft auf den Rückzahlungsbetrag, so dass mit zunehmendem $r(0)$ der Marktwert des Zerobonds sinkt und der Credit-Spread steigt. Wie im Merton-Modell scheint der zuletzt genannte Effekt dominiert zu werden. Ein abnehmender kurzfristiger Kassazinssatz wirkt wiederum entgegengesetzt. Die Auswirkungen von Änderungen des Parameters κ lassen sich unter anderem dadurch begründen, dass ein zunehmendes κ, also eine größere Anpassungsgeschwindigkeit an das risikoadjustierte Mean Reversion-Niveau $\bar{r}$, nicht nur die Schwankungsbreite des kurzfristigen Kassazinssatzes, sondern auch die des Unternehmenswerts vermindert. Der Wert des Ausfall-Puts sinkt, was einen steigenden Marktwert des Zerobonds und einen sinkenden Credit-Spread zur Folge hat. Bei abnehmender Anpassungsgeschwindigkeit kehrt sich dieser Effekt um. Die Auswirkungen eines Anstiegs von $\bar{r}$ auf den Credit-Spread sind vergleichbar mit denen eines Anstiegs von $r(0)$, da ein höheres Mean Reversion-Niveau ebenfalls den Barwert des Rückzahlungsbetrages des Zerobonds senkt.

4.3 Begrenzung von Kreditausfällen durch Sicherungsklauseln

4.3.1 Annahmen

Neben der Vernachlässigung des Zinsänderungsrisikos besteht ein wesentliches Charakteristikum des Merton-Modells darin, dass der vom betrachteten Unternehmen emittierte Zerobond ausschließlich einen Anspruch auf Rückzahlung verbrieft. Im Folgenden wird das Merton-Modell um eine Sicherungsklausel erweitert. Diese Sicherungsklausel berechtigt die Zerobondinhaber, eine Neuordnung der Eigentumsverhältnisse des Unternehmens herbeizuführen, sobald der Unternehmenswert den Barwert des um einen konstanten Anteil verringerten Rückzahlungsbetrages des Zerobonds erreicht. Während die Zerobondinhaber bei Erreichen dieser Ausfallschranke das Unternehmen übernehmen, wird der Anspruch der Gesellschafter durch die vorzeitige Neuordnung der Eigentumsverhältnisse wertlos, da sie ihre Beteiligung am Unternehmen verlieren.

Hinsichtlich der Annahmen zur Dynamik der Zinsstruktur und des Unternehmenswerts wird der in Kapitel 4.2 vorgestellte Modellrahmen beibehalten.[20]

4.3.2 Bewertung der Finanzierungstitel

Wie bisher sollen die Zahlungsströme der emittierten Finanzierungstitel mit der Unternehmenswertentwicklung verknüpft werden. Durch die Einführung der Sicherungsklausel ist dabei im Unterschied zum Merton-Modell nicht nur der Fälligkeitszeitpunkt des Zerobonds relevant, sondern auch die erste Durchgangszeit des Unternehmenswerts durch die Ausfallschranke. Diese so genannte „first passage time" ist im vorliegenden Modellrahmen definiert als $\tau = \inf\{t \in [0,T] : V(t) = yP(t,T)\}$. Der Ausdruck $yP(t,T)$, mit $0 \leq y \leq K$ und $t \in [0,T]$, als Barwert des verringerten Rückzahlungsbetrages des Zerobonds bestimmt die Höhe der Ausfallschranke im Zeitpunkt t. Der Diskontierungsfaktor ist durch den Preis eines kreditrisikolosen Zerobonds im Zinsstrukturmodell von Vasicek gegeben. Auf Grund der zufallsabhängigen Entwicklung der Zinsstruktur sind die zukünftigen Zerobondpreise unsicher, so dass auch die Ausfallschranke zufallsabhängig ist.

Da die Zerobondinhaber das Unternehmen übernehmen, sobald die Ausfallschranke

[20] Das hier vorgestellte Modell stellt eine Erweiterung des Modells von Black/Cox (1976) um das Zinsänderungsrisiko dar. Der Modellrahmen ist vergleichbar mit dem von Briys/de Varenne (1997).

erreicht wird, hat ihr Anspruch im Zeitpunkt τ den Wert

$$D(\tau, T) \quad = \quad V(\tau) = yP(\tau, T). \tag{4.47}$$

Wird die Ausfallschranke bis zur Fälligkeit des Zerobonds nicht erreicht, wirken dieselben Mechanismen wie im Modell von Merton. Definiert man das Minimum des Unternehmenswerts im Intervall $[0, T]$ als $\inf_{0 \leq t \leq T} V(t)$ und fasst die relevanten Szenarien in den Mengen D_1 und D_2, mit

$$\begin{aligned} D_1 &= \{\omega \in \Omega : V(T) > K, \inf_{0 \leq t \leq T} V(t) > yP(t, T)\}, \\ D_2 &= \{\omega \in \Omega : \inf_{0 \leq t \leq T} V(t) > yP(t, T)\}, \end{aligned}$$

zusammen, ergibt sich der Anspruch der Zerobondinhaber im Fälligkeitszeitpunkt T als

$$D(T, T) \quad = \quad y + (V(T) - y)\mathbf{1}_{\{D_2\}} - (V(T) - K)\mathbf{1}_{\{D_1\}}. \tag{4.48}$$

Gleichung (4.48) verdeutlicht, dass die Zerobondinhaber den gleichen Einzahlungsüberschuss wie im Merton-Modell erhalten, wenn der Unternehmenswert bis zur Fälligkeit des Zerobonds die Ausfallschranke nicht erreicht, d.h. ein in der Menge D_2 enthaltener Umweltzustand eintritt.[21] Gemäß (4.48) und (4.47) lässt sich der Anspruch der Zerobondinhaber als Portefeuille bestehend aus einem gekauften europäischen Down-and-out Call auf den Unternehmenswert mit Basispreis y, Fälligkeit im Zeitpunkt T und Knock-out-Schranke („knock-out barrier“) $yP(t, T)$, für alle $t \in [0, T]$, und einem verkauften europäischen Down-and-out Call auf den Unternehmenswert mit Basispreis K und identischer Fälligkeit und Knock-out-Schranke interpretieren. Der Anspruch der Zerobondinhaber bei Erreichen der Knock-out-Schranke kann als Entschädigungszahlung („rebate“) des europäischen Down-and-out Call mit Basispreis y, fällig bei Erreichen der Knock-out-Schranke, angesehen werden. Die Höhe dieser Entschädigungszahlung beträgt $yP(\tau, T)$, für $\tau \in [0, T]$.

Die Gesellschafter erhalten bei Erreichen der in der Sicherungsklausel vereinbarten Ausfallschranke nichts, so dass sich ihr Einzahlungsüberschuss bei Fälligkeit des Zerobonds im Zeitpunkt T als

$$E(T) \quad = \quad (V(T) - K)\mathbf{1}_{\{D_1\}} \tag{4.49}$$

ergibt. Wie Gleichung (4.49) zeigt, stimmt der Anspruch der Gesellschafter mit einem gekauften europäischen Down-and-out Call auf den Unternehmenswert mit Basispreis

[21] Dies lässt sich zeigen, wenn man den Zusammenhang $V(T) - \max(V(T) - K, 0) = K - \max(K - V(T), 0)$ ausnutzt.

K, Fälligkeit im Zeitpunkt T und Knock-out-Schranke $yP(t,T)$, für alle $t \in [0,T]$, überein. Im Fall des Erreichens der Knock-out-Schranke erfolgt keine Entschädigungszahlung.

Analog zur Vorgehensweise in Kapitel 4.2.2 können die Marktwerte von Eigenkapital und Zerobond unter Verwendung der Martingalmaß-Technik bestimmt werden. Nach einem Wechsel auf das Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ gilt

$$\begin{aligned} E(0) &= E^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r(s)ds}(V(T)-K)\mathbf{1}_{\{D_1\}}\right] \\ &= P(0,T)E^{\mathbb{Q}^T}\left[(F_V(T,T)-K)\mathbf{1}_{\{D_1\}}\right] \end{aligned} \tag{4.50}$$

und

$$\begin{aligned} D(0,T) &= E^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r(s)ds}y\right] + E^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r(s)ds}(V(T)-y)\mathbf{1}_{\{D_2\}}\right] \\ &\quad -E^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r(s)ds}(V(T)-K)\mathbf{1}_{\{D_1\}}\right] \\ &= yP(0,T) + P(0,T)E^{\mathbb{Q}^T}\left[(F_V(T,T)-y)\mathbf{1}_{\{D_2\}}\right] \\ &\quad -P(0,T)E^{\mathbb{Q}^T}\left[(F_V(T,T)-K)\mathbf{1}_{\{D_1\}}\right]. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Zur Berechnung der Erwartungswerte aus (4.50) und (4.51) ist wiederum die zeittransformierte Terminkursentwicklung des Unternehmenswerts aus (4.41) heranzuziehen. Obwohl die Wahrscheinlichkeitsverteilung der ersten Durchgangszeit des Unternehmenswerts durch die Ausfallschranke bei der Erwartungswertberechnung berücksichtigt werden muss, können die Bewertungsgleichungen analytisch gelöst werden, wie der folgende Satz zeigt.

Satz U3 [Marktwerte der Finanzierungstitel]. *Die Marktwerte von Eigenkapital und Zerobond gemäß Gleichung (4.50) und (4.51) sind für eine Ausfallschranke $yP(t,T)$, für alle $t \in [0,T]$ und mit $y \leq K$ sowie $yP(0,T) < V(0)$, gegeben durch*

$$\begin{aligned} E(0) &= V(0)\Phi(d_1^F) - P(0,T)K\Phi(d_2^F) \\ &\quad -V(0)/(yP(0,T))\left[y^2P^2(0,T)/V(0)\Phi(c_1^F) - P(0,T)K\Phi(c_2^F)\right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} D(0,T) &= yP(0,T) + V(0)\Phi(\bar{d}_1^F) - P(0,T)y\Phi(\bar{d}_2^F) \\ &\quad -V(0)/(yP(0,T))\left[y^2P^2(0,T)/V(0)\Phi(\bar{c}_1^F) - P(0,T)y\Phi(\bar{c}_2^F)\right] \\ &\quad -V(0)\Phi(d_1^F) + P(0,T)K\Phi(d_2^F) \\ &\quad +V(0)/(yP(0,T))\left[y^2P^2(0,T)/V(0)\Phi(c_1^F) - P(0,T)K\Phi(c_2^F)\right]. \end{aligned}$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
d_{1,2}^F &= \frac{\ln\left(\frac{V(0)}{KP(0,T)}\right) \pm \frac{1}{2}C(T)}{\sqrt{C(T)}}, \\
c_{1,2}^F &= \frac{\ln\left(\frac{y^2P^2(0,T)}{V(0)KP(0,T)}\right) \pm \frac{1}{2}C(T)}{\sqrt{C(T)}}, \\
\bar{d}_{1,2}^F &= \frac{\ln\left(\frac{V(0)}{yP(0,T)}\right) \pm \frac{1}{2}C(T)}{\sqrt{C(T)}}, \\
\bar{c}_{1,2}^F &= \frac{\ln\left(\frac{yP^2(0,T)}{V(0)P(0,T)}\right) \pm \frac{1}{2}C(T)}{\sqrt{C(T)}}
\end{aligned}
$$

und

$$C(T) = \left(\sigma^2 + 2\frac{\sigma\rho\eta}{\kappa} + \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right)T - \left(2\frac{\sigma\rho\eta}{\kappa^2} + 2\frac{\eta^2}{\kappa^3}\right)\left(1 - e^{-\kappa T}\right) + \frac{\eta^2}{2\kappa^3}\left(1 - e^{-2\kappa T}\right).$$

$\Phi(\cdot)$ *ist die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.* $P(0,T)$ *gibt den Preis eines kreditrisikolosen Zerobonds mit Laufzeit* T *im Vasicek-Modell gemäß Gleichung (4.35) an.*

Beweis: Mit der Bewertungsformel für einen europäischen Down-and-out Call aus (6.32) im Anhang ergibt sich der Marktwert des Eigenkapitals. Der Marktwert der Zerobonds kann ebenfalls mittels (6.32) bestimmt werden. Dazu ist die Formel mit den Basispreisen y und K zu verwenden. □

Anhand der Bewertungsgleichungen aus Satz U3 kann verdeutlicht werden, wie sich die Vereinbarung der Sicherungsklausel auf die Marktwerte der emittierten Finanzierungstitel auswirkt. So entspricht der Marktwert des Eigenkapitals dem aus Satz U2 abzüglich eines Knock-out-Abschlags („knock-out discount“)

$$V(0)/(yP(0,T))\left[y^2P^2(0,T)/V(0)\Phi(c_1^F) - P(0,T)K\Phi(c_2^F)\right].$$

Dies ist der mit einem Faktor $V(0)/(yP(0,T))$ multiplizierte Preis eines europäischen Calls mit Basispreis K und einer Preisentwicklung des Basiswerts, die durch den Prozess $\{y^2P^2(0,T)/V(0) : t \in [0,T]\}$ gegeben ist. Dabei bestimmt y als verringerter Rückzahlungsbetrag des Zerobonds maßgeblich den Wert des Knock-out-Abschlags. Geht y gegen Null, ist der Knock-out-Abschlag wertlos und der Marktwert des Eigenkapitals stimmt mit dem in Satz U2 ermittelten Marktwert überein. Für ein (strikt) positives y besitzt der Knock-out-Abschlag einen (strikt) positiven Wert, so dass der Marktwert des Eigenkapitals geringer ist als der aus Satz U2 bei ansonsten gleichen

Ausgangsdaten. Der Knock-out-Abschlag misst demnach die Vermögensminderung der Gesellschafter durch die Vereinbarung der Sicherungsklausel. Der Marktwert des Zerobonds sinkt niemals unter die Ausfallschranke $yP(t,T)$. Unterstellt man, dass die Ausfallschranke dem Barwert des Rückzahlungsbetrages des Zerobonds entspricht, d.h. für alle $t \in [0,T]$ gilt $yP(t,T) = KP(t,T)$, lassen sich Kreditausfälle gänzlich vermeiden. Die Zerobondinhaber können bei Erreichen der Ausfallschranke im Zeitpunkt τ das Unternehmen verkaufen und den Erlös $KP(\tau,T)$ risikolos anlegen. Dadurch erhalten sie bei Fälligkeit des Zerobonds mit Sicherheit den Rückzahlungsbetrag K.

4.3.3 Komparative Statik der Credit-Spreads

Die folgenden komparativ-statisch Analysen zeigen, wie sich die Vereinbarung der im vorherigen Kapitel beschriebenen Sicherungsklausel auf die Credit-Spreads von Zerobonds auswirkt. Dabei wird das Zinsänderungsrisiko zunächst vernachlässigt. Eine

Credit-Spreads mit Sicherungsklausel bei Vernachlässigung des Zinsänderungsrisikos

(in Bp p.a.)

Ausgangsdaten: $r = 0,05$, $V(0) = 100$, $\sigma = 0,25$, $y = 0,75K$

	Verschuldungsgrad 30 %			Verschuldungsgrad 50 %			Verschuldungsgrad 70 %		
	Restlaufzeit in Jahren			Restlaufzeit in Jahren			Restlaufzeit in Jahren		
	5	10	20	5	10	20	5	10	20
Ausgangsdaten	3,19	8,69	10,67	31,33	33,57	24,56	97,50	68,15	38,87
Parameter σ									
$0,20$	0,28	1,48	2,46	8,76	11,87	9,23	47,03	34,77	19,03
$0,30$	13,34	24,25	24,68	67,54	62,16	43,31	153,30	102,33	59,08
Parameter r									
$0,02$	6,72	20,03	27,93	53,80	63,53	53,08	148,18	114,32	74,51
$0,08$	1,42	3,34	3,21	17,23	15,83	9,07	60,84	36,49	16,32
Parameter y									
$0,15K$	3,27	9,70	13,84	33,10	39,71	34,16	107,10	85,27	57,28
$0,95K$	1,47	3,00	3,01	12,14	10,28	6,44	32,85	19,09	9,67

Tabelle 4.3: Komparative Statik der Credit-Spreads mit Sicherungsklausel bei Vernachlässigung des Zinsänderungsrisikos

Vernachlässigung des Zinsänderungsrisikos bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Zinsstrukturparameter κ, η und $\bar{r}$ sowie der Korrelationskoeffizient ρ, die gemäß Satz U3 in der Bewertungsformel für den Marktwert eines Zerobonds zu berücksichti-

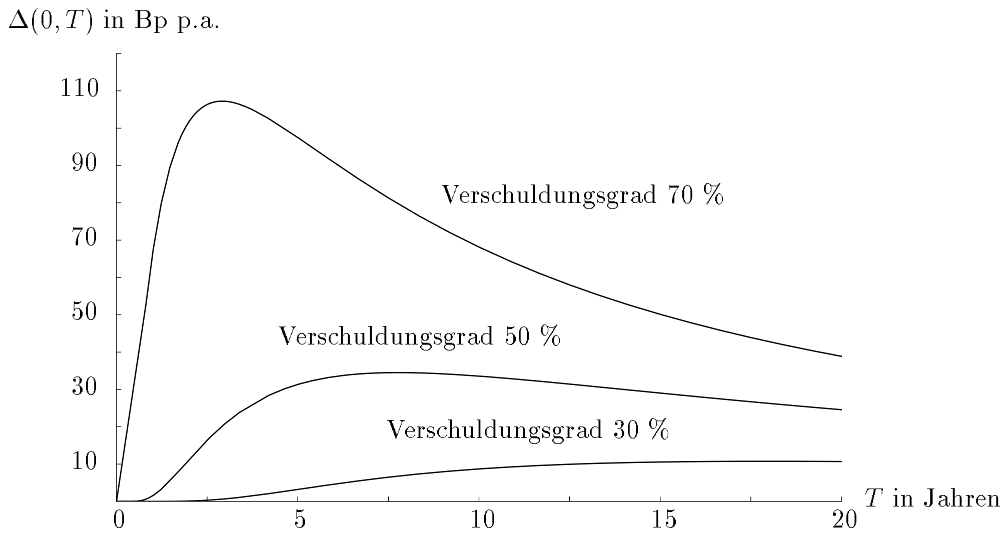

Abbildung 4.5: Credit-Spread-Kurven mit Sicherungsklausel bei Vernachlässigung des Zinsänderungsrisikos

gen sind, gegen Null gehen. Hinsichtlich der Dynamik der Zinsstruktur und des Unternehmenswerts findet man sich dann im Annahmengerüst des Merton-Modells wieder. Tabelle 4.3 führt Credit-Spreads von Zerobonds auf, die mit der beschriebenen Sicherungsklausel ausgestattet sind. Abbildung 4.5 stellt die entsprechenden Credit-Spread-Kurven im Restlaufzeitintervall von 0 bis 20 Jahren für die Ausgangsdaten dar. Wie im Merton-Modell steigt der Credit-Spread eines Zerobonds unabhängig von der Restlaufzeit mit höherem Verschuldungsgrad des emittierenden Unternehmens. Allerdings zeigt der Vergleich mit den korrespondierenden Ergebnissen des Merton-Modells aus Tabelle 4.1 und Abbildung 4.1, dass der Credit-Spread niedriger ist als ohne Vereinbarung der Sicherungsklausel. Dies bestätigt die Begrenzung des von Zerobondinhabern zu tragenden Kreditrisikos durch die Sicherungsklausel. Dabei fällt auf, dass sich die kreditrisikomindernde Wirkung der Sicherungsklausel erhöht je länger die Restlaufzeit des Zerobonds ist. Die Zeitstruktur der Credit-Spreads bleibt trotz der Sicherungsklausel im Vergleich zum Merton-Modell nahezu unverändert. Für einen Verschuldungsgrad von 30 % verläuft die Credit-Spread-Kurve weiterhin steigend und für einen Verschuldungsgrad von 50 % und 70 % bucklig. Das in Abbildung 4.6 dargestellte Theta des Credit-Spreads nimmt allerdings niedrigere Werte an, was die mathematische Begründung für den verglichen mit dem Merton-Modell schwächer ansteigenden und stärker fallenden Verlauf der Credit-Spread-Kurven liefert.

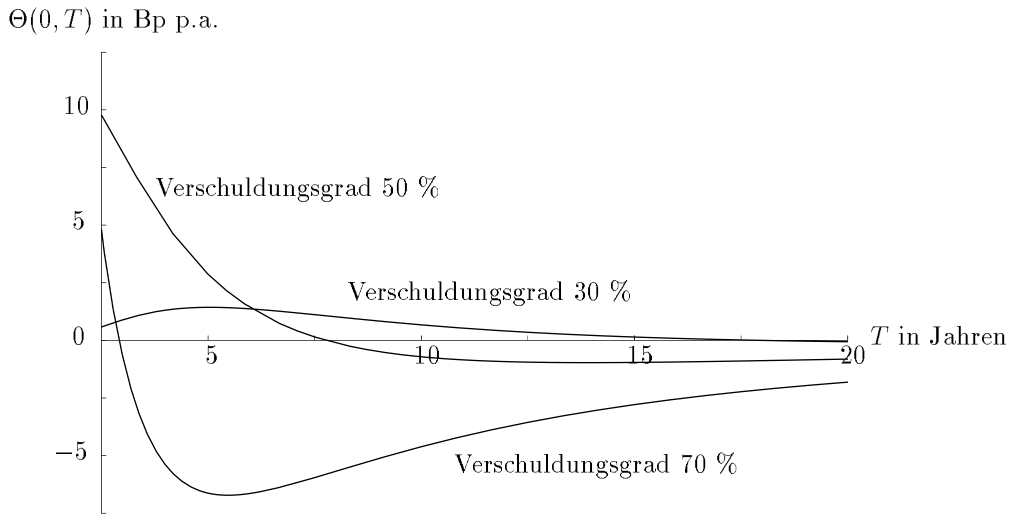

Abbildung 4.6: Theta der Credit-Spreads mit Sicherungsklausel bei Vernachlässigung des Zinsänderungsrisikos

Wie wirken sich nun Änderungen der Unternehmenswertvolatilität σ und des kurzfristigen Kassazinssatzes r auf den Credit-Spread eines mit der Sicherungsklausel ausgestatteten Zerobonds aus? Aus Tabelle 4.3 wird ersichtlich, dass der Credit-Spread unabhängig vom Verschuldungsgrad des Unternehmens und der Restlaufzeit des Zerobonds steigt (sinkt), wenn σ zunimmt (abnimmt) bzw. r abnimmt (zunimmt). Verglichen mit dem Merton-Modell steigt der Credit-Spread allerdings schwächer und sinkt stärker. Abbildung 4.7 zeigt am Beispiel eines zunehmenden σ, dass die Credit-Spreads mit Sicherungsklausel insbesondere für hohe Unternehmenswertvolatilitäten und eine längere Restlaufzeit schwächer steigen. Dabei wurde ein Verschuldungsgrad des Unternehmens von 70 % unterstellt.

Abbildung 4.7 weist einen starken finanzierungspolitischen Bezug auf. Betrachtet man die Unternehmenswertvolatilität als Indikator für das Investitionsrisiko des Unternehmens, lässt sich anhand dieser Abbildung verdeutlichen, warum die hier beschriebene Sicherungsklausel ein wichtiges Element der effizienten Vertragsgestaltung darstellt. Bereits in Kapitel 2.1.1 wurde die Erhöhung des Investitionsrisikos als möglicher Interessenkonflikt zwischen den Gesellschaftern und den Gläubigern eines Unternehmens genannt. Dieser von Jensen/Meckling (1976) anhand des Merton-Modells untersuchte und als „asset substitution“ bezeichnete Interessenkonflikt resultiert letztlich daraus, dass sich der Anspruch der Gesellschafter als europäischer Call auf den Unternehmens-

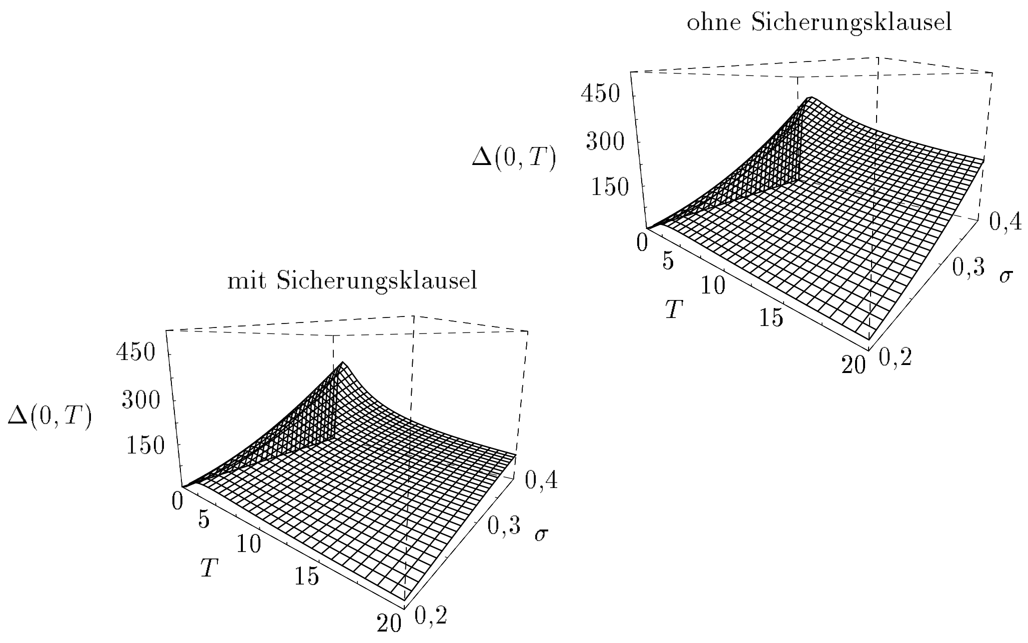

Abbildung 4.7: Credit-Spread-Kurven mit und ohne Sicherungsklausel in Abhängigkeit der Unternehmenswertvolatilität bei Vernachlässigung des Zinsänderungsrisikos

wert charakterisieren lässt. Die Gesellschafter können den Marktwert des Eigenkapitals durch die Erhöhung der Unternehmenswertvolatilität steigern, da die Ausübungswahrscheinlichkeit und demzufolge auch der Wert des Calls zunimmt. Da gleichzeitig der Ausfall-Put, dessen Stillhalter die Zerobondinhaber sind, an Wert gewinnt, sinkt der Marktwert des Zerobonds und der Credit-Spread steigt.[22] Der Anstieg des Credit-Spreads spiegelt daher den Vermögensverlust, den die Zerobondinhaber durch die Erhöhung der Unternehmenswertvolatilität erleiden, wider. Abbildung 4.7 zeigt, dass dieser Vermögensverlust geringer ausfällt, wenn der Zerobond mit der Sicherungsklausel ausgestattet ist. Im Umkehrschluss profitieren die Gesellschafter nicht mehr in dem Maße wie bisher von einer Erhöhung der Unternehmenswertvolatilität. Aus optionspreistheoretischer Sicht liegt dies darin begründet, dass der Anspruch der Gesellschafter nicht mehr die Charakteristika eines europäischen (Plain-Vanilla) Calls, sondern eines europäischen Down-and-out Calls auf den Unternehmenswert aufweist. Da der Wert des europäischen Down-and-out Calls schwächer als der des (Plain-Vanilla) Calls mit zunehmender Unternehmenswertvolatilität steigt, entschärft die Sicherungsklausel die „asset substitution“-Problematik.

[22]Vgl. Kapitel 4.1.3.

Tabelle 4.4 führt die Credit-Spreads von Zerobonds mit Sicherungsklausel auf, wenn das Zinsänderungsrisiko berücksichtigt wird. Abbildung 4.8 zeigt die entsprechenden Credit-Spread-Kurven im Restlaufzeitintervall von 0 bis 20 Jahren für die Ausgangsdaten. Es ist ersichtlich, dass die Vereinbarung der Sicherungsklausel die gleichen Auswirkungen auf den Credit-Spread eines Zerobonds hat wie bei Vernachlässigung des Zinsänderungsrisikos. Der Credit-Spread ist insbesondere für längere Restlaufzeiten geringer als ohne Vereinbarung der Sicherungsklausel, wie ein Blick auf die korrespondierenden Angaben aus Tabelle 4.2 oder auf Abbildung 4.3 zeigt. Verglichen mit

Credit-Spreads mit Sicherungsklausel bei Berücksichtigung des Zinsänderungsrisikos

(in Bp p.a.)

Ausgangsdaten: $r(0) = 0,05$, $V(0) = 100$, $\kappa = 0,4$, $\eta = 0,06$, $\bar{r} = 0,06$, $\sigma = 0,25$, $\rho = 0,25$, $y = 0,75K$

	Verschuldungsgrad 30 %			Verschuldungsgrad 50 %			Verschuldungsgrad 70 %		
	Restlaufzeit in Jahren			Restlaufzeit in Jahren			Restlaufzeit in Jahren		
	5	10	20	5	10	20	5	10	20
Ausgangsdaten	9,25	24,63	28,78	55,06	62,67	48,14	135,21	102,77	63,96
Parameter ρ									
$-0,25$	2,63	8,64	11,70	28,08	33,37	26,18	90,98	67,78	40,80
0	5,38	15,95	20,00	41,09	48,17	37,60	113,72	86,31	53,26
Parameter σ									
$0,20$	2,00	10,03	15,14	24,29	36,46	31,15	83,63	71,84	46,36
$0,30$	25,20	45,41	44,77	95,33	91,10	65,10	187,91	131,98	80,01
Parameter $r(0)$									
$0,02$	11,94	28,58	31,24	66,55	70,39	51,48	157,01	113,13	67,74
$0,08$	7,10	21,13	26,45	45,18	55,54	44,93	115,57	92,96	60,26
Parameter κ									
$0,20$	15,07	51,76	70,20	73,19	101,82	91,36	162,47	145,42	105,15
$0,60$	9,25	24,63	28,78	55,06	62,67	48,14	135,21	102,77	63,96
Parameter η									
$0,01$	3,20	8,06	9,04	30,47	30,86	21,02	93,95	62,71	33,59
$0,10$	23,29	58,20	63,42	93,46	109,46	84,90	188,93	152,66	99,33
Parameter $\bar{r}$									
$0,04$	11,58	33,24	41,40	65,02	79,13	64,64	154,18	124,55	82,19
$0,08$	7,34	17,89	19,04	46,33	48,69	34,21	117,90	83,27	47,55
Parameter y									
$0,15K$	9,75	30,43	45,10	60,80	83,68	82,19	157,23	146,99	116,87
$0,95K$	3,71	7,26	7,03	18,83	16,74	11,11	40,94	25,57	14,19

Tabelle 4.4: Komparative Statik der Credit-Spreads mit Sicherungsklausel bei Berücksichtigung des Zinsänderungsrisikos

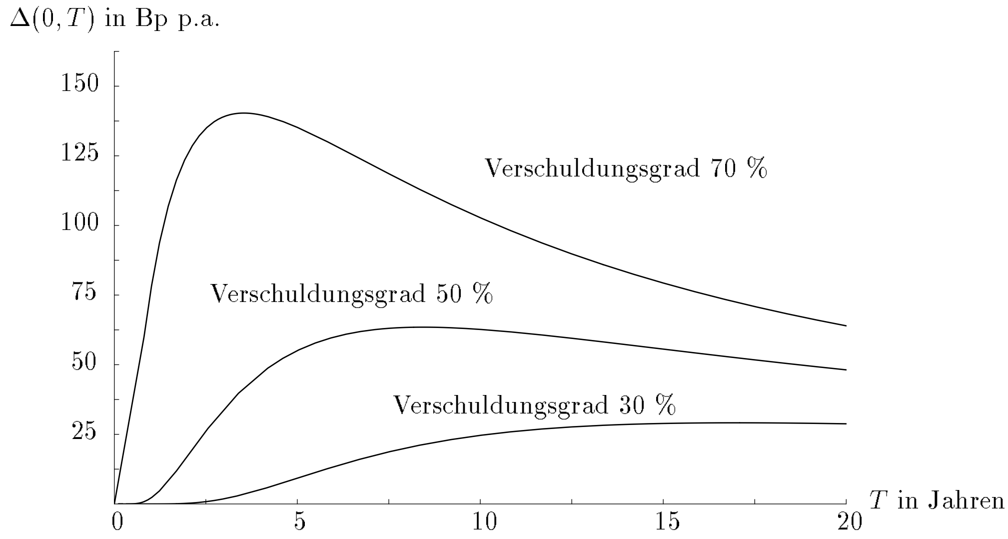

Abbildung 4.8: Credit-Spread-Kurven mit Sicherungsklausel bei Berücksichtigung des Zinsänderungsrisikos

Abbildung 4.4 nimmt das in 4.9 dargestellte Theta des Credit-Spreads niedrigere Werte an, was wiederum den schwächer ansteigenden und stärker fallenden Verlauf der Credit-Spread-Kurven begründet. Dieser Einfluss der Sicherungsklausel auf den Verlauf der Credit-Spread-Kurven ist unabhängig vom Korrelationskoeffizienten, d.h. die Credit-Spread-Kurve eines Zerobonds mit Sicherungsklausel verläuft nie oberhalb der Credit-Spread-Kurve eines Zerobonds ohne Sicherungsklausel. Abbildung 4.10, in der die Credit-Spread-Kurven von Zerobonds mit und ohne Sicherungsklausel für einen Verschuldungsgrad des emittierenden Unternehmens von 70 % in Abhängigkeit des Korrelationskoeffizienten dargestellt sind, verdeutlicht dies. Der im Ausgangsszenario unterstellte positive Korrelationskoeffizient bewirkt jedoch, dass der Credit-Spread eines Zerobonds mit Sicherungsklausel bei Berücksichtigung des Zinsänderungsrisikos höher ist als bei Vernachlässigung des Zinsänderungsrisikos, wie ein Vergleich zwischen Tabelle 4.4 und 4.3 zeigt. Bei negativem Korrelationskoeffizienten kann sich der Effekt umkehren, so dass der Credit-Spread bei Berücksichtigung des Zinsänderungsrisikos niedriger ausfällt. Aus Tabelle 4.4 geht hervor, dass dies bei einem Korrelationskoeffizienten $\rho = -0,25$ der Fall ist. Der Credit-Spread des Zerobonds ist unabhängig vom Verschuldungsgrad des Unternehmens im gesamten Restlaufzeitbereich niedriger als bei Vernachlässigung des Zinsänderungsrisikos. Ein negativer Korrelationskoeffizient sorgt daher wiederum für eine Diversifikation des Kreditrisikos.[23]

[23]Vgl. Kapitel 4.2.3.

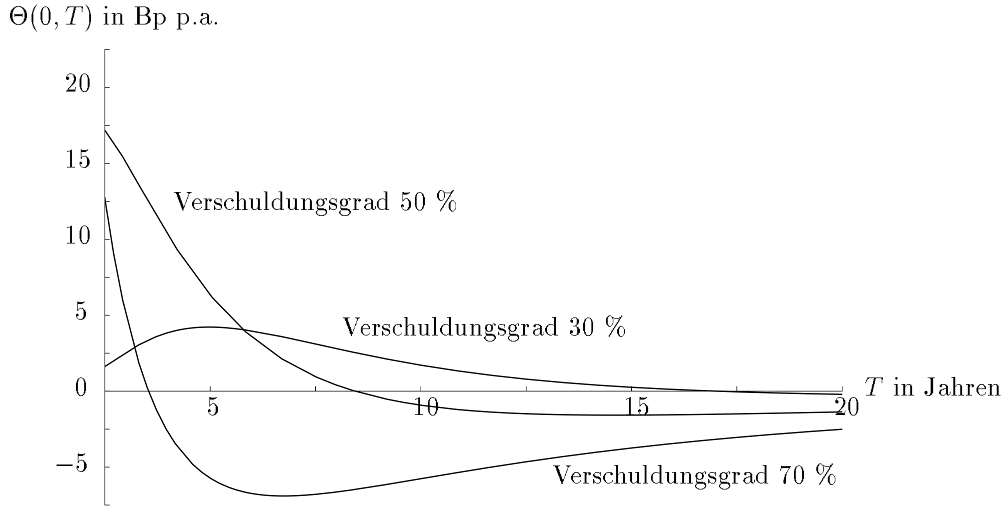

Abbildung 4.9: Theta der Credit-Spreads mit Sicherungsklausel bei Berücksichtigung des Zinsänderungsrisikos

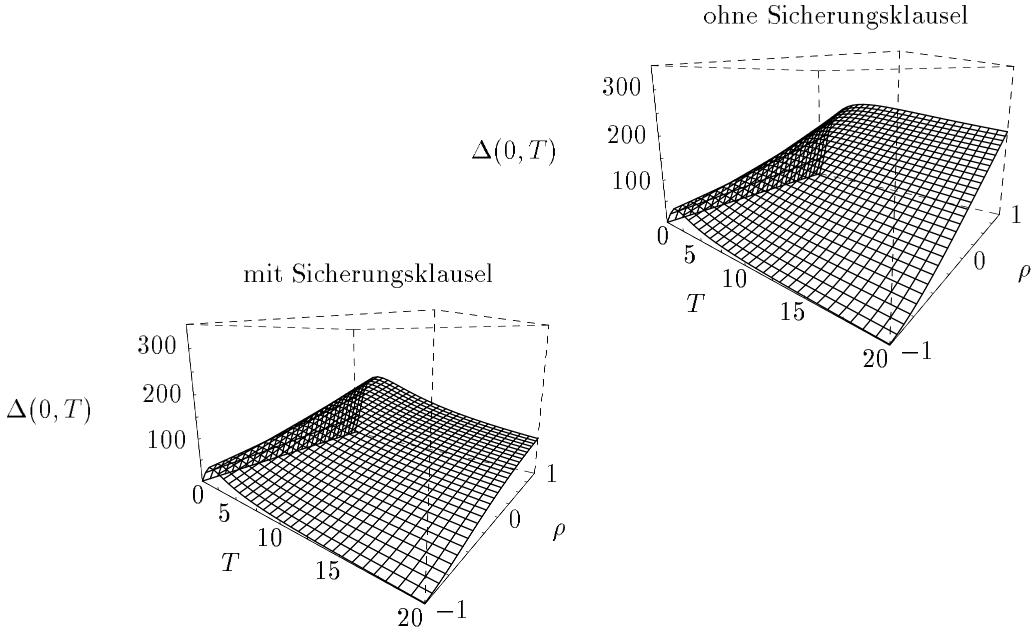

Abbildung 4.10: Credit-Spread-Kurven mit und ohne Sicherungsklausel in Abhängigkeit des Korrelationskoeffizienten

Vergleicht man Tabelle 4.4 und 4.2, wird deutlich, dass Änderungen der Unternehmenswertvolatilität σ und der Zinsstrukturparameter $r(0), \kappa, \eta$ und $\bar{r}$ auf den Credit-Spread eines Zerobonds in dieselbe Richtung wirken, ob nun eine Sicherungsklausel vereinbart wurde oder nicht. Der Credit-Spread steigt (sinkt) unabhängig vom Verschuldungsgrad des Unternehmens und der Restlaufzeit des Zerobonds, wenn σ oder η zunimmt (abnimmt) bzw. $r(0), \kappa$ oder $\bar{r}$ abnimmt (zunimmt). Allerdings steigt der Credit-Spread eines Zerobonds mit Sicherungsklausel schwächer und sinkt stärker als der eines Zerobonds ohne Sicherungsklausel. Die Abbildungen 4.11 und 4.12 zeigen am Beispiel eines

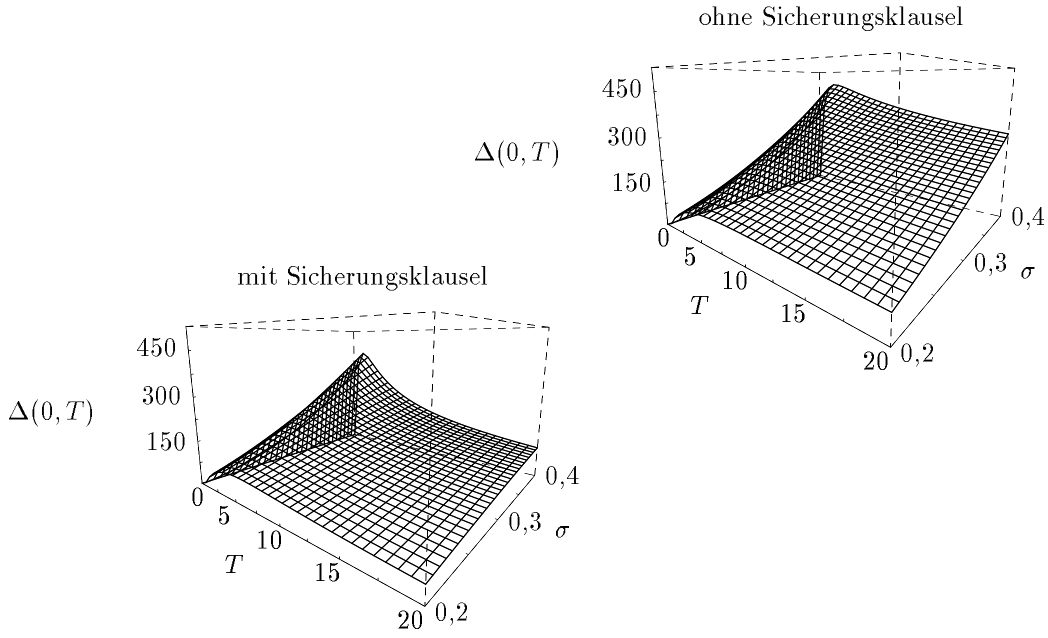

Abbildung 4.11: Credit-Spread-Kurven mit und ohne Sicherungsklausel in Abhängigkeit der Unternehmenswertvolatilität bei Berücksichtigung des Zinsänderungsrisikos

zunehmenden σ und η, dass der Credit-Spread mit Sicherungsklausel insbesondere für hohe Volatilitäten des Unternehmenswerts und des kurzfristigen Kassazinssatzes und eine längere Restlaufzeit schwächer steigt. Dabei wurde erneut ein Verschuldungsgrad des Unternehmens von 70 % unterstellt.

Anzumerken bleibt, dass die festgestellte kreditrisikomindernde Wirkung der Sicherungsklausel maßgeblich von der Höhe der vereinbarten Ausfallschranke abhängt. So geht aus Tabelle 4.3 und 4.4 hervor, dass der Credit-Spread eines mit Sicherungsklausel ausgestatteten Zerobonds für $y = 0,15K$ unabhängig vom Verschuldungsgrad des Unternehmens und der Restlaufzeit mit dem Credit-Spread eines Zerobonds ohne

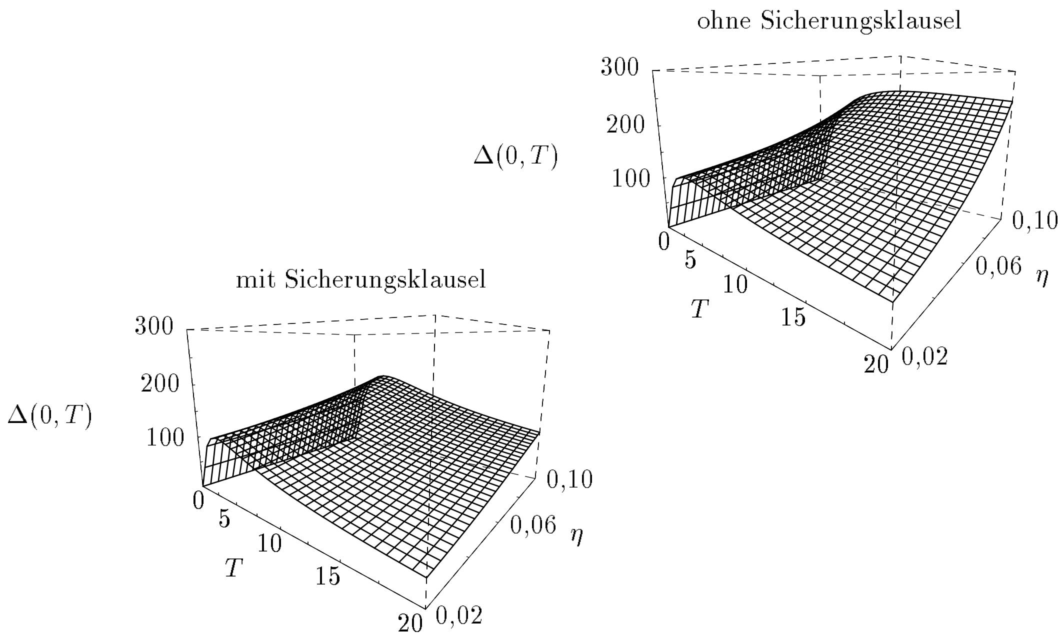

Abbildung 4.12: Credit-Spread-Kurven mit und ohne Sicherungsklausel in Abhängigkeit der Zinsvolatilität

Sicherungsklausel aus Tabelle 4.1 bzw. 4.2 übereinstimmt. Das Recht der Zerobondinhaber, eine Neuordnung der Eigentumsverhältnisse des emittierenden Unternehmens herbeizuführen und das Unternehmen zu übernehmen, sobald der Unternehmenswert die Ausfallschranke erreicht, ist demzufolge annähernd wertlos. Der Credit-Spread eines Zerobonds mit Sicherungsklausel vermindert sich für $y = 0,95K$ allerdings auf bis zu 30 % des Credit-Spreads im Ausgangsszenario, in dem $y = 0,75K$ unterstellt wurde, und auf bis zu 15 % verglichen mit der Situation, keine Sicherungsklausel vereinbart zu haben. Die kreditrisikomindernde Wirkung der Sicherungsklausel ist hier sehr groß, so dass die Zerobondinhaber nur einem vergleichsweise geringen Kreditrisiko ausgesetzt sind.

4.4 Kreditausfälle bei komplexer Kapitalstruktur

4.4.1 Annahmen

In den vorangegangenen Kapiteln wurden Unternehmen betrachtet, deren Kapitalstruktur nur aus Eigenkapital in Form eines beschränkt haftenden Residualanspruchs und einem Zerobond als einziger Fremdkapitalposition besteht. Das Kreditrisiko, dem sich die Zerobondinhaber ausgesetzt sehen, wurde unter Berücksichtigung aller in den Finanzierungsverträgen getroffenen Vereinbarungen modelliert, Zerobond und Eigenkapital wurden simultan bewertet. Liegt eine komplexere Kapitalstruktur des Unternehmens vor, ist eine solche totalanalytische Vorgehensweise nicht umsetzbar. Es ist nahezu unmöglich, für ein solches Unternehmen sämtliche Szenarien, in denen die Anleiheinhaber einen Kreditausfall erleiden, zu definieren. Longstaff/Schwartz (1995) tragen diesem Umstand in ihrem nachfolgend vorgestellten Modell Rechnung. Sie geben den Zeitpunkt eines Kreditausfalls für alle von einem Unternehmen emittierten Anleihen, unabhängig von der zeitlichen Struktur der Zins- und Tilgungszahlungen und weiteren Vereinbarungen in den Finanzierungsverträgen, als erste Durchgangszeit des Unternehmenswerts durch eine konstante Ausfallschranke vor. Wie in Kapitel 4.3 kommt es bei Erreichen der Ausfallschranke zu einer Neuordnung der Eigentumsverhältnisse des Unternehmens. Durch die Neuordnung der Eigentumsverhältnisse verringern sich nachfolgende Zins- und Tilgungszahlungen der emittierten Anleihen um eine konstante Abschreibungsrate.

Hinsichtlich der Annahmen zur Dynamik der Zinsstruktur und des Unternehmenswerts wird bei der Analyse des Longstaff/Schwartz-Modells auf den Modellrahmen aus Kapitel 4.2 und 4.3 zurückgegriffen.

4.4.2 Partialanalytische Bewertung von Anleihen

Das Longstaff/Schwartz-Modell besitzt einen partialanalytischen Charakter. Die konstante Ausfallschranke, die gemeinsam mit der Unternehmenswertentwicklung den Zeitpunkt eines Kreditausfalls bestimmt, wird nicht unter Berücksichtigung aller in den Finanzierungsverträgen getroffenen Vereinbarungen vorgegeben, sondern dient lediglich als Indikator für Verschuldungssituation des Unternehmens. Mit K als konstanter Ausfallschranke lässt sich der Zeitpunkt eines Kreditausfalls im Longstaff/Schwartz-Modell definieren als

$$\begin{aligned} \tau &= \inf\{t \in [0,\mathcal{T}] : K = V(t)\} \\ &= \inf\{t \in [0,\mathcal{T}] : K/V(t) = 1\}. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Interpretiert man das Verhältnis zwischen Ausfallschranke und Unternehmenswert als Verschuldungsgrad, kommt es gemäß (4.52) zu einem Kreditausfall, wenn das Unternehmen überschuldet ist.[24] Unter Verwendung des durch $l(t) = k - y(t)$, mit $k = \ln K$ und $y(t) = \ln V(t)$, gegebenen logarithmierten Verschuldungsgrades lässt sich (4.52) umschreiben in

$$\tau = \inf\{t \in [0,\mathcal{T}] : l(t) = 0\}. \tag{4.53}$$

Mathematisch gesehen entspricht der Zeitpunkt eines Kreditausfalls somit der ersten Durchgangszeit, oder alternativ der „first passage time", des Prozesses für die Entwicklung des logarithmierten Verschuldungsgrades durch den Wert Null. Ebenso wie der Zeitpunkt wird auch die Höhe eines Kreditausfalls durch die konstante Abschreibungsrate losgelöst von den vertraglichen Vereinbarungen der emittierten Finanzierungstitel im Einzelnen festgelegt. So erhalten die Inhaber eines Zerobonds mit einem Rückzahlungsbetrag von einem € bei Fälligkeit im Zeitpunkt T, $T \in [0,\mathcal{T}]$, einen Einzahlungsüberschuss von

$$D(T,T) = 1 - w\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}, \tag{4.54}$$

wobei w, $0 < w \leq 1$, als konstante Abschreibungsrate den Anteil des Rückzahlungsbetrages angibt, den die Zerobondinhaber durch die Neuordnung der Eigentumsverhältnisse des Unternehmens bei Erreichen der Ausfallschranke verlieren.[25] Wird die Ausfallschranke bis zum Fälligkeitszeitpunkt des Zerobonds nicht erreicht, erhalten die Zerobondinhaber den vollen Rückzahlungsbetrag.[26]

[24]Longstaff/Schwartz verwenden den inversen Verschuldungsgrad $V(t)/K$, um den Zeitpunkt eines Kreditausfalls zu definieren. Vgl. Longstaff/Schwartz (1995): S. 796.

[25]Longstaff/Schwartz setzen somit die Einhaltung der „absolute priority rule" bei Eintritt eines Kreditausfalls nicht notwendigerweise voraus. Die „absolute priority rule" besagt, dass die gemäß vertraglicher Vereinbarung vorrangigen Ansprüche erst vollständig erfüllt sein müssen, bevor nachrangige Ansprüche bedient werden dürfen. Longstaff/Schwartz motivieren ihre Vorgehensweise mit empirischen Untersuchungen für den amerikanischen Kapitalmarkt, die zeigen, dass bei Insolvenzen nach Chapter 11 des U.S. Bankruptcy Code im Fall der Fortführung eines Unternehmens die „absolute priority rule" häufig nicht eingehalten wird und einzelne Gläubiger von nachrangigen Gruppen übervorteilt werden. Vgl. Longstaff/Schwartz (1995): S. 793 oder auch Senbet/Seward (1998): S. 924 und S. 947.

[26]Bei der Festlegung von w ist allerdings darauf zu achten, dass der Marktwert der Ansprüche aller emittierten Finanzierungstitel nach Neuordnung der Eigentumsverhältnisse des Unternehmens nicht größer als K ist. Vgl. Longstaff/Schwartz (1995): S. 794.

Die Bewertung von Anleihen im Longstaff/Schwartz-Modell soll wie bisher mittels der Martingalmaß-Technik vorgenommen werden.[27] Für den heutigen Preis des Zerobonds aus (4.54) ergibt sich unter Verwendung der Martingalmaß-Technik

$$D(0,T) = E^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r(s)ds}\left(1 - w\mathbf{1}_{\{\tau \le T\}}\right)\right]. \tag{4.55}$$

Die Berechnung des Erwartungswertes aus (4.55) kann wiederum durch einen Wechsel auf das Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ vereinfacht werden. Es gilt

$$\begin{aligned} D(0,T) &= P(0,T)E^{\mathbb{Q}^T}\left[\left(1 - w\mathbf{1}_{\{\tau \le T\}}\right)\right] \\ &= P(0,T)\left(1 - w\mathbb{Q}^T\left\{\tau \le T\right\}\right), \end{aligned} \tag{4.56}$$

wobei $P(0,T)$ den heutigen Preis eines kreditrisikolosen Zerobonds mit Restlaufzeit T im Vasicek-Modell gemäß (4.35) symbolisiert. Der Ausdruck $\mathbb{Q}^T\{\tau \le T\}$ entspricht der Wahrscheinlichkeit unter dem Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$, dass ein Kreditausfall bis zur Fälligkeit des Zerobonds eintritt, oder formal gesprochen, dass die erste Durchgangszeit des Prozesses für die Entwicklung des logarithmierten Verschuldungsgrades durch den Wert Null kleiner ist als der Fälligkeitszeitpunkt des Zerobonds.

Ein Vorteil der von Longstaff/Schwartz gewählten Vorgehensweise besteht darin, dass die vom betrachteten Unternehmen emittierten Kuponanleihen in Analogie zum kreditrisikolosen Fall als Portefeuilles aus entsprechenden Zerobonds mit unterschiedlichen Laufzeiten dargestellt werden können. Angenommen, eine Anleihe verbrieft neben dem Rückzahlungsbetrag von einem € bei Fälligkeit im Zeitpunkt T Kuponzahlungen in Höhe von C €, $0 < C < 1$, in den Zeitpunkten T_j, mit $j = 1, \ldots, n$ und $0 < T_1 < \ldots < T_n = T$. Da sich bei Eintritt eines Kreditausfalls bis zur Fälligkeit der Anleihe die nachfolgenden Zins- und Tilgungszahlungen um die konstante Abschreibungsrate verringern, kann der heutige Preis der Anleihe unter Verwendung der Martingalmaß-Technik als

$$D_C(0,T) = E^{\mathbb{Q}}\left[\sum_{j=1}^{n} e^{-\int_0^{T_j} r(s)ds}\left(1 - w\mathbf{1}_{\{\tau \le T_j\}}\right)C\right] + E^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r(s)ds}\left(1 - w\mathbf{1}_{\{\tau \le T\}}\right)\right] \tag{4.57}$$

angegeben werden. Nach dem Wechsel auf das Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ gilt dann

$$D_C(0,T) = \sum_{j=1}^{n} P(0,T_j)E^{\mathbb{Q}^T}\left[\left(1 - w\mathbf{1}_{\{\tau \le T_j\}}\right)C\right] + P(0,T)E^{\mathbb{Q}^T}\left[\left(1 - w\mathbf{1}_{\{\tau \le T\}}\right)\right].$$

[27]Da im Longstaff/Schwartz-Modell auf Grund des partialanalytischen Blickwinkels nicht mehr das gesamte Emissionsvolumen eines Zerobonds oder einer Kuponanleihe betrachtet wird, sondern lediglich ein Wertpapier, werden im Folgenden statt des Begriffs Marktwert die Termini Preis des Zerobonds und Preis der Kuponanleihe verwendet.

Dies lässt sich analog zu Gleichung (4.56) umformen in

$$\begin{aligned} D_C(0,T) &= \sum_{j=1}^{n} P(0,T_j)\left(1 - w\mathbb{Q}^T\{\tau \leq T_j\}\right)C + P(0,T)\left(1 - w\mathbb{Q}^T\{\tau \leq T\}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} D(0,T_j)C + D(0,T). \end{aligned} \tag{4.58}$$

Um Zerobonds und Kuponanleihen im Longstaff/Schwartz-Modell bewerten zu können, müssen die in den Gleichungen (4.56) und (4.58) enthaltenen Ausfallwahrscheinlichkeiten bekannt sein. Dies setzt voraus, dass der Prozess für die Entwicklung des logarithmierten Verschuldungsgrades unter dem Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ angegeben werden kann. In einem ersten Schritt ist dazu der entsprechende Prozess unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ zu bestimmen. Die benötigte logarithmierte Unternehmenswertentwicklung unter $\mathbb{Q}$ kann mittels der mehrdimensionalen Version von Itôs Lemma abgeleitet werden. Die stochastische Differenzialgleichung für die Unternehmenswertentwicklung aus (4.31) lautet in Vektorschreibweise

$$dV(t) = f(t)dt + G(t)dW(t),$$

mit

$$f(t) = r(t)V(t), \quad G^T(t) = \begin{pmatrix} \sigma\rho V(t) \\ \sigma\sqrt{1-\rho^2}V(t) \end{pmatrix}, \quad dW(t) = \begin{pmatrix} dW_r(t) \\ dW_V(t) \end{pmatrix},$$

wobei die Entwicklung des kurzfristigen Kassazinssatzes unter $\mathbb{Q}$ durch

$$dr(t) = \kappa\left(\bar{r} - r(t)\right)dt + \eta dW_r(t) \tag{4.59}$$

gegeben ist. Für $y(t) = \ln V(t)$ erhält man durch Anwendung von Itôs Lemma das stochastische Differenzial

$$dy(t) = \left(\frac{1}{V(t)}r(t)V(t) - \frac{1}{2}\frac{1}{V^2(t)}G(t)G(t)^T\right)dt + \frac{1}{V(t)}G(t)dW(t).$$

Berechnen der Skalarprodukte und Zusammenfassen der Terme führt zu

$$\begin{aligned} dy(t) &= \left(r(t) - \frac{1}{2}(\sigma\rho)^2 - \frac{1}{2}\left(\sigma\sqrt{1-\rho^2}\right)^2\right)dt + \sigma\rho dW_r(t) + \sigma\sqrt{1-\rho^2}dW_V(t) \\ &= \left(r(t) - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\rho dW_r(t) + \sigma\sqrt{1-\rho^2}dW_V(t). \end{aligned} \tag{4.60}$$

Mittels Gleichung (4.60) kann nun die Entwicklung des logarithmierten Verschuldungsgrades $l(t) = k - y(t)$ unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ bestimmt werden. Ausgangspunkt ist der 2-dimensionale stochastische Prozess für $X(t) = (k, y(t))$, der durch das stochastische Differenzial

$$dX(t) = f(t)dt + G(t)dW(t),$$

mit

$$f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ r(t) - \frac{\sigma^2}{2} \end{pmatrix}, \quad G(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma\rho & \sigma\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}, \quad dW(t) = \begin{pmatrix} dW_r(t) \\ dW_V(t), \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Die Anwendung von Itôs Lemma auf $l(t) = k - y(t)$ führt zu

$$dl(t) = g(t)f(t)dt + g(t)G(t)dW(t),$$

wobei $g(t) = (1, -1)$ den entsprechenden Gradienten angibt. Nach Berechnen der Skalar- und Matrixprodukte ergibt sich der Prozess für die Entwicklung des logarithmierten Verschuldungsgrades unter $\mathbb{Q}$ als

$$dl(t) = -\left(r(t) - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt - \sigma\rho dW_r(t) - \sigma\sqrt{1-\rho^2}dW_V(t). \tag{4.61}$$

Wie bereits im Beweis von Satz T3 aus Kapitel 3.3.2.1 gezeigt wurde, erfolgt der Übergang vom äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ auf das Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$, indem die Wiener-Prozesse, die auf die Zinsstrukturentwicklung Einfluss nehmen, um die Volatilitätskoeffizienten des entsprechenden kreditrisikolosen Zerobonds „korrigiert“ werden. Gemäß der Zerobondpreisentwicklung aus (4.24) lautet der Korrekturterm für den vorliegenden Modellrahmen

$$a(t,T) = -\frac{\eta}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right).$$

Nach Ersetzung von

$$\begin{aligned} dW_r(t) &= dW_r^T(t) - \frac{\eta}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) dt, \\ dW_V(t) &= dW_V^T(t) \end{aligned}$$

in (4.61) und (4.59) ergibt sich für die Entwicklung des logarithmierten Verschuldungsgrades und des kurzfristigen Kassazinssatzes unter dem Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$

$$dl(t) = -\left(r(t) - \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\eta\sigma\rho}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right)\right) dt - \sigma\rho dW_r^T(t) - \sigma\sqrt{1-\rho^2}dW_V^T(t) \tag{4.62}$$

und

$$dr(t) = \kappa\left(\bar{r} - \frac{\eta^2}{\kappa^2}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) - r(t)\right) dt + \eta dW_r^T(t). \tag{4.63}$$

Dabei werden durch $dW_r^T(t)$ und $dW_V^T(t)$ voneinander unabhängige Wiener-Prozesse unter $\mathbb{Q}^T$ beschrieben. Bevor die stochastische Differenzialgleichung für den logarithmierten Verschuldungsgrad aus (4.62) gelöst werden kann, muss der kurzfristige Kassazinssatz $r(t)$, der sich als Lösung des stochastischen Differenzials (4.63) ergibt, bestimmt werden. Für $0 \leq s < t$ gilt

$$\begin{aligned} r(t) &= r(s)e^{-\kappa(t-s)} + \kappa\bar{r}\int_s^t e^{-\kappa(t-v)}dv - \kappa\frac{\eta^2}{\kappa^2}\int_s^t \left(1 - e^{-\kappa(T-v)}\right)e^{-\kappa(t-v)}dv \\ &\quad +\eta\int_s^t e^{-\kappa(t-v)}dW_r^T(v).^{28} \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} \int_s^t \left(1 - e^{-\kappa(T-v)}\right)e^{-\kappa(t-v)}dv &= \int_s^t e^{-\kappa(t-v)}dv - e^{-\kappa(T-t)}e^{-2\kappa t}\int_s^t e^{2\kappa v}dv \\ &= \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right) - \frac{1}{2\kappa}e^{-\kappa(T-t)}e^{-2\kappa t}\left(e^{2\kappa t} - e^{2\kappa s}\right) \\ &= \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right) - \frac{1}{2\kappa}e^{-\kappa(T-t)}\left(1 - e^{2\kappa(t-s)}\right) \end{aligned}$$

folgt daraus

$$\begin{aligned} r(t) &= r(s)e^{-\kappa(t-s)} + \left(\bar{r} - \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right)\left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right) + \frac{\eta^2}{2\kappa^2}e^{-\kappa(T-t)}\left(1 - e^{-2\kappa(t-s)}\right) \\ &\quad +\eta\int_s^t e^{-\kappa(t-v)}dW_r^T(v). \end{aligned} \tag{4.64}$$

Die Lösung der stochastischen Differenzialgleichung (4.62) lautet für $0 \leq s < t$

$$\begin{aligned} l(t) &= l(s) - \int_s^t \left(r(u) - \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\eta\sigma\rho}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-u)}\right)\right)du - \int_s^t \sigma\rho dW_r^T(u) \\ &\quad -\int_s^t \sigma\sqrt{1-\rho^2}dW_V^T(u). \end{aligned} \tag{4.65}$$

Einsetzen von (4.64) führt zu

$$\begin{aligned} l(t) &= l(s) - r(s)\int_s^t e^{-\kappa(u-s)}du - \int_s^t \left(\bar{r} - \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right)\left(1 - e^{-\kappa(u-s)}\right)du \\ &\quad -\int_s^t \frac{\eta^2}{2\kappa^2}e^{-\kappa(T-u)}\left(1 - e^{-2\kappa(u-s)}\right)du + \int_s^t \frac{\sigma^2}{2}du + \int_s^t \frac{\eta\sigma\rho}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-u)}\right)du \\ &\quad -\int_s^t \eta\int_s^u e^{-\kappa(u-v)}dW_r^T(v)du - \int_s^t \sigma\rho dW_r^T(u) - \int_s^t \sigma\sqrt{1-\rho^2}dW_V^T(u). \end{aligned}$$

[28] Vgl. Korrolar A2 im Anhang.

Dies lässt sich umformen in

$$\begin{aligned}
l(t) &= l(s) - \left(\frac{\sigma^2}{2} - \frac{\rho\sigma\eta}{\kappa} + \bar{r} - \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right)\int_s^t du - \left(r(s) - \bar{r} + \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right)\int_s^t e^{-\kappa(u-s)}du \\
&\quad - \frac{\eta\sigma\rho}{\kappa}e^{-\kappa(T-t)}\int_s^t e^{-\kappa(t-u)}du + \frac{\eta^2}{2\kappa^2}e^{-\kappa(T-t)}\int_s^t e^{-\kappa(t-u)}\left(1 - e^{-2\kappa(u-s)}\right)du \\
&\quad - \int_s^t \eta \int_s^u e^{-\kappa(u-v)}dW_r^T(v)du - \int_s^t \sigma\rho dW_r^T(u) - \int_s^t \sigma\sqrt{1-\rho^2}dW_V^T(u).
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
\int_s^t e^{-\kappa(t-u)}\left(1 - e^{-2\kappa(u-s)}\right)du &= e^{-\kappa t}\left(\int_s^t e^{\kappa u}du - e^{2\kappa s}\int_s^t e^{-\kappa u}du\right) \\
&= \frac{e^{-\kappa t}}{\kappa}\left(e^{\kappa t} - e^{\kappa s} + e^{2\kappa s}\left(e^{-\kappa t} - e^{-\kappa s}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-2\kappa(t-s)}\right)^2
\end{aligned}$$

und nach Berechnung der übrigen Integrale wie in (3.45) ergibt sich der logarithmierte Verschuldungsgrad unter dem Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ für $0 \leq s < t$ als

$$\begin{aligned}
l(t) &= l(s) - \left(\bar{r} - \frac{\eta^2}{\kappa^2} - \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\rho\sigma\eta}{\kappa}\right)(t-s) \\
&\quad - \left(\frac{r(s)}{\kappa} - \frac{\bar{r}}{\kappa} + \frac{\eta^2}{\kappa^3} + \frac{\rho\sigma\eta}{\kappa^2}e^{-\kappa(T-t)}\right)\left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right) \\
&\quad - \frac{\eta^2}{2\kappa^3}e^{-\kappa(T-t)}\left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right)^2 - \int_s^t \left(\frac{\eta}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(t-u)}\right) + \sigma\rho\right)dW_r^T(u) \\
&\quad - \int_s^t \sigma\sqrt{1-\rho^2}dW_V^T(u). \qquad (4.66)
\end{aligned}$$

Auf Grund der ausschließlich zeitabhängigen Integranden, sind die beiden stochastischen Integrale in Gleichung (4.66) gemeinsam normalverteilt.[29] Dies impliziert, dass der logarithmierte Verschuldungsgrad unter dem Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ normalverteilt ist und sich die Entwicklung des logarithmierten Verschuldungsgrades durch einen Gauß'schen Prozess beschreiben lässt. Da allerdings keine geschlossene Lösung für die Dichtefunktion der ersten Durchgangszeit des entsprechenden Prozesses durch den Wert Null existiert und demzufolge die Ausfallwahrscheinlichkeit $\mathbb{Q}^T\{\tau \leq T\}$ aus (4.56) und (4.58) nicht analytisch bestimmt werden kann, lösen Longstaff/Schwartz die Bewertungsgleichungen numerisch. Der nachfolgende Satz stellt die leicht modifizierte Lösung von Longstaff/Schwartz dar.[30]

[29] Vgl. Satz A7 im Anhang

[30] Vgl. Longstaff/Schwartz (1995): S. 796. Die Modifikation bezieht sich auf die korrekte Berechnung des nachfolgend aufgeführten Terms $M(s,t)$. Auch Collin-Dufresne/Goldstein (2001) weisen auf die fehlerhafte Berechnung dieser Größe in der Arbeit von Longstaff/Schwartz hin und geben denselben Zusammenhang für $M(s,t)$ an. Vgl. Collin-Dufresne/Goldstein (2001): S. 1953.

Satz U4 [Preise von Zerobonds und Kuponanleihen]. *Der Preis eines kreditrisikobehafteten Zerobonds mit Fälligkeitszeitpunkt T, $T \in [0, \mathcal{T}]$, ist gegeben durch*

$$D(0,T) = P(0,T)\left(1 - w\mathbb{Q}^T\{\tau \leq T\}\right),$$

wobei die Ausfallwahrscheinlichkeit berechnet werden kann als

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}^T\{\tau \leq T\} &= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i, \\
\varphi_1 &= \Phi(a_1), \\
\varphi_i &= \Phi(a_i) - \sum_{j=1}^{i-1} \varphi_j \Phi(b_{ji}), \;\; i = 2, \ldots, n, \\
a_i &= \frac{l(0) + M(0, iT/n)}{\sqrt{S(0, iT/n)}}, \;\; b_{ji} = \frac{M(jT/n, iT/n)}{\sqrt{S(jT/n, iT/n)}},
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
M(s,t) &= -\left(\bar{r} - \frac{\eta^2}{\kappa^2} - \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\rho\sigma\eta}{\kappa}\right)(t-s) \\
&\quad - \left(\frac{r(s)}{\kappa} - \frac{\bar{r}}{\kappa} + \frac{\eta^2}{\kappa^3} + \frac{\rho\sigma\eta}{\kappa^2} e^{-\kappa(T-t)}\right)\left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right) \\
&\quad - \frac{\eta^2}{2\kappa^3} e^{-\kappa(T-t)} \left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right)^2
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
S(s,t) &= \left(\sigma^2 + 2\frac{\sigma\rho\eta}{\kappa} + \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right)(t-s) - \left(2\frac{\sigma\rho\eta}{\kappa^2} + 2\frac{\eta^2}{\kappa^3}\right)\left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right) \\
&\quad + \frac{\eta^2}{2\kappa^3}\left(1 - e^{-2\kappa(t-s)}\right).
\end{aligned}$$

$\Phi(\cdot)$ ist die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. $P(0,T)$ gibt den Preis eines kreditrisikolosen Zerobonds mit Laufzeit T im Vasicek-Modell aus (4.35) an. Der Preis einer kreditrisikobehafteten Kuponanleihe kann gemäß (4.58) als Portefeuille aus kreditrisikobehafteten Zerobonds mit entsprechenden Laufzeiten berechnet werden.

Beweis: Siehe Anhang.

Der Beweis von Satz U4 beruht Longstaff/Schwartz folgend auf der Bedingung, dass die Dichtefunktion der ersten Durchgangszeit des Prozesses für den logarithmierten Verschuldungsgrad durch den Wert Null implizit definiert werden kann als

$$\Phi\left(\frac{l(0) + M(0,T)}{\sqrt{S(0,T)}}\right) = \int_0^T \varphi(u)\Phi\left(\frac{M(u,T)}{\sqrt{S(u,T)}}\right) du. \tag{4.67}$$

Dabei symbolisiert φ die angesprochene Dichtefunktion. $M(s,t)$ stellt den (bedingten) Erwartungswert $E[l(t)|s, l(s) = 0]$ und $S(s,t)$ die (bedingte) Varianz $\text{Var}[l(t)|s]$ des unter $\mathbb{Q}^T$ normalverteilten logarithmierten Verschuldungsgrades aus (4.66) dar.[31] Die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung auf der linken Seite der Gleichung gibt somit die Wahrscheinlichkeit an, dass $l(T)$ größer ist als Null, während die Verteilungsfunktion auf der rechten Seite der Wahrscheinlichkeit entspricht, dass $l(T)$ größer ist als Null, gegeben $l(u) = 0$. Der Zusammenhang aus (4.67) basiert auf der Überlegung, dass $l(T)$ für $l(0) < 0$ im Ausgangszeitpunkt genau dann einen Wert größer Null annimmt, wenn $l(u)$ in einem Zeitpunkt $u < T$ Null und die Differenz $l(T) - l(u)$ positiv ist. Gleichung (4.67) geht auf ein Resultat von Buonocore et al. (1987) zurück, die deren Gültigkeit allerdings nur für eindimensionale Gauß-Markov-Prozesse nachweisen. Da das Longstaff/Schwartz-Modell ein Gauß-Markov'sches 2-Faktoren-Modell darstellt, also zwei Wiener-Prozesse als Störgrößen die Entwicklung des logarithmierten Verschuldungsgrades beeinflussen, gilt (4.67) nur „approximativ". Collin-Dufresne/Goldstein (2001) diskutieren diesen Aspekt ausführlich und erweitern Gleichung (4.67) für den 2-Faktoren-Fall.

4.4.3 Komparative Statik der Credit-Spreads

Im Folgenden werden die Credit-Spreads von Anleihen im Longstaff/Schwartz-Modell einer komparativ-statischen Analyse unterzogen. Wie in Kapitel 4.4.2 verbriefen die betrachteten Anleihen neben dem Rückzahlungsbetrag von einem € bei Fälligkeit im Zeitpunkt T Kuponzahlungen in Höhe von C €, $0 < C < 1$, in den Zeitpunkten T_j, mit $j = 1, \ldots, n$ und $0 < T_1 < \ldots < T_n = T$. Um den Credit-Spread einer kreditrisikobehafteten Anleihe bestimmen zu können, muss zunächst die Rendite der Anleihe auf Basis der vertraglich vereinbarten Zahlungen durch Auflösen der Gleichung

$$D_C(0,T) = \sum_{j=1}^{n} e^{-Y_D T_j} C + e^{-Y_D T} \tag{4.68}$$

nach Y_D ermittelt werden. $D_C(0,T)$ gibt den mittels Satz U4 zu bestimmenden Preis der Anleihe an. Die durch R symbolisierte Rendite einer in allen Ausstattungsmerkmalen identischen, aber kreditrisikolosen Anleihe pro Jahr ergibt sich aus

$$P_C(0,T) = \sum_{j=1}^{n} e^{-Y_0 T_j} C + e^{-Y_0 T}, \tag{4.69}$$

[31] Vgl. Longstaff/Schwartz (1995): S. 816.

wobei $P_C(0,T)$ als Preis der kreditrisikolosen Anleihe

$$P_C(0,T) = \sum_{j=1}^{n} P(0,T_j)C + P(0,T) \tag{4.70}$$

genügt. Gleichung (4.70) nutzt wiederum den Umstand aus, dass Kuponanleihen bei Arbitragefreiheit als Portefeuilles aus Zerobonds mit unterschiedlichen Laufzeiten dargestellt werden können.[32] Die Preise der entsprechenden kreditrisikolosen Zerobonds, $P(0,T_j)$, sind durch Gleichung (4.35) gegeben. Der Credit-Spread der kreditrisikobehafteten Anleihe wird dann mittels der Renditen aus (4.68) und (4.69) berechnet.[33] Es gilt

$$\Delta(0,T) = Y_D - Y_0. \tag{4.71}$$

Tabelle 4.5 führt die Credit-Spreads von Anleihen mit einem Kupon von 8 % p.a. auf. Dabei entsprechen die in der Tabelle angegebenen Verschuldungsgrade von 30 %, 50 % und 70 % den logarithmierten Verschuldungsgraden $l(0) = -1,2$, $l(0) = -0,7$ und $l(0) = -0,35$. Abbildung 4.13 stellt die entsprechenden Credit-Spread-Kurven im Restlaufzeitintervall von 0 bis 20 Jahren für die Ausgangsdaten dar.[34] Wie in den bisher vorgestellten Modellen steigt der Credit-Spread einer Anleihe unabhängig von der Restlaufzeit mit höherem Verschuldungsgrad des emittierenden Unternehmens. Abbildung 4.13 verdeutlicht, dass auch die Zeitstruktur der Credit-Spreads nahezu unverändert bleibt. Für einen Verschuldungsgrad von 30 % verläuft die Credit-Spread-Kurve weiterhin steigend, während sie für einen Verschuldungsgrad von 50 % und 70 % den typischen buckligen Verlauf aufweist. Vergleicht man allerdings das Niveau, auf dem die Credit-Spread-Kurven verlaufen, zeigt sich, dass der Credit-Spread im Longstaff/Schwartz-Modell signifikant höher ist als bisher. Dies liegt zum einen daran, dass auch die versprochenen Kuponzahlungen der Anleihe ausfallen können und die Inhaber von Kuponanleihen im Vergleich zu den Inhabern von Zerobonds einem zusätzlichen Kreditrisiko ausgesetzt sind. Zum anderen ist zu beachten, dass die Festlegung der Abschreibungsrate w einen großen Einfluss auf die Höhe des Credit-Spread hat. Tabelle 4.5 zeigt, dass der Credit-Spread für $w = 0,3$ unabhängig vom Verschuldungsgrad des Unternehmens näher an dem der bisher vorgestellten Modelle liegt, während sich der Abstand zwischen den Credit-Spreads für $w = 0,7$ weiter vergrößert. Abbildung

[32]Vgl. auch die Ausführungen im Anschluss an Gleichung (3.5) aus Kapitel 3.1.

[33]Da die Gleichungen (4.68) und (4.69) keine analytische Lösung zulassen, muss für Y und R eine numerische Nährungslösung gesucht werden.

[34]Bei der numerischen Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeiten gemäß Satz U4 wurde $n = 100$ gesetzt. Für $n > 100$ lässt sich keine signifikante Verbesserung der Ergebnisse feststellen.

4.14, in der die entsprechenden Credit-Spread-Kurven für einen Verschuldungsgrad des emittierenden Unternehmens von 50 % dargestellt werden, verdeutlicht dies. Die Abschreibungsrate spiegelt im Longstaff/Schwartz-Modell die Besicherung einer Anleihe wider. So deutet eine niedrigere Abschreibungsrate an, dass die betrachtete Anleihe bei Eintritt eines Kreditausfalls vorrangig bedient wird oder durch dingliche Rechte besichert ist. Der im Vergleich zu den bisher betrachteten Modellen höhere Credit-Spread im Longstaff/Schwartz-Modell kann demzufolge auch auf eine unterschätzte Besicherung der Anleihe durch eine zu hohe Abschreibungsrate zurückgeführt werden.

Credit-Spreads im Longstaff/Schwartz-Modell

(in Bp p.a.)

Ausgangsdaten: $r(0) = 0,05$, $V(0) = 100$, $\kappa = 0,4$, $\eta = 0,06$, $\bar{r} = 0,06$, $\sigma = 0,25$, $\rho = 0,25$, $w = 0,5$, $C = 0,08$

	Verschuldungsgrad 30 %			Verschuldungsgrad 50 %			Verschuldungsgrad 70 %		
	Restlaufzeit in Jahren			Restlaufzeit in Jahren			Restlaufzeit in Jahren		
	5	10	20	5	10	20	5	10	20
Ausgangsdaten	46,53	93,38	104,90	262,65	261,32	217,04	673,37	495,76	359,78
Parameter ρ									
$-0,25$	16,16	38,88	49,47	158,31	163,51	140,20	528,69	389,39	283,61
0	29,53	64,89	77,24	210,78	214,63	181,33	605,59	447,59	326,00
Parameter σ									
0,20	12,92	44,48	60,99	142,26	173,48	155,25	498,08	394,74	294,06
0,30	105,96	155,38	154,19	394,93	348,40	275,82	825,04	580,95	414,30
Parameter $r(0)$									
0,02	55,23	99,74	106,50	289,33	271,19	218,52	708,56	504,82	359,03
0,08	38,94	87,54	103,81	237,47	252,37	216,40	638,53	487,78	361,46
Parameter κ									
0,20	70,39	178,27	225,77	326,83	376,79	324,29	752,36	591,41	409,17
0,60	35,75	66,52	72,61	229,25	216,55	176,93	628,09	450,35	327,47
Parameter η									
0,01	18,99	36,75	41,43	168,40	157,56	129,86	541,78	385,15	283,98
0,10	101,69	195,42	202,88	394,26	395,35	309,34	826,96	607,68	409,19
Parameter $\bar{r}$									
0,04	56,53	118,96	136,08	297,50	303,80	250,73	723,95	535,91	377,74
0,08	38,09	72,29	78,72	231,11	222,92	185,03	625,36	456,72	340,39
Parameter w									
0,3	29,70	56,95	61,71	159,82	152,44	122,45	386,15	274,06	192,50
0,7	69,95	137,64	154,66	393,47	393,84	333,64	1.041,19	785,40	591,02

Tabelle 4.5: Komparative Statik der Credit-Spreads im Longstaff/Schwartz-Modell

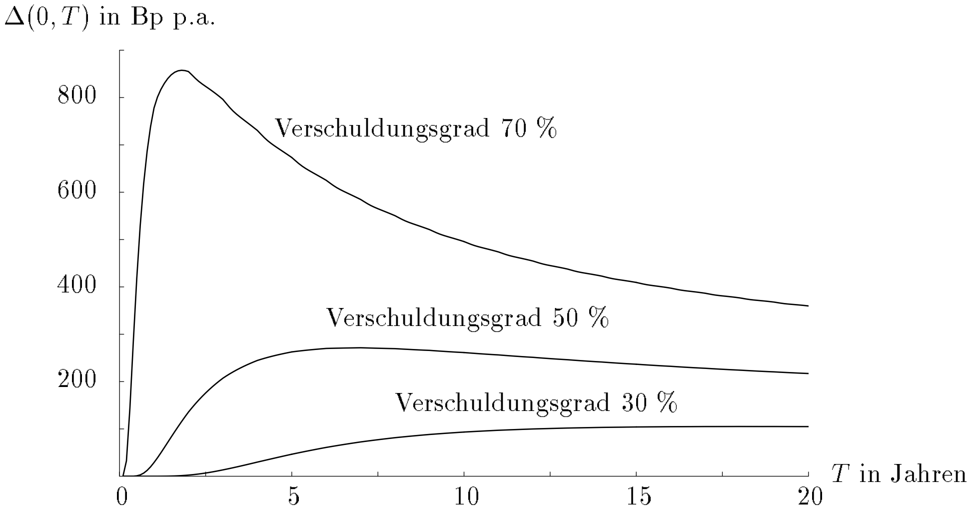

Abbildung 4.13: Credit-Spread-Kurven im Longstaff/Schwartz-Modell

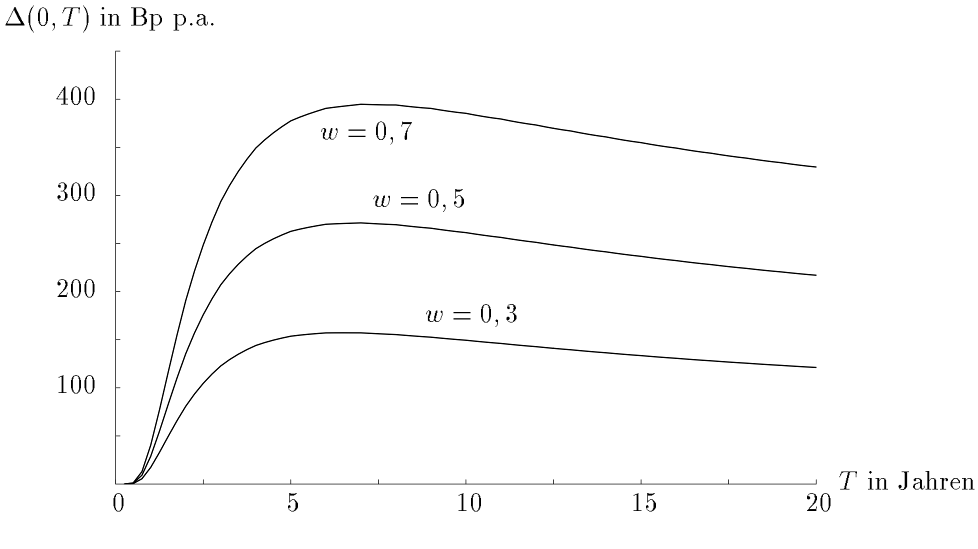

Abbildung 4.14: Credit-Spread-Kurven im Longstaff/Schwartz-Modell in Abhängigkeit der Abschreibungsrate

Abschließend soll die Frage diskutiert werden, wie sich Änderungen der Unternehmenswertvolatilität σ, der Zinsstrukturparameter $r(0), \kappa, \eta$ und $\bar{r}$ sowie des Korrelationskoeffizienten ρ auf den Credit-Spread einer Kuponanleihe auswirken. Aus Tabelle 4.5 ist ablesbar, dass der Credit-Spread unabhängig vom Verschuldungsgrad des Unternehmens und der Restlaufzeit des Anleihe steigt (sinkt), wenn σ, η oder ρ zunimmt (abnimmt) bzw. κ oder $\bar{r}$ abnimmt (zunimmt). Eine Änderung des kurzfristigen Kassazinssatzes bewirkt, dass der Credit-Spread für einen Verschuldungsgrad von 30 % und 50 % unabhängig von Restlaufzeit der Anleihe steigt (sinkt), wenn $r(0)$ abnimmt (zunimmt). Für einen Verschuldungsgrad von 70 % kehrt sich dieser Effekt bei einer Restlaufzeit von 20 Jahren um. Die angeführten Auswirkungen lassen sich wie folgt erklären: Analog zu den bisher vorgestellten Modellen führt ein zunehmendes σ, η oder ρ dazu, dass die Schwankungsbreite des Unternehmenswerts und demzufolge auch die des logarithmierten Verschuldungsgrades zunimmt. Damit verbunden ist eine höhere Ausfallwahrscheinlichkeit unter dem Forwardmaß, was den Preis der Anleihe senkt und den Credit-Spread steigen lässt. Dieser Effekt kehrt sich für ein abnehmendes σ, η oder ρ um. Demgegenüber lassen sich die Auswirkungen von Änderungen des Parameters κ wie bisher darauf zurückführen, dass ein zunehmendes κ, also eine größere Anpassungsgeschwindigkeit an das durch $\bar{r}$ gekennzeichnete risikoadjustierte Mean-Reversion-Niveau des kurzfristigen Kassazinssatzes, die Schwankungsbreite des logarithmierten Verschuldungsgrades vermindert. Dies wirkt sich über eine niedrigere Ausfallwahrscheinlichkeit preismindernd auf die Anleihe aus und hat einen sinkenden Credit-Spread zur Folge hat. Bei abnehmender Anpassungsgeschwindigkeit kehrt sich dieser Effekt um. Eine Änderung des kurzfristigen Kassazinssatzes wirkt in zwei unterschiedliche Richtungen. So sinkt mit zunehmendem $r(0)$ der Barwert der Kuponzahlungen und des Rückzahlungsbetrages der betrachteten Anleihe, was deren Preis senkt und den Credit-Spread erhöht. Andererseits stimmt $r(0)$ mit der aktuellen Momentanrendite des Unternehmenswerts unter dem äquivalenten Martingalmaß überein. Ein Zunehmen von $r(0)$ sorgt demzufolge dafür, dass der Unternehmenswert stärker von der Ausfallschranke „wegdriftet" und der erwartete Verschuldungsgrad sinkt, wobei Letzteres auch unter dem Forwardmaß gilt, wie etwa aus Gleichung (4.66) hervorgeht. Dies reduziert die Ausfallwahrscheinlichkeit unter dem Forwardmaß, so dass der Preis der Anleihe steigt und der Credit-Spread sinkt. Dabei scheint der zuletzt genannte Effekt in den meisten Fällen zu dominieren. Ein abnehmender kurzfristiger Kassazinssatz wirkt wiederum entgegengesetzt. Die Auswirkungen eines Anstiegs von $\bar{r}$ auf den Credit-Spread sind wiederum vergleichbar mit denen eines Anstiegs von $r(0)$.

Kapitel 5

Intensitätsbasierte Kreditrisikomodelle

Im Gegensatz zur unternehmenswertbasierten Sichtweise des vorangegangenen Kapitels wird der Zeitpunkt eines Kreditausfalls in intensitätsbasierten Kreditrisikomodellen nicht als erste Durchgangszeit des Unternehmenswerts durch eine von der Verschuldungssituation des betrachteten Unternehmens abhängige Ausfallschranke interpretiert. Es wird vielmehr vorausgesetzt, dass sich dieser Zeitpunkt als erste Sprungzeit eines Zählprozesses mit gegebener Intensität spezifizieren lässt. Dennoch ist es möglich, beide Ansätze miteinander zu verknüpfen, wie im Folgenden gezeigt wird. Kapitel 5.1 stellt zunächst den allgemeinen Modellrahmen intensitätsbasierter Kreditrisikomodelle dar. Neben der Modellierung des Zeitpunkts eines Kreditausfalls sind dabei insbesondere die zur Bewertung kreditrisikobehafteter Zahlungsströme nötigen Anpassungen der Martingalmaß-Technik zu diskutieren. In Kapitel 5.2 werden dann Unternehmensanleihen in einem intensitätsbasierten Kreditrisikomodell bewertet. Der Brückenschlag zu den bereits vorgestellten unternehmenswertbasierten Modellen erfolgt, indem die Intensität des zu Grunde liegenden Zählprozesses als Funktion des annahmegemäß stationären Verschuldungsgrades des emittierenden Unternehmens vorgegeben wird.

5.1 Allgemeiner Modellrahmen

5.1.1 Modellierung des Zeitpunkts eines Kreditausfalls

Zur Modellierung des Zeitpunkts eines Kreditausfalls in einem intensitätsbasierten Modellrahmen wird zunächst ein Zählprozess $\{N(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}^*)$ definiert. Der Zählprozess ist adaptiert an eine Filtration $\{\mathcal{G}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ und „nicht-explodierend". Weiterhin wird unterstellt, dass der Zählprozess eine Intensität besitzt. Diese Intensität ist durch einen bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$, mit $\mathcal{F}(t) \subset \mathcal{G}(t)$, vorhersehbaren Prozess $\{h(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ gegeben und erfüllt $\int_0^t h(s)ds < \infty$ fast sicher für alle t. Annahmegemäß gehorcht der Zuwachs $N(T) - N(t)$ des Zählprozesses bei gegebenem Informationsstand $\mathcal{G}(t) \vee \mathcal{F}(T)$ für alle $T > t$, mit $T \leq \mathcal{T}$, einer Poissonverteilung mit Parameter $\int_t^T h(s)ds$, so dass

$$\mathbb{P}^*\{N(T) - N(t) = k | \mathcal{G}(t) \vee \mathcal{F}(T)\} = \frac{\left(\int_t^T h(s)ds\right)^k}{k!} \exp\left\{-\int_t^T h(s)ds\right\} \tag{5.1}$$

für beliebige $k = 0, 1, \ldots$ gilt.[1]

Gegeben die oben beschriebene Informationsstruktur, stellt die Zufallsvariable τ als erste Sprungzeit des Zählprozesses eine Stoppzeit bezüglich der Filtration $\{\mathcal{G}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ dar.[2] Geht man davon aus, dass τ den Zeitpunkt eines Kreditausfalls anzeigt, lässt sich anhand der Intensität des Zählprozesses die Wahrscheinlichkeit eines unmittelbar bevorstehenden Kreditausfalls bestimmen: Ausgehend von einem Zeitpunkt t und Zustand ω, mit $t < \tau(\omega)$, entspricht die bedingte Wahrscheinlichkeit für $\tau \leq t + \Delta t$ in etwa $h(t, \omega)\Delta t$, vorausgesetzt die nachfolgende Zeitspanne Δt ist hinreichend klein.[3] Von besonderer Bedeutung für spätere Anwendungen ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei gegebenem Informationsstand $\mathcal{G}(t)$ ein Kreditausfall nach dem Zeitpunkt T eintritt, die so genannte bedingte Überlebenswahrscheinlichkeit. Unter Verwendung der Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte kann diese bestimmt werden als

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^*\{\tau > T | \mathcal{G}(t)\} &= E\left[\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} | \mathcal{G}(t)\right] \\
&= E\left[E\left[\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} | \mathcal{G}(t) \vee \mathcal{F}(T)\right] | \mathcal{G}(t)\right] \\
&= E\left[\mathbb{P}^*\{\tau > T | \mathcal{G}(t) \vee \mathcal{F}(T)\} | \mathcal{G}(t)\right].
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Wegen

$$\mathbb{P}^*\{\tau > T | \mathcal{G}(t) \vee \mathcal{F}(T)\} = \mathbb{P}^*\{N(T) - N(t) = 0 | \mathcal{G}(t) \vee \mathcal{F}(T)\}$$

[1] Die Definition eines Zählprozesses und eine Erläuterung des Begriffs Intensität ist dem Anhang zu entnehmen. Duffie (2001) bezeichnet den hier beschriebenen Zählprozess als „doubly stochastic driven by $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$", Bielecki/Rutkowski (2002) sprechen von einem „$\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$-conditional Poisson-Prozess". Vgl. Duffie (2001): S. 359 bzw. Bielecki/Rutkowski (2002): S. 193f.

[2] Die Definition einer Stoppzeit erfolgt im Anhang.

[3] Vgl. Duffie (2001): S. 275. Dieses Ergebnis wird am Ende des Kapitels für den Spezialfall einer konstanten Intensität des zu Grunde liegenden Zählprozesses veranschaulicht.

ist die Überlebenswahrscheinlichkeit aus (5.2) nach Ausnutzen der (bedingten) Poissonverteilung von $N(T) - N(t)$ durch

$$\mathbb{P}^*\{\tau > T|\mathcal{G}(t)\} \;=\; E\left[\exp\left\{-\int_t^T h(s)ds\right\}|\mathcal{G}(t)\right], \tag{5.3}$$

für alle $t < \min(\tau, T)$, gegeben.[4]

Ein Spezialfall des oben beschriebenen Modellrahmens ergibt sich, wenn man Jarrow/Turnbull (1995) folgend unterstellt, dass der Zeitpunkt eines Kreditausfalls auf $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}^*)$ einer Exponentialverteilung mit Parameter $h > 0$ gehorcht. Der Zeitpunkt eines Kreditausfalls entspricht dann der ersten Sprungzeit τ eines Poisson-Prozesses mit konstanter Intensität h, da die Sprungzeiten eines solchen Zählprozesses unabhängig und identisch exponentialverteilt mit Parameter h sind.[5] Die $\mathcal{G}(t)$-bedingte Überlebenswahrscheinlichkeit aus (5.3) berechnet sich als

$$\mathbb{P}^*\{\tau > T|\mathcal{G}(t)\} = e^{-h(T-t)}, \tag{5.4}$$

für alle $t < \min(\tau, T)$. Wegen der „Gedächtnislosigkeit“ der Exponentialverteilung ist die Überlebenswahscheinlichkeit unabhängig vom Informationsstand $\mathcal{G}(t)$. Die Verteilungsfunktion des Zeitpunkts eines Kreditausfalls im Jarrow/Turnbull-Modell ist unter Verwendung von (5.4) durch

$$F_\tau(t) = \mathbb{P}^*\{\tau \leq t\} = 1 - e^{-ht}, \tag{5.5}$$

für alle $t \in [0, \mathcal{T}]$, gegeben.

Die Definition des Zeitpunkts eines Kreditausfalls im Jarrow/Turnbull-Modell ermöglicht es, den Zusammenhang zwischen der Intensität des zu Grunde liegenden Zählprozesses und der Hazardrate anschaulich darzustellen. Die Hazardrate, in der Literatur auch als Ausfallrate bezeichnet, ist eine wichtige Kenngröße von Lebensdauerverteilungen, da sie diese vollständig charakterisiert.[6] Allgemein ist die Hazardrate einer Lebensdauer τ definiert als

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{P}^*\{t < \tau \leq t + \Delta t | \tau > t\} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{\mathbb{P}^*\{t < \tau \leq t + \Delta t\}}{\mathbb{P}^*\{\tau > t\}}, \end{aligned}$$

[4] Vgl. Duffie (2001): S. 276f.

[5] Vgl. die Definition eines Poisson-Prozesses im Anhang.

[6] Vgl. Hartung (1991): S. 218f.

was sich mit $F_\tau(t) = \mathbb{P}^*\{\tau \leq t\}$ als Verteilungsfunktion der Lebensdauer τ und $f_\tau(t)$ als zugehöriger Dichtefunktion umformen lässt in

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{F_\tau(t+\Delta t) - F_\tau(t)}{1 - F_\tau(t)} \\ &= \frac{1}{1 - F_\tau(t)} \frac{dF_\tau(t)}{dt} \\ &= \frac{1}{1 - F_\tau(t)} f_\tau(t). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Das Produkt $h(t)\Delta t$ entspricht für kleine Zeitintervalle Δt in etwa der Wahrscheinlichkeit, dass ein Objekt mit Lebensdauerverteilung $F_\tau(t)$ nach Erreichen des Zeitpunkts t innerhalb der nachfolgenden Zeitspanne Δt ausfällt. Im Jarrow/Turnbull-Modell kann die Hazardrate des Zeitpunkts eines Kreditausfalls mittels (5.6) in Verbindung mit (5.5) als

$$h(t) = \frac{he^{-ht}}{e^{-ht}} = h$$

berechnet werden. Die Hazardrate ist zu jedem Zeitpunkt t konstant und gleich der Intensität h. Die Wahrscheinlichkeit eines unmittelbar bevorstehenden Kreditausfalls ergibt sich demzufolge als $h\Delta t$.

5.1.2 Bewertung zustandsbedingter Ansprüche bei Kreditrisiko

Bereits Kapitel 3.3.1 befasste sich mit der Bewertung von zustandsbedingten Ansprüchen. Der Preis eines zustandsbedingten Anspruchs ergab sich dort als Erwartungswert des mit dem Geldmarktkonto diskontierten Zahlungsstroms, berechnet unter einem äquivalenten Martingalmaß. Dieser als Martingalmaß-Technik bezeichnete Bewertungsansatz unterstellt implizit, dass ein zustandsbedingter Anspruch bei Fälligkeit gemäß den vertraglichen Vereinbarungen erfüllt wird, der Zahlungsstrom also nicht kreditrisikobehaftet ist. Demgegenüber unterliegt ein kreditrisikobehafteter zustandsbedingter Anspruch der Gefahr, dass die vertraglich vereinbarte Zahlung bei Fälligkeit nicht vollständig geleistet wird.

Die Arbeiten von Jarrow/Turnbull (1995) und Duffie/Singleton (1999) zeigen, dass die Martingalmaß-Technik auch zur Preisbestimmung eines kreditrisikobehafteten zustandsbedingten Anspruchs eingesetzt werden kann, wenn man den Zeitpunkt eines Kreditausfalls wie in Kapitel 5.1.1 als erste Sprungzeit eines Zählprozesses mit gegebener Intensität konstruiert. Die grundsätzlichen Annahmen dieser intensitätsbasierten

Modelle lassen sich wie folgt zusammen: Ausgehend von dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}^*)$ und der Filtration $\{\mathcal{G}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ wird unterstellt, dass ein zum subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$ äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}^*$ existiert, unter dem die mit dem Geldmarktkonto diskontierten Preise der auf dem Kapitalmarkt gehandelten Wertpapiere, einschließlich des betrachteten kreditrisikobehafteten zustandsbedingten Anspruchs, bezüglich $\mathcal{G}(t)$ die Martingaleigenschaft aufweisen. Der zu Grunde liegende Zählprozess besitzt unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}^*$ eine Intensität $\{q(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$, die vorhersehbar bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ ist und $\int_0^t q(s)ds < \infty$ fast sicher für alle t erfüllt. Der Zuwachs $N(T) - N(t)$ des Zählprozesses ist bei gegebenem Informationsstand $\mathcal{G}(t) \vee \mathcal{F}(T)$ für alle $T > t$, mit $T \leq \mathcal{T}$, auch unter $\mathbb{Q}^*$ poissonverteilt, und zwar mit Parameter $\int_t^T q(s)ds$.[7]

Mit Blick auf die im nachfolgenden Kapitel zu bewertenden Unternehmensanleihen reicht es aus, die Bewertung in intensitätsbasierten Modellen anhand eines „sehr einfachen“ kreditrisikobehafteten zustandsbedingten Anspruchs zu verdeutlichen: Tritt bis zur Fälligkeit im Zeitpunkt T, $T \in [0, \mathcal{T}]$, ein Kreditausfall ein, wird die vertraglich vereinbarte Zahlung in Höhe von X nicht geleistet, die Abschreibungsrate ist demzufolge eins. Geht man wie bisher davon aus, dass τ als erste Sprungzeit des Zählprozesses den Zeitpunkt eines Kreditausfalls anzeigt, besitzt der Preis des kreditrisikobehafteten zustandsbedingten Anspruchs X auf Grund der unterstellten Martingaleigenschaft die Darstellung

$$\pi(t, X) = E^{\mathbb{Q}^*}\left[\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} X | \mathcal{G}(t)\right], \tag{5.7}$$

für alle $t \in [0, T]$. Dabei wird vorausgesetzt, dass der Prozess $\{r(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$, der die Entwicklung des kurzfristigen Kassazinssatzes unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}^*$ beschreibt, adaptiert ist an die Filtration $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ und X eine $\mathcal{F}(T)$-messbare und integrierbare Zufallsvariable darstellt. Die Indikatorfunktion innerhalb des Erwartungswerts kann wie in Gleichung (5.2) eliminiert werden. Mit den Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte lässt sich (5.7) umschreiben in

$$\pi(t, X) \quad = \quad E^{\mathbb{Q}^*}\left[E^{\mathbb{Q}^*}\left[\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} X | \mathcal{G}(t) \vee \mathcal{F}(T)\right] | \mathcal{G}(t)\right],$$

[7] Vgl. Duffie (2001): S. 277f. Duffie greift dort auf eine verallgemeinerte Version des Theorems von Girsanov zurück, um hinreichende Bedingungen für die Existenz der Intensität des Zählprozesses und die Poissonverteilung der Zuwächse unter dem zum subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß äquivalenten Martingalmaß abzuleiten.

was auf Grund der Adaptiertheit und Messbarkeit von $\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}X$ zu

$$\begin{aligned}\pi(t,X) &= E^{\mathbb{Q}^*}\left[\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}X E^{\mathbb{Q}^*}\left[\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}|\mathcal{G}(t)\vee\mathcal{F}(T)\right]|\mathcal{G}(t)\right]\\ &= E^{\mathbb{Q}^*}\left[\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}X\mathbb{Q}^*\{\tau>T|\mathcal{G}(t)\vee\mathcal{F}(T)\}|\mathcal{G}(t)\right]\end{aligned}$$

führt. Unter Verwendung der Poissonverteilung von τ folgt daraus analog zu (5.3)

$$\begin{aligned}\pi(t,X) &= E^{\mathbb{Q}^*}\left[\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}X\exp\left\{-\int_t^T q(s)ds\right\}|\mathcal{G}(t)\right]\\ &= E^{\mathbb{Q}^*}\left[\exp\left\{-\int_t^T (r(s)+q(s))\,ds\right\}X|\mathcal{G}(t)\right].^8 \qquad (5.8)\end{aligned}$$

Eine wesentliche Vereinfachung des Bewertungszusammenhangs aus (5.8) lässt sich durch die folgende Bedingung erreichen.

Bedingung I1: Für jede Zufallsvariable ξ, die $\mathcal{F}(\mathcal{T})$-messbar und integrierbar unter $\mathbb{Q}^*$ ist, gilt

$$E^{\mathbb{Q}^*}\left[\xi|\mathcal{G}(t)\right] = E^{\mathbb{Q}^*}\left[\xi|\mathcal{F}(t)\right],\ \text{für alle } t\in[0,\mathcal{T}]. \qquad (5.9)$$

Die meisten intensitätsbasierten Kreditrisikomodelle greifen entweder explizit oder implizit auf diese Bedingung zurück. Bielecki/Rutkowski (2002) zeigen, dass Bedingung I1 genau dann erfüllt ist, wenn die σ-Algebren $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ und $\mathcal{G}(t)$, gegeben $\mathcal{F}(t)$, bedingt unabhängig unter $\mathbb{Q}^*$ sind.[9] Da die Zufallsvariable $\exp\left\{-\int_t^T (r(s)+q(s))\,ds\right\}X$ aus (5.8) sowohl $\mathcal{F}(T)$-messbar als auch integrierbar unter $\mathbb{Q}^*$ ist, ergibt sich mit $\mathcal{F}(T)\subset\mathcal{F}(\mathcal{T})$ und unter Verwendung von Bedingung I1

$$\pi(t,X) = E^{\mathbb{Q}^*}\left[\exp\left\{-\int_t^T (r(s)+q(s))\,ds\right\}X|\mathcal{F}(t)\right]. \qquad (5.10)$$

Ein Vergleich von (5.10) mit der Bewertungsgleichung (3.75) aus Satz MM1 in Kapitel 3.3.1 zeigt, wie im vorliegenden intensitätsbasierten Modellrahmen die Gefahr eines Kreditausfalls bei der Bewertung des zustandsbedingten Anspruchs X berücksichtigt wird: Der Preis von X entspricht zwar weiterhin dem Erwartungswert des diskontierten vertraglich vereinbarten Zahlungsstroms, berechnet unter einem äquivalenten

[8] Vgl. Duffie (2001): S. 278f.

[9] Diese Bedingung wiederum ist äquivalent zur so genannten Martingal-Invarianz-Eigenschaft, d.h. ein Martingal bezüglich $\mathcal{F}(t)$ ist auch ein Martingal bezüglich $\mathcal{G}(t)$. Vgl. Bielecki/Rutkowski (2002): S. 242.

Martingalmaß, allerdings ist der risikolose Zinssatz, der den Diskontierungsfaktor bisher bestimmte, additiv um die Intensität des zu Grunde liegenden Zählprozesses zu erhöhen.

Bevor die Frage nach der „ökonomischen Rechtfertigung“ der Bewertung eines kreditrisikobehafteten zustandsbedingten Anspruchs mittels (5.10) aufgegriffen wird, sei noch einmal auf die Herleitung der Bewertungsgleichung (3.75) für den kreditrisikolosen Fall hingewiesen. Die Herleitung dieser Bewertungsgleichung basiert darauf, dass der Zahlungsstrom eines zustandsbedingten Anspruchs durch eine selbstfinanzierende Handelsstrategie dupliziert werden kann. Bei Arbitragefreiheit muss der Preis des betrachteten zustandsbedingten Anspruchs jederzeit mit dem Marktwert des entsprechenden Duplikationsportefeuilles übereinstimmen. Die Bewertung eines zustandsbedingten Anspruchs mittels der Martingalmaß-Technik ist dadurch gerechtfertigt, dass die mit dem Geldmarktkonto diskontierte Marktwertentwicklung des Duplikationsportefeuilles unter dem äquivalenten Martingalmaß die Martingaleigenschaft aufweist. Die Existenz eines eindeutigen äquivalenten Martingalmaßes ist im Grunde gleichbedeutend mit der Vollständigkeit des Kapitalmarkts, so dass jeder beliebige zustandsbedingte Anspruch duplizierbar ist. Im Rahmen der intensitätsbasierten Bewertung eines kreditrisikobehafteten zustandsbedingten Anspruchs wird hingegen lediglich die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes vorausgesetzt. Dies bedeutet, dass die Bewertung mittels (5.10) zwar die Arbitragefreiheit des Kapitalmarkts gewährleistet, sich also unter Einbeziehung des Geldmarktkontos und der dort gehandelten Wertpapiere, einschließlich des betrachteten kreditrisikobehafteten zustandsbedingten Anspruchs, keine selbstfinanzierende Handelsstrategie konstruieren lässt, die eine Arbitragemöglichkeit darstellt, nicht aber, dass es ein entsprechendes Duplikationsportefeuille gibt.[10] In intensitätsbasierten Modellen ist somit nicht von vornherein ausgeschlossen, dass noch weitere äquivalente Martingalmaße existieren, die möglicherweise zu anderen Preisen für den kreditrisikobehafteten zustandsbedingten Anspruch führen. Für das im nachfolgenden Kapitel vorgestellte Modell ist das zur Bewertung heranzuziehende äquivalente Martingalmaß allerdings eindeutig.

[10] Vgl. Duffie et al. (1996): S. 1076f. oder Bielecki/Rutkowski (2002): S. 233f.

5.2 Integration unternehmensspezifischer Größen

In der Literatur finden sich verschiedene intensitätsbasierte Kreditrisikomodelle, die unternehmensspezifische Größen berücksichtigen. Der Grundgedanke besteht darin, die Intensität des zu Grunde liegenden Zählprozesses in Abhängigkeit unternehmensspezifischer Größen anzugeben. So beweisen Duffie/Lando (2001), dass im unternehmenswertbasierten Kreditrisikomodell von Leland (1994) eine von unternehmensspezifischen Größen abhängige Intensität existiert, wenn die Anleiheinhaber nur periodisch „verzerrte" Informationen über den Unternehmenswert erhalten. Madan/Unal (1998) geben in ihrem Modell die Intensität als Funktion des diskontierten Marktwerts des Eigenkapitals des betrachteten Unternehmens vor, während die Intensität im Modell von Madan/Unal (2000) von Parametern der Dynamik des Unternehmenswerts und der Zinsstruktur abhängt.

Die aufgeführten Modelle unterstellen oder erzeugen einem bestimmten funktionalen Zusammenhang zwischen der Intensität des Zählprozesses und unternehmensspezifischen Größen. Ein allgemeinerer Ansatz ist bei Lando (1998) zu finden. Lando geht zunächst davon aus, dass der Zählprozess $\{N(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ eine Intensität $\{q(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ besitzt, die sich als Funktion $q(t) = q(Y(t))$ darstellen lässt. Dabei beschreibt der d-dimensionale stochastische Prozess $\{Y(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ die Entwicklung der zu berücksichtigenden Zustandsvariablen, die neben unternehmensspezifischen Größen auch Zinsstrukturgrößen oder makroökonomische Daten sein können. Sowohl der Prozess für die Entwicklung der Zustandsvariablen als auch die Intensität sind annahmegemäß adaptiert an die Filtration $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$. Lando nimmt an, dass diese Filtration vom stochastischen Prozess für die Entwicklung der Zustandsvariablen erzeugt wird, so dass $\mathcal{F}(t) = \sigma(Y(s) : s \in [0, t])$ gilt.[11] Weiterhin unterstellt er die Existenz einer Zufallsvariablen E_1, die einer Exponentialverteilung mit Parameter Eins gehorcht und für alle $t \in [0, \mathcal{T}]$ unabhängig von $\mathcal{F}(t)$ ist. Alle aufgeführten Prozesse und die Zufallsvariable E_1 sind definiert auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{Q}^*)$, wobei das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}^*$ wie bisher ein äquivalentes Martingalmaß für den betrachteten Kapitalmarkt darstellt. Gegeben dieses Annahmengerüst, konstruiert Lando den Zeitpunkt eines Kreditausfalls als erste Sprungzeit τ des Zählprozesses, indem er

$$\tau = \inf\left\{t \in [0, \mathcal{T}] : \int_0^t q(s)ds = E_1\right\}$$

[11] Ein Zählprozess mit diesen Eigenschaften wird in der Literatur als Cox-Prozess bezeichnet. Vgl. Lando (1998): S. 101 oder Bielecki/Rutkowski (2002): S. 195 und S. 253.

setzt.[12] Diese Definition des Zeitpunkts eines Kreditausfalls führt zu zwei wichtigen Implikationen: Zum einen stellt τ eine Stoppzeit bezüglich der Filtration $\{\mathcal{G}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$, mit $\mathcal{G}(t) = \mathcal{F}(t) \vee \mathcal{H}(t)$, dar. Dabei ist $\mathcal{H}(t) = \sigma\left(\mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}\right)$ die von τ als erster Sprungzeit des Zählprozesses erzeugte σ-Algebra. Zum anderen ist τ unter $\mathbb{Q}^*$ bei gegebenem Informationsstand $\mathcal{G}(t) \vee \mathcal{F}(T)$ für alle $T > t$, mit $T \leq \mathcal{T}$, poissonverteilt mit Parameter $\int_t^T q(s)ds$, so dass

$$\mathbb{Q}^*\{\tau > T | \mathcal{G}(t) \vee \mathcal{F}(T)\} = \exp\left\{-\int_t^T q(s)ds\right\} \tag{5.11}$$

gilt.[13]

Die Darstellung aus Gleichung (5.11) verdeutlicht, dass das Modell von Lando ein Spezialfall des Modellrahmens aus Kapitel 5.1 ist. Zur Bewertung des in Kapitel 5.1.2 beschriebenen kreditrisikobehafteten zustandsbedingten Anspruchs X, der nichts auszahlt, wenn zum Fälligkeitszeitpunkt T, $T \in [0, \mathcal{T}]$, ein Kreditausfall eingetreten ist, kann somit weiterhin der Bewertungszusammenhang aus (5.8) herangezogen werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \pi(t, X) &= E^{\mathbb{Q}^*}\left[\exp\left\{-\int_t^T (r(s) + q(s))\, ds\right\} X | \mathcal{G}(t)\right] \\ &= E^{\mathbb{Q}^*}\left[\exp\left\{-\int_t^T (r(s) + q(s))\, ds\right\} X | \mathcal{F}(t) \vee \mathcal{H}(t)\right]. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Wie bisher wird dabei vorausgesetzt, dass der Prozess $\{r(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ adaptiert ist an die Filtration $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ und X eine $\mathcal{F}(T)$-messbare und integrierbare Zufallsvariable darstellt. Weiterhin gilt $\mathcal{F}(t) \vee \mathcal{H}(t) \subset \mathcal{F}(t) \vee \sigma(E_1)$. Wegen der für alle $t \in [0, \mathcal{T}]$ unterstellten Unabhängigkeit der Zufallsvariablen E_1 von $\mathcal{F}(t)$ sind auch die σ-Algebren $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ und $\mathcal{H}(t)$ bedingt unabhängig, gegeben $\mathcal{F}(t)$. Die Zufallsvariable $\exp\left\{-\int_t^T (r(s) + q(s))\, ds\right\} X$ aus (5.12) ist annahmegemäß $\mathcal{F}(T)$-messbar und integrierbar unter $\mathbb{Q}^*$, so dass sich mit $\mathcal{F}(T) \subset \mathcal{F}(\mathcal{T})$ die Darstellung

$$\pi(t, X) = E^{\mathbb{Q}^*}\left[\exp\left\{-\int_t^T (r(s) + q(s))\, ds\right\} X | \mathcal{F}(t)\right] \tag{5.13}$$

ergibt. Gleichung (5.13) zeigt, dass Bedingung I1 aus Kapitel 5.1.2 im Lando-Modell automatisch erfüllt ist. Dies liegt an der speziellen Konstruktion des Zeitpunkts eines Kreditausfalls.[14]

[12] Vgl. Lando (1998): S. 102. Eine ausführliche Analyse dieser Vorgehensweise zur Konstruktion des Zeitpunkts eines Kreditausfalls ist bei Bielecki/Rutkowski (2002): S. 227ff. zu finden.
[13] Vgl. Lando (1998): S. 104f.
[14] Vgl. Bielecki/Rutkowski (2002): S. 253ff.

Da die Gestalt der Intensitätsfunktion im Modell von Lando (1998) von vornherein nicht festgelegt ist, steht ein flexibler Modellrahmen zur Verfügung, um Aspekte unternehmenswert- und intensitätsbasierter Kreditrisikomodelle zu kombinieren. Das Ziel der nachfolgenden Ausführungen ist es, aufbauend auf dem oben beschriebenen Modellrahmen zunächst die Intensität des zu Grunde liegenden Zählprozesses mit dem Verschuldungsgrad des betrachteten Unternehmens zu verknüpfen. Dies erscheint sinnvoll, da die Intensität die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Zeitpunkts eines Kreditausfalls bestimmt. Wie schon die Analyse der unternehmenswertbasierten Kreditrisikomodelle in Kapitel 4 zeigt, sollte Letztere von der Verschuldungssituation des Unternehmens abhängen. In Kapitel 5.2.1 wird dazu der Prozess für die Entwicklung des logarithmierten Verschuldungsgrades des Unternehmens unter einem äquivalenten Martingalmaß bestimmt. Die Vorgabe ist dabei, dass sich die Verschuldungspolitik des Unternehmens an der Beibehaltung eines Zielverschuldungsgrades orientiert, oder anders formuliert, dass sich der Verschuldungsgrad im Zeitablauf als stationär erweist. Dies berücksichtigt die Ergebnisse neuerer empirischer Untersuchungen, die das Vorliegen stationärer Verschuldungsgrade bestätigen.[15] Kapitel 5.2.2 spezifiziert die Intensität des Zählprozesses als Funktion des logarithmierten Verschuldungsgrades. In Kapitel 5.2.3

wird das resultierende intensitätsbasierte Kreditrisikomodell zur Bewertung von Unternehmensanleihen eingesetzt. Da bei der Bestimmung des Prozesses für die Entwicklung des logarithmierten Verschuldungsgrades auf den Modellrahmen aus den Kapitel 4 zurückgegriffen wird, ist es möglich, die Ergebnisse der komparativ-statischen Analyse der Credit-Spreads in Kapitel 5.2.4 mit denen der unternehmenswertbasierten Kreditrisikomodelle zu vergleichen.

5.2.1 Dynamik des Verschuldungsgrades

In Kapitel 4.2.2 wurde gezeigt, dass sich die zufallsabhängige Entwicklung des kurzfristigen Kassazinssatzes und des Unternehmenswerts unter einem äquivalenten Martingalmaß durch die stochastischen Differenzialgleichungen

$$dr(t) = \kappa \left(\bar{r} - r(t)\right) dt + \eta dW_r(t) \tag{5.14}$$

und

$$dV(t) = r(t)V(t)dt + \sigma\rho V(t)dW_r(t) + \sigma\sqrt{1-\rho^2}V(t)dW_V(t) \tag{5.15}$$

[15] Vgl. Opler/Titman (1996) oder Fama/French (2002). Stationäre Verschuldungsgrade sind vereinbar mit der bereits in Kapitel 2.1.2 angesprochenen Tradeoff-Theorie zur Erklärung der Verschuldungspolitik von Unternehmen.

beschreiben lässt.[16] Für den logarithmierten Unternehmenswert $y(t) = \ln V(t)$ ergibt sich mittels Itôs Lemma das stochastische Differenzial

$$dy(t) = \left(r(t) - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma\rho dW_r(t) + \sigma\sqrt{1-\rho^2}dW_V(t).^{17} \tag{5.16}$$

Es wird unterstellt, dass die im vorherigen Kapitel angeführte Referenz-Filtration $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ von den Prozessen aus Gleichung (5.14) und (5.15) bzw. (5.16) erzeugt wird.

Um einen im Zeitablauf stationären Verschuldungsgrad des betrachteten Unternehmens zu gewährleisten, wird die Dynamik des logarithmierten Verschuldungsvolumens unter dem äquivalenten Martingalmaß durch

$$dk(t) = \gamma(y(t) - \nu - \psi(r(t) - \bar{r}) - k(t))dt, \tag{5.17}$$

mit $\gamma, \nu, \psi > 0$, beschrieben. Die Darstellung für die Entwicklung des logarithmierten Verschuldungsvolumens aus (5.17) geht auf Collin-Dufresne/Goldstein (2001) zurück. Collin-Dufresne/Goldstein erweitern das in Kapitel 4.4 vorgestellte unternehmenswertbasierte Kreditrisikomodell von Longstaff/Schwartz (1995), indem sie den Zeitpunkt eines Kreditausfalls als erste Durchgangszeit des Unternehmenswerts durch eine stochastische Ausfallschranke der Form (5.17) vorgeben.[18] Gleichung (5.17) führt zu folgenden Implikationen für die Verschuldungspolitik des Unternehmens: Wenn $k(t)$ kleiner ist als $y(t) - \nu - \psi(r(t) - \bar{r})$, nimmt die Driftfunktion des Prozesses einen positiven Wert an, d.h. das Unternehmen erhöht das logarithmierte Verschuldungsvolumen. Ist $k(t)$ größer als $y(t) - \nu - \psi(r(t) - \bar{r})$, nimmt die Driftfunktion einen negativen Wert an, d.h. das logarithmierte Verschuldungsvolumen sinkt. Weiterhin ist die Driftfunktion für $\psi > 0$ monoton fallend im kurzfristigen Kassazinssatz $r(t)$, so dass das logarithmierte Verschuldungsvolumen zurückgeht, wenn der kurzfristige Kassazinssatz steigt. Dies trägt dem auf den Kapitalmärkten bei steigendem Zinsniveau zu beobachtenden Rückgang der Emissionsvolumina von Forderungstiteln Rechnung.[19]

Die Vorgabe der Entwicklung des logarithmierten Verschuldungsvolumens mittels Gleichung (5.17) sorgt dafür, dass sich der Verschuldungsgrad des Unternehmens als stationär erweist. Dies wird deutlich, wenn man die Entwicklung des logarithmierten Verschuldungsgrades des Unternehmens, definiert als $l(t) = k(t) - y(t)$, betrachtet. Die Entwicklung von $l(t)$ unter dem äquivalenten Martingalmaß kann analog zur Bestimmung des logarithmierten Verschuldungsgrades im Longstaff/Schwartz-Modell aus

[16] Siehe Gleichung (4.32) und (4.31).
[17] Siehe Gleichung (4.60).
[18] Vgl. Collin-Dufresne/Goldstein (2001): S. 1939ff.
[19] Vgl. ebenda: S. 1940f.

(4.61) mittels Itôs Lemma angegeben werden. Ausgangspunkt ist der 2-dimensionale stochastische Prozess für $X(t) = (k(t), y(t))$ mit dem stochastischen Differenzial

$$dX(t) = f(t)dt + G(t)dW(t),$$

wobei

$$f(t) = \begin{pmatrix} \gamma(y(t) - \nu - \psi(r(t) - \bar{r}) - k(t)) \\ r(t) - \frac{\sigma^2}{2} \end{pmatrix},$$

$$G(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma\rho & \sigma\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}, \quad dW(t) = \begin{pmatrix} dW_r(t) \\ dW_V(t) \end{pmatrix}$$

gilt. Mittels Itôs Lemma lässt sich der Prozess für die Entwicklung des logarithmierten Verschuldungsgrades durch das stochastische Differenzial

$$dl(t) = g(t)f(t)dt + g(t)G(t)dW(t)$$

darstellen. Dabei gibt $g(t) = (1, -1)$ den entsprechenden Gradienten an. Nach Berechnen der Skalar- und Matrixprodukte und Zusammenfassen der Terme erhält man

$$dl(t) = \gamma\left(\bar{l}(t) - l(t)\right)dt - \sigma\rho dW_r(t) - \sigma\sqrt{1-\rho^2}dW_V(t), \tag{5.18}$$

mit

$$\bar{l}(t) = \frac{-r(t) + \frac{\sigma^2}{2}}{\gamma} - \nu - \psi(r(t) - \bar{r}).^{20} \tag{5.19}$$

Durch die Anwendung von Itôs Lemma ist gewährleistet, dass der Prozess für die Entwicklung des logarithmierten Verschuldungsgrades aus (5.18) ebenfalls an die Referenz-Filtration $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ adaptiert ist. Analog zum kurzfristigen Kassazinssatz im Vasicek-Modell aus (5.14) besitzt der Prozess die Mean-Reversion-Eigenschaft. Das Mean-Reversion-Niveau $\bar{l}(t)$ hängt vom kurzfristigen Kassazinssatz $r(t)$ ab und ist daher stochastisch. Gegeben $r(t)$, kennzeichnet $\bar{l}(t)$ den Verschuldungsgrad, gegen den $l(t)$ im langfristigen Mittel tendiert. Dies verdeutlicht ein Blick auf die Driftfunktion des Prozesses, die für $l(t) < \bar{l}(t)$ ($l(t) > \bar{l}(t)$) einen positiven (negativen) Wert annimmt. Liegt $l(t)$ unter (über) $\bar{l}(t)$ ist ein höherer (niedrigerer) logarithmierter Verschuldungsgrad zu erwarten, so dass $l(t)$ immer wieder an $\bar{l}(t)$ herangezogen wird. Die Konstante γ gibt die Anpassungsgeschwindigkeit an. Das Mean-Reversion-Niveau $\bar{l}(t)$ lässt sich somit als logarithmierter Zielverschuldungsgrad des Unternehmens interpretieren.

[20]Vgl. Collin-Dufresne/Goldstein (2001): S. 1941.

Soll die Dynamik des logarithmierten Verschuldungsgrades unter dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß angegeben werden, müssen die entsprechenden Prozesse für die Entwicklung des kurzfristigen Kassazinssatzes und des logarithmierten Unternehmenswerts herangezogen und die Parameter des Mean-Reversion-Niveaus aus (5.19) angepasst werden. Letzteres stellt sich wie folgt dar:

$$\bar{l}(t) = \frac{-\mu(t) + \frac{\sigma^2}{2}}{\gamma} - \nu - \psi(r(t) - \beta), \tag{5.20}$$

wobei $\mu(t)$ die erwartete Momentanrendite des Unternehmenswerts und β das Mean-Reversion-Niveau des kurzfristigen Kassazinssatzes unter dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß angibt.

5.2.2 Spezifikation der Intensitätsfunktion

Die Intensität des zu Grunde liegenden Zählprozesses wird im Folgenden als lineare Funktion des logarithmierten Verschuldungsgrades vorgegeben. Der Vorteil einer solchen Vorgehensweise besteht darin, dass eine analytische Lösung der resultierenden Bewertungsgleichungen wesentlich vereinfacht wird. Im hier vorgestellten Modellrahmen bietet es sich an, die Intensität als

$$q(t) = q(l(t)) = -\frac{\alpha}{l(0)} + \frac{\alpha}{l(0)\pi} l(t), \tag{5.21}$$

mit $\alpha > 0$ und $\pi < 0$, darzustellen.[21] $l(0)$ entspricht dem aktuellen logarithmierten Verschuldungsgrad des Unternehmens, wobei $l(0) < 0$ gilt, da eine Überschuldung im Ausgangszeitpunkt ausgeschlossen wird. Durch die Spezifikation aus (5.21) weist die Intensität die folgenden Eigenschaften auf:

1. Wegen $l(t) \uparrow (\downarrow) \Leftrightarrow q(t) \uparrow (\downarrow)$ geht mit einem höheren (niedrigeren) logarithmierten Verschuldungsgrad eine höhere (niedrigere) Intensität einher. Dies bedeutet

[21] Die Spezifikation der Intensität gemäß (5.21) orientiert sich an Hübner (1997, 2001), der einen ähnlichen funktionalen Zusammenhang zwischen der mittleren Verlustrate aus dem intensitätsbasierten Modell von Duffie/Singleton (1999) und der von ihm verwendeten Zustandsvariablen unterstellt. Die mittlere Verlustrate ist definiert als Produkt aus der Intensität des Zählprozesses und dem anteiligem Marktwertverlust einer Anleihe bei Eintritt ein Kreditausfalls. Sie erfasst somit die Unsicherheit hinsichtlich des Zeitpunkts und der Höhe eines Kreditausfalls. Hübner beschreibt die Entwicklung der Zustandsvariable durch einen Prozess, der zwar ebenfalls die Mean-Reversion-Eigenschaft aufweist, allerdings wie der Prozess für die Entwicklung des kurzfristigen Kassazinssatzes aus dem Vasicek-Modell ein konstantes Mean-Reversion-Niveau besitzt. Der hier gewählte Ansatz unterscheidet sich weiterhin hinsichtlich der ökonomischen Interpretation der Zustandsvariablen von dem angesprochenen Modell. Vgl. Hübner (1997, 2001): S. 13ff. bzw. S. 303.

unter anderem, dass die Wahrscheinlichkeit eines unmittelbar bevorstehenden Kreditausfalls mit steigendem (sinkendem) logarithmiertem Verschuldungsgrad zunimmt (abnimmt).

2. Ein Verschuldungsgrad „nahe Eins", der einem logarithmierten Verschuldungsgrad „nahe Null" entspricht, ist in der Regel durch Schwierigkeiten im Finanzbereich des Unternehmens gekennzeichnet. Die durch die Intensität bestimmte Wahrscheinlichkeit eines unmittelbar bevorstehenden Kreditausfalls sollte in diesem Fall relativ hoch sein. Der Zusammenhang $l(t) \to 0 \Leftrightarrow q(t) \to -\alpha/l(0)$ impliziert, dass die Intensität bei einem logarithmierten Verschuldungsgrad nahe Null ausschließlich von zustandsunabhängigen Parametern bestimmt wird. Dies setzt voraus, dass die Marktteilnehmer bereits heute gewisse Vorstellungen bezüglich der Intensität bei Eintritt eines solchen Szenarios haben. Berücksichtigt man die von einer höheren Verschuldung ausgehenden negativen Anreizeffekte für die Gesellschafter des Unternehmens, liegt die Vermutung nahe, dass die Intensität bei Erreichen eines Verschuldungsgrades nahe Eins höher eingeschätzt wird, je höher der aktuelle Verschuldungsgrad ist. Diesem Umstand wird durch die Gewichtung der Intensität mit dem aktuellen logarithmierten Verschuldungsgrad $l(0)$ Rechnung getragen.

3. Bei einem „sehr niedrigen" Verschuldungsgrad treten in der Regel keine Schwierigkeiten im Finanzbereich des Unternehmens auf, so dass auch die Wahrscheinlichkeit eines unmittelbar bevorstehenden Kreditausfalls gegen Null geht. Angenommen, ein solcher Verschuldungsgrad ist durch π' gekennzeichnet. Mit $\pi = \ln \pi'$ gilt dann $l(t) \to \pi \Leftrightarrow q(t) \to 0$. Geht also der logarithmierte Verschuldungsgrad gegen π, ist die Intensität annähernd Null.

4. Bei einem Verschuldungsgrad, der dem Verschuldungsgrad im Ausgangszeitpunkt entspricht, kommt es zu keiner „Neubewertung" der Gefahr eines Kreditausfalls. Die Wahrscheinlichkeit eines unmittelbar bevorstehenden Kreditausfalls sollte daher in etwa der im Ausgangszeitpunkt entsprechen. Dies spiegelt sich in der Intensität wider, für die gilt $l(t) \to l(0) \Leftrightarrow q(t) \to -\frac{\alpha}{l(0)} + \frac{\alpha}{\pi}$.

5.2.3 Partialanalytische Bewertung von Anleihen

Das hier vorgestellte intensitätsbasierte Kreditrisikomodell besitzt einen partialanalytischen Charakter. Dies äußert sich zum einen in der Spezifikation der Intensität des zu

Grunde liegenden Zählprozesses aus Kapitel 5.2.2. Dort wurde die Intensität, welche die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Zeitpunkts eines Kreditausfalls bestimmt, nicht unter Berücksichtigung aller in den Finanzierungsverträgen getroffenen Vereinbarungen vorgegeben, sondern als Funktion des logarithmierten Verschuldungsgrades des betrachteten Unternehmens dargestellt. Zum anderen soll analog zum unternehmenswertbasierten Kreditrisikomodell von Longstaff/Schwartz (1995) unterstellt werden, dass sich bei Eintritt eines Kreditausfalls die nachfolgenden Zins- und Tilgungszahlungen der emittierten Anleihen um eine konstante Abschreibungsrate verringern. Ebenso wie der Zeitpunkt wird somit auch die Höhe eines Kreditausfalls losgelöst von den vertraglichen Vereinbarungen der emittierten Finanzierungstitel im Einzelnen angegeben. So erhalten die Inhaber eines Zerobonds mit einem Rückzahlungsbetrag von einem € bei Fälligkeit im Zeitpunkt T, $T \in [0, \mathcal{T}]$, wie im Longstaff/Schwartz-Modell einen Einzahlungsüberschuss von

$$\begin{aligned} D(T,T) &= 1 - w\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \\ &= 1 - w(1 - \mathbf{1}_{\{\tau > T\}}) \\ &= (1-w) + w\mathbf{1}_{\{\tau > T\}}, \end{aligned} \tag{5.22}$$

wobei τ weiterhin den Zeitpunkt eines Kreditausfalls darstellt und w, $0 < w \leq 1$, als konstante Abschreibungsrate den Anteil des Rückzahlungsbetrages angibt, den die Zerobondinhaber bei Eintritt eines Kreditausfalls bis zum Fälligkeitszeitpunkt verlieren. Aus Gleichung (5.22) ist zu ersehen, dass sich der Einzahlungsüberschuss der Zerobondinhaber duplizieren lässt durch ein Portefeuille aus $(1-w)$ gekauften kreditrisikolosen Zerobonds und w gekauften kreditrisikobehafteten Zerobonds mit einer Abschreibungsrate von Eins. Die Zusammenstellung eines solchen Duplikationsportefeuille setzt demzufolge voraus, dass kreditrisikobehaftete Zerobonds, die nichts auszahlen, wenn bis zur Fälligkeit im Zeitpunkt T beim betrachteten Unternehmen ein Kreditausfall eingetreten ist, auf dem Kapitalmarkt gehandelt werden. Bei Arbitragefreiheit ergibt sich der heutige Preis des Zerobonds aus (5.22) dann als

$$D(0,T) = (1-w)P(0,T) + wD_1(0,T). \tag{5.23}$$

Dabei symbolisiert $P(0,T)$ den Preis des im Duplikationsportefeuille enthaltenen kreditrisikolosen Zerobonds und $D_1(0,T)$ den Preis des kreditrisikobehafteten Zerobonds mit der Abschreibungsrate von Eins. Wie im Longstaff/Schwartz-Modell können kreditrisikobehaftete Kuponanleihen als Portefeuilles aus entsprechenden Zerobonds mit unterschiedlichen Laufzeiten dargestellt werden. Für den heutigen Preis einer Anleihe, die neben dem Rückzahlungsbetrag von einem € bei Fälligkeit im Zeitpunkt T Kuponzahlungen in Höhe von C €, $0 < C < 1$, in den Zeitpunkten T_j, mit $j = 1, \ldots, n$ und $0 < T_1 < \ldots < T_n = T$, verbrieft, gilt dann

$$D_C(0,T) = \sum_{i=1}^{n} D(0,T_j)C + D(0,T). \tag{5.24}$$

Die Gleichungen (5.23) und (5.24) zeigen, dass auf Grund der getroffenen Annahmen die Kenntnis von $P(0,T)$ und $D_1(0,T)$ ausreicht, um die vom betrachteten Unternehmen emittierten Zerobonds und Kuponanleihen zu bewerten. $P(0,T)$ als Preis des kreditrisikolosen Zerobonds ist dabei durch das verwendete Zinsstrukturmodell von Vasicek bestimmt. Zur Bestimmung von $D_1(0,T)$ kann man den Bewertungszusammenhang aus (5.13) heranzeihen. Für $X = 1$ gilt

$$D_1(0,T) = E^{\mathbb{Q}^*}\left[\exp\left\{-\int_t^T (r(s) + q(s))\, ds\right\}\right]. \tag{5.25}$$

Nach Einsetzen der verschuldungsgradabhängigen Intensität aus (5.21) ergibt sich

$$D_1(0,T) = E^{\mathbb{Q}^*}\left[\exp\left\{-\int_0^T \left(r(s) - \frac{\alpha}{l(0)} + \frac{\alpha}{l(0)\pi} l(s)\right) ds\right\}\right]. \tag{5.26}$$

Die Berechnung des Erwartungswerts kann analog zum Longstaff/Schwartz-Modell durch einen Wechsel auf das Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ vereinfacht werden.[22] Es gilt

$$\begin{aligned} D_1(0,T) &= P(0,T)E^{\mathbb{Q}^T}\left[\exp\left\{-\int_0^T \left(-\frac{\alpha}{l(0)} + \frac{\alpha}{l(0)\pi} l(s)\right) ds\right\}\right] \\ &= P(0,T)E^{\mathbb{Q}^T}\left[\exp\left\{\int_0^T \left(\frac{\alpha}{l(0)} - \frac{\alpha}{l(0)\pi} l(s)\right) ds\right\}\right] \\ &= P(0,T)E^{\mathbb{Q}^T}\left[\exp\left\{\frac{\alpha}{l(0)} T - \frac{\alpha}{l(0)\pi} \int_0^T l(s) ds\right\}\right]. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Der Erwartungswert aus Gleichung (5.27) entspricht der unbedingten Überlebenswahrscheinlichkeit unter dem Forwardmaß, $\mathbb{Q}^T\{\tau > T\}$.[23] Zur Berechnung dieses Erwartungswerts muss die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Integrals $\int_0^T l(s)ds$ unter dem Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ bestimmt werden. Ausgangspunkt ist dabei der Prozess für die Entwicklung des logarithmierten Verschuldungsgrades unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}^*$ aus (5.18). Da im hier vorgestellten intensitätsbasierten Modell hinsichtlich der

[22]Siehe Gleichung (4.55).

[23]Siehe Gleichung (5.3), in der die bedingte Überlebenswahrscheinlichkeit unter dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß dargestellt wird.

relevanten stochastischen Prozesse weiterhin auf das schon von Longstaff/Schwartz verwendete Gauß'sche 2-Faktoren-Modell zurückgegriffen wird, findet der Übergang auf das Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ wie in Kapitel 4.4 durch die Ersetzungen

$$\begin{aligned} dW_r(t) &= dW_r^T(t) - \frac{\eta}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) dt, \\ dW_V(t) &= dW_V^T(t) \end{aligned}$$

statt. Durch $dW_r^T(t)$ und $dW_V^T(t)$ werden wiederum voneinander unabhängige Wiener-Prozesse unter $\mathbb{Q}^T$ beschrieben. Die Entwicklung des logarithmierten Verschuldungsgrades unter $\mathbb{Q}^T$ ist demzufolge durch die stochastische Differenzialgleichung

$$dl(t) = \gamma\left(\bar{l}(t) - l(t)\right) dt - \sigma\rho dW_r^T(t) - \sigma\sqrt{1-\rho^2}\,dW_V^T(t), \tag{5.28}$$

mit

$$\bar{l}(t) = \frac{-r(t) + \frac{\sigma^2}{2}}{\gamma} - \nu - \psi(r(t) - \bar{r})) + \frac{\rho\sigma\eta}{\gamma\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right),$$

gegeben, wobei die Entwicklung des kurzfristigen Kassazinssatzes unter dem Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$

$$dr(t) = \kappa\left(\bar{r} - \frac{\eta^2}{\kappa^2}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) - r(t)\right) dt + \eta dW_r^T(t) \tag{5.29}$$

folgt. Die Lösung der stochastischen Differenzialgleichung (5.28) für $0 \leq s < t$ lautet

$$\begin{aligned} l(t) = \; & l(s)e^{-\gamma(t-s)} + \gamma\left(\frac{\sigma^2}{2\gamma} - \nu + \psi\bar{r}\right)\underbrace{\int_s^t e^{-\gamma(t-u)}du}_{T_1} \\ & -\gamma\left(\frac{1}{\gamma} + \psi\right)\underbrace{\int_s^t r(u)e^{-\gamma(t-u)}du}_{T_2} + \gamma\frac{\rho\sigma\eta}{\gamma\kappa}\underbrace{\int_s^t \left(1 - e^{-\kappa(T-u)}\right)e^{-\gamma(t-u)}du}_{T_3} \\ & - \int_s^t \sigma\rho e^{-\gamma(t-u)}dW_r^T(u) - \int_s^t \sigma\sqrt{1-\rho^2}e^{-\gamma(t-u)}dW_V^T(u).^{24} \end{aligned} \tag{5.30}$$

Das Integral T_1 lässt sich dabei berechnen als

$$T_1 = \frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma(t-s)}\right).$$

[24] Vgl. Korrolar A2 im Anhang.

Unter Berücksichtigung des Prozesses aus (4.64) ergibt sich für das Integral T_2

$$\begin{aligned}
T_2 &= r(s)\underbrace{\int_s^t e^{-\kappa(u-s)}e^{-\gamma(t-u)}du}_{T_{21}} + \left(\bar{r} - \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right)\underbrace{\int_s^t \left(1 - e^{-\kappa(u-s)}\right)e^{-\gamma(t-u)}du}_{T_{22}} \\
&\quad + \frac{\eta^2}{2\kappa^2}\underbrace{\int_s^t e^{-\kappa(T-u)}\left(1 - e^{-2\kappa(t-u)}\right)e^{-\gamma(t-u)}du}_{T_{23}} \\
&\quad + \eta\underbrace{\int_s^t\int_s^u e^{-\kappa(u-v)}dW_r^T(v)e^{-\gamma(t-u)}du}_{T_{24}}.
\end{aligned}$$

Für die Integrale T_{21} und T_{22} folgt unmittelbar

$$T_{21} = e^{-\kappa(t-s)}\int_s^t e^{-(\gamma-\kappa)(t-u)}du = e^{-\kappa(t-s)}\frac{1}{\gamma-\kappa}\left(1 - e^{-(\gamma-\kappa)(t-s)}\right)$$

bzw.

$$\begin{aligned}
T_{22} &= \int_s^t e^{-\gamma(t-u)}du - e^{-\kappa(t-s)}\int_s^t e^{-(\gamma-\kappa)(t-u)}du \\
&= \frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma(t-s)}\right) - e^{-\kappa(t-s)}\frac{1}{\gamma-\kappa}\left(1 - e^{-(\gamma-\kappa)(t-s)}\right).
\end{aligned}$$

Das Integral T_{23} kann berechnet werden als

$$\begin{aligned}
T_{23} &= e^{-\kappa(T-t)}\int_s^t e^{-(\gamma+\kappa)(t-u)}(1 - e^{-2\kappa(u-s)})du \\
&= e^{-\kappa(T-t)}\left(\int_s^t e^{-(\gamma+\kappa)(t-u)}du - \int_s^t e^{-(\gamma+\kappa)(t-u)}e^{-2\kappa(u-s)}du\right) \\
&= e^{-\kappa(T-t)}\left(\int_s^t e^{-(\gamma+\kappa)(t-u)}du - e^{-2\kappa(t-s)}\int_s^t e^{-(\gamma-\kappa)(t-u)}du\right) \\
&= e^{-\kappa(T-t)}\frac{1}{\gamma+\kappa}\left(1 - e^{-(\gamma+\kappa)(t-s)}\right) - e^{-\kappa(T-t)}e^{-2\kappa(t-s)}\frac{1}{\gamma-\kappa}\left(1 - e^{-(\gamma-\kappa)(t-s)}\right).
\end{aligned}$$

Das Integral T_{24} lässt durch einen Austausch der Integrationsgrenzen vereinfachen zu

$$\begin{aligned}
T_{24} &= \int_s^t\int_s^u e^{-\kappa(u-v)}e^{-\gamma(t-u)}dW_r^T(v)du = \int_s^t\int_v^t e^{-\kappa(u-v)}e^{-\gamma(t-u)}du\,dW_r^T(v) \\
&= \int_s^t e^{-\kappa(t-v)}\int_v^t e^{-(\gamma-\kappa)(t-u)}du\,dW_r^T(v) \\
&= \int_s^t e^{-\kappa(t-v)}\frac{1}{\gamma-\kappa}\left(1 - e^{-(\gamma-\kappa)(t-v)}\right)dW_r^T(v).
\end{aligned}$$

Für das Integral T_3 gilt schließlich

$$\begin{aligned}
T_3 &= \int_s^t e^{-\gamma(t-u)}du - e^{-\kappa(T-t)}\int_s^t e^{-(\gamma+\kappa)(t-u)}du \\
&= \frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma(t-s)}\right) - e^{-\kappa(T-t)}\frac{1}{\gamma+\kappa}\left(1 - e^{-(\gamma+\kappa)(t-s)}\right).
\end{aligned}$$

Nach Ersetzen von T_1, T_2 und T_3 in (5.30) und Zusammenfassen der Terme ist der logarithmierte Verschuldungsgrad unter dem Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ für $0 \leq s < t$ gegeben durch

$$\begin{aligned} l(t) &= l(s)e^{-\gamma(t-s)} + \left(\frac{\sigma^2}{2\gamma} - \nu + \psi\bar{r} + \frac{\rho\sigma\eta}{\gamma\kappa} - \frac{1+\gamma\psi}{\gamma}\left(\bar{r} - \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right)\right)\left(1 - e^{-\gamma(t-s)}\right) \\ &\quad - \left(\frac{\rho\sigma\eta}{\kappa(\gamma+\kappa)} + \frac{(1+\gamma\psi)\eta^2}{2\kappa^2(\gamma+\kappa)}\right)e^{-\kappa(T-t)}\left(1 - e^{-(\gamma+\kappa)(t-s)}\right) \\ &\quad - \frac{1+\gamma\psi}{\gamma-\kappa}\left(r(s) - \bar{r} + \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right)e^{-\kappa(t-s)}\left(1 - e^{-(\gamma-\kappa)(t-s)}\right) \\ &\quad + \frac{(1+\gamma\psi)\eta^2}{2\kappa^2(\gamma-\kappa)}e^{-\kappa(T-t)}e^{-2\kappa(t-s)}\left(1 - e^{-(\gamma-\kappa)(t-s)}\right) \\ &\quad - \int_s^t \left(\frac{(1+\gamma\psi)\eta}{\gamma-\kappa}\left(e^{-\kappa(t-u)} - e^{-\gamma(t-u)}\right) + \sigma\rho e^{-\gamma(t-u)}\right)dW_r^T(u) \\ &\quad - \int_s^t \sigma\sqrt{1-\rho^2}e^{-\gamma(t-u)}dW_V^T(u). \end{aligned} \tag{5.31}$$

Die beiden stochastischen Integrale in Gleichung (5.31) sind auf Grund der ausschließlich zeitabhängigen Integranden gemeinsam normalverteilt.[25] Wie im unternehmenswertbasierten Kreditrisikomodell von Longstaff/Schwartz (1995) impliziert dies, dass der logarithmierte Verschuldungsgrad unter dem Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ normalverteilt ist und sich die entsprechende Dynamik durch einen Gauß'schen Prozess beschreiben lässt.[26] Die Intensität des zu Grunde liegenden Zählprozesses ist ebenfalls normalverteilt, da sie gemäß (5.21) eine lineare Funktion des logarithmierten Verschuldungsgrades ist. Somit können negative Realisationen der Intensität auftreten. Dies erscheint nicht sinnvoll, da eine negative Intensität impliziert, dass die Wahrscheinlichkeit eines unmittelbar bevorstehenden Kreditausfalls kleiner Null ist. Unter Berücksichtigung des funktionalen Zusammenhangs aus (5.21) ist die Wahrscheinlichkeit einer negativen Intensität allerdings vernachlässigbar gering, wenn auch die Wahrscheinlichkeit, dass sehr niedrige Verschuldungsgrade mit einem logarithmierten Verschuldungsgrad kleiner als π auftreten, sehr klein ist. Dabei sorgt nicht zuletzt die Mean-Reversion-Eigenschaft des Prozesses für den logarithmierten Verschuldungsgrad für eine Reduktion der Wahrscheinlichkeit sehr niedriger Verschuldungsgrade und damit auch einer negativen Intensität.

Aus der Normalverteilung des logarithmierten Verschuldungsgrades gemäß (5.31) folgt

[25] Vgl. Satz A7 im Anhang.

[26] Der logarithmierte Verschuldungsgrad im Longstaff/Schwartz-Modell aus (4.66) ergibt sich durch die Grenzwertbetrachtung $\gamma \to 0$, was letztlich bedeutet, dass das logarithmierte Verschuldungsvolumen konstant bleibt.

unmittelbar die Normalverteilung des Integrals $\int_0^T l(s)ds$.[27] Auf Grund der Normalverteilungseigenschaft dieses Integrals ist eine analytische Lösung von Gleichung (5.27) und demzufolge auch der Bewertungszusammenhänge für die vom betrachteten Unternehmen emittierten Zerobonds und Kuponanleihen aus (5.23) und (5.24) möglich, wie der nachfolgende Satz zeigt.

Satz I1 [Preise von Zerobonds und Kuponanleihen]. *Der Preis eines kreditrisikobehafteten Zerobonds mit Abschreibungsrate Eins gemäß (5.27) ist durch*

$$D_1(0,T) = P(0,T)\exp\left\{\frac{\alpha}{l(0)}T - \frac{\alpha}{l(0)\pi}\left(E[I(0,T)] - \frac{\alpha}{l(0)\pi}\frac{\mathrm{Var}[I(0,T)]}{2}\right)\right\}$$

gegeben. Dabei gilt

$$\begin{aligned} E[I(0,T)] &= l(0)f_1 + \left(\frac{\sigma^2}{2\gamma} - \nu + \psi\bar{r} + \frac{\rho\sigma\eta}{\gamma\kappa} - \frac{1+\gamma\psi}{\gamma}\left(\bar{r} - \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right)\right) f_2 \\ &\quad - \left(\frac{\rho\sigma\eta}{\kappa(\gamma+\kappa)} + \frac{(1+\gamma\psi)\eta^2}{2\kappa^2(\gamma+\kappa)}\right) f_3 - \frac{1+\gamma\psi}{\gamma-\kappa}\left(r(0) - \bar{r} + \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right) f_4 \\ &\quad + \frac{(1+\gamma\psi)\eta^2}{2\kappa^2(\gamma-\kappa)} f_5, \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma T}\right), \\ f_2 &= T - \frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma T}\right), \\ f_3 &= \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa T}\right) - e^{-\kappa T}\frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma T}\right), \\ f_4 &= \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa T}\right) - \frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma T}\right), \\ f_5 &= \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa T}\right) - e^{-\kappa T}\frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma T}\right), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[I(0,T)] &= \frac{(1+\gamma\psi)^2\eta^2}{(\gamma-\kappa)^2\kappa^2} f_6 - 2\left(\frac{(1+\gamma\psi)^2\eta^2}{(\gamma-\kappa)^2\kappa\gamma} + \frac{(1+\gamma\psi)\eta\sigma\rho}{(\gamma-\kappa)\kappa}\right) f_8 \\ &\quad + \left(\sigma^2 + \frac{(1+\gamma\psi)^2\eta^2}{(\gamma-\kappa)^2\gamma^2} + 2\frac{(1+\gamma\psi)\eta\sigma\rho}{(\gamma-\kappa)\gamma}\right) f_7, \end{aligned}$$

[27] Intuitiv lässt sich dies begründen, indem man $\int_0^T l(s)ds$ als Summe normalverteilter Zufallsvariablen interpretiert. Der Beweis dieser Implikation ist Bestandteil des Beweises von Satz I1.

mit

$$
\begin{aligned}
f_6 &= \frac{1}{2\kappa}\left(2\kappa T + 4e^{-\kappa T} - e^{-2\kappa T} - 3\right),\\
f_7 &= \frac{1}{2\gamma}\left(2\gamma T + 4e^{-\gamma T} - e^{-2\gamma T} - 3\right),\\
f_8 &= T - \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa T}\right) - \frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma T}\right) + \frac{1}{\gamma+\kappa}\left(1 - e^{-(\gamma+\kappa)T}\right).
\end{aligned}
$$

$P(0,T)$ gibt den Preis eines kreditrisikolosen Zerobonds mit Laufzeit T im Vasicek-Modell aus (4.35) an. $D(0,T)$ und $D_C(0,T)$ als Preis eines Zerobonds und Preis einer Kuponanleihe mit Abschreibungsrate w ergeben sich aus (5.23) und (5.24).

Beweis: Gegeben die Normalverteilung des Integrals $I(0,T) = \int_0^T l(s)ds$, lässt sich die Bewertungsgleichung (5.27) für einen kreditrisikobehafteten Zerobond mit Abschreibungsrate Eins umschreiben in

$$
\begin{aligned}
D_1(0,T) &= P(0,T)\exp\left\{\frac{\alpha}{l(0)}T\right\}E^{\mathbb{Q}^T}\left[\exp\left\{-\frac{\alpha}{l(0)\pi}I(0,T)\right\}\right]\\
&= P(0,T)\exp\left\{\frac{\alpha}{l(0)}T\right\}\exp\left\{-\frac{\alpha}{l(0)\pi}E[I(0,T)] + \left(-\frac{\alpha}{l(0)\pi}\right)^2\frac{\mathrm{Var}[I(0,T)]}{2}\right\}\\
&= P(0,T)\exp\left\{\frac{\alpha}{l(0)}T - \frac{\alpha}{l(0)\pi}\left(E[I(0,T)] - \frac{\alpha}{l(0)\pi}\frac{\mathrm{Var}[I(0,T)]}{2}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Die Berechnung von $E[I(0,T)]$ und $\mathrm{Var}[I(0,T)]$ erfolgt im Anhang. □

Das hier vorgestellte intensitätsbasierte Kreditrisikomodell kann als Erweiterung des Zinsstrukturmodells von Vasicek (1977) angesehen werden: Die Anleiheinhaber sind neben dem Zinsänderungsrisiko, das wie im Vasicek-Modell durch die zufallsabhängige Entwicklung des kurzfristigen Kassazinssatzes erfasst wird, zusätzlich einem Kreditrisiko ausgesetzt. Letzteres ist emittentenspezifisch und hängt von der Entwicklung des (logarithmierten) Verschuldungsgrades des betrachteten Unternehmens ab. Wie im Vasicek-Modell lassen sich mit der Bewertungsformel aus Satz I1 die Preise von Zerobonds und Kuponanleihen analytisch berechnen. Der Preis eines kreditrisikobehafteten Zerobonds mit Abschreibungsrate Eins als „building block" entspricht dabei dem Produkt aus dem Preis eines identischen kreditrisikolosen Zerobonds nach Vasicek und der Überlebenswahrscheinlichkeit unter dem bewertungsrelevanten Forwardmaß. Im Gegensatz zu den vergleichbaren unternehmenswertbasierten Kreditrisikomodellen von Longstaff/Schwartz (1995) und Collin-Dufresne/Goldstein (2001) ist eine numerische Berechnung der Preise von Zerobonds und Kuponanleihen nicht erforderlich.

5.2.4 Komparative Statik der Credit-Spreads

Die Credit-Spreads von Anleihen im beschriebenen intensitätsbasierten Modellrahmen werden nachfolgend einer komparativ-statischen Analyse unterzogen. Die entsprechenden Ergebnisse der unternehmenswertbasierten Kreditrisikomodelle dienen dabei als Vergleichsbasis. Wie bisher werden Kuponanleihen betrachtet, die neben dem Rückzahlungsbetrag von einem € bei Fälligkeit im Zeitpunkt T Kuponzahlungen in Höhe von C €, $0 < C < 1$, in den Zeitpunkten T_j, mit $j = 1, \ldots, n$ und $0 < T_1 < \ldots < T_n = T$, verbriefen. Für den Credit-Spread einer kreditrisikobehafteten Anleihe gilt weiterhin

$$\Delta(0, T) = Y_D - Y_0, \tag{5.32}$$

wobei Y_D als Rendite der Anleihe auf Basis der vertraglich vereinbarten Zahlungen und Y_0 als Rendite einer in allen Ausstattungsmerkmalen identischen, aber kreditrisikolosen Anleihe wie im Longstaff/Schwartz-Modell mittels (4.68) und (4.69) zu berechnen sind. Lediglich $D_C(0, T)$ ist durch den Preis der kreditrisikobehafteten Anleihe aus Satz I1 zu ersetzen.[28]

Tabelle 5.1 führt die Credit-Spreads von Anleihen mit einem Kupon von 8 % p.a. auf.[29] Abbildung 5.1 gibt die entsprechenden Credit-Spread-Kurven im Restlaufzeitintervall von 0 bis 20 Jahren für die Ausgangsdaten an. Wie in den vorgestellten unternehmenswertbasierten Kreditrisikomodellen steigt der Credit-Spread einer Anleihe auch im intensitätsbasierten Modell unabhängig von der Restlaufzeit mit höherem Verschuldungsgrad des emittierenden Unternehmens. Ein wesentlicher Unterschied besteht jedoch darin, dass der Credit-Spread für eine kurze Restlaufzeit nicht gegen Null geht, wie die Credit-Spread-Kurven in Abbildung 5.1 zeigen. Darin spiegelt sich die in intensitätsbasierten Modellen positive Wahrscheinlichkeit eines unmittelbar bevorstehenden Kreditausfalls wider. Diese Wahrscheinlichkeit entspricht in etwa dem Produkt aus der Intensität des zu Grunde liegenden Zählprozesses und der (hinreichend kurzen) Restlaufzeit. Angenommen, der heutige Verschuldungsgrad des emittierenden Unternehmens beträgt 50 %, was mit einem logarithmierten Verschuldungsgrad von $l(0) = -0,7$ gleichzusetzen ist. Unter Berücksichtigung der Ausgangsdaten aus Tabelle 5.1 und des funktionalen Zusammenhangs aus (5.20) ergibt sich eine Intensität von $q(0) = 0,06$. Die Wahrscheinlichkeit eines Kreditausfalls im nächsten halben Jahr beträgt somit etwa 3 %. Demgegenüber ist in unternehmenswertbasierten Modellen für

[28] Auch hier muss für Y und R eine numerische Nährungslösung gesucht werden.

[29] Dabei entsprechen die in der Tabelle angegebenen Verschuldungsgrade von 30 %, 50 % und 70 % wie schon im Longstaff/Schwartz-Modell den logarithmierten Verschuldungsgraden $l(0) = -1,2$, $l(0) = -0,7$ und $l(0) = -0,35$.

einen niedrigen oder mittleren Verschuldungsgrad des Unternehmens die Wahrscheinlichkeit eines unmittelbar bevorstehenden Kreditausfalls und somit auch der Credit-Spread für eine kurze Restlaufzeit der emittierten Anleihen annähernd Null. Letzteres wird als ein großes Defizit unternehmenswertbasierter Kreditrisikomodelle angesehen, da die am Kapitalmarkt zu beobachtenden Credit-Spreads diese Eigenschaft nicht aufweisen und auch für kurze Restlaufzeiten positiv sind.[30]

Credit-Spreads im intensitätsbasierten Modell

(in Bp p.a.)

Ausgangsdaten: $r(0) = 0,05$, $V(0) = 100$, $\kappa = 0,4$, $\eta = 0,06$, $\bar{r} = 0,06$, $\sigma = 0,25$, $\rho = 0,25$, $w = 0,5$, $\gamma = 0,2$, $\nu = 0,6$, $\psi = 2,8$, $\alpha = 0,08$, $\pi = -1,5$, $C = 0,08$

	Verschuldungsgrad 30%			Verschuldungsgrad 50%			Verschuldungsgrad 70%		
	Restlaufzeit in Jahren			Restlaufzeit in Jahren			Restlaufzeit in Jahren		
	5	10	20	5	10	20	5	10	20
Ausgangsdaten	107,62	125,68	133,98	196,21	196,85	187,05	336,01	295,56	252,22
Parameter σ									
$0,20$	103,48	120,17	128,20	191,24	190,72	181,14	330,45	289,58	246,96
$0,30$	112,57	132,22	140,75	202,15	204,11	193,96	342,66	302,64	258,38
Parameter ρ									
$-0,25$	103,52	119,26	126,98	191,33	189,88	180,19	330,64	289,12	246,55
0	105,57	122,48	130,50	193,77	193,37	183,64	333,33	292,35	249,40
Parameter $r(0)$									
$0,02$	116,99	133,41	137,49	207,85	205,69	190,34	350,20	304,79	254,46
$0,08$	98,18	117,81	130,34	184,46	187,80	183,62	321,59	286,01	249,83
Parameter κ									
$0,20$	112,10	141,33	165,04	201,73	214,50	217,36	342,53	313,20	276,39
$0,60$	105,08	119,65	125,42	193,08	190,03	178,50	332,32	288,73	245,23
Parameter η									
$0,01$	102,02	113,76	117,68	189,40	183,48	170,72	328,19	282,40	238,82
$0,10$	116,10	144,69	160,19	206,55	218,08	212,64	347,95	316,41	272,58
Parameter $\bar{r}$									
$0,04$	108,79	131,01	143,40	197,67	202,88	195,85	337,75	301,49	257,74
$0,08$	106,45	120,40	124,55	194,75	190,84	178,14	334,28	289,64	246,52
Parameter w									
$0,3$	63,91	73,72	76,97	115,54	113,96	105,57	195,18	167,98	139,25
$0,7$	152,24	180,13	196,52	280,06	286,24	280,18	486,80	439,15	388,53
Parameter γ									
$0,1$	100,96	120,82	133,83	199,03	201,98	193,41	350,21	308,69	261,65
$0,3$	113,41	129,21	134,01	195,08	194,17	183,35	326,15	287,27	246,24

Tabelle 5.1: Komparative Statik der Credit-Spreads im intensitätsbasierten Modell

[30]Vgl. etwa Bielecki/Rutkowski (2002): S. 56.

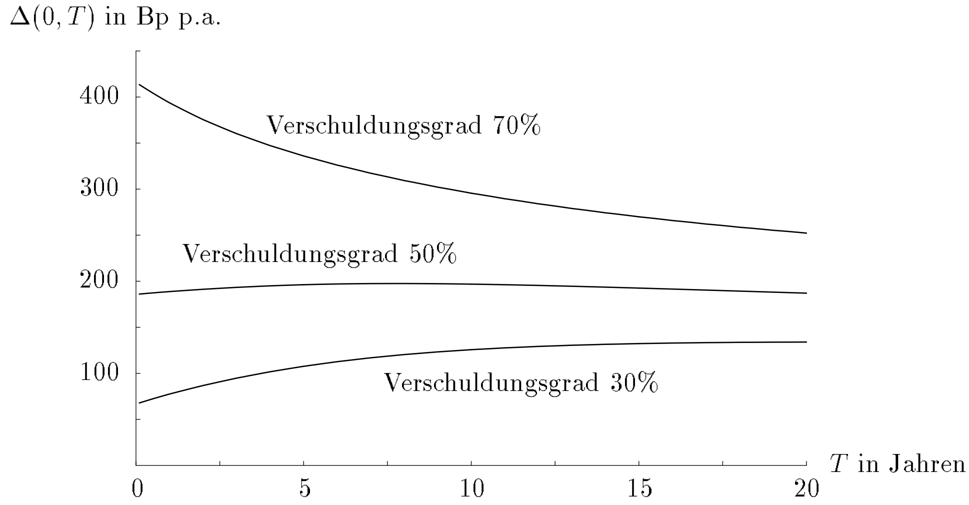

Abbildung 5.1: Credit-Spread-Kurven im intensitätsbasierten Modell

Abbildung 5.1 verdeutlicht eine weitere Änderung der Zeitstruktur der Credit-Spreads. So verläuft die Credit-Spread-Kurve für einen Verschuldungsgrad von 30 % zwar weiterhin steigend, allerdings ist der für unternehmenswertbasierte Modelle typische bucklige Verlauf der Credit-Spread-Kurven für einen Verschuldungsgrad von 50 % kaum noch und für einen Verschuldungsgrad von 70 % gar nicht mehr zu beobachten. Dies ist kein Charakteristikum intensitätsbasierter Kreditrisikomodelle im Allgemeinen, sondern auf die hier getroffene Annahme eines stationären Verschuldungsgrades des betrachteten Unternehmens zurückzuführen. Unterstellt man beispielsweise eine erwartete Momentanrendite des Unternehmenswerts von $\mu(0) = 0,10$ und ein nicht-risikoadjustiertes Mean-Reversion-Niveau des kurzfristigen Kassazinssatzes von $\beta = 0,06$, ergibt sich unter Berücksichtigung der Ausgangsdaten aus Tabelle 5.1 und Gleichung (5.20) unter dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß ein logarithmierter Zielverschuldungsgrad von $\bar{l}(0) = -0,92$.[31] Die Verschuldungspolitik des Unternehmens orientiert sich bei der gegebenen Datenkonstellation somit an der Beibehaltung eines Zielverschuldungsrades von etwa 40 %. Der Zielverschuldungsgrad passt sich im Zeitablauf an eine geänderte Datenkonstellation an. So sinkt der zukünftige Zielverschuldungsgrad, wenn der kurzfristige Kassazinssatz in Zukunft steigt, wie ein Blick auf Gleichung (5.20) zeigt. Legt man erneut die oben angegebenen Daten zu Grunde, führt z.B. eine Verdopplung des

[31]Damit wurde implizit unterstellt, dass λ_r als Marktpreis für Zinsänderungsrisiko Null ist, d.h. die Mean-Reversion-Niveaus des kurzfristigen Kassazinssatzes unter dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß und unter dem Martingalmaß, β und $\bar{r}$, stimmen überein.

kurzfristigen Kassazinssatzes zu einer Senkung des Zielverschuldungsrades um 13 %. Entscheidend für den Verlauf der Credit-Spread-Kurven ist, in welchem Verhältnis der aktuelle Verschuldungsgrad und der aktuelle Zielverschuldungsgrad des Unternehmens stehen. Liegt heute der Verschuldungsgrad über dem Zielverschuldungsgrad, ist in Zukunft eine Verbesserung der Verschuldungssituation zu erwarten, da der Prozess für die Entwicklung des logarithmierten Verschuldungsgrades die Mean-Reversion-Eigenschaft aufweist und der Verschuldungsgrad immer wieder an den Zielverschuldungsgrad herangezogen wird. Durch die höhere Wahrscheinlichkeit eines in Zukunft niedrigeren Verschuldungsgrades sinkt auch die Wahrscheinlichkeit eines Kreditausfalls, die über die Intensität mit dem Verschuldungsgrad verknüpft ist. Dies wiederum verringert den Credit-Spread für eine längere Restlaufzeit und führt zu einem fallenden Verlauf der Credit Spread-Kurven. Für einen hohen Verschuldungsrad von 70 % zeigt sich dieser Effekt schon für sehr kurze Restlaufzeiten, während er für einen Verschuldungsgrad von 50 % erst ab dem mittleren Restlaufzeitbereich zum Tragen kommt. Der umgekehrte Effekt tritt auf, wenn der aktuelle Verschuldungsgrad unter dem aktuellen Zielverschuldungsgrad liegt. In diesem Fall ist ein in Zukunft höherer Verschuldungsgrad wahrscheinlicher, so dass die Wahrscheinlichkeit eines Kreditausfalls und der Credit-Spread für eine längere Restlaufzeit steigt. Der Verlauf der Credit-Spread-Kurve für einen Verschuldungsgrad von 30 % bestätigt dies.

Aus Tabelle 5.1 lässt sich weiterhin ablesen, dass sowohl die durch γ symbolisierte Anpassungsgeschwindigkeit des logarithmierten Verschuldungsgrades an den logarithmierten Zielverschuldungsgrad als auch die Abschreibungsrate w hinsichtlich der Höhe des Credit-Spreads eine wichtige Rolle spielen. Eine niedrigeres γ bewirkt für Verschuldungsgrade von 50 % und 70 % ein Ansteigen und für einen Verschuldungsgrad von 30 % ein Absinken des Credit-Spreads im Vergleich zum Ausgangsszenario. Dabei wurde der Zielverschuldungsgrad durch Variieren des Parameters ν konstant bei 40 % gehalten. Die Änderungen des Credit-Spreads sind darauf zurückzuführen, dass der Verschuldungsgrad nicht mehr so schnell an den Zielverschuldungsgrad herangezogen wird. Für die über dem Zielverschuldungsgrad liegenden Verschuldungsgrade von 50 % und 70 % reduziert ein niedrigeres γ die Wahrscheinlichkeit eines in Zukunft niedrigeren Verschuldungsgrades, d.h. einer Verbesserung der Verschuldungssituation. Dies erhöht, wiederum über die mit dem Verschuldungsgrad verknüpfte Intensität, die Wahrscheinlichkeit eines Kreditausfalls und ist daher mit einem höheren Credit-Spread verbunden. Bei einem Verschuldungsgrad von 30 % bedeutet ein niedrigeres γ hingegen, dass sich die Wahrscheinlichkeit eines in Zukunft höheren Verschuldungsgrades reduziert, also eine Verschlechterung der Verschuldungssituation weniger wahrscheinlich ist. Umgekehrt bedeutet ein höheres γ, dass der Verschuldungsgrad schneller an den Zielverschuldungsgrad herangezogen. Dies führt unter Berücksichtigung der oben genannten Effekte zu einer entgegengesetzten Änderung des Credit-Spreads. Aus den schon im Rahmen der komparativ-statischen Analyse des unternehmenswertbasierten Modells von Longstaff/Schwartz genannten Gründen steigt (sinkt) der Credit-Spread mit zunehmender (abnehmender) Abschreibungsrate w. Die in Abbildung 5.2 für einen Verschuldungsgrad des emittierenden Unternehmens von 30 % dargestellten Credit-Spread-Kurven verdeutlichen dies.

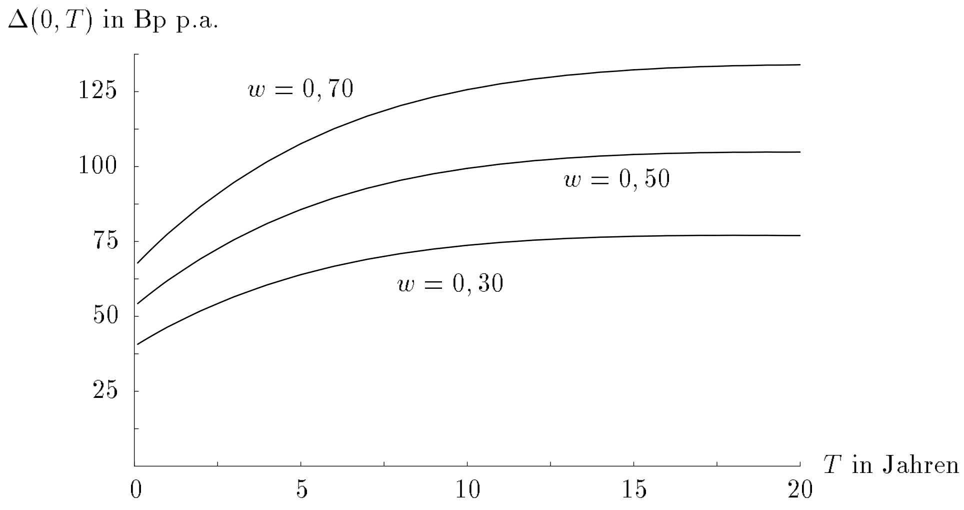

Abbildung 5.2: Credit-Spread-Kurven im intensitätsbasierten Modell in Abhängigkeit der Abschreibungsrate

Wie wirken sich nun Änderungen der Unternehmenswertvolatilität σ, der Zinsstrukturparameter $r(0), \kappa, \eta$ und $\bar{r}$ sowie des Korrelationskoeffizienten ρ im intensitätsbasierten Modell auf den Credit Spread einer Kuponanleihe aus? Tabelle 5.1 zeigt, dass die Auswirkungen mit denen der unternehmenswertbasierten Modelle vergleichbar sind. So steigt (sinkt) der Credit-Spread unabhängig vom Verschuldungsgrad des Unternehmens und der Restlaufzeit der Anleihe, wenn σ, η oder ρ zunimmt (abnimmt) bzw. $r(0), \kappa$ oder $\bar{r}$ abnimmt (zunimmt). Einige der angeführten Auswirkungen lassen sich in Analogie zum unternehmenswertbasierten Modell von Longstaff/Schwartz erklären: Ein zunehmendes η oder ρ erhöht die Schwankungsbreite des Unternehmenswerts und demzufolge die des logarithmierten Verschuldungsgrades. Die damit verbundene höhere Ausfallwahrscheinlichkeit unter dem Forwardmaß senkt den Preis der Anleihe und lässt den Credit-Spread steigen. Dieser Effekt kehrt sich für ein abnehmendes η oder ρ um. Die Auswirkungen von Änderungen des Parameters κ lassen sich darauf zurückführen, dass ein zunehmendes κ, also eine größere Anpassungsgeschwindigkeit des kurzfristigen Kassazinssatzes an das risikoadjustierte Mean-Reversion-Niveau $\bar{r}$, die Schwankungsbreite des logarithmierten Verschuldungsgrades vermindert. Dies wirkt sich über eine niedrigere Ausfallwahrscheinlichkeit preissteigernd auf den Zerobond aus und hat einen sinkenden Credit-Spread zur Folge hat. Bei abnehmendem κ kehrt sich dieser Effekt um. Sollen die Auswirkungen von Änderungen der Unternehmenswertvolatilität σ und des kurzfristigen Kassazinssatzes $r(0)$ auf den Credit-Spread erklärt werden, ist zu beachten, dass sich Änderungen dieser Größen auch auf den Zielverschuldungsgrad auswirken, wie ein Blick auf Gleichung (5.20) zeigt. Für $\sigma = 0,2$, $\sigma = 0,25$ und $\sigma = 0,3$ lauten die Zielverschuldungsgrade 38 %, 40 % und 43 %, für $r(0) = 0,02$, $r(0) = 0,05$ und $r(0) = 0,08$ entsprechend 44 %, 40 % und 37 %. Hält man den Zielverschuldungsgrad durch Variieren des Parameters ν konstant bei 40 %, reagiert der Credit-Spread kaum noch auf die Änderungen von σ im hier untersuchten Intervall. Der mit zunehmendem σ steigende Credit-Spread scheint somit ausschließlich auf den gleichzeitig zunehmenden Zielverschuldungsgrad zurückzuführen zu sein. Mit zunehmendem $r(0)$ nimmt hingegen der Zielverschuldungsgrad ab. Dies reduziert die Ausfallwahrscheinlichkeit unter dem Forwardmaß, so dass der Anleihepreis steigt und der Credit-Spread sinkt. Allerdings verringert sich mit zunehmendem $r(0)$ auch der Barwert der Kuponzahlungen und des Rückzahlungsbetrages der Anleihe, was deren Preis senkt und den Credit-Spread erhöht. Wie die komparativ-statische Analyse zeigt, scheint der zuletzt genannte Effekt dominiert zu werden. Ein abnehmender kurzfristiger Kassazinssatz wirkt wiederum entgegengesetzt. Die Auswirkungen eines Anstiegs von $\bar{r}$ auf den Credit-Spread sind vergleichbar mit denen eines Anstiegs von $r(0)$.

Kapitel 6

Zusammenfassung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit war die Bewertung von Unternehmensanleihen mittels optionspreistheoretischer Methoden. Dabei wurden mit den unternehmenswert- und den intensitätsbasierten Kreditrisikomodellen die beiden in der finanzwirtschaftlichen Literatur vorrangig diskutierten Ansätze zur Abbildung des Kreditrisikos dieser Finanzierungstitel berücksichtigt.

In Kapitel 2 wurden zunächst die institutionellen Grundlagen des Problemkreises von Kreditfinanzierung und Kreditrisiko erörtert. Dabei widmete sich der erste Teil des Kapitels den finanzierungstheoretischen Aspekten dieses Problemkreises. Es zeigte sich, dass Sicherungsklauseln ein geeignetes Instrumente zur Begrenzung des Kreditrisikos von Unternehmensanleihen darstellen können und die optimale Verschuldungspolitik eines Unternehmens ein Abwägen zwischen den steuerlichen Vorteilen einer höheren und längerfristigen Verschuldung einerseits und den damit verbundenen Kosten andererseits beinhaltet. Weiterhin wurde der Stellenwert gesetzlicher Regelungen in diesem Zusammenhang betont. Im Rahmen eines Überblicks zum Kreditgeschäft und zur Risikopolitik von Banken wurden im zweiten Teil von Kapitel 2 Kreditderivate und Asset-Backed-Securities vorgestellt. Der partielle Verkauf des Kreditrisikos mittels dieser Instrumente erwies sich als vorteilhaft, da er helfen kann, das Konzentrationsrisiko im Kreditportefeuille zu korrigieren, und den Banken neue Handlungsspielräume im Kreditgeschäft eröffnet.

Kapitel 3 arbeitete die optionspreistheoretischen Grundlagen der unternehmenswertbasierten Kreditrisikomodelle heraus. Ziel war es, die relevante Literatur zusammenzufassen und einen einheitlichen Modellrahmen für die vergleichende Analyse unternehmenswertbasierter Kreditrisikomodelle in Kapitel 4 zu entwickeln. Den Ausgangspunkt bildete das von Heath/Jarrow/Morton (1992) entwickelte Zinsstrukturmodell. In diesen Modellrahmen eingebunden wurde das Gauß'sche 1-Faktor-Zinsstrukturmodell von Vasicek (1977), das unter anderem durch die Mean-Reversion-Eigenschaft des Prozesses für die Entwicklung des kurzfristigen Kassazinssatzes gekennzeichnet ist. Sodann wurde der entsprechende Anleihemarkt Amin/Jarrow (1992) folgend erweitert, so dass neben kreditrisikolosen fest verzinslichen Wertpapieren auch als Wertpapiere verbriefte riskante Vermögensgegenstände gehandelt werden können. Im Mittelpunkt der Diskussion stand die Frage, welche Bedingungen die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes für den betrachteten Kapitalmarkt gewährleisten. Gegeben ein solches äquivalentes Martingalmaß, erfolgte im Anschluss die Bewertung von zustandsbedingten Ansprüchen auf die dort gehandelten Wertpapiere mittels der Martingalmaß-Technik. Der Grundgedanke dieses Bewertungsansatzes beruht auf der Duplikation der entsprechenden Zahlungsströme durch selbstfinanzierende Handelsstrategien. Wie gezeigt werden konnte, ist die Existenz eines eindeutigen äquivalenten Martingalmaßes im Grunde gleichbedeutend mit der Vollständigkeit des Kapitalmarkts, so dass jeder beliebige zustandsbedingte Anspruch dupliziert werden kann. Der Marktwert eines Duplikationsportefeuilles ergibt sich als Erwartungswert des mit dem risikolosen Zinssatz diskontierten Zahlungsstroms des betrachteten zustandsbedingten Anspruchs, berechnet unter dem äquivalenten Martingalmaß. Um die Arbitragefreiheit des Kapitalmarkts zu gewährleisten, muss der Preis des zustandsbedingten Anspruchs demzufolge mit diesem Erwartungswert übereinstimmen. Abschließend wurden mit dem Wechsel auf das Forwardmaß und einem Zeitwechsel Methoden aufgezeigt, die eine Bewertung zustandsbedingter Ansprüche rechnerisch wesentlich vereinfachen.

Indem grundlegende unternehmenswertbasierte Kreditrisikomodelle im Modellrahmen aus Kapitel 3 dargestellt und verglichen wurden, konnte in Kapitel 4 eine bestehende Lücke in der Literatur geschlossen werden.[1] Als Ausgangspunkt und Vergleichsbasis diente das Modell von Merton (1974), mit seinen vereinfachenden Annahmen zur Dynamik der Zinsstruktur und des Unternehmenswerts, zur Finanzierungspolitik des betrachteten Unternehmens und zur Kapitalmarktform. Die anschließend vorgestellten Modelle sind als Erweiterungen des Merton-Modells anzusehen. So wurde das Zinsänderungsrisiko unter Verwendung des Vasicek-Modells integriert, Sicherungsklauseln zur Begrenzung des Kreditrisikos berücksichtigt und den mit einer komplexeren Kapitalstruktur des Unternehmens verbundenen Problemen bei der Abbildung des Kre-

[1]Das mit dem Abschluss dieser Arbeit veröffentlichte Buch von Bielecki/Rutkowski (2002) analysiert neben den hier vorgestellten grundlegenden unternehmenswertbasierten Kreditrisikomodellen noch einige weitere Modellvarianten. Allerdings liegt der Schwerpunkt des Buches von Bielecki/Rutkowski diesbezüglich auf der Herleitung der Bewertungsformeln, die resultierenden Credit-Spreads werden keiner vergleichenden Analyse unterzogen.

ditrisikos Rechnung getragen. Dem Grundgedanken der unternehmenswertbasierten Kreditrisikomodelle folgend waren die von betrachteten Unternehmen emittierten Anleihen dabei als zustandsbedingte Ansprüche auf den Unternehmenswert anzusehen und der entsprechende Zahlungsstrom mit der zufallsabhängigen Unternehmenswertentwicklung zu verknüpfen. Durch die Anwendung der Martingalmaß-Technik konnte die Bewertung der Anleihen vereinheitlicht werden, wobei in den meisten Fällen eine analytische Lösung der resultierenden Bewertungsgleichungen möglich war. Im Anschluss an die Herleitung der Bewertungsformeln wurden die Credit-Spreads der Anleihen komparativ-statischen Analysen unterzogen. Anhand des Merton-Modells konnte zunächst gezeigt werden, wie sich Änderungen des Verschuldungsgrades, der Unternehmenswertvolatilität und des kurzfristigen Kassazinssatzes auf die Credit-Spreads von Zerobonds auswirken. Es folgte eine Analyse der Credit-Spreads von Zerobonds, wenn das Zinsänderungsrisiko zu berücksichtigen ist und Sicherungsklauseln vereinbart werden. Dies führte unmittelbar zu der Frage, wie die Credit-Spreads von Zerobonds reagieren, wenn sich neu hinzukommende Parameter wie die Zinsvolatilität, das Mean-Reversion-Niveau des kurzfristigen Kassazinssatzes, die Anpassungsgeschwindigkeit an das Mean-Reversion-Niveau oder der Korrelationskoeffizient zwischen Unternehmenswert und kurzfristigem Kassazinssatz ändern. Den Ergebnissen gegenübergestellt wurde die komparative Statik der Credit-Spreads von Kuponanleihen.

Zusammenfassend lassen sich aus den vorgenommenen komparativ-statischen Analysen die folgenden Ergebnisse ableiten:

1. Der Credit-Spread steigt unabhängig von der Restlaufzeit der Anleihe mit höherem Verschuldungsgrad des betrachteten Unternehmens. Dabei verlaufen die Credit Spread-Kurven für einen niedrigen Verschuldungsgrad des Unternehmens steigend, während sie für einen mittleren und hohen Verschuldungsgrad zunächst steigen und dann fallen. Bezogen auf das gesamte Laufzeitspektrum überwiegt zumindest für einen hohen Verschuldungsgrad der fallende Verlauf. Die angesprochenen Verläufe der Credit-Spread-Kurven sind unabhängig davon, ob Zerobonds oder Kuponanleihen betrachtet werden.

2. Der Credit-Spread steigt (sinkt) unabhängig vom Verschuldungsgrad des emittierenden Unternehmens und der Restlaufzeit der Anleihe, wenn die Unternehmenswertvolatilität, die Zinsvolatilität oder der Korrelationskoeffizient zunimmt (abnimmt) bzw. der kurzfristige Kassazinssatz, das Mean-Reversion-Niveau des kurzfristigen Kassazinssatzes oder die Anpassungsgeschwindigkeit an das Mean-Reversion-Niveau abnimmt (zunimmt).

Zum ersten Punkt bleibt anzumerken, dass empirische Untersuchungen zum Verlauf von Credit-Spread-Kurven zu unterschiedlichen Ergebnissen kommen. Während Sarig/Warga (1989) die angeführten Verläufe der Credit-Spread-Kurven bestätigen, beobachten Helwege/Turner (1999) auch für Unternehmen mit hohen Verschuldungsgraden in erster Linie steigende Verläufe der Credit-Spread-Kurven. Hinsichtlich des zweiten Punktes soll nochmals darauf hingewiesen werden, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit einer Anleihe mit einer Zunahme der Unternehmenswertvolatilität, der Zinsvolatilität oder des Korrelationskoeffizienten steigt, was auch den Anstieg des Credit-Spreads erklärt. Dennoch lässt sich nicht sagen, dass eine Berücksichtigung des Zinsänderungsrisikos verglichen mit dem Fall einer sich im Zeitablauf nicht ändernden Zinsstruktur immer zu einer höheren Ausfallwahrscheinlichkeit und somit zu einem höheren Credit-Spread führt. Das Gegenteil kann auftreten: Liegt ein negativer Korrelationskoeffizient vor, entwickeln sich Unternehmenswert und kurzfristiger Kassazinssatz entgegengesetzt und die Berücksichtigung des Zinsänderungsrisikos kann die Ausfallwahrscheinlichkeit und den Credit-Spread unter Umständen sogar verringern. Ein negativer Korrelationskoeffizient sorgt in diesem Fall für eine Diversifikation des Kreditrisikos.

In Kapitel 5 wurde zunächst der Modellrahmen aus Kapitel 3 angepasst, um Anleihen auch in einem intensitätsbasierten Kreditrisikomodell mittels der Martingalmaß-Technik bewerten zu können. Dies geschah durch die Einführung eines Zählprozesses mit gegebener Intensität, dessen erste Sprungzeit den Zeitpunkt eines Kreditausfalls anzeigt. Wie in intensitätsbasierten Modellen üblich, wurde der Preis eines kreditrisikobehafteten zustandsbedingten Anspruchs mit einer Abschreibungsrate von Eins dargestellt als Erwartungswert des diskontierten vertraglich vereinbarten Zahlungsstroms, berechnet unter einem äquivalenten Martingalmaß. Dabei ist der risikolose Zinssatz, der den Diskontierungsfaktor bisher bestimmte, additiv um die Intensität des zu Grunde liegenden Zählprozesses zu erhöhen. Anders als in den unternehmenswertbasierten Modellen gewährleistet die Bewertung des kreditrisikobehafteten zustandsbedingten Anspruchs mittels der Martingalmaß-Technik zwar weiterhin die Arbitragefreiheit des Kapitalmarkts, es wird allerdings nicht vorausgesetzt, dass ein Duplikationsportefeuille für den entsprechenden Zahlungsstrom existiert. Die damit verbundenen Probleme wurden kurz skizziert.

Im zweiten Teil von Kapitel 5 ging es darum, unternehmensspezifische Größen in den intensitätsbasierten Modellrahmen zu integrieren und eine Verbindung zu den bisher diskutierten unternehmenswertbasierten Kreditrisikomodellen herzustellen. Dies geschah, indem die Intensität des zu Grunde liegenden Zählprozesses als Funktion des logarithmierten Verschuldungsgrades des betrachteten Unternehmens angegeben wurde.

Um die Entwicklung des logarithmierten Verschuldungsgrades zu beschreiben, wurde der Erweiterung des unternehmenswertbasierten Modells von Longstaff/Schwartz (1995) durch Collin-Dufresne/Goldstein (2001) folgend ein Gauß'scher Prozess mit Mean-Reversion-Eigenschaft herangezogen. Dadurch konnten die Ergebnisse neuerer empirischer Untersuchungen berücksichtigt werden, die bestätigen, dass sich die Verschuldungspolitik von Unternehmen an der Beibehaltung eines Zielverschuldungsgrades orientiert, oder anders formuliert, dass sich Verschuldungsgrade im Zeitablauf als stationär erweisen. Das zufallsabhängige Mean-Reversion-Niveau des verwendeten Prozesses gab dabei den logarithmierten Zielverschuldungsgrad des Unternehmens an. Anschließend wurde das intensitätsbasierte Kreditrisikomodell zur Bewertung von Kuponanleihen eingesetzt. Die resultierenden Bewertungsgleichungen konnten analytisch gelöst werden, im Gegensatz zum vorgestellten Longstaff/Schwartz-Modell oder zum Collin-Dufresne/Goldstein-Modell, in denen eine numerische Berechnung der Anleihepreise vorzunehmen ist. Sodann wurden die Credit-Spreads von Kuponanleihen einer komparativ-statischen Analyse unterzogen.

Die komparativ-statische Analyse führte zu folgenden Ergebnissen:

1. Der Credit-Spread steigt unabhängig von der Restlaufzeit der Anleihe mit höherem Verschuldungsgrad des betrachteten Unternehmens. Dabei geht der Credit-Spread auch für kurze Restlaufzeiten nicht gegen Null. Die Credit-Spread-Kurven verlaufen für einen niedrigen Verschuldungsgrad des Unternehmens steigend, während sie für einen mittleren Verschuldungsgrad entweder zunächst steigen und dann fallen oder nur fallen. Für einen hohen Verschuldungsgrad zeigt sich ein ausschließlich fallender Verlauf.

2. Der Credit-Spread steigt (sinkt) unabhängig vom Verschuldungsgrad des emittierenden Unternehmens und der Restlaufzeit der Anleihe, wenn die Unternehmenswertvolatilität, die Zinsvolatilität oder der Korrelationskoeffizient zunimmt (abnimmt) bzw. der kurzfristige Kassazinssatz, das Mean-Reversion-Niveau des kurzfristigen Kassazinssatzes oder die Anpassungsgeschwindigkeit an dieses Mean-Reversion-Niveau abnimmt (zunimmt). Weiterhin steigt (sinkt) der Credit-Spread, wenn die Anpassungsgeschwindigkeit an das Mean-Reversion-Niveau des logarithmierten Verschuldungsgrades zunimmt (abnimmt), gegeben einen niedrigen aktuellen Verschuldungsgrad, bzw. abnimmt (zunimmt), gegeben einen mittleren oder einen hohen aktuellen Verschuldungsgrad.

Die unter dem ersten Punkt angeführte Eigenschaft eines positiven Credit-Spreads im kurzen Restlaufzeitbereich liegt darin begründet, dass die Wahrscheinlichkeit eines unmittelbar bevorstehenden Kreditausfalls in intensitätsbasierten Modellen stets positiv ist. In unternehmenswertbasierten Modellen ist diese Wahrscheinlichkeit und somit auch der Credit-Spread für eine kurze Restlaufzeit der Anleihe annähernd Null, wenn das betrachtete Unternehmen einen niedrigen oder mittleren Verschuldungsgrad aufweist. Da die am Kapitalmarkt zu beobachtenden Credit-Spreads auch für kurze Restlaufzeiten positiv sind, erweist sich der intensitätsbasierte Ansatz in diesem Restlaufzeitbereich als vorteilhaft. Der insbesondere für hohe Verschuldungsgrade feststellbare fallende Verlauf der Credit-Spread-Kurven ist kein Charakteristikum intensitätsbasierter Kreditrisikomodelle im Allgemeinen, sondern auf die hier getroffene Annahme eines stationären Verschuldungsgrades des Unternehmens zurückzuführen. Da der Prozess für die Entwicklung des logarithmierten Verschuldungsgrades die Mean-Reversion-Eigenschaft aufweist, wird der Verschuldungsgrad immer wieder an den Zielverschuldungsgrad herangezogen. Ein in Zukunft niedrigerer Verschuldungsgrad, aus Sicht eines aktuell hoch verschuldeten Unternehmens also eine Verbesserung der Verschuldungssituation, ist somit wahrscheinlicher. Dies reduziert die über die Intensität mit dem Verschuldungsgrad verknüpfte Ausfallwahrscheinlichkeit und demzufolge auch den Credit-Spread. Der zweite Punkt verdeutlicht, dass die Auswirkungen von Parameteränderungen im Wesentlichen mit denen der unternehmenswertbasierten Modelle übereinstimmen. Die Änderung der jetzt ebenfalls zu berücksichtigenden Anpassungsgeschwindigkeit an das Mean-Reversion-Niveau des logarithmierten Verschuldungsgrades wirkt sich auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung des zukünftigen Verschuldungsgrades und damit auch auf die Ausfallwahrscheinlichkeit aus. Für einen niedrigen Verschuldungsgrad führt eine niedrigere (höhere) Anpassungsgeschwindigkeit zu einem niedrigeren (höheren) Kreditrisiko, während sich der Effekt für einen mittleren und einen hohen Verschuldungsgrad umkehrt.

Abschließend soll ein kurzer Ausblick auf mögliche zukünftige Forschungsschwerpunkte und weitere Anwendungsmöglichkeiten der vorgestellten Modelle gegeben werden:

1. Der in dieser Arbeit vorgestellte Ansatz zur Bewertung von Unternehmensanleihen erlaubt es, in einem finanzierungstheoretisch orientierten Modellrahmen Bestimmungsgrößen von Credit-Spreads zu identifizieren und die Auswirkungen von Änderungen dieser Größen auf die Credit-Spreads zu untersuchen. Bisher gibt es allerdings nur wenige Veröffentlichungen, die sich einer empirischen Überprüfung dieser Ergebnisse widmen. Eine neuere Untersuchung von Collin-Dufresne/Goldstein/Martin (2001) unterstützt die Hypothese, dass die in diesem

Modellrahmen identifizierten Bestimmungsgrößen die Änderungen von am Kapitalmarkt beobachtbaren Credit-Spreads nicht vollständig erklären können. Es muss somit noch weitere Bestimmungsgrößen von Credit-Spreads geben, deren Integration in die diskutierten Modelle noch aussteht.

2. Während unternehmenswertbasierte Kreditrisikomodelle vorrangig zur Bewertung von Anleihen eingesetzt werden, sind in der Literatur vielfältige Anwendungsmöglichkeiten intensitätsbasierter Kreditrisikomodelle zu finden. So wird dieser Ansatz etwa von Duffie/Singleton (1999) zur Bewertung von Kreditderivaten herangezogen oder wie in der Arbeit von Carr/Linetsky (2000) eingesetzt, um Aktienoptionspläne für Manager zu bewerten. Dabei hängt der Zahlungsstrom im ersten Fall vom Kreditrisiko des Emittenten des Basiswerts und im zweiten Fall vom Kreditrisiko des Emittenten der Aktienoptionen selbst ab. Die hier vorgenommene Verknüpfung der Intensität mit dem Verschuldungsgrad erlaubt es, das in diesen Finanztiteln enthaltene Kreditrisiko in Abhängigkeit unternehmensspezifischer Merkmale abzubilden und gleichzeitig Implementierungsvorteile der intensitätsbasierten Modelle zu nutzen.

Mathematischer Anhang

Definitionen und Sätze

Im Folgenden werden in der Arbeit verwendete Definitionen und Sätze aus der stochastischen Analysis aufgeführt.

1. Grundlagen stochastischer Prozesse

Definition [Stochastischer Prozess].[2] *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $[0, \mathcal{T}]$ ein Intervall auf der reellen Achse, das als Zeitintervall interpretiert wird. Eine Familie $\{X(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ von $\mathbb{R}^m$-wertigen Zufallsvariablen, so dass für ein fest vorgegebenes t die Abbildung*

$$X(t) : \omega \to X(t, \omega) : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

messbar ist, heißt m-dimensionaler stochastischer Prozess (oder verkürzend: Prozess). Für ein fest vorgegebenes $\omega \in \Omega$ wird die Abbildung

$$t \to X(t, \omega) : [0, \mathcal{T}] \to \mathbb{R}^m$$

als Zufallspfad oder Pfad des Prozesses bezeichnet.

Definition [Filtration].[3] *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Filtration $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ ist eine monoton wachsende Familie von σ-Unteralgebren von $\mathcal{F}$, mit $\mathcal{F}(t) \subset \mathcal{F}(u)$, für alle $t \leq u \leq \mathcal{T}$.*

Bemerkung: Soweit nicht anders erwähnt, erfüllen alle in dieser Arbeit betrachteten Filtrationen die „üblichen“ Bedingungen

1. $\mathcal{F}(0)$ enthält alle Nullmengen von $\mathcal{F}$ (Vollständigkeit) und

[2] Vgl. Nielsen (1999): S. 2.
[3] Vgl. Elliot/Kopp (1998): S. 98f.

2. $\mathcal{F}(t) = \cap_{u>t}\mathcal{F}(u)$. (Rechtsstetigkeit)

Definition [Adaptiertheit, Messbarkeit, Vorhersehbarkeit und Progressive-Messbarkeit eines Prozesses].[4] *Sei* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ *eine Filtration. Ein m-dimensionaler Prozess* $\{X(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ *heißt (an* $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$*) adaptiert, wenn die m-dimensionale Zufallsvariable*

$$X(t) : \omega \to X(t, \omega) : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

für alle $t \leq \mathcal{T}$ *messbar bezüglich* $\mathcal{F}(t)$ *ist. Der m-dimensionale Prozess* $X = \{X(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ *wird als messbar bezeichnet, wenn die Abbildung*

$$X : (\Omega \times [0, \mathcal{T}], \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{T})) \to (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$$

messbar ist. Der Prozess X *ist vorhersehbar, wenn er messbar bezüglich der von den adaptierten linksstetigen Prozessen auf* $\Omega \times [0, \mathcal{T}]$ *erzeugten* σ*-Algebra ist. Progressiv-messbar heißt der Prozess* X*, wenn für jedes* $t \in [0, \mathcal{T}]$ *die Einschränkung von* X *auf* $\Omega \times [0, t]$ *messbar bezüglich* $\mathcal{F}(t) \otimes \mathcal{B}([0, t])$ *ist.*

Bemerkung: Jeder progressiv-messbare Prozess ist adaptiert und messbar.[5]

Definition [Stoppzeit].[6] *Sei* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ *eine Filtration. Eine Stoppzeit (bezüglich* $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$*) ist eine Zufallsvariable*

$$\tau : \Omega \to [0, \mathcal{T}],$$

für die gilt $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$.

Definition [Martingal].[7] *Sei* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ *eine Filtration. Ein adaptierter Prozess* $\{X(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ *heißt Martingal (bezüglich* $\mathcal{F}(t)$*), falls gilt:*

$$\begin{aligned} E\left[|X(u)|\right] &< \infty, \text{ für alle } 0 \leq u \leq \mathcal{T}, \quad \textit{(Integrierbarkeit)} \\ E\left[X(u)|\mathcal{F}(t)\right] &= X(t), \text{ für alle } t \leq u \leq \mathcal{T}.^{8} \quad \textit{(Martingaleigenschaft)} \end{aligned}$$

Ein quadrat-integrierbares Martingal erfüllt weiterhin die Bedingung

$$E\left[X^2(u)\right] < \infty, \text{ für alle } 0 \leq u \leq \mathcal{T}. \quad \textit{(Quadrat-Integrierbarkeit)}$$

[4]Vgl. Nielsen (1999): S. 15 und 44.
[5]Vgl. ebenda: S. 45
[6]Vgl. Elliot/Kopp (1998): S. 100.
[7]Vgl. Arnold (1973): S. 40 und Nielsen (1999): S. 16.
[8]Der bedingte Erwartungswert wird häufig als $E^{\mathbb{P}}[X(t)|\mathcal{F}(s)]$ geschrieben, um das zu Grunde liegende Wahrscheinlichkeitsmaß hervorzuheben.

Definition [Wiener-Prozess].[9] *Sei* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ *eine Filtration. Der m-dimensionale Prozess* $\{\hat{W}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ *wird Wiener-Prozess genannt, falls gilt:*

1. $\hat{W}(0) = 0$.
2. $\{\hat{W}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ *ist adaptiert.*
3. *Für alle* $0 \leq s < t$ *ist* $\hat{W}(t) - \hat{W}(s)$ *stochastisch unabhängig von* $\mathcal{F}(s)$ *und* $N(0, (t-s)I)$*-verteilt, d.h. normalverteilt mit Erwartungswert* 0 *und Kovarianzmatrix* $(t-s)I$*, wobei* I *die* $m \times m$ *Einheitsmatrix symbolisiert.*
4. $\{\hat{W}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ *besitzt stetige Pfade.*

Bemerkung: Der Wiener-Prozess folgt einem Martingal, wie sich mittels 2. und 3. zeigen lässt.

Definition [Zählprozess].[10] *Sei* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ein Zählprozess* $\{N(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ *ist eine wachsende Familie* $\{T(0), T(1), \dots\}$ *von Zufallsvariablen auf* $[0, \mathcal{T}]$*, mit* $T(0) = 0$ *und* $T(n) < T(n+1)$*, für* $T(n) < \infty$*. Es gilt*

$$N(t) = n, \ \textit{für}\ t \in [T(n), T(n+1)),$$

und $N(t) = +\infty$*, falls* $t > sup\ T(n)$*. Dabei lässt sich* $T(n)$ *als n-te Sprungzeit von* $\{N(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ *und* $N(t)$ *als Anzahl der Sprünge bis einschließlich* t *interpretieren. Ein Zählprozess heißt „nicht-explodierend“ für* $sup\ T(n) = +\infty$ *fast sicher.*

Bemerkung: Die Intensität eines Zählprozesses lässt sich wie folgt definieren: Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ eine Filtration und $h = \{h(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ ein nicht-negativer vorhersehbarer Prozess, so dass $\int_0^t h(s)ds < \infty$ fast sicher, für alle $t \in [0, \mathcal{T}]$, gilt. Ein nicht-explodierender adaptierter Zählprozess $N = \{N(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ besitzt die Intensität h, wenn der Prozess $\{N(t) - \int_0^t h(s)ds : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ ein lokales Martingal ist. Der nachfolgende Satz formuliert eine Bedingung, um die lokale Martingaleigenschaft zu vermeiden.

Satz A1 [„Kompensierter“ Zählprozess].[11] *Sei* N *ein adaptierter Zählprozess und* h *ein nicht-negativer vorhersehbarer Prozess, mit* $E\left[\int_0^t h(s)ds\right] < \infty$*, für alle* $t \in [0, \mathcal{T}]$*. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

[9] Vgl. Arnold (1973): S. 50f. und 60f. und Nielsen (1999): S. 17.
[10] Vgl. Duffie (2001): S. 357.
[11] Vgl. Duffie (2001): S. 358.

1. *N ist nicht-explodierend und besitzt die Intensität h.*
2. *Der Prozess $\{N(t) - \int_0^t h(s)ds : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ ist ein Martingal.*

Beweis: Duffie (2001): S. 358.

Definition [Poisson-Prozess].[12] *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ eine Filtration. Ein adaptierter Prozess $\{N(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ wird Poisson-Prozess mit Intensität h genannt, falls gilt:*

1. $N(0) = 0$.
2. *Für alle $0 \leq s < t$ ist $N(t) - N(s)$ stochastisch unabhängig von $\mathcal{F}(s)$ und poissonverteilt mit Parameter $h(t-s)$, d.h. für beliebige $k = 0, 1, \ldots$ gilt*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{N(t) - N(s) = k | \mathcal{F}(s)\} &= \mathbb{P}\{N(t) - N(s) = k\} \\ &= \frac{h^k (t-s)^k}{k!} \exp\{-h(t-s)\}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Der hier definierte Prozess wird als homogener Poisson-Prozess bezeichnet. Ein inhomoger Poisson-Prozess besitzt eine zeitabhängige Intensitätsfunktion $h(t)$, wobei $N(t) - N(s)$ stochastisch unabhängig von $\mathcal{F}(s)$ und poissonverteilt mit Parameter $\int_s^t h(u)du$ ist.

2. Stochastische Differenzialgleichungen

Definition [Itô-Prozess].[13] *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ eine Filtration. Ein Itô-Prozess ist ein d-dimensionaler Prozess $\{X(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ der Form*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t G(s)d\hat{W}(s), \tag{6.1}$$

wobei der Anfangswert $X(0)$ eine $\mathcal{F}(0)$-messbare d-dimensionale Zufallsvariable und $\{\hat{W}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ ein m-dimensionaler Wiener-Prozess ist. Weiterhin sind $f(t)$ und $G(t)$ adaptierte und messbare d-vektorwertige bzw. $d \times m$-matrixwertige Funktionen, welche die Regularitätsbedingungen $\int_0^{\mathcal{T}} ||f(t)||dt < \infty$ und $\int_0^{\mathcal{T}} ||G(t)||^2 dt < \infty$ fast sicher erfüllen.[14] *Die stochastische Differenzialgleichung*

$$dX(t) = f(t)dt + G(t)d\hat{W}(t)$$

[12] Vgl. Bielecki/Rutkowski (2002): S. 186.

[13] Vgl. Arnold (1973): S. 113ff. und Nielsen (1999): S. 52.

[14] Der Ausdruck $||f(t)||$ symbolisiert die euklidische Norm der d-vektorwertigen Funktion $f(t)$ und wird berechnet als $||f(t)|| = \sqrt{f_1^2(t) + \cdots + f_d^2(t)}$. Für $||G(t)||^2$ gilt entsprechend $||G(t)||^2 = \sum_{i,j} G_{ij}^2(t)$.

ist die kompaktere, symbolische Schreibweise für den Zusammenhang aus (6.1). Ein Itô-Prozess ist adaptiert und messbar. Er besitzt weiterhin stetige Pfade.

Satz A2 [Itô's Lemma]. *Sei $F = F(t,x)$ eine auf $[0,\mathcal{T}] \times \mathbb{R}^d$ definierte stetige Funktion mit Werten in $\mathbb{R}^k$ und den stetigen partiellen Ableitungen*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} F(t,x) = F_t, \\ &\frac{\partial}{\partial x_i} F(t,x) = F_{x_i}, x = (x_1, \ldots, x_d)^T, \\ &\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F(t,x) = F_{x_i x_j}, i, j \le d. \end{aligned}$$

Angenommen, ein d-dimensionaler Itô-Prozess $\{X(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$ ist durch das stochastische Differenzial

$$dX(t) = f(t)dt + G(t)d\hat{W}(t)$$

gegeben, wobei $f(t)$ eine d-vektorwertige Funktion, $G(t)$ eine $d \times m$-matrixwertige Funktion und $\{\hat{W}(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$ ein m-dimensionaler Wiener-Prozess ist. Der k-dimensionale Prozess $\{Y(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$, mit $Y(t) = F(t, X(t))$ und dem Anfangswert $Y(0) = F(0, X(0))$, besitzt dann ein stochastisches Differenzial bezüglich desselben Wiener-Prozesses $\{\hat{W}(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$, und zwar gilt

$$\begin{aligned} dY(t) = &\left(F_t(t, X(t)) + F_x(t, X(t)) f(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} F_{x_i x_j}(t, X(t)) (G(t) G^T(t))_{ij} \right) dt \\ &+ F_x(t, X(t)) G(t) d\hat{W}(t). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Hierbei ist $F_x = (F_{x_1}, \ldots, F_{x_d})$ eine $k \times d$-Matrix und $F_{x_i x_j}$ ein k-dimensionaler Spaltenvektor.

Beweis: Arnold (1973): S. 108ff.

Bemerkung: Die Doppelsumme in (6.2) kann wie folgt geschrieben werden:

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} F_{x_i x_j} (GG^T)_{ij} = tr\left(F_{xx} GG^T\right) = tr\left(GG^T F_{xx}\right),$$

wobei $F_{xx} = \left(F_{x_i x_j}\right)$ eine $d \times d$ Matrix ist, deren Elemente k-Vektoren sind, und tr die Spur einer Matrix angibt.[15] Die Spur einer symmetrischen Matrix A ist definiert als

[15] Vgl. Arnold (1973): S. 104.

die Summe der Elemente auf der Hauptdiagonalen, d.h.

$$trA = \sum_i A_{ii}.$$

Korollar A1 [Itô's Lemma für $k = m = d = 1$]. *Sei $F = F(t,x)$ eine in $[0,\mathcal{T}] \times \mathbb{R}^1$ definierte skalare Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen F_t, F_x und F_{xx}. Angenommen, der (eindimensionale) Prozess $\{X(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$ ist durch das stochastische Differenzial*

$$dX(t) = f(t)dt + G(t)d\hat{W}(t)$$

gegeben, wobei $f(t)$ und $G(t)$ skalare Funktionen sind und $\{\hat{W}(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$ einen (eindimensionalen) Wiener-Prozess darstellt. Der Prozess $\{Y(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$, mit $Y(t) = F(t, X(t))$, besitzt dann das stochastische Differenzial

$$\begin{aligned} dY(t) &= \left(F_t(t,X(t)) + F_x(t,X(t))f(t) + \frac{1}{2}F_{xx}(t,X(t))G^2(t)\right)dt \\ &\quad + F_x(t,X(t))G(t)d\hat{W}(t). \end{aligned}$$

Definition [Lineare stochastische Differenzialgleichung].[16] *Sei $\{\hat{W}(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$ ein m-dimensionaler Wiener-Prozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$ eine Filtration. Eine stochastische Differenzialgleichung der Form*

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + G(t, X(t))d\hat{W}(t)$$

für den d-dimensionalen Prozess $\{X(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$ heißt linear, wenn die Funktionen $f(t,x)$ und $G(t,x)$ in $[0,\mathcal{T}] \times \mathbb{R}^d$ lineare Funktionen von $x \in \mathbb{R}^d$ sind, wenn also gilt

$$f(t,x) = A(t)x + a(t),$$

$A(t)$ $d \times d$-matrixwertig, $a(t)$ $\mathbb{R}^d$-wertig, und

$$G(t,x) = (B_1(t)x + b_1(t), \ldots, B_m(t)x + b_m(t)),$$

$B_k(t)$ $d \times d$-Matrizen, $b_k(t)$ $\mathbb{R}^d$-wertig. Eine lineare stochastische Differenzialgleichung hat also die Gestalt

$$dX(t) = (A(t)X(t) + a(t))dt + \sum_{i=1}^{m}(B_i(t)X(t) + b_i(t))d\hat{W}_i(t),$$

[16] Vgl. Arnold (1973): S. 139

wobei $\hat{W}(t) = (\hat{W}_1(t), \ldots, \hat{W}_m(t))^T$ *ist. Sie heißt homogen im Falle* $a(t) = b_1(t) = \ldots = b_m(t) = 0$. *Sie heißt linear im engeren Sinne, falls gilt* $B_1(t) = \ldots = B_m(t) = 0$).

Bemerkung: Eine lineare stochastische Differenzialgleichung im engeren Sinne lässt sich schreiben als

$$dX(t) = (A(t)X(t) + a(t))dt + B(t)d\hat{W}(t),$$

mit $B(t) = (b_1(t), \ldots, b_m(t))$.

Satz A3 [Existenz der Lösung einer linearen stochastischen Differenzialgleichung]. *Gegeben sei eine lineare stochastische Differenzialgleichung*

$$dX(t) = (A(t)X(t) + a(t))dt + \sum_{i=1}^{m}(B_i(t)X(t) + b_i(t))d\hat{W}_i(t), \tag{6.3}$$

wobei $A(t)$, $a(t)$, $B_i(t)$ *und* $b_i(t)$ *in* $[0, \mathcal{T}]$ *messbare Funktionen sind, die die Regularitätsbedingungen* $\int_0^{\mathcal{T}} ||a(t)+b_i(t)||dt < \infty$ *sowie* $\int_0^{\mathcal{T}} ||A(t)||^2 dt < \infty$ *und* $\int_0^{\mathcal{T}} ||B_i(t)||^2 dt < \infty$ *erfüllen. Die lineare stochastische Differenzialgleichung (6.3) besitzt dann für jeden* $\mathcal{F}(0)$*-messbaren Anfangswert* $X(0) = c$, *mit* $0 \leq t$, *im Intervall* $[0, \mathcal{T}]$ *eine eindeutige Lösung.*

Beweis: Arnold (1973): S. 140f.

Satz A4 [Lösung einer linearen stochastischen Differenzialgleichung im engeren Sinne]. *Die (im engeren Sinne) lineare stochastische Differenzialgleichung*

$$dX(t) = (A(t)X(t) + a(t))dt + B(t)\hat{W}(t), \tag{6.4}$$

mit $X(0) = c$, *besitzt in* $[0, \mathcal{T}]$ *die Lösung*

$$X(t) = K(t)\left(c + \int_0^t K^{-1}(s)a(s)ds + \int_0^t K^{-1}(s)B(s)d\hat{W}(s)\right).$$

Hierbei ist $K(t)$ *die Lösung der Matrixgleichung*

$$dK(t) = A(t)K(t)dt$$

zum Anfangswert $K(0) = I$, *mit* I *als* $d \times d$ *Einheitsmatrix.*

Beweis: Arnold (1973): S. 142f.

Korrolar A2 [Lösung einer linearen stochastischen Differenzialgleichung im engeren Sinne für $A(t) = A$]. *Ist in Gleichung (6.4) die Matrix* $A(t) = A$ *unabhängig von* t, *so gilt für die Lösung*

$$X(t) = e^{At}c + \int_0^t e^{As}(a(s)ds + B(s)d\hat{W}(s)). \tag{6.5}$$

Bemerkung: Die Sätze A3 und A4 sowie das Korrolar K2 verallgemeinern sich unmittelbar auf den Fall, dass $A(t)$, $a(t)$, $B_i(t)$ und $b_i(t)$ adaptierte und messbare stochastische Prozesse, die die Regularitätsbedingungen fast sicher erfüllen, darstellen.[17]

Satz A5 [Die Feynman/Kač-Formel]. *Gegeben sei:*

1. *Eine d-vektorwertige Funktion* $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.
2. *Eine* $d \times d$*-matrixwertige Funktion* $C : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{M}(d,d)$, *die sich für eine* $d \times m$*-matrixwertige Funktion* $G : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{M}(d,m)$ *als*
$$C(t,x) = G(t,x)G^T(t,x)$$
schreiben lässt.
3. *Eine reellwertige Funktion* $q : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.
4. *Eine reellwertige Funktion* $r : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Angenommen, die reellwertige Funktion $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *ist eine Lösung des Randwertproblems*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}F(t,x) + g(t,x)f(t,x) + \frac{1}{2}tr\left(C(t,x)H(t,x)\right) - r(t,x)F(t,x) &= 0, \\ F(T,x) &= q(x), \end{aligned}$$

mit dem d-vektorwertigen Gradienten $g(t,x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}F(t,x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_d}F(t,x)\right)$ *und der* $d \times d$*-Hesse-Martix*

$$H(t,x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1}F(t,x) & \ldots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_d}F(t,x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_d \partial x_1}F(t,x) & \ldots & \frac{\partial^2}{\partial x_d \partial x_d}F(t,x) \end{pmatrix}.$$

Weiterhin sei $g(s,X(s))G(s,X(s))$ *quadrat-integrierbar und* $\{X(s) : s \in [0,\mathcal{T}]\}$ *ein Itô-Prozess, der durch (6.6) beschrieben wird. Die Funktion F besitzt dann für jedes gegebene Paar* $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$ *die Darstellung*

$$F(t,x) = E\left[e^{-\int_t^T r(s,X(s))ds} q(X(T))|t,x\right].$$

Der Prozess $\{X(s) : s \in [0,\mathcal{T}]\}$ *genügt der stochastischen Differenzialgleichung*

$$\begin{aligned} dX(s) &= f(s,X(s))ds + G(s,X(s))dW(s), \quad s > t, \\ X(s) &= x, \quad s \leq t. \end{aligned} \tag{6.6}$$

[17] Vgl. Karatzas/Shreve (1988): S. 360f.

$\{W(s) : s \in [0, \mathcal{T}]\}$ *ist ein m-dimensionaler Wiener-Prozess.*

Beweis: Björk (1998): S. 58ff. oder Duffie (2001): S. 96 und S. 342ff.

3. Girsanovs Theorem und Integraldarstellung eines Martingals

Satz A6 [Das Theorem von Girsanov]. *Sei* $\{\hat{W}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ *ein Wiener-Prozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *und* $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ *die entsprechende Standardfiltration.*[18] *Sei ferner* $\{\lambda(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ *ein adaptierter und messbarer Prozess, wobei* $\int_0^t \lambda^2(s)ds < \infty$ *fast sicher gilt und der Prozess* $\{\Lambda(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$*, mit*

$$\Lambda(t) = \exp\left\{\int_0^t \lambda(s)d\hat{W}(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda^2(s)ds\right\},$$

ein Martingal unter $\mathbb{P}$ *ist.*[19] *Definiere durch*

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}(\mathcal{T})} = \Lambda(\mathcal{T})$$

ein weiteres, zu $\mathbb{P}$ *äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mathbb{Q}$ *auf* $\mathcal{F}(\mathcal{T})$*. Dann ist der Prozess* $\{W(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$*, mit*

$$W(t) = \hat{W}(t) - \int_0^t \lambda(s)ds$$

bzw. dem stochastischen Differenzial

$$dW(t) = d\hat{W}(t) - \lambda(t)dt,$$

ein Wiener-Prozess auf $(\mathcal{F}(t), \mathbb{Q})$*.*

Beweis: Elliot/Kopp (1998): S. 138f.

Bemerkung: Das Theorem von Girsanov verallgemeinert sich fast unmittelbar auf den vektorwertigen Fall des m-dimensionalen Wiener-Prozesses $\hat{W}(t) = (\hat{W}_1(t), \ldots,$

[18] Für die Standardfiltration gilt

$$\mathcal{F}(t) = \sigma\left(\sigma(\{\hat{W}(s) : s \leq t\}) \cup \mathcal{N}_0\right), \text{ für alle } t \in [0, \mathcal{T}].$$

Dabei gibt $\sigma(\{\hat{W}(s) : s \leq t\})$ die von dem Wiener-Prozess erzeugte Filtration und $\mathcal{N}_0$ die Nullmengen von $\mathcal{F}$ an.

[19] Hinreichend dafür, dass der Prozess $\{\Lambda(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ ein Martingal darstellt, ist die Novikov-Bedingung

$$E\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^{\mathcal{T}} \lambda^2(t)dt\right\}\right] < \infty.$$

Vgl. Elliot/Kopp (1998): S. 138.

$\hat{W}_m(t))$ und des m-vektorwertigen Prozesses $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \ldots, \lambda_m(t))$, wenn die einzelnen Komponenten ebenfalls die oben genannten Bedingungen erfüllen und $\int_0^t \lambda(s) d\hat{W}(s)$ durch $\sum_{i=1}^m \int_0^t \lambda_i(s) d\hat{W}_i(s)$ ersetzt wird.[20]

Satz A7 [Stochastische Integraldarstellung eines Martingals]. *Sei* $\{\hat{W}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ *ein Wiener-Prozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *und* $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ *die entsprechende Standardfiltration.*[21] *Ist der Prozess* $\{M(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ *ein quadratintegrierbares Martingal, so besitzt er die Integraldarstellung*

$$M(t) = M(0) + \int_0^t \zeta(s) \hat{W}(s) \textit{ fast sicher, für alle } t \in [0, \mathcal{T}],$$

mit eindeutig bestimmtem, adaptiertem und messbarem $\zeta(t)$. *Weiterhin gilt*

$$E\left[\left(\int_0^{\mathcal{T}} ||\zeta(t)||^2 dt\right)\right] < \infty.$$

Beweis: Elliot/Kopp (1998): S. 144f.

Bemerkung: Analog zum Theorem von Girsanov lässt sich Satz A7 auf den vektorwertigen Fall des m-dimensionalen Wiener-Prozesses $\hat{W}(t) = (\hat{W}_1(t), \ldots, \hat{W}_m(t))$ verallgemeinern. Dazu ist wiederum $\int_0^t \zeta(s) d\hat{W}(s)$ durch $\sum_{i=1}^m \int_0^t \zeta_i(s) d\hat{W}_i(s)$ zu ersetzen.

4. Gauß'sche Prozesse

Definition [Gauß'scher Prozess].[22] *Ein* d*-dimensionaler Prozess* $\{X(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ *ist ein Gauß'scher Prozess, wenn für beliebige beliebige Vektoren* $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, *mit* $t_i \in [0, \mathcal{T}]$ *und* $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$, *die Elemente der* $d \times n$*-Matrix*

$$(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$$

gemeinsam normalverteilt sind.

Satz A8 [Stochastisches Integral für deterministische Integranden]. *Sei* $\{\hat{W}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ *ein* m*-dimensionaler Wiener-Prozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ *eine Filtration und* $G(t)$ *eine adaptierte und messbare* $d \times m$*-matrixwertige Funktion, die* $\int_0^{\mathcal{T}} ||G(t)||^2 dt < \infty$ *fast sicher erfüllt. Angenommen,* $G(t)$

[20] Vgl. Hackenbroch/Thalmair (1994): S. 260.
[21] Vgl. Satz A6 zur Definition der Standardfiltration.
[22] Vgl. Nielsen (1999): S. 91.

ist unabhängig von ω, also eine ausschließlich zeitabhängige (bzw. deterministische) Funktion. Für $0 \leq s < t$ ist dann das d-dimensionale stochastische Integral

$$\int_s^t G(u) d\hat{W}(u) \tag{6.7}$$

unabhänig von $\mathcal{F}(s)$ und normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Kovarianzmatrix

$$\int_s^t G(u) G^T(u) du. \tag{6.8}$$

Beweis: Arnold (1973): S. 91 oder Nielsen (1999): S. 93.

Bemerkung: Unter Verwendung des stochastischen Integrals aus (6.7) lässt sich ein d-dimensionaler Itô-Prozess $\{X(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$, mit

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(s) ds + \int_0^t G(s) d\hat{W}(s), \tag{6.9}$$

konstruieren, wobei der Anfangswert $X(0)$ eine $\mathcal{F}(0)$-messbare, normalverteilte d-dimensionale Zufallsvariable oder konstant ist und $f(t)$ eine adaptierte und messbare d-vektorwertige Funktion darstellt, die $\int_0^{\mathcal{T}} ||f(t)|| dt < \infty$ fast sicher erfüllt. Ist $f(t)$ wie $G(t)$ unabhängig von ω, also eine ausschließlich zeitabhängige Funktion, entspricht dieser Itô-Prozess einem Gauß'schen Prozess.

Satz A9 [Zeitwechsel]. *Sei $\{\hat{W}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ ein m-dimensionaler Wiener-Prozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \mathcal{T}]\}$ eine Filtration und $G(t)$ eine adaptierte und messbare m-vektorwertige Funktion, die $\int_0^{\mathcal{T}} ||G(t)||^2 dt < \infty$ fast sicher erfüllt. Angenommen, $G(t)$ ist unabhängig von ω, also ausschließlich zeitabhängig, und positiv für alle $t \in [0, \mathcal{T}]$. Definiere*

$$X(t) = \int_0^t G(s) d\hat{W}(s) \tag{6.10}$$

und

$$C(t) = \int_0^t ||G(s)||^2 d(s), \tag{6.11}$$

für alle $0 \leq t \leq \mathcal{T}$, und setze $\mathcal{T}^C = C(\mathcal{T})$. Dann ist durch

$$\hat{B}(s) = X(C^{-1}(s)), \tag{6.12}$$

für alle $0 \leq s \leq \mathcal{T}^C$, ein Wiener-Prozess bezüglich der zeittransformierten Filtration $\{\mathcal{F}^C(s) : s \in [0, \mathcal{T}^C]\}$, mit $\mathcal{F}^C(s) = \mathcal{F}(C^{-1}(s))$, gegeben und es gilt

$$X(t) = \hat{B}(C(t)), \tag{6.13}$$

für alle $0 \leq t \leq \mathcal{T}^C$.

Beweis: Nielsen (1999): S. 94f.

Beweise

1. Zu Satz U1

Der heutige Preis eines in T fälligen europäischen Calls auf den Unternehmenswert ist unter Verwendung der Martingalmaß-Technik durch

$$\begin{aligned} C^{PV}(0,T) &= e^{-rT} E^{\mathbb{Q}}[(V(T)-K)\mathbf{1}_{\{V(T)>K\}}] \\ &= \underbrace{e^{-rT} E^{\mathbb{Q}}\left[V(T)\mathbf{1}_{\{V(T)>K\}}\right]}_{T_1} - \underbrace{e^{-rT} K\mathbb{Q}\{V(T)>K\}}_{T_2} \end{aligned} \tag{6.14}$$

gegeben. Für den zweiten Term auf der rechten Seite der Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} T_2 &= e^{-rT} K\mathbb{Q}\left\{V(0)\exp\left\{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W(T)\right\}>K\right\} \\ &= e^{-rT} K\mathbb{Q}\left\{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W(T)>\ln(K/V(0))\right\} \\ &= e^{-rT} K\mathbb{Q}\left\{W(T)>\frac{\ln(K/V(0))-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma}\right\} \\ &= e^{-rT} K\mathbb{Q}\left\{\xi<\frac{\ln(V(0)/Ke^{-rT})-\frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right\} \\ &= e^{-rT} K\Phi(d_2), \end{aligned} \tag{6.15}$$

wobei $\xi=-W(T)/\sqrt{T}$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist. Der Ausdruck $\mathbb{Q}\{V(T)>K\}=\Phi(d_2)$ entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass der Call bei Fälligkeit ausgeübt wird, gegeben das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{Q}$.

Um die Berechnung des Terms T_1 aus der Preisgleichung des europäischen Calls zu vereinfachen, wird ein zu $\mathbb{Q}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{\mathbb{Q}}$ durch

$$\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}}|_{\mathcal{F}(T)}=\tilde{\Lambda}(T)=\exp\left\{\sigma W(T)-\frac{\sigma^2}{2}T\right\} \tag{6.16}$$

definiert. Gemäß dem Theorem von Girsanov ist dann durch $\tilde{W}(t)=W(t)-\sigma t$ ein Wiener-Prozess unter $\tilde{\mathbb{Q}}$ gegeben.

Unter Berücksichtigung der Definition von $\tilde{\Lambda}(T)$ in (6.16) lässt sich der Term T_1 als

$$\begin{aligned} T_1 &= e^{-rT} E^{\mathbb{Q}} \left[V(0) \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W(T) \right\} \mathbf{1}_{\{V(T)>K\}} \right] \\ &= V(0) E^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2} T + \sigma W(T) \right\} \mathbf{1}_{\{V(T)>K\}} \right] \\ &= V(0) E^{\mathbb{Q}} \left[\tilde{\Lambda}(T) \mathbf{1}_{\{V(T)>K\}} \right] \\ &= V(0) E^{\tilde{\mathbb{Q}}} \left[\mathbf{1}_{\{V(T)>K\}} \right] \\ &= V(0) \tilde{\mathbb{Q}} \{ V(T) > K \} \end{aligned}$$

schreiben. Unter dem Maß $\tilde{\mathbb{Q}}$ ist der Unternehmenswert durch

$$\begin{aligned} V(t) &= V(0) \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma (\tilde{W}(t) + \sigma t) \right\} \\ &= V(0) \exp \left\{ \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \tilde{W}(t) \right\} \end{aligned} \tag{6.17}$$

gegeben. Damit folgt für den Term T_1

$$\begin{aligned} T_1 &= V(0) \tilde{\mathbb{Q}} \left\{ V(0) \exp \left\{ \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \tilde{W}(T) \right\} > K \right\} \\ &= V(0) \tilde{\mathbb{Q}} \left\{ \tilde{W}(T) > \frac{\ln(K/V(0)) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma} \right\} \\ &= V(0) \tilde{\mathbb{Q}} \left\{ \xi < \frac{\ln(V(0)/K e^{-rT}) + \frac{\sigma^2}{2} T}{\sigma \sqrt{T}} \right\} \\ &= V(0) \Phi(d_1), \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\xi} = -\tilde{W}(T)/\sqrt{T}$ wiederum eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist.

Fasst man nun die Darstellungen für die Terme T_1 und T_2 zusammen, zeigt sich, dass der Preis des europäischen Calls durch

$$C^{PV}(0,T) = V(0)\Phi(d_1) - e^{-rT} K \Phi(d_2) \tag{6.18}$$

gegeben ist.

Der heutige Preis eines in T fälligen europäischen Puts auf den Unternehmenswert ist unter Verwendung der Martingalmaß-Technik durch

$$\begin{aligned} P^{PV}(0,T) &= e^{-rT} E^{\mathbb{Q}}[(K - V(T)) \mathbf{1}_{\{V(T)<K\}}] \\ &= \underbrace{e^{-rT} K \mathbb{Q}\{V(T) < K\}}_{T_1} - \underbrace{e^{-rT} E^{\mathbb{Q}}[V(T) \mathbf{1}_{\{V(T)<K\}}]}_{T_2} \end{aligned} \tag{6.19}$$

gegeben. Für den zweiten Term auf der rechten Seite der Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned}
T_2 &= e^{-rT} K \mathbb{Q}\left\{ V(0)\exp\left\{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W(T)\right\} < K\right\} \\
&= e^{-rT} K \mathbb{Q}\left\{ \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W(T) < \ln(K/V(0))\right\} \\
&= e^{-rT} K \mathbb{Q}\left\{ W(T) < -\frac{\ln(V(0)/K)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma}\right\} \\
&= e^{-rT} K \mathbb{Q}\left\{ \xi < -\frac{\ln(V(0)/Ke^{-rT})-\frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right\} \\
&= e^{-rT} K \Phi(-d_2), \qquad (6.20)
\end{aligned}$$

wobei $\xi = W(T)/\sqrt{T}$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist. Der Ausdruck $\mathbb{Q}\{V(T) < K\} = \Phi(-d_2)$ entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass der Put bei Fälligkeit ausgeübt wird, gegeben das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{Q}$.

Der Term T_1 lässt unter Verwendung des in (6.16) definierten Wahrscheinlichkeitsmaßes $\tilde{\mathbb{Q}}$ als

$$\begin{aligned}
T_1 &= e^{-rT} E^{\mathbb{Q}}\left[V(0)\exp\left\{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W(T)\right\}\mathbf{1}_{\{V(T)<K\}}\right] \\
&= V(0)\tilde{\mathbb{Q}}\left\{V(T) < K\right\}
\end{aligned}$$

schreiben. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
T_1 &= V(0)\tilde{\mathbb{Q}}\left\{ V(0)\exp\left\{\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma \tilde{W}(T)\right\} < K\right\} \\
&= V(0)\tilde{\mathbb{Q}}\left\{ \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma \tilde{W}(T) < \ln(K/V(0))\right\} \\
&= V(0)\tilde{\mathbb{Q}}\left\{ \tilde{W}(T) < -\frac{\ln(V(0)/K)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma}\right\} \\
&= V(0)\tilde{\mathbb{Q}}\left\{ \tilde{\xi} < -\frac{\ln(V(0)/Ke^{-rT})+\frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma}\right\} \\
&= V(0)\Phi(-d_1),
\end{aligned}$$

wobei $\tilde{\xi} = \tilde{W}(T)/\sqrt{T}$ wiederum eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist.

Unter Berücksichtigung der Darstellungen für die Terme T_1 und T_2 ist der Preis des europäischen Puts gegeben durch

$$P^{PV}(0,T) = e^{-rT} K \Phi(-d_2) - V(0)\Phi(-d_1). \qquad (6.21)$$

2. Zu Satz U2

Der heutige Preis eines in T fälligen europäischen Calls auf den Unternehmenswert ist unter Verwendung der Martingalmaß-Technik und nach einem Wechsel auf das Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ durch

$$\begin{aligned} C^{PV}(0,T) &= P(0,T)E^{\mathbb{Q}^T}[(F_V(T,T)-K)\mathbf{1}_{\{F_V(T,T)>K\}}] \\ &= \underbrace{P(0,T)E^{\mathbb{Q}^T}\left[F_V(T,T)\mathbf{1}_{\{F_V(T,T)>K\}}\right]}_{T_1} \\ &\quad - \underbrace{P(0,T)K\mathbb{Q}^T\{F_V(T,T)>K\}}_{T_2} \end{aligned} \tag{6.22}$$

gegeben. Der Terminkurs des Unternehmenswerts unter $\mathbb{Q}^T$ entspricht nach dem Zeitwechsel gemäß (4.41)

$$F_V(t,T) = F_V(0,T)\exp\left\{-\frac{1}{2}C(t) + W(C(t))\right\}, \tag{6.23}$$

für alle $t \in [0,T]$. Dabei stellt $W(s)$ einen (eindimensionalen) Wiener-Prozess bezüglich der zeittransformierten Filtration $\{\mathcal{F}^C(s) : s \in [0, T^C]\}$, mit $T^C = C(T)$, dar.

Für den zweiten Term auf der rechten Seite der Gleichung (6.22) gilt somit

$$\begin{aligned} T_2 &= P(0,T)K\mathbb{Q}^T\left\{F_V(0,T)\exp\left\{-\frac{1}{2}C(T) + W(C(T))\right\} > K\right\} \\ &= P(0,T)K\mathbb{Q}^T\left\{-\frac{1}{2}C(T) + W(C(T)) > \ln(K/F_V(0,T))\right\} \\ &= P(0,T)K\mathbb{Q}^T\left\{W(C(T)) > \ln(K/F_V(0,T)) + \frac{1}{2}C(T)\right\} \\ &= P(0,T)K\mathbb{Q}^T\left\{\xi < \frac{\ln(F_V(0,T)/K) - \frac{1}{2}C(T)}{\sqrt{C(T)}}\right\} \\ &= P(0,T)K\Phi(d_2^F), \end{aligned}$$

wobei $\xi = -W(C(T))/\sqrt{C(T)}$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist. Der Ausdruck $\mathbb{Q}^T\{F_V(T,T) > K\} = \Phi(d_2^F)$ entspricht hierbei der Wahrscheinlichkeit, dass der Call bei Fälligkeit ausgeübt wird, gegeben das Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$.

Um die Berechnung des Terms T_1 aus der Preisgleichung des europäischen Calls zu vereinfachen, wird ein zu $\mathbb{Q}^T$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{\mathbb{Q}}^T$ definiert durch

$$\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}^T}{d\mathbb{Q}^T}|_{\mathcal{F}^C(T^C)} = \tilde{\Lambda}^T(T^C) = \exp\left\{W(T^C) - \frac{1}{2}T^C\right\}, \tag{6.24}$$

mit $T^C = C(T)$, wobei $W(s)$ wiederum einen (eindimensionalen) Wiener-Prozess bezüglich der zeittransformierten Filtration $\{\mathcal{F}^C(s) : s \in [0, T^C]\}$ darstellt. Gemäß dem Theorem von Girsanov ist dann durch $\tilde{W}(s) = W(s) - s$ ein Wiener-Prozess unter $\tilde{\mathbb{Q}}^T$ gegeben.

Unter Berücksichtigung der Definition von $\tilde{\Lambda}^T(T^C)$ in (6.24) lässt sich der Term T_1 als

$$\begin{aligned} T_1 &= P(0,T)E^{\mathbb{Q}^T}\left[F_V(0,T)\exp\left\{-\frac{1}{2}C(T) + W(C(T))\right\}\mathbf{1}_{\{F_V(T,T)>K\}}\right] \\ &= V(0)E^{\mathbb{Q}^T}\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}C(T) + W(C(T))\right\}\mathbf{1}_{\{F_V(T,T)>K\}}\right] \\ &= V(0)E^{\mathbb{Q}^T}\left[\tilde{\Lambda}^T(T^C)\mathbf{1}_{\{F_V(T,T)>K\}}\right] \\ &= V(0)E^{\tilde{\mathbb{Q}}^T}\left[\mathbf{1}_{\{F_V(T,T)>K\}}\right] \\ &= V(0)\tilde{\mathbb{Q}}^T\left\{F_V(T,T) > K\right\} \end{aligned}$$

schreiben. Unter dem Maß $\tilde{\mathbb{Q}}^T$ ist der Terminkurs des Unternehmenswerts aus (6.23) durch

$$\begin{aligned} F_V(t,T) &= F_V(0,T)\exp\left\{-\frac{1}{2}C(t) + (\tilde{W}(C(t)) + C(t))\right\} \\ &= F_V(0,T)\exp\left\{\frac{1}{2}C(t) + \tilde{W}(C(t))\right\}, \end{aligned} \tag{6.25}$$

für alle $t \in [0,T]$, gegeben. Damit folgt für den Term T_1

$$\begin{aligned} T_1 &= V(0)\tilde{\mathbb{Q}}^T\left\{F_V(0,T)\exp\left\{\frac{1}{2}C(T) + \tilde{W}(C(T))\right\} > K\right\} \\ &= V(0)\tilde{\mathbb{Q}}^T\left\{\tilde{W}(C(T)) > \ln(K/F_V(0,T)) - \frac{1}{2}C(T)\right\} \\ &= V(0)\tilde{\mathbb{Q}}^T\left\{\tilde{\xi} < \frac{\ln(F_V(0,T)/K) + \frac{1}{2}C(T)}{\sqrt{C(T)}}\right\} \\ &= V(0)\Phi(d_1^F), \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\xi} = -\tilde{W}(C(T))/\sqrt{C(T)}$ wiederum eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist.

Fasst man nun die Darstellungen für die Terme T_1 und T_2 zusammen, zeigt sich, dass der Preis des europäischen Calls durch

$$C^{PV}(0,T) = V(0)\Phi(d_1^F) - P(0,T)K\Phi(d_2^F) \tag{6.26}$$

gegeben ist.

Der heutige Preis eines europäischen Puts auf den Unternehmenswert ist unter Verwendung der Martingalmaß-Technik und nach einem Wechsel auf das Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ als

$$\begin{aligned} P^{PV}(0,T) &= P(0,T)E^{\mathbb{Q}^T}[(K - F_V(T,T))\mathbf{1}_{\{F_V(T,T)<K\}}] \\ &= \underbrace{P(0,T)E^{\mathbb{Q}^T}\left[F_V(T,T)\mathbf{1}_{\{F_V(T,T)<K\}}\right]}_{T_1} \\ &\quad - \underbrace{P(0,T)K\mathbb{Q}^T\{F_V(T,T) < K\}}_{T_2} \end{aligned} \tag{6.27}$$

gegeben. Für den zweiten Term auf der rechten Seite der Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} T_2 &= P(0,T)K\mathbb{Q}^T\left\{F_V(0,T)\exp\left\{-\frac{1}{2}C(T) + W(C(T))\right\} < K\right\} \\ &= P(0,T)K\mathbb{Q}^T\left\{-\frac{1}{2}C(T) + W(C(T)) < \ln(K/F_V(0,T))\right\} \\ &= P(0,T)K\mathbb{Q}^T\left\{W(C(T)) < -\ln(F_V(0,T)/K) + \frac{1}{2}C(T)\right\} \\ &= P(0,T)K\mathbb{Q}^T\left\{\xi < -\frac{\ln(F_V(0,T)/K) + \frac{1}{2}C(T)}{\sqrt{C(T)}}\right\} \\ &= P(0,T)K\Phi(-d_2^F), \end{aligned}$$

wobei $\xi = W(C(T))/\sqrt{C(T)}$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist. Der Ausdruck $\mathbb{Q}^T\{F_V(T,T) < K\} = \Phi(-d_2^F)$ entspricht hierbei der Wahrscheinlichkeit unter dem Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$, dass der Put bei Fälligkeit ausgeübt wird, gegeben das Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$

Der Term T_1 lässt unter Verwendung des in (6.24) definierten Wahrscheinlichkeitsmaßes $\tilde{\mathbb{Q}}^T$ als

$$\begin{aligned} T_1 &= P(0,T)E^{\mathbb{Q}^T}\left[F_V(0,T)\exp\left\{-\frac{1}{2}C(T) + W(C(T))\right\}\mathbf{1}_{\{F_V(T,T)<K\}}\right] \\ &= V(0)\tilde{\mathbb{Q}}^T\left\{F_V(T,T) < K\right\} \end{aligned}$$

schreiben. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} T_2 &= V(0)\tilde{\mathbb{Q}}^T\left\{F_V(0,T)\exp\left\{\frac{1}{2}C(T) + \tilde{W}(C(T))\right\} < K\right\} \\ &= V(0)\tilde{\mathbb{Q}}^T\left\{\tilde{W}(C(T)) < \ln(K/F_V(T,T)) - \frac{1}{2}C(T)\right\} \\ &= V(0)\tilde{\mathbb{Q}}^T\left\{\tilde{\xi} < -\frac{\ln(F_V(T,T)/K) + \frac{1}{2}C(T)}{\sqrt{C(T)}}\right\} \\ &= V(0)\Phi(-d_1^F), \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\xi} = \tilde{W}(C(T))/\sqrt{C(T)}$ wiederum eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist.

Unter Berücksichtigung der Darstellungen für die Terme T_1 und T_2 ist der Preis des europäischen Puts durch

$$P^{PV}(0,T) \;=\; P(0,T)K\Phi(-d_2^F) - V(0)\Phi(-d_1^F) \tag{6.28}$$

gegeben.

3. Zu Satz U3

Der heutige Preis des europäischen Down-and-out Calls auf den Unternehmenswert ergibt sich unter Verwendung der Martingalmaß-Technik und bei einem Wechsel auf das Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ als

$$\begin{aligned} C^{Do}(0,T) &= P(0,T)E^{\mathbb{Q}^T}\left[(F_V(T,T)-K)\mathbf{1}_{\{F_V(T,T)>K,\inf_{0\leq t\leq T}V(t)>yP(t,T)\}}\right] \\ &= \underbrace{P(0,T)E^{\mathbb{Q}^T}\left[F_V(T,T)\mathbf{1}_{\{F_V(T,T)>K,\inf_{0\leq t\leq T}V(t)>yP(t,T)\}}\right]}_{T_1} \\ &\quad - \underbrace{P(0,T)KE^{\mathbb{Q}^T}\left[\mathbf{1}_{\{F_V(T,T)>K,\inf_{0\leq t\leq T}V(t)>yP(t,T)\}}\right]}_{T_2}. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Um die Bewertungsgleichung lösen zu können, werden einige Verteilungsfunktionen benötigt. Gegeben sei ein Prozess $\{X(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$, mit

$$X(t) = at + \sigma W(t),$$

wobei $\{W(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$ ein Wiener-Prozess ist und a und σ die konstante Driftfunktion bzw. den konstanten Volatilitätskoeffizienten darstellen. Weiterhin seien Maximum und Minimum des Prozesses $\{X(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$ im Intervall $[0,T]$ als

$$M_X(T) = \sup_{0\leq t\leq T} X(t)$$
$$m_X(T) = \inf_{0\leq t\leq T} X(t)$$

definiert. Harrison (1985) zeigt, dass die gemeinsame Verteilungsfunktion von $X(T)$ und $M_X(T)$ für $z \geq 0$ und $z \geq x$ durch

$$\mathbb{Q}(X(T)\leq x, M_X(T)\leq z) = \Phi\left(\frac{x-aT}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{2az\sigma^{-2}}\Phi\left(\frac{x-2z-aT}{\sigma\sqrt{T}}\right) \tag{6.30}$$

gegeben ist.[23] Da durch $-W(t)$ ebenso wie durch $W(t)$ ein Wiener-Prozess gegeben ist, gleicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von

$$-X(t) = -at + \sigma(-W(t))$$

[23] Vgl. Harrison (1985): S. 12f.

bis auf das Vorzeichen von a der von $X(t)$, für alle $t \in [0,T]$. Für die gemeinsame Verteilungsfunktion von $-X(T)$ und $M_{-X}(T) = \sup_{0\leq t\leq T} -X(t)$ gilt daher

$$\mathbb{Q}(-X(T) \leq x, M_{-X}(T) \leq z) = \Phi\left(\frac{x+aT}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{-2az\sigma^{-2}}\Phi\left(\frac{x-2z+aT}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Für den zweiten Term auf der rechten Seite der Preisgleichung (6.29) ergibt sich

$$\begin{aligned} T_2 &= P(0,T)K\mathbb{Q}^T\{F_V(T,T) > K, \inf_{0\leq t\leq T} V(t) > yP(t,T)\} \\ &= P(0,T)K\mathbb{Q}^T\{F_V(T,T) > K, \inf_{0\leq t\leq T} V(t)P^{-1}(t,T) > y\} \\ &= P(0,T)K\mathbb{Q}^T\{F_V(T,T) > K, \inf_{0\leq t\leq T} F_V(t,T) > y\}. \end{aligned}$$

Der Terminkurs des Unternehmenswerts unter $\mathbb{Q}^T$ ist nach dem Zeitwechsel wie in (6.23) durch

$$F_V(t,T) = F_V(0,T)\exp\left\{-\frac{1}{2}C(t) + W(C(t))\right\},$$

für alle $t \in [0,T]$, gegeben. Mit dem durch

$$Y_V(t,T) = \ln F_V(t,T) - \ln F_V(0,T) = -\frac{1}{2}C(t) + W(C(t))$$

definierten Prozess kann die in T_2 unter dem Forwardmaß $\mathbb{Q}^T$ gegebene Wahrscheinlichkeit, dass der Call bei Fälligkeit ausgeübt wird, geschrieben werden als

$$\begin{aligned} &\mathbb{Q}^T\left\{Y_V(T) > \ln(K/F_V(0,T)), \inf_{0\leq t\leq T} Y_V(t) > \ln(y/F_V(0,T))|\mathcal{F}_0\right\} \\ = \ &\mathbb{Q}^T\left\{-Y_V(T) < \ln(F_V(0,T)/K), \sup_{0\leq t\leq T} -Y_V(t) < \ln(F_V(0,T)/y)\right\}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Verteilungsfunktion (6.30) mit $x = \ln(F_V(0,T)/K)$ und $z = \ln(F_V(0,T)/y)$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} &\Phi\left(\frac{\ln(F_V(0,T)/K) - \frac{1}{2}C(T)}{\sqrt{C(T)}}\right) \\ &-e^z\Phi\left(\frac{\ln(F_V(0,T)/K) - 2\ln(F_V(0,T)/y) - \frac{1}{2}C(T)}{\sqrt{C(T)}}\right) \\ = \ &\Phi\left(\frac{\ln(F_V(0,T)/K) - \frac{1}{2}C(T)}{\sqrt{C(T)}}\right) - e^z\Phi\left(\frac{\ln(y^2F_V(0,T)/(F_V^2(0,T)K)) - \frac{1}{2}C(T)}{\sqrt{C(T)}}\right) \\ = \ &\Phi(d_2^F) - e^z\Phi(c_2^F). \end{aligned}$$

Der Term T_2 stellt sich nun als

$$\begin{aligned} T_2 &= P(0,T)K\left[\Phi(d_2^F) - e^z\Phi(c_2^F)\right] \\ &= P(0,T)K\left[\Phi(d_2^F) - F_V(0,T)/y\Phi(c_2^F)\right] \end{aligned}$$

dar. Um die Berechnung des Terms T_1 aus der Preisgleichung des europäischen Down-and-out Calls zu vereinfachen, kann wiederum auf das in (6.24) definierte, zu $\mathbb{Q}^T$ äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{\mathbb{Q}}^T$ zurückgegriffen werden. Der Term T_1 lässt sich als

$$\begin{aligned} T_1 &= P(0,T)E^{\mathbb{Q}^T}\left[F_V(T,T)\mathbf{1}_{\{F_V(T,T)>K,\inf_{0\leq t\leq T}V(t)>yP(t,T)\}}\right] \\ &= V(0)E^{\mathbb{Q}^T}\left[\Lambda^T(T^C)\mathbf{1}_{\{F_V(T,T)>K,\inf_{0\leq t\leq T}V(t)P(t,T)^{-1}>y\}}\right] \\ &= V(0)E^{\mathbb{Q}^T}\left[\Lambda^T(T^C)\mathbf{1}_{\{F_V(T,T)>K,\inf_{0\leq t\leq T}F_V(t,T)>y\}}\right] \\ &= V(0)E^{\tilde{\mathbb{Q}}^T}\left[\mathbf{1}_{\{F_V(T,T)>K,\inf_{0\leq t\leq T}F_V(t,T)>y\}}\right] \\ &= V(0)\tilde{\mathbb{Q}}^T\left\{F_V(T,T)>K, \inf_{0\leq t\leq T}F_V(t,T)>y\right\} \end{aligned}$$

darstellen, wobei der Terminkurs des Unternehmenswerts unter $\tilde{\mathbb{Q}}$ wie in (6.25) durch

$$F_V(t,T) = F_V(0,T)\exp\left\{\frac{1}{2}C(t) + \tilde{W}(C(t))\right\},$$

für alle $t \in [0,T]$, gegeben ist. Mit dem durch

$$\tilde{Y}_V(t,T) = \ln F_V(t,T) - \ln F_V(0,T) = \frac{1}{2}C(t) + \tilde{W}(C(t))$$

definierten Prozess kann die in der Bestimmungsgleichung von T_1 enthaltene, nach $\tilde{\mathbb{Q}}^T$ transformierte Wahrscheinlichkeit, dass der Call bei Fälligkeit ausgeübt wird, geschrieben werden als

$$\begin{aligned} &\mathbb{Q}^T\left\{\tilde{Y}_V(T) > \ln(K/F_V(0,T)), \inf_{0\leq t\leq T}\tilde{Y}_V(t) > \ln(y/F_V(0,T))|\mathcal{F}_0\right\} \\ = \;&\mathbb{Q}^T\left\{-\tilde{Y}_V(T) < \ln(F_V(0,T)/K), \sup_{0\leq t\leq T} -\tilde{Y}_V(t) < \ln(F_V(0,T)/y)\right\}. \end{aligned}$$

Zieht man die Verteilungsfunktion (6.30) mit $x = \ln(F_V(0,T)/K)$, $z = \ln(F_V(0,T)/y)$

und der Hilfsvariablen $\beta = -z = \ln(y/F_V(0,T))$ heran, ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{\ln(F_V(0,T)/K)+\frac{1}{2}C(T)}{\sqrt{C(T)}}\right) \\ & -e^{\beta}\Phi\left(\frac{\ln(F_V(0,T)/K)-2\ln(F_V(0,T)/y)+\frac{1}{2}C(T)}{\sqrt{C(T)}}\right) \\ = & \ \Phi\left(\frac{\ln(F_V(0,T)/K)+\frac{1}{2}C(T)}{\sqrt{C(T)}}\right)-e^{\beta}\Phi\left(\frac{\ln(y^2F_V(0,T)/(F_V^2(0,T)K))+\frac{1}{2}C(T)}{\sqrt{C(T)}}\right) \\ = & \ \Phi(d_1^F)-e^{\beta}\Phi(c_1^F). \end{aligned}$$

Der Term T_1 stellt sich nun als

$$\begin{aligned} T_1 &= V(0)\left[\Phi(d_1^F)-e^{\beta}\Phi(c_1^F)\right] \\ &= V(0)\left[\Phi(d_1^F)-y/F_V(0,T)\Phi(c_1^F)\right] \end{aligned}$$

dar. Fasst man nun die Darstellungen für die Terme T_1 und T_2 zusammen, zeigt sich, dass der Preis des europäischen Down-and-out Calls durch

$$\begin{aligned} C^{Do}(0,T) &= V(0)\left[\Phi(d_1^F)-y/F_V(0,T)\Phi(c_1^F)\right] \\ &\quad -P(0,T)K\left[\Phi(d_2^F)-F_V(0,T)/y\Phi(c_2^F)\right] \\ &= \underbrace{V(0)\Phi(d_1^F)-P(0,T)K\Phi(d_2^F)}_{\text{Plain-Vanilla Call}} \\ &\quad -\underbrace{F_V(0,T)/y\left[y^2V(0)/F_V^2(0,T)\Phi(c_1^F)-P(0,T)K\Phi(c_2^F)\right]}_{\text{Knock-out-Abschlag}} \end{aligned} \tag{6.31}$$

gegeben ist. Der Preis des europäischen Down-and-out Calls entspricht somit dem Preis eines in allen Ausstattungsmerkmalen identischen europäischen Plain-Vanilla Calls abzüglich eines Knock-out-Abschlags. Mit

$$\begin{aligned} d_{1,2}^F &= \frac{\ln\left(\frac{V(0)}{KP(0,T)}\right)\pm\frac{1}{2}C(T)}{\sqrt{C(T)}}, \\ c_{1,2}^F &= \frac{\ln\left(\frac{y^2P^2(0,T)}{V(0)KP(0,T)}\right)\pm\frac{1}{2}C(T)}{\sqrt{C(T)}} \end{aligned}$$

ergibt sich alternative Darstellung

$$\begin{aligned} C^{Do}(0,T) &= \underbrace{V(0)\Phi(d_1^F)-P(0,T)K\Phi(d_2^F)}_{\text{Plain-Vanilla Call}} \\ &\quad -\underbrace{V(0)/(yP(0,T))\left[y^2P^2(0,T)/V(0)\Phi(c_1^F)-P(0,T)K\Phi(c_2^F)\right]}_{\text{Knock-out-Abschlag}}. \end{aligned} \tag{6.32}$$

4. Zu Satz U4

Longstaff/Schwartz (1995) folgend wird die Dichtefunktion der ersten Durchgangszeit des Prozesses für den logarithmierten Verschuldungsgrad durch den Wert Null implizit definiert als

$$\Phi\left(\frac{l(0)+M(0,T)}{\sqrt{S(0,T)}}\right) = \int_0^T \varphi(u)\Phi\left(\frac{M(u,T)}{\sqrt{S(u,T)}}\right)du, \tag{6.33}$$

wobei φ die angesprochene Dichtefunktion symbolisiert, $M(s,t) = E[l(t)|s, l(s) = 0]$ den (bedingten) Erwartungswert des logarithmierten Verschuldungsgrades, gegeben einen Zeitpunkt s und einen logarithmierten Verschuldungsgrad von Null in diesem Zeitpunkt, angibt und $S(s,T) = \mathrm{Var}[l(t)|s]$ der (bedingten) Varianz des logarithmierten Verschuldungsgrades, gegeben einen Zeitpunkt s, entspricht. Die Parameter der Verteilungsfunktionen lassen sich unter Verwendung von Gleichung (4.66) bestimmen. Die stochastischen Intergrale in (4.66) sind gemäß Satz A8 normalverteilt mit Erwartungswert Null und Kovarianzmatrix

$$\int_s^t G(u)G^T(u)du,$$

wobei

$$G(u) = \begin{pmatrix} \frac{\eta}{\kappa}\left(1-e^{-\kappa(t-u)}\right)+\sigma\rho & 0 \\ 0 & \sigma\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}$$

gilt. Der (bedingte) Erwartungswert $M(s,t)$ ergibt sich unmittelbar aus dem zweiten, dritten und vierten Summanden in Gleichung (4.66) als

$$\begin{aligned} M(s,t) &= -\left(\bar{r}-\frac{\eta^2}{\kappa^2}-\frac{\sigma^2}{2}-\frac{\rho\sigma\eta}{\kappa}\right)(t-s) \\ &\quad -\left(\frac{r(s)}{\kappa}-\frac{\bar{r}}{\kappa}+\frac{\eta^2}{\kappa^3}+\frac{\rho\sigma\eta}{\kappa^2}e^{-\kappa(T-t)}\right)\left(1-e^{-\kappa(t-s)}\right) \\ &\quad -\frac{\eta^2}{2\kappa^3}e^{-\kappa(T-t)}\left(1-e^{-\kappa(t-s)}\right)^2. \end{aligned} \tag{6.34}$$

Die (bedingte) Varianz $S(s,t)$ ist unabhängig von $l(s)$ und kann berechnet werden als

$$S(s,t) = \int_s^t \left(\frac{\eta}{\kappa}\left(1-e^{-\kappa(t-u)}\right)+\sigma\rho\right)^2 du + \int_s^t \left(\sigma\sqrt{1-\rho^2}\right)^2 du.$$

Dies lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned}
S(s,t) &= \left(\sigma^2\rho^2 + \sigma^2 - \sigma^2\rho^2\right)(t-s) + 2\frac{\sigma\rho\eta}{\kappa}\int_s^t \left(1 - e^{-\kappa(t-u)}\right) du \\
&\quad + \frac{\eta^2}{\kappa^2}\int_s^t \left(1 - e^{-\kappa(t-u)}\right)^2 du \\
&= \left(\sigma^2 + 2\frac{\sigma\rho\eta}{\kappa} + \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right)(t-s) - 2\frac{\sigma\rho\eta}{\kappa}\int_s^t e^{-\kappa(t-u)} du \\
&\quad - 2\frac{\eta^2}{\kappa^2}\int_s^t e^{-\kappa(t-u)} du + \frac{\eta^2}{\kappa^2}\int_s^t e^{-2\kappa(t-u)} du \\
&= \left(\sigma^2 + 2\frac{\sigma\rho\eta}{\kappa} + \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right)(t-s) - \left(2\frac{\sigma\rho\eta}{\kappa^2} + 2\frac{\eta^2}{\kappa^3}\right)\left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right) \\
&\quad + \frac{\eta^2}{2\kappa^3}\left(1 - e^{-2\kappa(t-s)}\right).
\end{aligned}$$

In Anlehnung an Longstaff/Schwartz wird Gleichung (6.33) diskretisiert, indem das Zeitintervall $[0,T]$ in n äquidistante Teilintervalle unterteilt wird. Man erhält das folgende Gleichungssystem:

$$\Phi(a_i) = \sum_{j=1}^{i} \varphi_i \Phi(b_{ji}), \; i = 1, \ldots, n,$$

mit

$$\varphi_i = \varphi(iT/n)T/n, \; a_i = \frac{l(0) + M(0, iT/n)}{\sqrt{S(0, iT/n)}}, \; b_{ji} = \frac{M(jT/n, iT/n)}{\sqrt{S(jT/n, iT/n)}}.$$

Satz U4 gibt die rekursiv bestimmte Lösung des Gleichungssystems an. Die Ausfallwahrscheinlichkeit kann als

$$\mathbb{Q}^T\{\tau \leq T\} = \int_0^T \varphi(u)du = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i$$

berechnet werden.[24] □

[24] Vgl. Longstaff/Schwartz (1995): S. 816f.

5. Zu Satz I1

Der Ausdruck $I(0,T) = \int_0^T l(s)ds$ ergibt sich nach Integration von Gleichung (5.31) und einem Wechsel der Integrationsgrenzen der stochastischen Integrale als

$$\begin{aligned}
I(0,T) &= l(0)\int_0^T e^{-\gamma s}ds \\
&+\left(\frac{\sigma^2}{2\gamma}-\nu+\psi\bar r+\frac{\rho\sigma\eta}{\gamma\kappa}-\frac{1+\gamma\psi}{\gamma}\left(\bar r-\frac{\eta^2}{\kappa^2}\right)\right)\int_0^T\left(1-e^{-\gamma s}\right)ds \\
&-\left(\frac{\rho\sigma\eta}{\kappa(\gamma+\kappa)}+\frac{(1+\gamma\psi)\eta^2}{2\kappa^2(\gamma+\kappa)}\right)\int_0^T e^{-\kappa(T-s)}\left(1-e^{-(\gamma+\kappa)s}\right)ds \\
&-\frac{1+\gamma\psi}{\gamma-\kappa}\left(r(0)-\bar r+\frac{\eta^2}{\kappa^2}\right)\int_0^T e^{-\kappa s}\left(1-e^{-(\gamma-\kappa)s}\right)ds \\
&+\frac{(1+\gamma\psi)\eta^2}{2\kappa^2(\gamma-\kappa)}\int_0^T e^{-\kappa(T-s)}e^{-2\kappa s}\left(1-e^{-(\gamma-\kappa)s}\right)ds \\
&-\int_0^T\int_u^T\left(\frac{(1+\gamma\psi)\eta}{\gamma-\kappa}\left(e^{-\kappa(s-u)}-e^{-\gamma(s-u)}\right)+\sigma\rho e^{-\gamma(s-u)}\right)ds\,dW_r^T(u) \\
&-\int_0^T\int_u^T\sigma\sqrt{1-\rho^2}e^{-\gamma(s-u)}ds\,dW_V^T(u). \qquad (6.35)
\end{aligned}$$

Die beiden stochastischen Integrale sind gemäß Satz A8 normalverteilt mit Erwartungswert Null und Kovarianzmatrix

$$\int_0^T G(u)G^T(u)du,$$

wobei

$$G(u)=\begin{pmatrix}\int_u^T\left(\frac{(1+\gamma\psi)\eta}{\gamma-\kappa}\left(e^{-\kappa(s-u)}-e^{-\gamma(s-u)}\right)+\sigma\rho e^{-\gamma(s-u)}\right)ds & 0\\ 0 & \int_u^T\sigma\sqrt{1-\rho^2}e^{-\gamma(s-u)}ds\end{pmatrix}$$

gilt. Der Erwartungswert und die Varianz von $I(0,T)$ sind somit gegeben durch

$$\begin{aligned}
E[I(0,T)] &= l(0)\int_0^T e^{-\gamma s}ds \\
&+\left(\frac{\sigma^2}{2\gamma}-\nu+\psi\bar r+\frac{\rho\sigma\eta}{\gamma\kappa}-\frac{1+\gamma\psi}{\gamma}\left(\bar r-\frac{\eta^2}{\kappa^2}\right)\right)\int_0^T\left(1-e^{-\gamma s}\right)ds \\
&-\left(\frac{\rho\sigma\eta}{\kappa(\gamma+\kappa)}+\frac{(1+\gamma\psi)\eta^2}{2\kappa^2(\gamma+\kappa)}\right)\int_0^T e^{-\kappa(T-s)}\left(1-e^{-(\gamma+\kappa)s}\right)ds \\
&-\frac{1+\gamma\psi}{\gamma-\kappa}\left(r(0)-\bar r+\frac{\eta^2}{\kappa^2}\right)\int_0^T e^{-\kappa s}\left(1-e^{-(\gamma-\kappa)s}\right)ds \\
&+\frac{(1+\gamma\psi)\eta^2}{2\kappa^2(\gamma-\kappa)}\int_0^T e^{-\kappa(T-s)}e^{-2\kappa s}\left(1-e^{-(\gamma-\kappa)s}\right)ds \qquad (6.36)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[I(0,T)] &= \int_0^T \left(\int_u^T \left(\frac{(1+\gamma\psi)\eta}{\gamma-\kappa} \left(e^{-\kappa(s-u)} - e^{-\gamma(s-u)} \right) + \sigma\rho e^{-\gamma(s-u)} \right) ds \right)^2 du \\ &\quad + \int_0^T \left(\int_u^T \sigma\sqrt{1-\rho^2} e^{-\gamma(s-u)} ds \right)^2 du. \end{aligned} \tag{6.37}$$

Zur Berechnung des Erwartungswerts aus (6.36) werden die folgenden Umformungen vorgenommen:

$$\int_0^T e^{-\gamma s} ds = \frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma T}\right) = f_1,$$

$$\int_0^T \left(1 - e^{-\gamma s}\right) ds = T - \frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma T}\right) = f_2,$$

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{-\kappa(T-s)}(1 - e^{-(\gamma+\kappa)s}) ds &= e^{-\kappa T} \int_0^T \left(e^{\kappa s} - e^{-\gamma s} \right) ds \\ &= e^{-\kappa T} \left(\frac{1}{\kappa}\left(e^{\kappa T} - 1\right) - \frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma T}\right) \right) \\ &= \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa T}\right) - e^{-\kappa T}\frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma T}\right) = f_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{-\kappa s}(1 - e^{-(\gamma-\kappa)s}) ds &= \int_0^T \left(e^{-\kappa s} - e^{-\gamma s} \right) ds \\ &= \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa T}\right) - \frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma T}\right) = f_4 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{-\kappa(T-s)} e^{-2\kappa s}(1 - e^{-(\gamma-\kappa)s}) ds &= e^{-\kappa T} \int_0^T \left(e^{-\kappa s} - e^{-\gamma s} \right) ds \\ &= e^{-\kappa T} \left(\frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa T}\right) - \frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma T}\right) \right) \\ &= \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa T}\right) - e^{-\kappa T}\frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma T}\right) = f_5. \end{aligned}$$

Der Erwartungswert aus (6.36) berechnet sich dann als

$$\begin{aligned} E[I(0,T)] &= l(0) f_1 + \left(\frac{\sigma^2}{2\gamma} - \nu + \psi\bar{r} + \frac{\rho\sigma\eta}{\gamma\kappa} - \frac{1+\gamma\psi}{\gamma} \left(\bar{r} - \frac{\eta^2}{\kappa^2} \right) \right) f_2 \\ &\quad - \left(\frac{\rho\sigma\eta}{\kappa(\gamma+\kappa)} + \frac{(1+\gamma\psi)\eta^2}{2\kappa^2(\gamma+\kappa)} \right) f_3 - \frac{1+\gamma\psi}{\gamma-\kappa} \left(r(0) - \bar{r} + \frac{\eta^2}{\kappa^2} \right) f_4 \\ &\quad + \frac{(1+\gamma\psi)\eta^2}{2\kappa^2(\gamma-\kappa)} f_5. \end{aligned} \tag{6.38}$$

Für die Varianz gilt nach Auflösen der unter dem Quadrat stehenden Integrale in (6.37)

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[I(0,T)] &= \int_0^T \Bigg(\frac{(1+\gamma\psi)\eta}{(\gamma-\kappa)\kappa}\left(1-e^{-\kappa(T-u)}\right) \\ &\quad - \frac{(1+\gamma\psi)\eta}{(\gamma-\kappa)\gamma}\left(1-e^{-\gamma(T-u)}\right) + \sigma\rho\left(1-e^{-\gamma(T-u)}\right)\Bigg)^2 du \\ &\quad + \int_0^T \left(\sigma\sqrt{1-\rho^2}\left(1-e^{-\gamma(T-u)}\right)\right)^2 du.\end{aligned}$$

Dies lässt sich weiter vereinfachen zu

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[I(0,T)] &= \frac{(1+\gamma\psi)^2\eta^2}{(\gamma-\kappa)^2\kappa^2}\int_0^T \left(1-e^{-\kappa(T-u)}\right)^2 du \\ &\quad -2\frac{(1+\gamma\psi)^2\eta^2}{(\gamma-\kappa)^2\kappa\gamma}\int_0^T \left(1-e^{-\kappa(T-u)}\right)\left(1-e^{-\gamma(T-u)}\right) du \\ &\quad -2\frac{(1+\gamma\psi)\eta\sigma\rho}{(\gamma-\kappa)\kappa}\int_0^T \left(1-e^{-\kappa(T-u)}\right)\left(1-e^{-\gamma(T-u)}\right) du \\ &\quad +\frac{(1+\gamma\psi)^2\eta^2}{(\gamma-\kappa)^2\gamma^2}\int_0^T \left(1-e^{-\gamma(T-u)}\right)^2 du \\ &\quad +2\frac{(1+\gamma\psi)\eta\sigma\rho}{(\gamma-\kappa)\gamma}\int_0^T \left(1-e^{-\gamma(T-u)}\right)^2 du \\ &\quad +\sigma^2\rho^2\int_0^T \left(1-e^{-\gamma(T-u)}\right)^2 du \\ &\quad +\sigma^2(1-\rho^2)\int_0^T \left(1-e^{-\gamma(T-u)}\right)^2 du. \qquad (6.39)\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}\int_0^T \left(1-e^{-\kappa(T-u)}\right)^2 du &= \int_0^T \left(1-2e^{-\kappa(T-u)}+e^{-2\kappa(T-u)}\right) du \\ &= T-\frac{2}{\kappa}\left(1-e^{-\kappa(T-u)}\right)+\frac{1}{2\kappa}\left(1-e^{-2\kappa(T-u)}\right) \\ &= \frac{1}{2\kappa}\left(2\kappa T+4e^{-\kappa T}-e^{-2\kappa T}-3\right) = f_6\end{aligned}$$

bzw.

$$\int_0^T \left(1-e^{-\gamma(T-u)}\right)^2 du = \frac{1}{2\gamma}\left(2\gamma T+4e^{-\gamma T}-e^{-2\gamma T}-3\right) = f_7$$

und

$$\begin{aligned}\int_0^T \left(1-e^{-\kappa(T-u)}\right)\left(1-e^{-\gamma(T-u)}\right) du &= \int_0^T \left(1-e^{-\kappa(T-u)}-e^{-\gamma(T-u)}+e^{-(\kappa+\gamma)(T-u)}\right) du \\ &= T-\frac{1}{\kappa}\left(1-e^{-\kappa T}\right)-\frac{1}{\gamma}\left(1-e^{-\gamma T}\right) \\ &\quad +\frac{1}{\gamma+\kappa}\left(1-e^{-(\gamma+\kappa)T}\right) = f_8\end{aligned}$$

ergibt sich für (6.39)

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}[I(0,T)] &= \frac{(1+\gamma\psi)^2\eta^2}{(\gamma-\kappa)^2\kappa^2} f_6 - 2\left(\frac{(1+\gamma\psi)^2\eta^2}{(\gamma-\kappa)^2\kappa\gamma} + \frac{(1+\gamma\psi)\eta\sigma\rho}{(\gamma-\kappa)\kappa}\right) f_8 \\ &\quad + \left(\sigma^2 + \frac{(1+\gamma\psi)^2\eta^2}{(\gamma-\kappa)^2\gamma^2} + 2\frac{(1+\gamma\psi)\eta\sigma\rho}{(\gamma-\kappa)\gamma}\right) f_7. \qquad (6.40)\end{aligned}$$

Symbolverzeichnis

$A(t)$	Geldmarktkonto
$A(t,T)$	Parameter des Zerobondpreises im Hull/White- und Vasicek-Modell
$a(t,T); a_i(t,T)$	Volatilitätsparameter der Zerobondpreisdynamik im Hull/White- bzw. Heath/Jarrow/Morton-Modell; $i = 1, \ldots, n$
$a(t)$	Mean-Reversion-Niveau des kurzfristigen Kassazinssatzes unter dem äquivalenten Martingalmaß im Hull/White-Modell
$B(t,T)$	Parameter des Zerobondpreises im Hull/White- und Vasicek-Modell
$b(t,T)$	Erwartete momentane Risikoprämie eines Zerobonds mit Restlaufzeit $T-t$
Bp	Basispunkt(e)
C	Kuponzahlung
$C(t)$	Zeittransformationsvariable für Zeitwechsel
$C^{Do}(0,T)$	Heutiger Preis eines in T fälligen europäischen Down-and-out Calls
$C^{PV}(0,T)$	Heutiger Preis eines in T fälligen europäischen (Plain Vanilla) Calls
$c^F_{1,2}; \bar{c}^F_{1,2}$	Modellabhängige Parameter der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung
$D_1; D_2$	Mengen möglicher Szenarien
$D(t,T)$	Marktwert bzw. Preis eines kreditrisikobehafteten Zerobonds mit Restlaufzeit $T-t$
$D_C(t,T)$	Preis einer kreditrisikobehafteten Anleihe mit einem Kupon in Höhe von C € und Restlaufzeit $T-t$

$D_1(t,T)$	Preis eines kreditrisikobehafteten Zerobonds mit Restlaufzeit $T-t$ und Abschreibungsrate eins
$d_{1,2}; d^F_{1,2}; \bar{d}^F_{1,2}$	Modellabhängige Parameter der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung
E_1	Exponentialverteilte Zufallsvariable (mit Parameter eins)
$E(t)$	Marktwert des Eigenkapitals
$E[\cdot]$	Unbedingter Erwartungswert einer Zufallsvariablen
$E[\cdot\|\mathcal{A}]$	Bedingter Erwartungswert einer Zufallsvariablen bei gegebenem Informationsstand $\mathcal{A}$
$F_P(t,U,T)$	Terminkurs eines Zerobonds mit Restlaufzeit $U-t$ zum Liefertermin T
$F_V(t,T)$	Terminkurs des Unternehmenswerts zum Liefertermin T
$F_V(t,x,T)$	Terminkurs eines riskanten Vermögensgegenstandes x zum Liefertermin T
$F_Y(t,T)$	Terminkurs eines Basiswertes Y zum Liefertermin T
$F_X(t,T)$	Terminkurs eines zustandsbedingten Anspruchs X zum Liefertermin T
$F_\tau(t)$	Verteilungsfunktion des Zeitpunkts eines Kreditausfalls τ
$f(t,T)$	Forwardrate mit Fälligkeitszeitpunkt T
$f(t,T,U)$	Terminzinssatz mit Fälligkeitszeitpunkt T und Anlagezeitraum $U-T$
$f_\tau(t)$	Zu $F_\tau(t)$ gehörige Dichtefunktion
$G_Y(T); -G_Y(T)$	Einzahlungsüberschuss des Terminkäufers bzw. Terminverkäufers eines Basiswertes Y bei Fälligkeit des Termingeschäfts
$H(t)$	$d\times d$-Volatilitätsmatrix der Benchmark-Wertpapiere
$H_{ji}(t)$	Element von $H(t)$; $j,i=1,\ldots,d$
h	Parameter einer Exponentialverteilung
$h_0(t)$	Über das Geldmarktkonto risikolos angelegter oder aufgenommener Betrag
$h_j(t)$	Von Wertpapier j gehaltene Stücke; $j=1,\ldots,d$
K	Vertraglich vereinbarter Rückzahlungsbetrag eines kreditrisikobehafteten Zerobonds im Merton-Modell bzw. (konstantes) Verschuldungsvolumen im Longstaff/Schwartz-Modell

k	Logarithmiertes (konstantes) Verschuldungsvolumen im Longstaff/Schwartz-Modell
$k(t)$	Logarithmiertes (zufälliges) Verschuldungsvolumen im intensitätsbasierten Modell
$l(t)$	Logarithmierter Verschuldungsgrad
$\bar{l}(t)$	Mean-Reversion-Niveau des logarithmierten Verschuldungsgrades
$M(t)$	Martingal
$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2
$P(t,T)$	Preis eines kreditrisikolosen Zerobonds mit Restlaufzeit $T-t$
$P_C(t,T)$	Preis einer kreditrisikolosen Anleihe mit einem Kupon in Höhe von C € und Restlaufzeit $T-t$
$P^{PV}(0,T)$	Heutiger Preis eines in T fälligen europäischen (Plain Vanilla) Puts
$R(t)$	Momentanrendite
$\bar{r}$	Mean-Reversion-Niveau des kurzfristigen Kassazinssatzes unter dem äquivalenten Martingalmaß im Vasicek-Modell
$r, r(t)$	Kurzfristiger Kassazinssatz
$r(t,T)$	Kassazinssatz für den Anlagezeitraum $T-t$
$S(t)$	Marktwert einer Handelsstrategie
T	Fälligkeitszeitpunkt, Liquidationszeitpunkt, Liefertermin
T^C	$T^C = C(T)$
$V(t,x)$	Preis eines riskanten Vermögensgegenstandes x
$V(t)$	Unternehmenswert
$v(t)$	d-dimensionaler Spaltenvektor der erwarteten Momentanrenditen der Benchmark-Wertpapiere
$v_j(t)$	Erwartete Momentanrendite von Wertpapier j; $j = 1, \ldots, d$
$\mathrm{Var}[\cdot]$	Unbedingte Varianz einer Zufallsvariablen
$\mathrm{Var}[\cdot \mid \mathcal{A}]$	Bedingte Varianz einer Zufallsvariablen bei gegebenem Informationsstand $\mathcal{A}$
w	Abschreibungsrate
X	Zustandsbedingter Anspruch
$X_j(t)$	Preis von Wertpapier j; $j = 1, \ldots, d$

Y	Basiswert eines Termingeschäfts
$Y(T)$	Kassakurs des Basiswertes eines Termingeschäfts im Liefertermin T
y	Verminderter Rückzahlungsbetrag eines kreditrisikobehafteten Zerobonds
$y(t)$	Logarithmierter Unternehmenswert
Y_D	Rendite einer kreditrisikobehafteten Anleihe, ermittelt auf Basis der versprochenen Zins- und Tilgungszahlungen
Y_0	Rendite einer kreditrisikolosen Anleihe
$Z_D(t)$	Diskontierter Marktwert bzw. Preis eines kreditrisikobehafteten Zerobonds
$Z_E(t)$	Diskontierter Marktwert des Eigenkapitals
$Z_j(t)$	Diskontierter Preis von Wertpapier j; $j = 1, \ldots, d$
$Z_P(t,T)$	Diskontierter Preis eines kreditrisikolosen Zerobonds mit Rückzahlungsbetrag 1 € und Restlaufzeit $T - t$
$Z_S(t)$	Diskontierter Marktwert einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie
$Z_V(t,x)$	Diskontierter Preis eines riskanten Vermögensgegenstandes x
α	Parameter der Intensitätsfunktion
$\alpha(t,T)$	Driftfunktion des Forwardrateprozesses im Heath/Jarrow/Morton-Modell
β	Mean Reversion-Niveau des kurzfristigen Kassazinssatzes unter dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß im Vasicek-Modell
γ	Anpassungsgeschwindigkeit an Mean Reversion-Niveau des logarithmierten Verschuldungsgrades im intensitätsbasierten Modell
$\Delta(0,T)$	Aktueller Credit-Spread einer Anleihe mit Restlaufzeit T
$\zeta_i(t)$	Koeffizient der Integraldarstellung eines Martingals; $i = 1, \ldots, d$
η	Volatilität des kurzfristigen Kassazinssatzes im Hull/White- und im Vasicek-Modell
$\eta_i(t,T)$	Volatilitätskoeffizient des Forwardrateprozesses im Heath/Jarrow/Morton-Modell; $i = 1, \ldots, n$

$\Theta(0,T)$	Aktuelles Theta des Credit-Spreads einer Anleihe mit Restlaufzeit T
κ	Anpassungsgeschwindigkeit an das Mean-Reversion-Niveau des kurzfristigen Kassazinssatzes im Hull/White- und im Vasicek-Modell
$\Lambda(\cdot); \tilde{\Lambda}(\cdot); \Lambda^T(\cdot); \tilde{\Lambda}^T(\cdot)$	Radon-Nikodym Ableitung
$\lambda_i, \lambda_i(t)$	Marktpreis für Risiko; $i = r, V$ bzw. $i = 1, \ldots, d$
$\mu, \mu(t)$	Erwartete Momentanrendite des Unternehmenswerts
$\mu(t,x)$	Erwartete Momentanrendite eines riskanten Vermögensgegenstandes x
ν	Parameter der Dynamik des logarithmierten Verschuldungsgrades im intensitätsbasierten Modell
$\xi; \tilde{\xi}$	Zufallsvariablen
$\phi(t)$	Handelsstrategie; $\phi(t) = (h_0(t), \ldots, h_d(t))$
$\varphi(t)$	Dichtefunktion der ersten Durchgangszeit im Longstaff/Schwartz-Modell
π	Parameter der Intensitätsfunktion
$\pi(t,X)$	Preis eines zustandsbedingten Anspruchs X
ρ	Momentaner Korrelationskoeffizient
σ	Unternehmenswertvolatilität
$\sigma_i(t,x)$	Volatilitätskoeffizient des Preisprozesses eines riskanten Vermögensgegenstandes x; $i = 1, \ldots, d$
τ	Erste Durchgangszeit des Unternehmenswerts durch eine Ausfallschranke, erste Sprungzeit eines Zählprozesses, zufälliger Zeitpunkt eines Kreditausfalls
$\Phi(\cdot)$	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung
ψ	Parameter der Dynamik des logarithmierten Verschuldungsgrades im intensitätsbasierten Modell

$\{f(0,T) : T \in [0,\mathcal{T}]\}$	Aktuelle Forwardratekurve
$\{\mathcal{F}(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$	Filtration
$\{\mathcal{F}^C(s) : s \in [0,\mathcal{T}^C]\}$	Zeittransformierte Filtration
$\{\mathcal{G}(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$	Erweiterte Filtration
$\{h(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$	Intensitätsprozess auf $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}^*)$
$\{\Lambda(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$	Dichteprozess zur Radon-Nikodym Ableitung $\Lambda(\mathcal{T})$
$\{\tilde{\Lambda}(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$	Dichteprozess zur Radon-Nikodym Ableitung $\tilde{\Lambda}(\mathcal{T})$

$\{\Lambda^T(t) : t \in [0,T]\}$	Dichteprozess zur Radon-Nikodym Ableitung $\Lambda^T(T)$
$\{\tilde{\Lambda}^T(s) : s \in [0,T^C]\}$	Dichteprozess zur Radon-Nikodym Ableitung $\tilde{\Lambda}^T(T^C)$
$\{N(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$	Zählprozess auf $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P}^*)$ bzw. $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{Q}^*)$
$\{P(0,T) : T \in [0,\mathcal{T}]\}$	Aktuelle Zerobondpreise
$\{q(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$	Intensitätsprozess auf $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{Q}^*)$
$\{V(0,x) : x \in \mathcal{I}\}$	Aktuelle Preise der riskanten Vermögensgegenstände
$\{W_i(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$	Wiener-Prozess auf $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{Q})$; $i = 1,\dots,d$ bzw. $i = r, V$
$\{\hat{W}_i(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$	Wiener-Prozess auf $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$; $i = 1,\dots,d$ bzw. $i = r, V$
$\{\tilde{W}(t) : t \in [0,\mathcal{T}]\}$	Wiener-Prozess auf $(\Omega,\mathcal{F},\tilde{\mathbb{Q}})$
$\{\tilde{W}(s) : s \in [0,T^C]\}$	Wiener-Prozess auf $(\Omega,\mathcal{F},\tilde{\mathbb{Q}}^T)$
$\{W_i^T(t) : t \in [0,T]\}$	Wiener-Prozess auf $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{Q}^T)$; $i = 1,\dots,d$ bzw. $i = r, V$
$\mathcal{F},\mathcal{G}$	σ-Algebra von Teilmengen von Ω
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$	Borel'sche σ-Algebra in $\mathbb{R}^m$
$\mathcal{F}(t);\mathcal{G}(t)$	σ-Unteralgebra von $\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{G}$
$\mathcal{F}_1(t) \otimes \mathcal{F}_2(t)$	Produkt von $\mathcal{F}_1(t)$ und $\mathcal{F}_2(t)$
$\mathcal{F}_1(t) \subset \mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_1(t)$ ist Teilmenge von $\mathcal{F}_2(t)$
$\mathcal{F}_1(t) \vee \mathcal{F}_2(t)$	Vereinigung von $\mathcal{F}_1(t)$ und $\mathcal{F}_2(t)$
$\mathcal{H}(t)$	Von τ erzeugte σ-Algebra; $\mathcal{H}(t) = \sigma\left(\mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}\right)$
$\mathcal{I}$	Indexmenge der riskanten Vermögensgegenstände
$\mathbb{P},\mathbb{P}^*$	Subjektives Wahrscheinlichkeitsmaß
$\mathbb{Q},\mathbb{Q}^*$	Äquivalentes Martingalmaß
$\mathbb{Q}^T$	Forwardmaß zum Liefertermin T
$\tilde{\mathbb{Q}};\tilde{\mathbb{Q}}^T$	Zu $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{Q}^T$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß
$\sigma(Y(s) : s \in [0,t])$	Von Zufallsvariablen erzeugte σ-Algebra
$\mathcal{T}$	Ende des Planungshorizontes
$\mathcal{T}^C$	$\mathcal{T}^C = C(\mathcal{T})$
Ω	Ereignismenge
ω	Elementarereignis
$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$	Wahrscheinlichkeitsraum
$\mathbf{1}_{\{\mathcal{A}\}}$	Indikatorfunktion einer Menge $\mathcal{A}$

Literaturverzeichnis

Amin, K.; Jarrow, R. (1992), Pricing Options on Risky Assets in a Stochastic Interest Rate Economy, *Mathematical Finance* 4, 217–237.

Arnold, L. (1973), *Stochastische Differentialgleichungen – Theorie und Anwendung*, München.

Basel Committee on Banking Supervision (1999), *A New Capital Adequacy Framework*, Basel.

Basel Committee on Banking Supervision (2001), *The New Basel Capital Akkord*, Basel.

Baxter, M. W. (1997), General Interest-Rate Models and the University of HJM, in: Dempster, M.; Pliska, S. (Hrsg.), *Mathematics of Derivative Securities*, Cambridge, 315–335.

Baxter, M. W.; Rennie, A. J. O. (1996), *Financial Calculus – An Introduction to Derivative Pricing*, Cambridge.

Bick, A. (1987), On the Consistency of the Black/Scholes Model with a General Equilibrium Framework, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22, 259–275.

Bick, A. (1990), On Viable Diffusion Price Processes of the Market Portfolio, *The Journal of Finance* 45, 673–689.

Bielecki, T. R.; Rutkowski, M. (2002), *Credit Risk: Modeling, Valuation, and Hedging*, Berlin u. a.

Björk, T. (1997), Interest Rate Theory, in: Runggaldier, W. J. (Hrsg.), *Financial Mathematics*, Berlin u. a., 53–122.

Björk, T. (1998), *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Cambridge.

Black, F.; Cox, J. C. (1976), Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions, *The Journal of Finance* 31, 351–368.

Black, F.; Scholes, M. (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy* 27, 399–418.

Brennan, M. J. (1979), The Pricing of Contingent Claims in Discrete Time Models, *The Journal of Finance* 34, 53–68.

Brennan, M. J.; Schwartz, E. S. (1979), A Continuos Time Approach to the Pricing of Bonds, *Journal of Banking and Finance* 3, 133–155.

Brennan, M. J.; Xia, Y. (2000), Stochastic Interest Rates and the Bond-Stock Mix, *European Finance Review* 4, 197–210.

Briys, E.; de Varenne, F. (1997), Valuing Risky Fixed Rate Debt: An Extension, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 32, 239–248.

Bundesaufsichtsamt für das Kreditwesen (1999), *Behandlung von Kreditderivaten im Grundsatz I gemäß §§8, 10a KWG und im Rahmen der Großkredit- und Millionenvorschriften, Rundschreiben 10/99, 16. Juni 1999*, Berlin.

Buonocore, A.; Nobile, A.; Ricciardi, L. (1987), A New Integral Equation for the Evaluation of First-passage-time Probability Densities, *Advances in Applied Probability* 19, 784–800.

Burghoff, H.-P.; Henke, S. (2000a), Alternative Produkte des Kreditrisikotransfers, in: Burghoff, H.-P.; Henke, S.; Schönbucher, P. J.; Sommer, D. (Hrsg.), *Kreditderivate: Handbuch für die Bank- und Anlagepraxis*, Stuttgart, 95–109.

Burghoff, H.-P.; Henke, S. (2000b), Kreditderivate und Bankenaufsicht – Entwicklungen und Perspektiven in Deutschland und international, in: Burghoff, H.-P.; Henke, S.; Rudolph, B.; Schönbucher, P. J.; Sommer, D. (Hrsg.), *Kreditderivate: Handbuch für die Bank- und Anlagepraxis*, Stuttgart, 467–500.

Carr, P.; Linetsky, V. (2000), The Valuation of Executive Stock Options in an Intensity-Based Framework, *European Finance Review* 4, 211–230.

Collin-Dufresne, P.; Goldstein, R. S. (2001), Do Credit Spreads Reflect Stationary Leverage Ratios?, *The Journal of Finance* 56, 1929–1957.

Collin-Dufresne, P.; Goldstein, R. S.; Martin, J. S. (2001), The Determinants of Credit Spread Changes, *The Journal of Finance* 56, 2177–2207.

Cox, J. C.; Ingersoll, J. E.; Ross, S. A. (1985), A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica* 53, 385–407.

Cox, J. C.; Ross, S. A. (1976), The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes, *Journal of Financial Economics* 3, 145–166.

Crabbe, L. (1991), Event Risk: An Analysis of Losses to Bondholders and „Super Poisson Put“ Bond Covenants, *The Journal of Finance* 46, 689–706.

Das, S. (1998), Credit Derivatives – Applications, in: Das, S. (Hrsg.), *Credit Derivatives: Trading and Management of Credit and Default Risk*, Singapore, 125–169.

Deutsche Bundesbank (2000), Die Beziehung zwischen Bankkrediten und Anleihemarkt in Deutschland, in: *Monatsbericht der Deutschen Bundesbank*, Bd. 1, 52. Aufl., Frankfurt am Main, 33–48.

Duffie, D. (2001), *Dynamic Asset Pricing Theory*, 3. Aufl., Princeton, New Jersey.

Duffie, D.; Lando, D. (2001), Term Structures of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information, *Econometrica* 69, 633–664.

Duffie, D.; Schroder, M.; Skiadas, C. (1996), Recursive Valuation of Defaultable Securities and the Timing of Resolution of Uncertainty, *The Annals of Applied Probability* 6, 1075–1090.

Duffie, D.; Singleton, K. (1999), Modeling Term Structures of Defaultable Bonds, *The Review of Financial Studies* 12, 687–720.

Elliot, R. J.; Kopp, E. P. (1998), *Mathematics of Financial Markets*, Berlin u. a.

Fama, E. F.; French, K. R. (2002), Testing Trade-Off and Pecking Order Predictions about Dividends and Debt, *The Review of Financial Studies* 15, 1–33.

Franke, G. (1998), Transformation of Banks and Banks Services, *Journal of Institutional and Theoretical Economics* 154, 109–133.

Franke, G. (2000a), Kreditgeschäft und Finanzmärkte, in: von Hagen, J.; von Stein, J. H. (Hrsg.), *Geld-, Bank- und Börsenwesen*, 40. Aufl., Stuttgart, 231–270.

Franke, G. (2000b), Risikomanagement mit Kreditderivaten, in: Burghoff, H.-P.; Henke, S.; Schönbucher, P. J.; Sommer, D. (Hrsg.), *Kreditderivate: Handbuch für die Bank- und Anlagepraxis*, Stuttgart, 269–289.

Franke, G.; Hax, H. (1999), *Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt*, 4. Aufl., Berlin u. a.

Geman, H.; El Karoui, N.; Rochet, J.-C. (1995), Changes of Numéraire, Changes of Probability Measure and Option Pricing, *Journal of Applied Porbability* 32, 443–458.

Hackenbroch, W.; Thalmair, A. (1994), *Stochastische Analysis: Eine Einführung in die Theorie der stetigen Semimartingale*, Stuttgart.

Harris, M.; Raviv, A. (1991), The Theory of Capital Structure, *The Journal of Finance* 46, 297–355.

Harris, M.; Raviv, A. (1995), Financial Contracting Theory, in: Laffont, J.-J. (Hrsg.), *Advances in Economic Theory: Sixth World Congress*, Bd. II, Camebridge, 269–289.

Harrison, M. J. (1985), *Brownian Motion and Stochastic Flow Systems*, New York.

Harrison, M. J.; Kreps, D. M. (1979), Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets, *Journal of Economic Theory* 20, 381–408.

Harrison, M. J.; Pliska, S. R. (1981), Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading, *Stochastic Processes and their Applications* 11, 215–260.

Harrison, M. J.; Pliska, S. R. (1983), A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading: Complete Markets, *Stochastic Processes and their Applications* 15, 313–316.

Hartung, J. (1991), *Statistik: Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik*, 8. Aufl., München.

Heath, D.; Jarrow, R.; Morton, A. (1990), Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 25, 419–440.

Heath, D.; Jarrow, R.; Morton, A. (1992), Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation, *Econometrica* 60, 77–105.

Hellwig, M. (1998), Systemische Risiken im Finanzsektor, in: Duwendag, D. (Hrsg.), *Finanzmärkte im Spannungsfeld von Globalisierung, Regulierung und Geldpolitik*, Bd. 261, Berlin, 123–151.

Helwege, J.; Turner, C. M. (1999), The Slope of the Credit Yield Curve for Speculative-Grade Issuers, *The Journal of Finance* 54, 1869–1884.

Ho, T. S.; Lee, S.-B. (1986), Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims, *The Journal of Finance* 41, 1011–1029.

Hübner, G. (1997), *A Two-Factor Gaussian Model of Default Risk*, Arbeitspapier, INSEAD, Fontainebleau.

Hübner, G. (2001), The Analytic Pricing of Asymmetric Defaultable Swaps, *Journal of Banking and Finance* 25, 295–316.

Hull, J. (2000), *Options, Futures, and other Derivatives*, 4. Aufl., Upper Saddle River.

Hull, J.; White, A. (1990), Pricing Interest-rate-derivative Securities, *The Review of Financial Studies* 3, 573–592.

Jamshidian, F. (1989), An Exact Bond Option Pricing Formula, *The Journal of Finance* 44, 205–209.

Jarrow, R.; Turnbull, S. (1995), Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk, *The Journal of Finance* 50, 53–85.

Jensen, M. C.; Meckling, W. H. (1976), Theory of the Firm: Managerial Behaviour, Agency Costs and Ownership Structure, *Journal of Financial Economics* 3, 305–360.

Karatzas, I.; Shreve, S. (1988), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Berlin.

Lando, D. (1998), On Cox Processes and Credit Risky Securities, *Review of Derivatives Research* 2, 99–120.

Leland, H. E. (1994), Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure, *The Journal of Finance* 49, 1213–1252.

Leland, H. E.; Toft, K. B. (1996), Optimal Capital Structure, Endogenous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads, *The Journal of Finance* 51, 987–1019.

Longstaff, F. A.; Schwartz, E. S. (1995), A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt, *The Journal of Finance* 50, 789–819.

Madan, D.; Unal, H. (1998), Pricing the Risks of Default, *Review of Derivatives Research* 2, 121–160.

Madan, D.; Unal, H. (2000), A Two-Factor Hazard Rate Model for Pricing Risky Debt and the Term Structure of Credit Spreads, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 35, 43–65.

Merton, R. C. (1973), Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141–183.

Merton, R. C. (1974), On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates, *The Journal of Finance* 29, 449–470.

Miller, M. H. (1977), Debt and Taxes, *The Journal of Finance* 32, 261–275.

Modigliani, F.; Miller, M. H. (1958), The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment, *American Econonmic Review* 48, 261–297.

Musiela, M.; Rutkowski, M. (1997), *Martingale Methods in Financial Modelling: Theory and Applications*, Berlin u. a.

Myers, S. C. (1977), Determinants of Corporate Borrowing, *Journal of Financial Economics* 5, 147–175.

Myers, S. C. (2001), Capital Structure, *Journal of Economic Perspectives* 15, 81–102.

Nielsen, L. T. (1999), *Pricing and Hedging of Derivative Securities*, Oxford.

Nielsen, L. T.; Saá-Requejo, J.; Santa-Clara, P. (1993), *Default Risk and Interest Rate Risk: The Term Structure of Default Spreads*, Arbeitspapier, INSEAD, Fontainebleau.

Opler, T.; Titman, S. (1996), *The Debt-Equity Choice*, Arbeitspapier, Ohio State University, Columbus.

Rubinstein, M. E. (1976), The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options, *The Bell Journal of Economics and Management Science* 7, 407–425.

Sarig, O.; Warga, A. (1989), Some Empirical Estimates of the Risk Structure of Interest Rates, *The Journal of Finance* 44, 1351–1360.

Schulte-Mattler, H.; Meyer-Ramloch, D. (2000), Bankaufsichtrechtliche Behandlung von Kreditderivaten in Deutschland, in: Burghoff, H.-P.; Henke, S.; Schönbucher, P. J.; Sommer, D. (Hrsg.), *Kreditderivate: Handbuch für die Bank- und Anlagepraxis*, Stuttgart, 441–466.

Senbet, L.; Seward, J. (1998), Financial Distress, Bankruptcy and Reorganisation, in: Jarrow, R.; Maksimovic, V.; Ziemba, W. (Hrsg.), *Handbooks in Operations Research and Management Science: Finance*, Bd. 9, Amsterdam, 921–961.

Shimko, D.; Tejima, N.; van Deventer, D. (1993), The Pricing of Risky Debt When Interest Rates Are Stochastic, *The Journal of Fixed Income* 3, 58–65.

Smith, C. W.; Warner, J. B. (1979), On Financial Contracting – An Analysis of Bond Covenants, *Journal of Financial Economics* 7, 117–161.

Vasicek, O. (1977), An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics* 5, 177–188.

Erklärung

Ich versichere, dass ich meine Dissertation

Optionspreistheoretische Modellierung des Kreditrisikos von Unternehmensanleihen

selbstständig verfasst und mich anderer als der angegebenen Hilfsmittel nicht bedient habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Dortmund, 08.01.2003