

GUNIA, Luisa & KNIPPING, Christine  
Bremen

## **Änderungen qualitativ denken – Vorstellungsorientiertes Argumentieren mit Beständen und ihren Änderungen**

### **Einleitung**

Das hier vorgestellte Forschungsprojekt zielt darauf, verschiedene Möglichkeiten der Darstellung funktionaler Abhängigkeiten im Kontext von Veränderungen in den Blick zu nehmen. So soll die Entwicklung eines flexiblen Änderungsbegriffs ermöglicht werden. Das Argumentieren wird hierbei als Chance angesehen, das Lernen auf begrifflicher Ebene anzuregen.

Die Beschreibung von Beständen und ihren Änderungen in verschiedenen Kontexten bietet Schüler\*innen eine Gelegenheit, sinnstiftend in Abhängigkeiten und Kovariationen zu denken und diese explizit zu verbalisieren. Dieser Ansatz ist somit eine vielversprechende Grundlage für die verständige Arbeit mit Funktionen und funktionalen Zusammenhängen im Analysisunterricht der gymnasialen Oberstufe, da zentrale Konzepte der Analysis in einem bedeutungsvollen Kontext aufgegriffen werden können (Roth & Siller, 2016). Insbesondere die qualitative Betrachtung von Differenzialgleichungen kann dabei ein vertieftes Verständnis von Konzepten der Abhängigkeit und Veränderung ermöglichen, wie die Ergebnisse der hier vorgestellten Studie zeigen. Angebote zum Argumentieren ermöglichen es Schüler\*innen dabei, in tiefe Lernprozesse einzusteigen und Hürden zu überwinden.

### **Theoretischer Hintergrund**

Schwierigkeiten von Schüler\*innen im Bereich des funktionalen Denkens wurden in verschiedenen Untersuchungen immer wieder herausgearbeitet. Oft wurde dabei hervorgehoben, dass eine korrekte Kalkülbeherrschung der Lernenden (in der Differentialrechnung wie auch allgemein im Mathematikunterricht) nicht automatisch bedeutet, dass die Lernenden auch tragfähige inhaltliche Vorstellungen aufgebaut haben (z. B. Sahin-Gür, 2017). Aufgaben aus dem Bereich der qualitativen Analysis werden in diesem Zusammenhang als Ausgangspunkt für einen verständigen Konzeptaufbau in der Differentialrechnung vorgeschlagen. Diese Aufgaben zielen auf ein begriffliches und vorstellungsorientiertes Argumentieren, das zu einem nachhaltigen und bedeutungsvollen Lernen zentraler Konzepte der Analysis führen soll. Dies soll insbesondere über die bloße Anwendung von Verfahren und Rechenroutinen hinausgehen (Hußmann, 2010). Die Bedeutung des Argumentierens als Mittel zum Lernen mathematischer Inhalte sowie zum Erkennen und Erforschen von Zusammenhängen ist dabei zentral (Knipping & Reid, 2019).

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),  
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

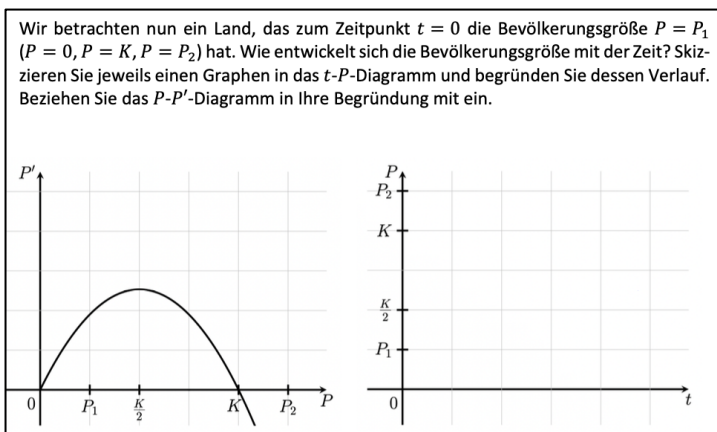
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.  
<https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0>

Will man qualitativ das Verhalten von Lösungen gewöhnlicher Differenzialgleichungen beschreiben, lässt sich das auch im schulischen Kontext mit vergleichsweise einfachen mathematischen Mitteln realisieren (Bauer, 2017). Veränderungen werden in diesem Zusammenhang dann nicht mehr nur als Funktionen der Zeit betrachtet, wie es in der Schule häufig der Fall ist, sondern auch in Abhängigkeit von einem Bestand gedacht. Wird dieser Bestand nun ausgehend von dem beschriebenen funktionalen Zusammenhang zwischen dem Bestand einer Größe und seiner momentanen Änderungsrate rekonstruiert, werden verschiedene Grundvorstellungen zum Funktions-, Ableitungs- und Integralbegriff vernetzt (vgl. Wagenblast & Bauer, 2022). Ein solcher Zugang zu Beständen und Änderungen im Anwendungskontext ermöglicht somit eine direkte Verbindung zentraler Grundvorstellungen der Analysis und eine vorstellungsorientierte Verbindung der Differenzial- und der Integralrechnung (vgl. Greefrath et al., 2018). Da die Grundvorstellungen direkt mit der begrifflichen Interpretation dieser Konzepte verbunden sind, sind diese Vorstellungen für das sich entwickelnde Begriffsverständnis der Schüler\*innen von zentraler Bedeutung. Rasmussen & Keene (2019) haben in diesem Zusammenhang sogenannte *waypoints* herausgearbeitet, die das Argumentieren mit dem Konzept der Änderungsrate charakterisieren.

## **Methodik und Methodologie**

Im Rahmen des vorgestellten Forschungsprojekts wurde eine Lernumgebung in drei Blöcken entwickelt, die sich in jedem ihrer Blöcke mit einer anderen Sichtweise auf Bestände und Änderungen beschäftigt. Die Lernumgebung erstreckt sich über fünf Doppelstunden und wurde mit fünf Bremer Schulklassen der E-Phase erprobt. Die Schüler\*innen arbeiteten dabei in Gruppen und der Unterricht und die Gruppenarbeitsphasen wurden gefilmt. Der Fokus der Analysen lag auf den Argumentationen der Schüler\*innen und den entsprechenden Lernprozessen, die aus einer interpretativ-interaktionistischen Perspektive betrachtet und durch Argumentationsanalysen mit einem epistemologischen Fokus rekonstruiert wurden (Tabach et al., 2014).

Die in diesem Beitrag diskutierte Aufgabe (vgl. Abb. 1) ist dem dritten Block der Lernumgebung zuzuordnen. Es wird ein funktionaler Zusammenhang zwischen dem Bestand einer Größe und seiner momentanen Änderungsrate qualitativ hergestellt, der im Sachkontext gedeutet werden muss. Jeder Bestandsgröße wird dabei ihre momentane Änderungsrate zugeordnet, unabhängig von der Zeit. Es geht darum, Bestandsverläufe ausgehend von diesem neuen funktionalen Zusammenhang zu rekonstruieren. Die Deutung von Beständen und ihren Änderungen ist dabei ein Wechselspiel zwischen verbalen und grafischen Beschreibungen und erfordert Argumentationen sowohl im Sachkontext als auch auf Basis der grafischen und verbalen Darstellungen.



Erwartete Lösungsgraphen:

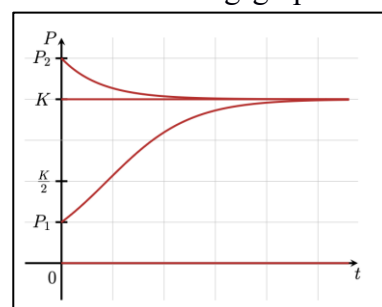


Abb. 1: Das Wachstum einer Bevölkerung („Differentialgleichungs-Aufgabe“)

## Ergebnisse

Beim Lösen der betrachteten Aufgabe sehen sich die Schüler\*innen mit verschiedenen Herausforderungen konfrontiert und bringen unterschiedliche Argumente hervor, um die jeweilige Situation mit Bedeutung zu füllen und ihre Schwierigkeiten zu überwinden. Der folgende Transkriptausschnitt zeigt einen typischen Ansatz bei der Diskussion einer Lösung, die zu einem beliebigen Zeitpunkt die Höhe  $P = K$  erreicht (und bis dahin gestiegen ist):

Hannah: Und jetzt ist die Frage: Wenn es über  $K$  geht, dann sinkt die Steigung ins Negative. Dann müsste es ja eigentlich fallen, aber das geht ja nicht.

Melissa: Doch, warum geht das nicht?

Hannah: Weil  $P$  wird ja immer mehr.  $P$  wird immer mehr, aber  $P'$  wird weniger, aber das geht ja eigentlich nicht. Also wenn es im Negativen ist,  $P'$ , dann kann ja  $P$  nicht mehr werden. [...] Realistisch gesehen kann es keine Bevölkerungsgröße über  $K$  geben, da  $K$  als Wachstumsgrenze dient. Bei Werten darüber sinkt im  $P$ - $P'$ -Diagramm die Änderungsrate ins Negative, aber die Bevölkerungsgröße steigt trotzdem.

In der hier dargestellten Situation sehen sich die beiden Schülerinnen Hannah und Melissa mit der Frage konfrontiert, was mit einem Lösungsgraphen passiert, nachdem er die Höhe  $P = K$  erreicht hat. Hannah stellt zunächst fest, dass die „Steigung ins Negative geht“ und bezieht sich damit vermutlich auf ihre Beobachtungen im  $P$ - $P'$ -Diagramm. Diese Deutung des  $P$ - $P'$ -Diagramms übersetzt sie dann unmittelbar in den Verlauf eines möglichen Lösungsgraphen im  $t$ - $P$ -Diagramm, der entsprechend fallen müsse, was aber laut Hannah nicht gehen würde. Auf Melissas Frage, warum das denn nicht ginge, entgegnet Hannah, dass  $P$  mehr, aber  $P'$  weniger und sogar negativ würde, was „ja eigentlich nicht [geht]“. Diese mathematische Deutung übersetzt Hannah dann in den situativen Kontext von Bevölkerungsgrößen, die entsprechend nicht größer als  $K$  werden können. Ihre ursprüngliche Interpretation von  $P'$  als Steigung des dazugehörigen Lösungsgraphen im  $t$ - $P$ -Diagramm deutet Hannah um in eine Interpretation von  $P'$  als Änderungsrate.

Neben den aktivierten Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff zeigen die Schüler\*innen während der Aufgabenbearbeitung auch weitere (mathematisch nicht tragfähige) Vorstellungen. Dazu gehört zum Beispiel die Vorstellung, dass immer Wachstum stattfindet („P wird ja immer mehr“). Ein übergeordnetes Ziel des Forschungsprojektes ist es, herauszuarbeiten, wie diese Hürden im Lernprozess durch Argumentationen überwunden werden.

## Fazit

Bei der qualitativen Betrachtung von Differenzialgleichungen argumentieren Schüler\*innen in Abhängigkeiten und Kovariationen und verbalisieren diese explizit. Das kann ein vertieftes Verständnis von Konzepten der Abhängigkeit und Veränderung ermöglichen, weil Schüler\*innen ihr Wissen über Funktionen und Änderungsraten in einem dynamischen Kontext mobilisieren. Ein unterrichtlicher Ansatz, der stete Wechsel zwischen situativ-sprachlichen und grafisch-visuellen Darstellungsformen erforderlich macht, bietet somit eine Möglichkeit, die Forderung nach einer konsequenten Vorstellungsorientierung im Analysisunterricht gewinnbringend umzusetzen.

## Literatur

- Bauer, S. (2017). Modellieren mit Differentialgleichungen über das logistische Wachstumsmodell hinaus. *Der Mathematikunterricht*, 63(1), 28–36.
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2018). Grundvorstellungen von Ableitung und Integral als Zugang zur Analysis. *Der Mathematikunterricht*, 64(3), 50–56.
- Hußmann, S. (2010). Veränderung verstehen – aus qualitativer Sicht. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 52(31), 4–8.
- Knipping, C., & Reid, D. (2019). Argumentation Analysis for Early Career Researchers. In G. Kaiser & N. Presmeg (Hrsg.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (S. 3–31). Springer.
- Rasmussen, C., & Keene, K. (2019). Knowing solutions to differential equations with rate of change as a function: Waypoints in the journey. *Journal of Mathematical Behavior*, 56, 1–17. <https://doi.org/10.1016/j.mathb.2019.03.002>
- Roth, J., & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung. Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *mathematik lehren*, 34(199), 2–9.
- Sahin-Gür, D. (2017). Fach- und sprachintegrierte Förderung am Beispiel der Differentialrechnung. In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (S. 809–812). WTM-Verlag.
- Tabach, M., Hershkowitz, R., Rasmussen, C., & Dreyfus, T. (2014). Knowledge shifts and knowledge agents in the classroom. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33, 192–208. <https://doi.org/j7dp>
- Wagenblast, A., & Bauer, S. (2022). Aspekte funktionalen Denkens beim graphischen Lösen von Differentialgleichungen. In IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2022* (S. 1333–1336). WTM-Verlag.