

Untersuchung von Wachstumsspannung in der Holzmatrix mithilfe eines Phasenfeldmodells

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für

Architektur und Bauingenieurwesen der

Technischen Universität Dortmund

(TU Dortmund)

genehmigte

DISSERTATION

von

Jan Bernd Wulf

Tag der Abgabe: 15. Juli 2025

Erster Prüfer: Prof. Dr.-Ing. I. Münch

Zweiter Prüfer: Prof. Dr.-Ing. habil. S. Klinkel

Dortmund 2025

Kurzfassung

Angesichts steigender Anforderungen an Flächeneffizienz, Ressourcenschonung und den Erhalt der Biodiversität rückt die Nutzung von Bäumen als Tragstrukturen in den Fokus als Ansatz nachhaltigen Bauens.

In der Holzmatrix entstehen Wachstumsspannungen (Eigenspannungen), die dem Versagen durch Faserausknicken infolge hoher Druckspannungen an der Stammoberfläche, entgegenwirken. Ziel der Arbeit ist es, diese Wachstumsspannungen unter Einbezug der individuellen Stammgeometrie sowie der äußeren Belastung zu erfassen und für die technische Planung und Risikobewertung nutzbar zu machen.

Hierzu wird ein Phasenfeldansatz entwickelt, der die Stammgeometrie innerhalb eines Simulationsgebiets beschreibt und die Materialantwort über ein linear-elastisches, transversal-isotropes Stoffgesetz abbildet. Die feuchteabhängigen anisotropen Materialkonstanten werden aus Literaturquellen abgeleitet und in tabellarischer Form für die Modellierung bereitgestellt.

Die lokale Faserausrichtung des Materials folgt einer eingeführten Morphologielinie, die zugleich das primäre Wachstum (Höhenwachstum) und das sekundäre Wachstum (Dickenwachstum) des Baumes abbildet. Die zugehörigen Wachstumsraten sind als Modellparameter an reale Werte anpassbar; ein zusätzlicher Parameter erlaubt Wachstumsreaktionen auf äußere Lasten (Thigmomorphogenese).

In neu gebildeten Schichten des Dickenwachstums werden initiale axiale Eigendehnungen aktiviert und manifestiert, sodass ein wachstums- und lastpfadabhängiger Spannungszustand der Holzmatrix entsteht.

Zur Validierung dienen analytische Referenzmodelle und experimentelle Literaturdaten zu Wachstumsspannungen. Anschließend werden Anwendungsszenarien betrachtet: ungestörtes Wachstum entlang der Morphologielinie, Wachstum unter Biegung infolge externer Lasten sowie Fälle mit thigmomorpher Verstärkung.

Die Simulationen zeigen, dass Bäume als adaptive Tragstrukturen wirken: Sie kompensieren Druckspannungen an der Oberfläche durch langfristiges Wachstum und verringern die Durchbiegung abhängig von der Lastintensität. Zusätzliches belastungsinduziertes thigmomorphes Wachstum verstärkt diesen Effekt. Dies verbessert die Risikobewertung und eröffnet die Möglichkeit einer schrittweisen Erhöhung zulässiger Lasten nach weiteren Wachstumsperioden.

Abstract

In view of increasing demands for land-use efficiency, resource conservation, and the preservation of biodiversity, the use of trees as load-bearing structures is gaining attention as an approach to sustainable construction.

Growth stresses (residual stresses) arise in the wood matrix that counteract failure mechanisms – particularly fiber buckling under high compressive stresses at the stem surface. The aim of this work is to capture these growth stresses, taking into account individual stem geometry and external loading, and to make them usable for engineering planning and risk assessment.

To this end, a phase-field approach is developed that represents the stem geometry within a design space and models the material response by means of a linearly elastic, transversely isotropic constitutive law. The moisture-dependent anisotropic elastic constants are derived from the literature and compiled in tabular form for modeling.

The local fiber orientation follows an introduced morphology line, which also represents the tree's primary growth (height growth) and secondary growth (diameter growth). The associated growth rates are treated as model parameters and can be adjusted to match real values; an additional parameter enables growth responses to external loads (thigmomorphogenesis).

In newly formed layers produced by secondary growth, initial axial residual strains are activated and retained, giving rise to a stress state in the wood matrix that depends on both the growth history and the load path.

Validation relies on analytical reference models and experimental literature data on growth stresses. Subsequently, application scenarios are considered: natural undisturbed growth along the morphology line, growth under bending due to external loads, and cases with thigmomorphic reinforcement.

The simulations show that trees act as adaptive load-bearing structures: they compensate compressive stresses at the surface through long-term growth and reduce deflection depending on load intensity. Additional load-induced thigmomorphic growth amplifies this effect. This improves risk assessment and offers the possibility of gradually increasing permissible loads after further growth periods.

Inhaltsverzeichnis

Notation	1
1 Einleitung	5
1.1 Motivation	5
1.2 Stand der Forschung	6
1.3 Zielsetzung	8
1.4 Gliederung der Arbeit	9
2 Materialbeschreibung von Faserwerkstoffen	11
2.1 Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie	11
2.2 Irreversible Eigendehnungen	19
2.3 Isotrope linear-elastische Materialien	19
2.4 Transversal-isotrope linear-elastische Materialien	22
2.5 Ausrichtung des Materialtensors	31
2.6 Rückführung auf 2D	34
2.7 Richtungsabhängigkeit der Materialparameter	35
3 Wachstum und Materialverhalten der Holzmatrix	43
3.1 Basisbegriffe des Stammwachstums	43
3.2 Wachstumstropismen	46
3.3 Bestimmung der Materialparameter gewachsener Holzmatrix	48
4 Messung und Modellierung von Wachstumsspannungen	57
4.1 Entstehung von Wachstumsspannungen	57
4.2 Ermittlung von Wachstumsspannungen	61
4.3 Zusammenstellung von Durchschnittswerten	64
4.4 Wachstumsspannungsmodell nach Kübler	68
4.5 Wachstumsspannungsmodell nach Gillis	71
4.6 1-D Modell zur Erfassung axialer Wachstumsspannungen	78
4.7 Vergleich mit experimentellen Messungen	80
5 Phasenfeldmodell für Wachstumsspannungen	82

5.1	Grundprinzip von Phasefeldmodellen	82
5.2	Spezifizierung des Phasefeldparameters	83
5.3	Zielfunktionen des Baumwachstums	84
5.4	Freie Energieformulierung und Grenzflächenbreite	86
5.5	Variationsformulierung des Phasefeldmodells	91
5.6	Linearisierung und Zeitdiskretisierung	94
5.7	Phytomorphologische Beschreibung der Triebspitzenrichtung . . .	100
5.8	Akkumulation von Wachstumsspannungen	104
5.9	Thigmomorphes Wachstum	106
5.10	Rotationssymmetrie zur Simulation kreisförmiger Querschnitte in 2D	109
6	Validierung und Anwendung des Modells	110
6.1	Natürliche Randbedingung für das Phasefeld	111
6.2	Notwendige Auflösung der Grenzfläche	114
6.3	Untersuchungen und Kriterien zur Grenzflächendynamik	117
6.4	Einfluss der Wachstumsgeschwindigkeiten auf die Abholzigkeit . .	123
6.5	Validierung der Wachstumsspannungen anhand analytischer und numerischer 1D-Modelle	130
6.6	Wachstumsspannungen unter dem Einfluss externer Lasten	133
6.7	Thigmomorphe Wachstumsanpassungen	145
7	Zusammenfassung und Ausblick	152
	Literaturverzeichnis	155

Notation

Symbol	Einheit	Beschreibung
a, b, c, λ	–	Skalare Zahlen in \mathbb{R}
i, j, k, l, \dots	–	Natürliche Zahlen in \mathbb{N}^+
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{x}$	–	Vektoren in \mathbb{R}^3
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}$	–	Tensoren zweiter Stufe in $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$
$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$	–	Tensoren vierter Stufe in $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$
\mathbf{e}_i	–	Einheitsvektor der Euklidischen Standardbasis
$\mathbf{1}$	–	Einheitstensor zweiter Stufe: $\mathbf{1} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$
ϵ_{ijk}	–	Levi-Civita-Permutationssymbol
t	s	Zeitpunkt, Pseudozeit
dt	s	Infinitesimales Zeitinkrement
χ	–	Bewegungsfunktion $\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_t$
\mathbf{X}	m	Ortsvektor Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0
\mathbf{x}	m	Ortsvektor Momentankonfiguration \mathcal{B}_t
\mathbf{u}	m	Verschiebungsvektor
\mathbf{H}	–	Verschiebungsgradient $\mathbf{H} = \text{Grad}[\mathbf{u}]$
\mathbf{F}	–	Deformationsgradient $\mathbf{F} = \mathbf{H} + \mathbf{1}$
J	–	Jacobi-Determinante $J = \det[\mathbf{F}]$
\mathbf{C}	–	Rechter Cauchy-Green-Tensor $\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \mathbf{F}$
\mathbf{U}	–	Rechtsstrecktensor $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^\top \mathbf{F}}$
\mathbf{V}	–	Linksstrecktensor $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F} \mathbf{F}^\top}$
$\boldsymbol{\varepsilon}$	–	Linearer Verzerrungstensor, $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}[\mathbf{H}]$
ρ, ρ_0	kg/m ³	Massendichte in Momentan- bzw. Referenzkonfiguration
m	kg	Masse
$\dot{\mathbf{x}}$	m/s	Geschwindigkeit
$\ddot{\mathbf{x}}$	m/s ²	Beschleunigung
\mathbf{b}, \mathbf{b}_0	N/m ³	Volumenkraft in Momentan- bzw. Referenzkonfiguration
\mathbf{t}, \mathbf{t}_0	N/m ²	Traktion in Momentan- bzw. Referenzkonfiguration
$\boldsymbol{\sigma}$	N/m ²	Cauchy-Spannungstensor
W	N m/m ³	Formänderungsenergie
\mathbf{n}	–	Oberflächennormale der Momentankonfiguration
E	N/m ²	Elastizitätsmodul
ν	–	Querkontraktionszahl (Poissonzahl)
μ	N/m ²	Lamé-Parameter (Scher- bzw. Schubmodul)

Symbol	Einheit	Beschreibung
\mathbb{C}	N/m^2	Materialtensor vierter Stufe
\mathbb{I}	–	Tensor vierter Stufe der Selbstabbildung
\mathbf{a}, \mathbf{a}_0	–	Faserrichtung in Momentan- bzw. Referenzkonfiguration
\mathbf{M}	–	Strukturtensor zweiter Stufe, $\mathbf{M} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$
\mathbb{C}_{ti}	N/m^2	Materialtensor vierter Stufe der transversalen Isotropie
C	N/m^2	Komp. des Materialtensors in der kartesischen Basis
$C_{\text{ti}}^{\parallel}, C'$	N/m^2	Komp. des Materialtensors in der faserorientierten Basis
$\mathbf{T}^\varepsilon(\theta)$	–	2D-Transformationsmatrix für den Dehnungsvektor
r	m	Radialkoordinate in sphär. Koordinaten
ϑ	rad	Polarkoordinate (Polarwinkel) in sphär. Koordinaten
ϕ	rad	Azimutwinkel in sphär. Koordinaten
\mathbf{e}_r	–	Radiale Richtung der sphär. Orthonormalbasis
\mathbf{e}_ϑ	–	Richtung des Polarwinkels ϑ der sphär. Orthonormalbasis
\mathbf{e}_ϕ	–	Richtung des Azimutwinkels ϕ der sphär. Orthonormalbasis
m_u	kg	Masse des feuchten Holzes
m_0	kg	Trockenmasse des Holzes
m_w	kg	Masse des im Holz enthaltenen Wassers
u	–	Holzfeuchte - Verhältnis m_w zu m_0
u_f	–	Holzfeuchte bei Fasersättigung
S_{ij}	–	Elastische Konstanten der Nachgiebigkeitsmatrix
σ_L	N/m^2	Longitudinalspannung im Querschnitt
σ_L^0	N/m^2	Anfangsspannung in der neu gewachsenen Holzschicht
Δr	m	Dicke einer neu gewachsenen Holzschicht
r_a	m	Außenradius des Querschnitts
r	m	Radius, bei dem die Spannung betrachtet wird
ε_L	–	Longitudinaldehnung im Querschnitt
ε_L^0	–	Anfangsdehnung in der neuen Holzschicht
σ_L^H	N/m^2	Longitudinalspannung nach Heraustrennen einer Planke
$\bar{\sigma}_i$	N/m^2	Normalspannung in Richtung i im Hauptachsensystem
$\hat{\sigma}_i$	–	Normierte Spannung in Richtung i im Hauptachsensystem
$\hat{\sigma}_i^B$	–	Normierte axiale Spannung im Baumquerschnitt
$\hat{\sigma}_i^H$	–	Normierte axiale Spannung nach Heraustrennen einer Planke
$\bar{\varepsilon}_0$	–	Genetisch veranlagte Axialkontraktion im Kambium

Symbol	Einheit	Beschreibung
$\varepsilon_n^{(a)}$	–	Integrale axiale Dehnung der Schicht n im Jahr a
$\Delta\varepsilon_n^{(a)}$	–	Integrales Dehnungsinkrement in Jahr a
a	–	Jahr des Holzwachstums (Zeitindex)
n	–	Index der betrachteten Jahresschicht
E_i	N/m ²	Elastizitätsmodul der Schicht i
A_i	m ²	Fläche des i -ten Jahresrings im Querschnitt
d_i	m	Breite (Dicke) des i -ten Jahresrings
φ	–	Phasenfeldparameter $\varphi \rightarrow 1$ für Holz, $\varphi \rightarrow -1$ für Luft
$f(\varphi, \epsilon, \varphi_\rho)$	–	Materialdichtefunktion
ρ	kg/m ³	Effektive Materialdichte $\rho(\varphi) = f(\varphi, \epsilon, \varphi_\rho) \rho_0$
ρ_0	kg/m ³	Materialdichte in der Vollholzmatrix (für $\varphi \rightarrow 1$)
φ_ρ	–	Lage des Wendepunkts der Materialdichtefunktion
ϵ	–	Steilheitsparameter der Materialdichtefunktion
ψ	–	Gesamtfreie Energie im Phasenfeldmodell, $\psi = \psi_{\text{well}} + \psi_{\text{Grad}}$
ψ_{well}	–	Potentialenergieanteil (stabile Zustände)
ψ_{Grad}	–	Gradientenenergie: energetische Bestrafung von Übergängen
L_c	m	Grenzflächenparameter (gleichförmige Ausdehnung)
β	–	Parameter des Doppelmulden-Potentials
\mathbf{P}_d	m	Grenzflächenmatrix (elliptische Ausdehnung)
p_s	–	Skalierungsfaktor der elliptischen Übergangszone
$\bar{\varphi}_b$	–	Unterer Schwellwert von φ , oberhalb liegt Kambium
$\bar{\varphi}^t$	–	Oberer Schwellwert von φ , oberhalb volle Holzmatrix
J	–	Zielfunktional zur Minimierung
$\gamma_1(\mathbf{d}_\theta^M)$	–	Nukleationsdichte Primärwachstum
\mathbf{d}_θ^M	–	Wachstumsrichtungsvektor der Morphologielinie
$\gamma_2(\mathbf{d}_\theta)$	–	Nukleationsdichte Sekundärwachstum
\mathbf{d}_θ	–	Wachstumsrichtungsvektor
$\gamma_s(\overline{\sigma_{\theta\theta}}, \mathbf{u}, \varphi)$	–	Nukleationsdichte des spannungsinduzierten Wachstums
$c_{\gamma,1}$	–	Nukleationsdichtenfaktor: Bestrafung der Zielfunktion 1
$c_{\gamma,2}$	–	Nukleationsdichtenfaktor: Bestrafung der Zielfunktion 2
$c_{\gamma,s}$	–	Nukleationsdichtenfaktor: Bestrafung der Zielfunktion spannungsinduzierten Wachstums
$\mathcal{M}(t), \mathcal{M}_n(t)$	–	Morphologielinie(n) zur Beschreibung der Stammachse
$\tilde{\varphi}$	–	Laufendes Wellenprofil der Grenzfläche
ζ	–	Bewegte Koordinate $\zeta = X_1 - vt$
$H(\cdot)$	–	Heaviside-Schaltfunktion

Symbol	Einheit	Beschreibung
s	–	Vorzeichenparameter: +1 Druck-, –1 Zug-Reaktion
$\varepsilon_{\theta\theta}$	–	Axiale Dehnung in Faserrichtung
$\varepsilon_{\text{crit}}$	–	Kritischer Dehnungsschwellenwert
$\sigma_{\theta\theta}$	N/m ²	Spannung in Richtung der Wachstumsrichtung \mathbf{d}_θ
v, v_t	m/s	(Vorgabe-)Geschwindigkeiten der Grenzflächenbewegung
v_1, v_2	m/s	Vorgabegeschwindigkeiten des prim./sek. Wachstums
k_s	–	Empfindlichkeitsfaktor für thigmomorphes Wachstum
η	–	Triebkraft für Änderungen im Phasenfeld
ω	–/s	Relaxationszeit der Phasenänderung
$\dot{\varphi}(t)$	–/s	Zeitliche Änderungsrate des Phasenfeldparameters
$\Delta\varphi^k$	–	Inkrement von φ in Newton-Raphson-Iteration k
Δt	s	Zeitschrittweite im Zeitintegrationsverfahren
$\hat{\varphi}(t)$	–/s	Änderungsrate aus den vorherigen Iterationen
$\Delta\dot{\varphi}$	–/s	Änderungsrate von φ im aktuellen Iterationsschritt
$\varepsilon_h(t_{n+1})$	–	Dehnungsgeschichte zum Zeitpunkt t_{n+1}
$\Delta\varepsilon_0$	–	Änderung des integralen Dehnungszustands bei t_{n+1}
\bar{y}	–	Neumann-Randwert des Phasenfelds

1 Einleitung

1.1 Motivation

Durch das zunehmende Bewusstsein für den Klimawandel sowie der ökologischen Bedeutung von Bäumen zur Abschwächung daraus resultierender Probleme, hat die Wertschätzung der Gesellschaft für Wälder und Bäume zugenommen. Vor diesem Hintergrund stellt sich die Frage, ob die zukünftige Entwicklung der Zivilisation durch die Integration von Bäumen als konstruktive Elemente positiv beeinflusst werden kann.

Derartige Bauwerke stellen hohe Ansprüche aus Sicht der Gefahrenabwehr. Es gibt sowohl höhere Anforderungen an die technische Umsetzung als auch an die Risikobewertung. Das mechanische Verhalten der Holzmatrix im wachsenden Zustand unterscheidet sich signifikant von getrocknetem Holz. Vorliegende technische Regelwerke und Normen beziehen sich bislang nur auf technisch verarbeitetes und trockenes Holz, so dass sich daraus nur grobe Rückschlüsse auf obige Fragestellung ziehen lassen.

Wird der Stamm eines Baumes zugleich durch Wind- und technische Lasten auf Biegung beansprucht, überlagern sich die Beanspruchungen und äußern sich primär durch Zug- und Druckspannungen in axialer Richtung. Da die Fasern der Holzmatrix auf Mikroebene ausknicken können, neigen viele Hölzer zu einer Druckschwäche, welche sich mit entsprechender Schädigung auf der Druckseite äußert. Daher haben Bäume im Laufe der Evolution eine Strategie entwickelt, diesem Schädigungsmechanismus entgegenzutreten. Dafür baut die Holzmatrix durch den Zuwachs neuer Zellen sukzessive einen Eigenspannungszustand auf, der das Ausknicken von Fasern am Rand des Querschnitts erschwert. Dieser Mechanismus führt auch dazu, dass Bäume auf veränderte Spannungszustände, z. B. durch technische Lasten, reagieren und nach einem gewissen Zeitraum kompensieren.

Zu klären ist, ob sich die einhergehenden Tragfähigkeitssteigerungen durch ein numerisches Modell quantifizieren lassen, das sowohl die Wachstumsgeschichte als auch die individuell ausgeprägte Form eines Baumes berücksichtigt, um sie in potentielle ingenieurtechnische Planungsprozesse zu überführen.

1.2 Stand der Forschung

Diese Arbeit verfolgt unterschiedliche Forschungsgebiete, über deren Entwicklung und aktuellen Stand berichtet wird:

Mechanische Kennwerte von Holz

Für getrocknetes Holz liegen orthotrope Elastizitätsparameter verschiedener Holzarten durch Experimente bzw. theoretische Überlegungen z. B. in [43, 54, 98] vor. Die daraus hervorgehenden Datensätze und theoretische Grundlagen sind z. B. in KOLLMANN & CÔTÉ [53] systematisch aufbereitet.

Allerdings unterscheiden sich die mechanischen Eigenschaften wachsender Holzmatrix aufgrund höheren Feuchtegehalts¹ signifikant zu getrockneten Hölzern [74]. LAVERS [61] sowie NIKLAS & SPATZ [76] dokumentieren mechanische Kennwerte wie Dichte, Biegefestigkeit, Elastizitätsmodul, Scher- und Druckfestigkeit für feuchtes Holz oberhalb der Fasersättigung². Deren Angaben beziehen sich jedoch ausschließlich auf die Faserrichtung und lassen keine Rückschlüsse auf das orthotrope Verhalten zu. Experimentelle Untersuchungen zur feuchteabhängigen orthotropen Steifigkeit einiger Holzarten liegen allerdings in CARRINGTON [16] vor. Darin zeigt sich ein nahezu linearer Rückgang der richtungsabhängigen Steifigkeiten vom trockenen Zustand bis zur Fasersättigung. Aufbauend auf diesen Erkenntnissen ermittelt HEARMON [38] die orthotropen Elastizitätsparameter dieser Holzarten bei einem Feuchtegehalt im Bereich der Fasersättigung. Einen umfassenden Überblick vorliegender Studien zur feuchtigkeitsabhängigen mechanischen Charakterisierung von Holz bietet GERHARDS [31]. Auf Grundlage der recherchierten Versuchsdaten formuliert [31] verallgemeinerte Beziehungen zur Änderung von orthotropen Elastizitäts- und Festigkeitskennwerten in Abhängigkeit vom Feuchtegehalt.

Untersuchungen mit moderner Messtechniken, wie DIC (digitale Bildkorrelation) einsetzen, finden sich bei HERING [39] und OZYHAR [78]. Deren experimentellen Studien liefern Datensätze zu Elastizitäts- und Schubmoduli sowie zu Querkontraktionszahlen von Buchenholz bei unterschiedlichem Feuchtegehalt.

¹Der *Feuchtegehalt* beschreibt das Verhältnis des im Holz enthaltenen Wassers relativ zur Darrmasse.

²Die *Fasersättigung* liegt bei den meisten Holzarten oberhalb von 30% Feuchtegehalt vor.

Wachstumsspannungen in der Holzmatrix

Forstwirtschaftliches Interesse und praktische Probleme bei der Holzverarbeitung (Rissbildung, Verwerfung), verbunden mit der Anforderung die Holzausbeute zu steigern, begründet die wissenschaftliche Auseinandersetzung mit den Ursachen und der Bestimmung von Wachstumsspannungen im Holz. Der Begriff „Wachstumsspannungen“ hat sich in diesem Kontext etabliert, wobei es sich um eine Eigenspannung im Querschnitt handelt.

Einen umfassenden Überblick über die Entstehung von Wachstumsspannungen, gängige Messmethoden und Modellierungen für dessen Quantifizierung sowie eine Literaturübersicht über relevante Quellen liefern z. B. ARCHER [5] und DINWOODIE [23].

Die Erforschung von Wachstumsspannungen in Baumstämmen begann mit Dehnungsmessverfahren in JACOBS [45] und BOYD [9], welche die Verteilung von Eigenspannungen im Inneren des Querschnitts untersuchen. Die damit gewonnenen experimentellen Erkenntnisse bildeten die Grundlage für die Entwicklung analytischer Modelle zur Beschreibung axialer Eigenspannungsverläufe [57], welche durch Berücksichtigung transversal-isotroper und orthotroper Materialeigenschaften verfeinert wurden [5, 32]. Weiterentwicklungen der Modellansätze, um inhomogene Querschnittsteifigkeiten einzubeziehen finden sich z. B. bei ALMÉRAS ET AL. [2]. SAURAT & GUENEAU [92] und KIKATA & MIWA [51] stellen Verfahren vor, die freigesetzte Eigendehnungen an der Oberfläche mithilfe von Dehnungsmessstreifen untersuchen. Diese Oberflächendehnungen ermöglichen als Eingangsdaten die Nutzung der genannten analytischen Modelle zur indirekten Bestimmung der inneren Spannungsverteilung des Stammquerschnitts [5].

Wachstumsmodelle für pflanzliche Strukturen

In PIETRUSZKA & LEWICKA [81] sowie PLATEN ET AL. [82] werden kontinuumsmechanische Modelle entwickelt, die das anisotrope Wachstum pflanzlicher Strukturen mit einer definierten Faserrichtung betrachten. Diese haben jedoch nicht das Ziel Wachstumsspannungen zu simulieren. Sie können allerdings gerichtetes Wachstum auf Basis von umweltbedingten Reizen abbilden. Dazu wird ein geometriebeschreibendes Finite Elemente Netz verwendet, weshalb diese Modelle ein adaptives Neuvernetzen benötigen um Verzweigungen der Struktur während des Wachstums abzubilden. Vergleichbare Modelle unter Verwendung der Phasenfeldmethode liegen nach Kenntnis des Verfassers derzeit nicht vor.

Phasenfeldmethode

Phasenfeldmodelle werden zur Simulation zeitabhängiger Prozesse verwendet, in welchen sich insbesondere die räumliche Verteilung oder Proportion unterschiedlicher Phasen verändert. Die Grundlagen solcher Modelle wurden erstmals von FASANO & PRIMICERIO [29] und LANGER [60] beschrieben. Seither haben sich vielfältige Anwendungsgebiete entwickelt, insbesondere in der Erstarrungsdynamik vom flüssigen zum festen Aggregatzustand von Stoffen sowie in der Bruchmechanik. Eine Literaturübersicht für die Erstarrungsdynamik findet sich z. B. in BOETTINGER ET AL. [7], während z. B. in ZHUANG ET AL. [119] eine Zusammenstellung der Literatur zur Bruchmechanik vorhanden ist. Ein ausführlicher historischer Kontext zur Entwicklung der Phasenfeldmethode – von theoretischen Grundlagen bis hin zu konkreten Anwendungen in der Werkstoffwissenschaft ist beispielsweise in STEINBACH [100] zu finden. Auch wurde das Potenzial der Phasenfeldmethode für die Topologie- und Formoptimierung verwendet, siehe z. B. [8, 12, 109]. Das Phasenfeld beschreibt hier keine Stoffzustände (fest \leftrightarrow flüssig, ungerissen \leftrightarrow gerissen), sondern unterscheidet durch eine abstrakte Designvariable kontinuierlich zwischen Material und Leerraum. Einen Überblick verschiedener Ansätze und Entwicklungen in diesem Zusammenhang bietet TAKEZAWA ET AL. [102].

1.3 Zielsetzung

Die vorliegende Arbeit schlägt vor, das Wachstum von Holzschichten und die damit verbundenen Wachstumsspannungen in der Holzmatrix über eine Phasenfeldsimulation zu erfassen. Nachfolgende Ziele stehen im Fokus:

- Das Phasenfeldmodell soll zwischen neu gebildeten Holzschichten und bereits vorhandener Holzmatrix differenzieren können.
- Neue Holzschichten erhalten initiale, axiale Wachstumsdehnung, deren Eigenstress mit den Spannungen der vorhandenen Holzmatrix im Gleichgewicht steht. Je nach vorliegendem Gesamtgleichgewicht, soll sich ein Dehnungszustand in der neuen Holzschicht manifestieren, was dem Vorgang der Reifung der Zellen entspricht. Hierzu wird die Implementierung der Geschichtsabhängigkeit angestrebt.
- Die axiale Wachstumsdehnung soll anhand vorhandener Literatur [58, 62, 92] für das Modell quantifiziert werden.
- Das Modell wird darauf ausgerichtet, den Spannungszustand in bereits bestehenden Bäumen simulieren zu können. Somit ist die Form der zu generierenden

Struktur bekannt und dient als Basisinformation für das Phasenfeldmodell, um primäres Wachstum³ zu lenken.

- Die Faserrichtung der Holzmatrix orientiert sich an der Richtung des primären Wachstums und soll über ein transversal-isotropes Materialgesetz erfasst werden.
- Die Eigenspannungsverläufe des Phasenfeldmodells sollen mit analytischen Ansätzen nach KÜBLER [56] und GILLIS [32] verifiziert werden.
- Die wachsende Struktur soll beliebig mechanisch belastet werden können und mit Wachstumsspannungen interagieren.
- Das Modell soll verstärktes Wachstum im Bereich hoher mechanischer Belastung (Thigmomorpher Reiz⁴) abbilden.

1.4 Gliederung der Arbeit

Kapitel 2 behandelt die Materialbeschreibung von Faserwerkstoffen. Zur Abbildung der Anisotropie der Holzmatrix werden zunächst die mechanischen Grundlagen (Kinematik, Gleichgewichtsgleichungen) dargestellt. Darauf aufbauend wird ein konstitutives Modell für transversal-isotrope, linear-elastische Werkstoffe sowohl in einer phänomenologischen Spannungs-Dehnungs-Darstellung als auch in einer energiepotenzialbasierten Formulierung hergeleitet. Anschließend wird die Ausrichtung des Materialensors entlang der Faserrichtung erläutert und die Richtungsabhängigkeit der Komponenten der Spannungs-Dehnungs-Beziehung aufgezeigt. Damit sind die für die weitere Modellierung erforderlichen mechanischen Grundlagen bereitgestellt.

Kapitel 3 spezifiziert den in Kapitel 2 allgemein behandelten Faserwerkstoff zur Holzmatrix als wachsendes, feuchteabhängiges Naturmaterial. Daher werden über eine reine Materialparameterbeschreibung hinaus die für das Modell relevanten Grundlagen der Holzanatomie und des Baumwachstums dargestellt, aus der die Anisotropie des Materials sowie die Entstehung von Wachstumsspannungen resultiert. Anschließend werden die elastischen Materialkonstanten der gewachsenen, feuchten Holzmatrix bestimmt. Auf Basis von Literaturdaten werden orthotrope Parameter nahe dem Fasersättigungspunkt ermittelt und tabellarisch aufbereitet. Die so gewonnenen Parametersätze dienen in Kapitel 5 unmittelbar als Eingabe für das entwickelte numerische Modell.

³Das *primäre Wachstum* beschreibt die Längenzunahme der Triebe des Baumes, die durch Zellteilung und Zellstreckung erfolgt.

⁴Ein *thigmomorpher Reiz* bezeichnet eine mechanische Einwirkung auf eine Pflanze, die zu einer Anpassung ihres Wachstums führt.

Kapitel 4 behandelt den Ursprung, die Messung und die Modellierung von axialen Wachstumsspannungen. Ausgehend vom zellulären Aufbau der Holzmatrix werden die Mechanismen ihrer Entstehung hergeleitet. Anschließend werden in der Literatur eingesetzte experimentelle Messverfahren kategorisiert und bewertet. Verfügbare Oberflächenwerte axialer Eigenspannungen ausgewählter Baumarten werden zusammengeführt und tabellarisch aufbereitet. Abschließend werden 1D-Referenzmodelle vorgestellt – die analytischen Verläufe der axialen Eigenspannungen nach Kübler und Gillis sowie eine 1D-Akkumulationsformulierung –, die als Validierungsmaßstab für die mit dem entwickelten Modell berechneten Wachstumsspannungsverläufe dienen.

Kapitel 5 führt den Phasenfeldansatz zur Beschreibung des Baumwachstums und zur Akkumulation von Wachstumsspannungen ein und integriert die in den Kapiteln 2–4 entwickelten Modellkomponenten zu einem gekoppelten Gesamtmodell. Zunächst werden die Kopplung von Materialdichte und Phasenfeld sowie die Evolution des Phasenfelds spezifiziert; hierüber werden primäres, sekundäres sowie thigmomorphes Wachstum erfasst. Das Wachstum folgt einer eingeführten Morphologielinie, aus der zugleich die lokale Faserausrichtung abgeleitet wird; der Materialtensor wird entsprechend Kapitel 2 ausgerichtet. Aus der formulierten freien Energie werden Variations- und Evolutionsgleichungen hergeleitet, implizit zeitdiskretisiert und Newton-iterativ gelöst. Die Akkumulation axialer Eigendehnungen wird durch die Dehnungsmanipulation neuer Schichten und Manifestierung des Zustands durch ein Geschichtsfeld innerhalb des Modells beschrieben.

Kapitel 6 validiert das entwickelte Modell und demonstriert dessen Anwendung. Zunächst werden numerische Konsistenz- und Konvergenzstudien durchgeführt (Randbedingungen, Dynamik der diffusen Grenzfläche, Netzauflösung sowie Zeitschrittwahl). Die berechneten Verläufe der axialen Eigenspannungen werden mit den in Kapitel 4 eingeführten Referenzmodellen nach Kübler und Gillis quantitativ verglichen und validiert. Anschließend werden Anwendungsszenarien analysiert: ungestörtes Wachstum entlang der Morphologielinie, Wachstum unter Biegung infolge externer Lasten sowie Fälle mit thigmomorpher Verstärkung. Für jedes Szenario werden die zeitliche Entwicklung der Eigenspannungen, die resultierenden Spannungsprofile und deren Auswirkungen auf das Tragverhalten ausgewertet.

2 Materialbeschreibung von Faserwerkstoffen

Die mechanische Modellierung von Faserwerkstoffen erfordert aufgrund der ausgeprägten Anisotropie eine detaillierte Beschreibung des richtungsabhängigen Materialverhaltens. Ziel dieses Kapitels ist es, die konstitutiven Gleichungen sowie den zugehörigen Stoffgesetz-Tensor speziell für transversal-isotropes Materialverhalten herzuleiten.

Zunächst erfolgt die Herleitung der Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie, welche den Ausgangspunkt für alle weiteren Modellierungen darstellen. Weiterhin wird gezeigt, wie sich Eigendehnungen und die daraus resultierenden Eigenspannungen in das linear-elastische Modell integrieren lassen.

Für das Materialverhalten wird zunächst der Sonderfall eines idealisierten, isotropen und linear-elastischen Werkstoffs behandelt. Diese Referenz dient als Grundlage für die Erweiterung hin zu Materialien mit eingeschränkter Symmetrie. Darauf aufbauend folgt eine Einführung in das transversal-isotrope Materialmodell – zunächst in Form einer phänomenologischen Spannungs-Dehnungs-Formulierung und anschließend in einer energiebasierten Formulierung.

Die Orientierung der Fasern ist maßgeblich für die mechanische Reaktion des Werkstoffs. Der Einfluss der Faserrichtung auf die Materialantwort wird daher im weiteren Verlauf anhand eines Beispiels analysiert.

2.1 Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie

Ein vollständiges mechanisches Modell besteht aus der Beschreibung seiner Kinematik, der Gleichgewichtsbedingungen und dem Materialmodell.

- **Kinematik:**

Geometrische Beschreibung der Bewegung und der Verformung eines Körpers. Es wird ein Verzerrungsmaß definiert, um die Verformung zu erfassen.

- **Gleichgewicht:**

Leitet sich aus Betrachtungen zur Impuls- und Drehimpulserhaltung ab. Es wird die Wirkung von Kräften und Momenten auf den Körper betrachtet.

Beschreibt die werkstoffspezifische Beziehung zwischen Spannung und Verzerrung.

Diese drei Säulen des mechanischen Modells werden nachfolgend im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie ausgeführt und zur Beschreibung von Holz als näherungsweise transversal-isotropen Werkstoff explizit dargelegt.

Kinematik

Definition (materieller Körper). *Ein materieller Körper \mathcal{B} umfasse die Gesamtheit aller materiellen Punkte, die durch die Oberfläche $\partial\mathcal{B}$ begrenzt sind.*

Die Bewegung des materiellen Körpers wird durch die Bewegung seiner materiellen Punkte beschrieben. Jeder Punkt wird in der Referenzkonfiguration zum Zeitpunkt t_0 durch einen Ortsvektor $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}$ im euklidischen Raum E^3 identifiziert, siehe Abb. 2.1. Die Bewegung eines materiellen Punktes wird durch die Bewegungsfunktion χ dargestellt:

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(t) . \quad (2.1)$$

Hierbei beschreibt \mathbf{x} die momentane Position des Punktes, während $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ die Verschiebung in Bezug auf die Referenzkonfiguration angibt. Diese Lagrangesche Beschreibung ist in der Festkörpermechanik üblich, da sie die Bewegung der materiellen Punkte in Bezug auf ihre Ausgangslage verfolgt [34].

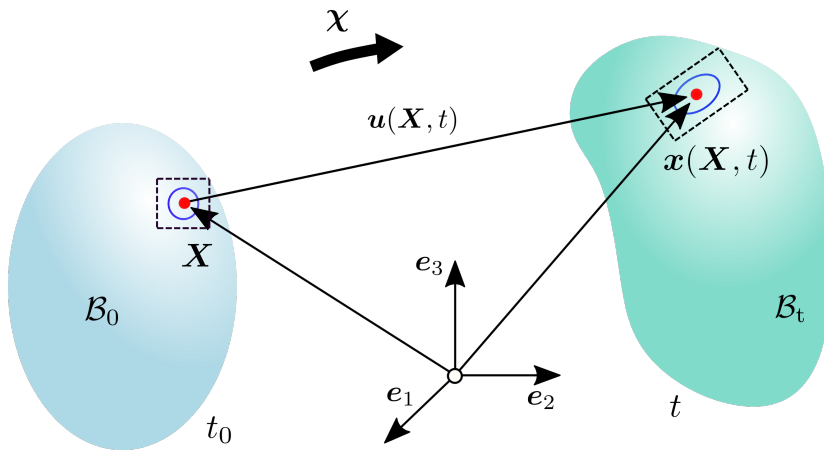


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung der Referenz- und Momentankonfiguration eines deformierbaren Körpers.

Der Deformationsgradient \mathbf{F} beschreibt die lokale Dehnung und Rotation in der unmittelbaren Umgebung des materiellen Punktes:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial (\mathbf{X} + \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{1} + \mathbf{H} , \quad (2.2)$$

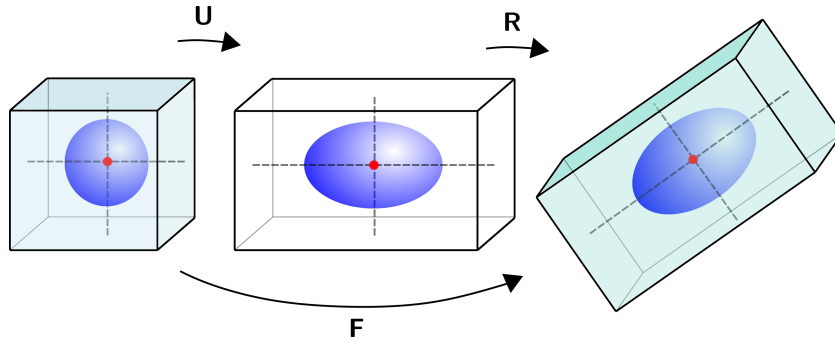


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung der Wirkung des Deformationsgradienten am Beispiel des Rechts-Strecktensors.

wobei $\mathbf{H} = \text{Grad}[\mathbf{u}] = u_{i,j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ der Verschiebungsgradient ist. Dies beschreibt eine Kombination aus einer linearen Transformation und einer möglichen Translation, wodurch Geraden, Ebenen und Parallelitäten erhalten bleiben, siehe Abb. 2.2. Da \mathbf{F} auch Rotation umfassen kann, ist \mathbf{F} im Allgemeinen nicht symmetrisch.

Damit eine Deformation physikalisch zulässig ist, muss die Jacobi-Determinante $J = \det[\mathbf{F}]$ strikt positiv sein, also $J > 0$. Dies garantiert die Invertierbarkeit des Deformationsgradienten und verhindert somit unzulässige Transformationen wie Volumenverlust, Spiegelungen oder Selbstdurchdringungen des Körpers.

Um Streckung und Rotation in der Deformation getrennt zu analysieren, wird die polare Zerlegung verwendet. Diese ist am Beispiel des Rechts-Strecktensors \mathbf{U} in Abb. 2.2 dargestellt. Der Deformationsgradient \mathbf{F} ist zerlegbar in das Produkt aus orthogonalem Rotationstensor $\mathbf{R} \in \text{SO}(3)$ und Strecktensor \mathbf{U} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} . \quad (2.3)$$

Da \mathbf{F} eine affine Abbildung ist, ist der Strecktensor \mathbf{U} symmetrisch und positiv definit. Er wird auch als Maß für die Verzerrung verwendet [34]. Dabei ist der Cauchy-Green-Tensor definiert als:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U})^\top \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^\top \cdot \mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^\top \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 , \quad (2.4)$$

und wird z. B. im Green-Lagrange-Verzerrungstensor \mathbf{E} genutzt:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) . \quad (2.5)$$

Die Tensoren \mathbf{C} und \mathbf{E} sind immer symmetrisch.

Bei kleinen Deformationen geht der Green-Lagrange-Verzerrungstensor in den klassischen linearen Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ über. Durch Einsetzen von Gl. (2.2) ergibt sich die

Darstellung:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{H}^\top + \mathbf{H} + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{H} \right) . \quad (2.6)$$

Für die Beschreibung kleiner Verformungen $\|\mathbf{H}\|_F \ll 1$ kann der quadratische Anteil $\mathbf{H}^\top \mathbf{H}$ vernachlässigt werden, woraus der lineare Verzerrungstensor folgt:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{Lin}[\mathbf{E}]_{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{H} + \mathbf{H}^\top \right) = \text{sym}[\mathbf{H}] . \quad (2.7)$$

Diese Annahme wird auch als geometrische Linearisierung bezeichnet [34].

Gleichgewicht

Am betrachteten Körper wird die Einhaltung des mechanischen Gleichgewichts gefordert. Dabei müssen die Gleichgewichtsbedingungen im Allgemeinen in der Momentan-konfiguration betrachtet werden. Da sich sowohl die Orientierung der Flächennormalen als auch die Integrationsbereiche \mathcal{B} und $\partial\mathcal{B}$ mit der Verformung ändern können, hängen die Gleichungen auch bei elastischem Materialverhalten in der Regel nichtlinear von den Verschiebungen ab [112]. Bei kleinen Verschiebungen und Dehnungen können alle relevanten Größen auf die unverformte Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0 bezogen werden. In diesem Zusammenhang ist es zulässig, Änderungen der Oberfläche, der Normalenrichtungen und des Volumens zu vernachlässigen, da deren Einfluss auf die Gleichgewichtsbedingungen vernachlässigbar klein ist.

Üblicherweise erfolgt eine Herleitung über die Bilanzsätze der Kontinuumsmechanik, wie z. B. in WRIGGERS [112] beschrieben. Da in der Elastizitätstheorie ausschließlich mechanisches Verhalten eines Körpers ohne zusätzliche physikalische Felder betrachtet wird, reichen das Kräftegleichgewicht (Impulsbilanz) und das Momentengleichgewicht (Drehimpulsbilanz) aus.

Satz (Impulssatz). *Der Impulssatz besagt, dass die zeitliche Änderung des Impulses $\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \frac{d}{dt}(m \cdot \dot{\mathbf{x}}) = \sum \mathbf{F}$ gleich der Summe aller auf den Körper wirkenden Kräfte sein muss.*

Bleibt die Masse m konstant, ergibt sich daraus das 2. Newtonsche Grundgesetz in der Form $\mathbf{F} = m \ddot{\mathbf{x}}$. Das Gleichgewicht für einen materiellen Körper lautet dann:

$$\int_{\mathcal{B}_0} \rho \ddot{\mathbf{x}} \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\mathcal{B}_0} \bar{\mathbf{t}} \, dA , \quad (2.8)$$

mit den D'Alembertschen Trägheitskräften $m \ddot{\mathbf{x}} = \rho V \ddot{\mathbf{x}}$, der Massendichte ρ , den Volumenkräften \mathbf{b} und der Oberflächentraktion $\bar{\mathbf{t}}$. Das Cauchysche Spannungstheorem

beschreibt, wie sich der wahre Spannungszustand in der aktuellen, verformten Konfiguration auf eine gegebene Schnittfläche oder den Rand projizieren lässt. Es stellt den Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ und dem dort wirkenden Spannungsvektor \boldsymbol{t} her:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} & t_i &= \sigma_{ik} n_k \\ \bar{\boldsymbol{t}} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\boldsymbol{n}} & \bar{t}_i &= \sigma_{ik} \bar{n}_k.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Im Kontext der linearen Elastizität ist es zulässig, den Cauchy-Spannungstensor für das Gleichgewicht in \mathcal{B}_0 zu verwenden, da sich die Oberflächennormalen gegenüber der unverformten Lage nur unwesentlich ändern. Für das Gleichgewicht folgt:

$$\int_{\mathcal{B}_0} \rho \ddot{\boldsymbol{x}} \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{b} \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0} \boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\boldsymbol{n}} \, dA. \quad (2.10)$$

Mithilfe des Divergenztheorems kann das Flächenintegral über den Rand $\partial \mathcal{B}_0$ in ein Volumenintegral über \mathcal{B}_0 überführt werden. Dadurch ergibt sich für das Gleichgewicht:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{B}_0} \rho \ddot{\boldsymbol{x}} \, dV &= \int_{\mathcal{B}_0} (\text{Div}[\boldsymbol{\sigma}] + \boldsymbol{b}) \, dV \\ \text{mit} \quad \text{Div}[\boldsymbol{\sigma}] &= \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial X_j} (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_k) \cdot \boldsymbol{e}_j = \sigma_{ij,j} \boldsymbol{e}_j.\end{aligned}\quad (2.11)$$

Dadurch werden die Randkräfte in das lokale Kräftegleichgewicht im Inneren des Körpers übertragen. Sie wirken dort als Quellen für die inneren Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$. Für einen im lokalen Gleichgewicht stehenden Körper bei rein statischen Untersuchungen muss dann $\text{Div}[\boldsymbol{\sigma}] + \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ gelten.

Neben dem linearen Kräftegleichgewicht muss ein mechanisches System auch das Momentengleichgewicht bzw. die Drehimpulsbilanz erfüllen, um vollständig im Gleichgewicht zu stehen.

Satz (Drehimpulsbilanz). *Die Drehimpulsbilanz besagt, dass die zeitliche Änderung des Drehimpulses $\frac{d}{dt} \boldsymbol{L}_O = \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\Theta}_O \cdot \boldsymbol{\omega}) = \sum \boldsymbol{M}$ bezüglich eines beliebigen Punktes O gleich der Summe der Momente bezüglich des Punktes O infolge aller auf den Körper wirkenden Kräfte sein muss.*

Ist der Trägheitstensor $\boldsymbol{\Theta}_O$ bezüglich des Punktes O wie bei der linearen Elastizität nahezu konstant, reduziert sich die Beziehung analog zum 2. Newtonschen Gesetz zu $\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{\Theta}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}$.

Für einen materiellen Körper \mathcal{B}_0 in der Referenzkonfiguration lautet die integrale Formulierung der Drehimpulsbilanz dann:

$$\int_{\partial \mathcal{B}_0} \boldsymbol{X}_P \times \bar{\boldsymbol{t}} \, dA + \int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{X}_P \times \boldsymbol{b} \, dV = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3. \quad (2.12)$$

Hierbei bezeichnet \mathbf{X}_P den Vektor des materiellen Punktes P bezüglich des Punktes O . Beschreibt man diesen Vektor mit den Ortsvektoren \mathbf{X} und \mathbf{X}_O , ergibt sich durch Einsetzen des Cauchyschen Spannungstheorems:

$$\int_{\partial\mathcal{B}_0} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_O) \times (\boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \, dA + \int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_O) \times \mathbf{b} \, dV = \mathbf{0}. \quad (2.13)$$

Die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes sowie der Produktregel auf das Oberflächenintegral führt nach weiterer Umformung zur Darstellung:

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{B}_0} 2 \operatorname{axl}[\operatorname{skew}[\boldsymbol{\sigma}]] + (\mathbf{X} - \mathbf{X}_O) \underbrace{(\operatorname{Div}[\boldsymbol{\sigma}] + \mathbf{b})}_{\mathbf{0}} \, dV = \mathbf{0}. \quad (2.14)$$

Dabei ist $\operatorname{axl}[\operatorname{skew}[\boldsymbol{\sigma}]]$ der axiale Vektor des schiefsymmetrischen Anteils des Spannungstensors. Für einen statischen Fall mit erfülltem lokalem Kräftegleichgewicht, also $\operatorname{Div}[\boldsymbol{\sigma}] + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ folgt die Forderung:

$$\operatorname{axl}[\operatorname{skew}[\boldsymbol{\sigma}]] = \mathbf{0} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^\top}. \quad (2.15)$$

Der Cauchy-Spannungstensor ist also symmetrisch.

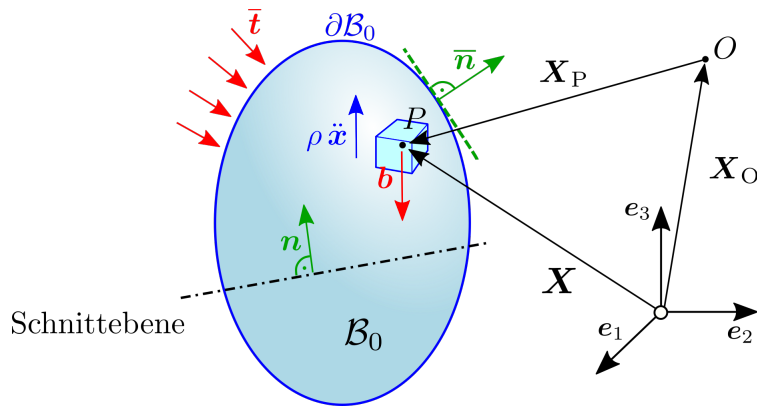


Abbildung 2.3: Darstellung eines Körpers in der Referenzkonfiguration mit Schnittebene zur Veranschaulichung der lokalen Impulsbilanz nach dem Cauchy-Theorem.

Materialverhalten

Die bisher betrachteten Prinzipien der Kinematik und des Gleichgewichts liefern die grundlegenden Gleichungen der linearen Elastizitätstheorie. Diese enthalten jedoch mehr Unbekannte (15 in E^3) als Gleichungen (9 in E^3) und sind daher ohne zusätzliche Materialgesetze unvollständig. Um ein Randwertproblem zu lösen, können

daher zusätzliche Zusammenhänge eingeführt werden, die die 6 Spannungen mit den 6 Verzerrungen in Verbindung setzt – die Material- oder konstitutiven Gleichungen.

Diese Gleichungen müssen in der Elastizitätstheorie grundlegende Anforderungen erfüllen:

- **Deterministik:** Das Materialverhalten soll durch das Modell eindeutig vorhersagbar sein. Mechanische Reaktionen beruhen nicht auf Zufall, sondern folgen den definierten Naturgesetzmäßigkeiten. Bei gleichen Belastungsfällen folgt dieselbe Materialantwort.
- **Lokale Wirkung:** Der Spannungszustand in einem Punkt wird ausschließlich durch die unmittelbare Umgebung beeinflusst und reicht aus, um das Verhalten zu beschreiben.
- **Materielle Objektivität:** Die konstitutiven Gleichungen müssen unabhängig von der Wahl des Bezugssystems sein. Nur wenn sich Spannung und Verzerrung bei einer Koordinatentransformation konsistent transformieren, ist das Materialgesetz objektiv und physikalisch zulässig:

$$\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^\top = f(\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{Q}^\top) . \quad (2.16)$$

Dieser Rotationstensor \mathbf{Q} gehört dabei zur speziellen orthogonalen Gruppe $SO(3)$ und erfüllt die Bedingungen $\det[\mathbf{Q}] = 1$ sowie $\mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^\top = \mathbf{1}$, was die Orthogonalität und Länge erhaltende, rein rotierende Wirkung ohne Spiegelung beschreibt.

Basierend auf den genannten Prinzipien lässt sich für linear-elastische Materialien ein konstitutives Modell formulieren, das auf einem skalaren Energiepotenzial beruht.

Es existiert eine skalare Tensorfunktion $W(\boldsymbol{\varepsilon})$, die als freie Energiefunktion bezeichnet wird. Die zugehörige Spannung ergibt sich dann durch:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} . \quad (2.17)$$

Die Energiefunktion W ist somit das Potenzialfeld des Spannungstensors. Die Spannung hängt nur vom aktuellen Zustand der Verzerrung ab - jedoch nicht von der Deformationsgeschichte oder -geschwindigkeit. Durch eine weitere Ableitung lässt sich der vierstufige Materialtensor definieren:

$$\mathbb{C} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial^2 W(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} , \quad (2.18)$$

wodurch sich in der linearen Elastizitätstheorie ein linearer Zusammenhang zwischen Spannung und Verzerrung ergibt:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (2.19)$$

Im euklidischen Raum E^3 enthält der Materialtensor $3^4 = 81$ Einträge. Da der Cauchy-Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^\top$ – wie in Gl. (2.15) gezeigt – symmetrisch ist und auch der lineare Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^\top$ per Definition Gl. (2.7) symmetrisch ist, gilt

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (2.20)$$

Dadurch reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Einträge in \mathbb{C} auf $6^2 = 36$. Die Indizes können dabei nach dem Schema:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{jilk} = C_{ijlk} \quad (2.21)$$

vertauscht werden. Daher darf z. B. eine Indextransformation, wie bei der Voigt-Notation oder der Nye-Notation mit:

$$\begin{aligned} 11 &\rightarrow 1, & 22 &\rightarrow 2, & 33 &\rightarrow 3, \\ 12 &\rightarrow 4, & 13 &\rightarrow 5, & 23 &\rightarrow 6, \end{aligned} \quad (2.22)$$

verwendet werden. Da auch die Reihenfolge der Ableitungen vertauschbar ist, besitzt der Materialtensor in der Nye-Notation eine Symmetrie [99]:

$$C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{klij}. \quad (2.23)$$

Für den Fall $ij = kl$ und unter Verwendung der Definition Gl. (2.22) ergeben sich sechs Einträge auf der Hauptdiagonalen des Materialtensors in Nye-Notation:

$$C_{op} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ & & & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} \\ \text{sym.} & & & & C_{1313} & C_{1323} \\ & & & & & C_{2323} \end{bmatrix}^N. \quad (2.24)$$

Für ein linear-elastisches, homogenes Material ergeben sich dadurch $(6^2 - 6)/2 + 6 = 21$ unabhängige Koeffizienten. Eine weitere Reduktion dieser 21 unabhängigen Einträge lässt sich durch die Einführung von Materialsymmetrien erreichen [26, 36].

Die detaillierten Eigenschaften der zugehörigen freien Energiefunktion W sind dann durch diese Materialsymmetrien der Funktion definiert, die in Abschnitt 2.3 zunächst für Isotropie und dann in Abschnitt 2.4 für transversale Isotropie identifiziert werden.

2.2 Irreversible Eigendehnungen

Rein elastische Materialien verformen sich unter Krafteinwirkung reversibel. Wirkt eine äußere Belastung, verformt sich das Material und bei Entlastung kehrt es vollständig in den Ausgangszustand zurück – es treten keine bleibenden Dehnungen ($\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$) oder Spannungen ($\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$) auf.

Eigendehnungen sind kinematische Zwangszustände eines Körpers, die auch ohne äußere Belastung Spannungen erzeugen. Sie entstehen infolge irreversibler Vorgänge, beispielsweise bei Plastizität durch mikroskopische Verschiebungen des Materialgitters infolge Überschreitung der Streckgrenze oder wie in dieser Arbeit durch den Zuwachs, die Streckung und die anschließende Festigung der Form neuer Zellen in der Holzmatrix.

Es wird eine irreversible Eigendehnung $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$ eingeführt, wie sie etwa in der additiven Plastizitätstheorie verwendet wird [64]. Die Gesamtdéhnung setzt sich dann aus einem elastischen Anteil und inelastischen Eigendéhnungen zusammen:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ges}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 . \quad (2.25)$$

Die zugehörigen Spannungen ergeben sich aus dem konstitutiven Gesetz:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}} = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ges}} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0) . \quad (2.26)$$

Auch im unbelasteten Fall – d. h. wenn die gesamte Déhnung allein aus der Eigendéhnung besteht – können infolge inkompatibler Randbedingungen Eigen- bzw. Restspannungen entstehen, die lokal im Gleichgewicht stehen:

$$\text{Div}[\mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ges}} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0)] + \mathbf{b} = \mathbf{0} . \quad (2.27)$$

Solange das Materialverhalten linear-elastisch bleibt und die Eigendéhnungen nicht wie in der Plastizität inkrementell über eine Fließbedingung bestimmt werden müssen, sondern z. B. durch Messung oder Modellannahmen vorgegeben sind, kann die lineare Elastizitätstheorie auch für die Beschreibung von Eigenspannungen verwendet werden. Die Linearität und Reversibilität des Stoffgesetzes bleibt dabei erhalten – irreversibel ist allein der geometrisch vorgegebene, inelastische Verzerrungsanteil. Daher wird hier weiterhin linear-elastisches Materialverhalten betrachtet.

2.3 Isotrope linear-elastische Materialien

Die Kinematik liefert eine Grundlage zur Identifikation der Materialsymmetrien. Es sei eine Starrkörperbewegung innerhalb der Referenzkonfiguration durch eine Translation

um \mathbf{y} und eine Rotation mit dem orthogonalen Tensor \mathbf{Q} , $\mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{1}$ beschrieben, siehe Abb. 2.4:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{y} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X} = \mathbf{Q}^\top \cdot (\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{y}) . \quad (2.28)$$

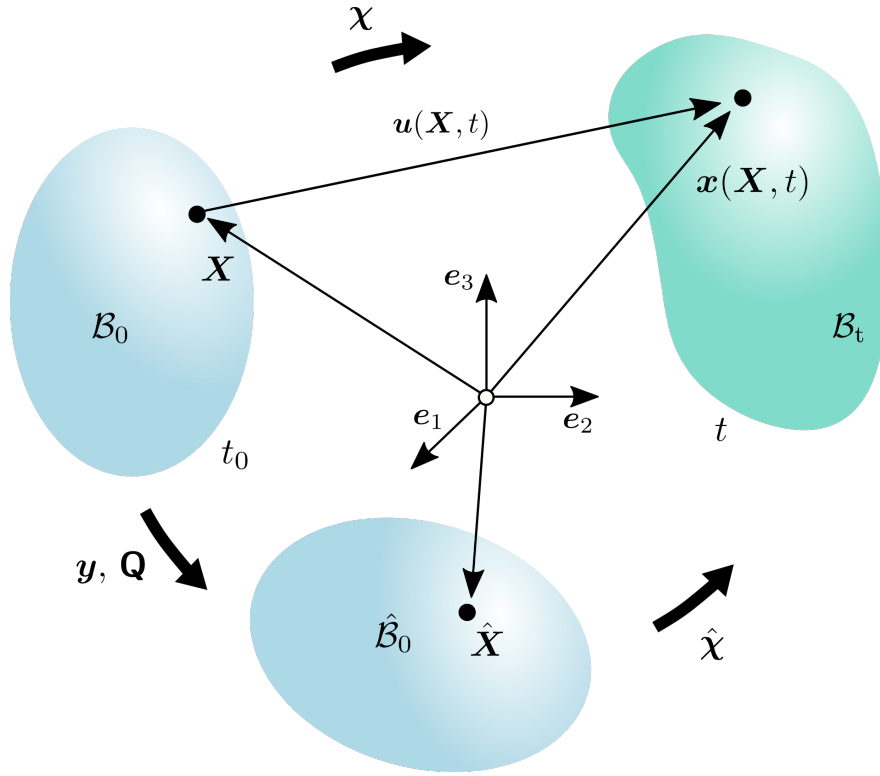


Abbildung 2.4: Einführung einer Starrkörperbewegung der Referenzkonfiguration.

Die Momentankonfiguration \mathcal{B} wird von $\hat{\mathcal{B}}_0$ über die Bewegungsfunktion $\hat{\chi}$ erreicht:

$$\mathbf{x} = \hat{\chi}(\mathbf{X}, t) . \quad (2.29)$$

Da sich bei einer reinen Starrkörperbewegung keine Deformationen ergeben, folgt der Deformationsgradient $\hat{\mathbf{F}}$ ausschließlich aus dem Rotationsanteil \mathbf{Q} :

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{\partial \hat{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial \hat{\mathbf{X}}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \hat{\mathbf{X}}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\mathbf{Q}^\top \cdot (\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{y})}{\partial \hat{\mathbf{X}}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^\top . \quad (2.30)$$

Nach einer Starrkörperbewegung gemäß Gl. (2.30) transformiert sich der rechte Cauchy-Green-Tensor \mathbf{C} wie folgt:

$$\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{F}}^\top \cdot \hat{\mathbf{F}} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^\top)^\top \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}^\top, \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{SO}(3) . \quad (2.31)$$

Da der Green-Lagrange-Verzerrungstensor \mathbf{E} als Funktion von \mathbf{C} definiert ist:

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{C}} - \mathbf{1}), \quad (2.32)$$

ergibt sich seine Transformation unter einer Starrkörperbewegung direkt als:

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}^\top. \quad (2.33)$$

Die Invarianz der Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ unter orthogonalen Transformationen $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}^\top = \mathbf{1}$ sichert hierbei die Korrektheit der Beziehung. Unter geometrischer Linearisierung ergibt sich dann:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{Q}^\top. \quad (2.34)$$

Für ein isotropes Material muss die gespeicherte Energie unabhängig von der Orientierung des Körpers sein. Dies bedeutet, dass die Formänderungsenergiedichte $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ invariant bleibt, obwohl die Referenzkonfiguration durch eine beliebige Starrkörperrotation verändert wurde:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = W(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) = W(\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{Q}^\top). \quad (2.35)$$

Gilt die Bedingung Gl. (2.35) für alle Rotationen $\mathbf{Q} \in \text{SO}(3)$, so handelt es sich um ein isotropes Material. Ist die Invarianz lediglich für eine Untergruppe $g_R \subset \text{SO}(3)$ erfüllt, liegt ein anisotropes Material vor. Die in Gl. (2.35) formulierte Isotropiebedingung wird erfüllt, wenn die Formänderungsenergiedichte W ausschließlich von den Hauptinvarianten von $\boldsymbol{\varepsilon}$ abhängt. Diese bleiben unter einer Koordinatentransformation $\mathbf{Q} \in \text{SO}(3)$ unverändert und lauten im euklidischen Raum E^3 :

$$I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad I_2 = \frac{1}{2} (\text{tr}^2(\boldsymbol{\varepsilon}) - \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)), \quad I_3 = \det[\boldsymbol{\varepsilon}]. \quad (2.36)$$

Im Rahmen der linearen Elastizität ist die Energiedichte eine quadratische Funktion der Verzerrung. Da die Hauptinvariante I_3 von dritter Ordnung in $\boldsymbol{\varepsilon}$ ist, bleibt diese Invariante unberücksichtigt. Eine Alternative zu I_2 bietet die ebenfalls rotationsinvariante Skalargröße

$$J_2 = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2). \quad (2.37)$$

Aufgrund der Beziehung $I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - J_2)$ können beide Größen äquivalent verwendet werden. Die Energie kann dann ausschließlich als Funktion der Invarianten I_1, J_2 formuliert werden: $W(I_1(\boldsymbol{\varepsilon}), J_2(\boldsymbol{\varepsilon}))$. Sie hängt somit nur von den Invarianten der Verzerrung ab und ist daher unabhängig von der Orientierung des Materials im Raum.

Das klassische Hookesche Gesetz der linearen Elastizität erfüllt diese Kriterien mit [99]:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mu \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^2] + \frac{\lambda}{2} \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}]^2 . \quad (2.38)$$

Die Spannungen ergeben sich dann zu:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] \mathbf{1} \quad (2.39)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{mm} \delta_{ij} . \quad (2.40)$$

Damit beschränken sich alle Einträge im Materialtensor \mathbb{C} letztendlich auf diese zwei Lamé-Konstanten μ und λ :

$$C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} (2\mu \varepsilon_{ij}) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} (\lambda \varepsilon_{mm} \delta_{ij}) = 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \lambda \delta_{kl} \delta_{ij} \quad (2.41)$$

$$\mathbb{C} = 2\mu \mathbb{I} + \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}. \quad (2.42)$$

Hierbei ist \mathbb{I} der Einheitstensor vierter Stufe: $\mathbb{I} = \delta_{ik} \delta_{jl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$.

2.4 Transversal-isotrope linear-elastische Materialien

Phänomenologische Spannungs-Dehnungs-Formulierung

Ausgehend von einer direkten Spannungs-Dehnungs-Beziehung, wie sie sich auch aus experimentellen Beobachtungen ergeben kann, werden die Komponenten in Nye-Notation in einer kartesischen Basis formuliert. Als Grundlage dient ein orthotropes Materialverhalten, bei dem das mechanische Verhalten entlang dreier bevorzugter, orthogonaler Richtungen unterschiedlich ausgeprägt ist. Die zugrunde liegende Symmetriegruppe g_R beschreibt alle Transformationen, unter denen sich das Materialverhalten nicht verändert. Für Orthotropie lautet diese Gruppe:

$$g_R = \{-\mathbf{1}, \mathbf{Q}_1^\pi, \mathbf{Q}_2^\pi\} , \quad (2.43)$$

- wobei
- \mathbf{Q}_1^π die Drehung um die 1-Achse um π ,
 - \mathbf{Q}_2^π die Drehung um die 2-Achse um π ,
 - $-\mathbf{1}$ eine Inversion (Spiegelung an allen Achsen)
 - \mathbf{Q}_3^π mit $\mathbf{Q}_3^\pi = \mathbf{Q}_1^\pi \cdot \mathbf{Q}_2^\pi$ die Drehung um die 3-Achse um π beschreibt.

Diese Einschränkung reduziert die Anzahl der unabhängigen Materialparameter. Bei orthotropem Materialverhalten enthält die Nachgiebigkeitsmatrix 9 Konstanten und es gelten die Relationen:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} , \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3} , \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3} . \quad (2.44)$$

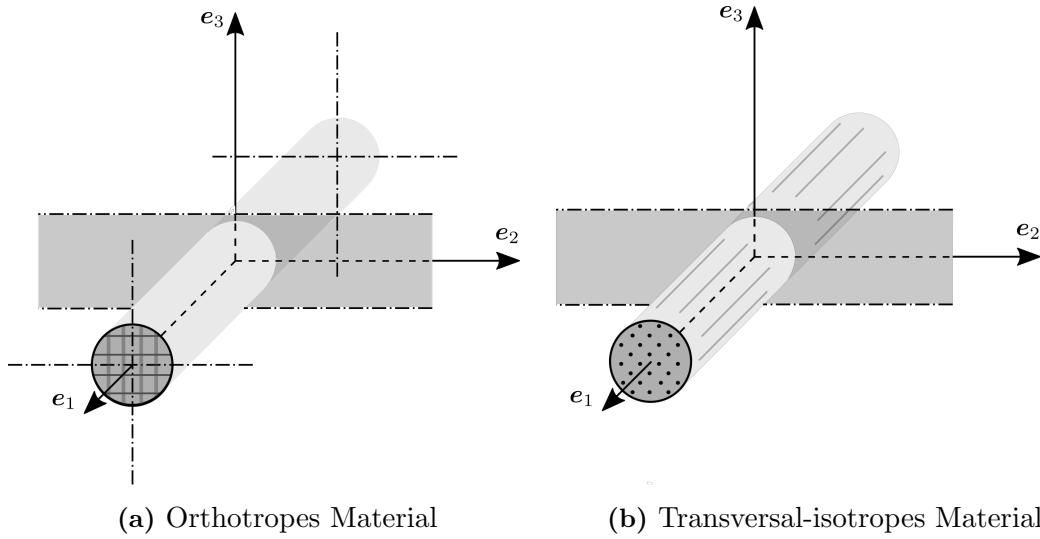


Abbildung 2.5: Innere Struktur und Symmetrieachsen der Richtungsabhängigkeit des Materials im Basissystem e_1, e_2, e_3 .

Es verbleiben drei Elastizitätsmoduln E sowie drei Schubmoduln G und drei Querkontraktionen ν :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Während die Schubmoduln mit der Einheit der Spannung behaftet sind, ist das Maß der Querkontraktion dimensionslos. Die Querkontraktionszahl ν_{ij} ist definiert als das negative Verhältnis der in j -Richtung gemessenen Dehnung ε_{jj} zur in i -Richtung aufgebrauchten Dehnung ε_{ii} :

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_{jj}}{\varepsilon_{ii}}. \quad (2.46)$$

Die einzelnen Materialkonstanten aus Gl. (2.45) lassen sich durch geeignete Experimente bestimmen. Im Spannungs-Dehnungs-Verhältnis bei einem homogenen Zugversuch in die 11-Richtung berechnet sich beispielsweise eine Dehnung in die 22-Richtung demnach durch:

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11}. \quad (2.47)$$

Die transversale Isotropie ist ein Sonderfall der Orthotropie. Es gibt gegenüber der Orthotropie nur eine Vorzugsrichtung. In alle anderen Richtungen orthogonal zur Primärachse ist das Verhalten rotationssymmetrisch. Diese erhöhte Symmetrie zeigt sich in einer erweiterten Symmetriegruppe:

$$g_R = \left\{ -\mathbf{1}, \mathbf{Q}_1^\beta, \mathbf{Q}_2^\pi \right\} . \quad (2.48)$$

Statt einer Rotation um π ist eine beliebige Drehung $\beta \in [-\pi, \pi]$ um die Achse der Vorzugsrichtung erlaubt. Diese rotationssymmetrische Eigenschaft bedingt, dass das Material in Radial- und Tangentialrichtung identisches mechanisches Verhalten zeigen muss. Liegt die Faserrichtung des transversal-isotropen Materials in \mathbf{e}_1 -Richtung des kartesischen Koordinatensystems, wie in Abb. 2.5b, ergeben sich folgende Symmetriebedingungen:

$$E_2 = E_3 , \quad G_{12} = G_{13} , \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu , \quad \nu_{21} = \nu_{31} , \quad \nu_{23} = \nu_{32} . \quad (2.49)$$

Diese Symmetrien ermöglichen eine Neubezeichnung der Materialparameter entsprechend ihrer Richtung:

- Longitudinal zur Faserrichtung:

$$E_1 = E_L \quad G_{12} = G_{13} = G_L, \quad (2.50)$$

- Transversal:

$$\begin{aligned} E_2 = E_3 = E_T , \quad G_{23} = G_T , \\ \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{LT} , \quad \nu_{21} = \nu_{31} = \nu_{TL} = \frac{E_T}{E_L} , \quad \nu_{23} = \nu_{32} = \nu_{TT} . \end{aligned} \quad (2.51)$$

Durch die Isotropieannahme in der Querschnittsebene ergibt sich für den Schubmodul G_T die Beziehung:

$$G_T = \frac{E_T}{2(1 + \nu_{TT})} \rightarrow \nu_{TT} = \frac{E_T}{2G_T} - 1 . \quad (2.52)$$

Damit lässt sich die Spannungs-Dehnungs-Beziehung in der \mathbf{e}_1 -Ausrichtung folgendermaßen schreiben:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_{TT}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_L} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & \frac{1}{G_L} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} . \quad (2.53)$$

Das mechanische Verhalten eines transversal-isotropen Materials ist demnach vollständig durch fünf unabhängige Materialparameter beschrieben: E_L , E_T , ν_{LT} , G_L und G_T .

Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung in Gl. (2.53) ist unter Einhaltung folgender Stabilitätskriterien invertierbar:

$$\begin{aligned} E_L, E_T, G_L, G_T &> 0 \\ |\nu_{TT}| < 1, |\nu_{LT}| &< \sqrt{\frac{E_L}{E_T}} \\ |\nu_{TL}| &< \sqrt{\frac{E_T}{E_L}} \\ 1 - \nu_{LT}\nu_{TL} &> 0, 1 - \nu_{TT}^2 > 0 \\ (1 - \nu_{TT} - 2\nu_{LT}\nu_{TL})(1 + \nu_{TT}) &> 0. \end{aligned}$$

Durch eine Invertierung ergibt sich die Beziehung:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & 2\nu_{LT}(\lambda + G_T) & 2\nu_{LT}(\lambda + G_T) & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2G_T & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2G_T & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_L & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & G_L & 0 \\ & & & & & G_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

$$\text{mit } \lambda = \frac{\nu_{LT}\nu_{TL} + \nu_{TT}}{(1 - \nu_{TT} - 2\nu_{LT}\nu_{TL})(1 + \nu_{TT})} E_T \text{ und } C_{11} = \frac{1 - \nu_{TT}}{1 - \nu_{TT} - 2\nu_{LT}\nu_{TL}} E_L.$$

Neben der phänomenologischen Spannungs-Dehnungs-Formulierung lässt sich das linear-elastische Materialverhalten transversal-isotroper Werkstoffe auch aus einer invariantenbasierten Herleitung auf Grundlage des linearen Verzerrungstensors beschreiben.

Energiepotenzialbasierte Formulierung der transversalen Isotropie

Ein transversal-isotropes Materialverhalten liegt dann vor, wenn die Formänderungsenergie unter einer eingeschränkten Gruppe von Rotationstensenoren invariant bleibt. Diese Symmetriegruppe lautet $g_R = \{-\mathbf{1}, \mathbf{Q}_1^\beta, \mathbf{Q}_2^\pi\}$ [36]. Dabei beschreibt \mathbf{Q}_1^β alle Drehungen um die Faserrichtungsschse mit $\beta \in [-\pi, \pi]$, während $\mathbf{Q}_{2,3}^\pi$ Drehungen um eine zur Faserachse senkrechte Achse umfasst – beide beeinflussen

die Energie nicht. Der Tensor $-\mathbf{1}$ steht für eine Inversion aller Raumrichtungen, die nicht zur Gruppe $SO(3)$ gehört.

Um die bevorzugte Materialrichtung in einem transversal-isotropen Werkstoff zu erfassen, wird in der Referenzkonfiguration ein Einheitsvektor \mathbf{a}_0 eingeführt. Dieser beschreibt die Orientierung der Faserstruktur in \mathcal{B}_0 . Deformationen transformieren \mathbf{a}_0 in die Momentankonfiguration \mathbf{a} gemäß:

$$\alpha \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{a}_0(\mathbf{X}), \quad (2.55)$$

wobei α als Streckverhältnis bezeichnet wird [42]. Um die Änderung dieser Faserlänge quantifizierbar zu machen, wird das Quadrat der Streckung in Bezug zum Green-Lagrange-Verzerrungstensor gesetzt:

$$\frac{1}{2}(\alpha^2 - 1) = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_0 - 1) = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_0. \quad (2.56)$$

Für kleine Deformationen gilt $\mathbf{E} \approx \boldsymbol{\varepsilon}$, sodass sich der Ausdruck vereinfachen lässt zu:

$$\frac{1}{2}(\alpha^2 - 1) = \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{a}_0. \quad (2.57)$$

Zur kompakten Darstellung werden oft sogenannte Strukturvariablen verwendet – im Fall der transversalen Isotropie ist dies der symmetrische Tensor zweiter Stufe \mathbf{M} [36]:

$$\mathbf{M} = \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0. \quad (2.58)$$

Damit lässt sich Gl. (2.56) auch als Spurformulierung schreiben:

$$\frac{1}{2}(\alpha^2 - 1) = \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}]. \quad (2.59)$$

Die Formänderungsenergie hängt dann nicht nur von der Verzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}$, sondern auch von der Strukturvariable \mathbf{M} ab:

$$W = W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{M}). \quad (2.60)$$

Diese Energieformulierung muss invariant gegenüber Transformationen aus der Symmetriegruppe g_R des Materials bleiben. Wird das Material samt Faserrichtung mit einem Rotationstensor $\mathbf{Q} \in g_R$ gedreht, ergibt sich für die Faserrichtung $\hat{\mathbf{a}}_0 = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_0$.

Es werden zusätzliche sogenannte Pseudo-Invarianten benötigt, um die Ausrichtung des Körpers in der Formänderungsenergie zu beschreiben:

$$I_4(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{a}_0) = \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{a}_0 = \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}], \quad I_5(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{a}_0) = \mathbf{a}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^2 \cdot \mathbf{a}_0 = \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^2 \cdot \mathbf{M}]. \quad (2.61)$$

Die Invarianten I_1, I_2 bzw. J_2 sowie I_3 sind die unter der Rotationsgruppe $SO(3)$ invarianten Hauptinvarianten des Verzerrungstensors im euklidischen Raum E^3 , siehe Gl. (2.36); im linearen elastischen Fall genügt die Abhängigkeit der Energiedichte von I_1, J_2 . Die freie Energie für ein transversal-isotropes, linear-elastisches Material lautet dann:

$$W = W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{M}) = W(I_1(\boldsymbol{\varepsilon}), J_2(\boldsymbol{\varepsilon}), I_4(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{a}_0), I_5(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{a}_0)) . \quad (2.62)$$

Die Deformationsenergie kann auch direkt in Abhängigkeit der linearen Verzerrungstensor-Komponenten ε_{ij} angegeben werden. Hierzu wird die Energiedichte $W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{M})$ als Summe der integrierten Spannungskomponenten über die Verzerrungskomponenten ausgedrückt:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{M}) = \sum \int \sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij} . \quad (2.63)$$

Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung in Nye-Notation lautet, vgl. Abschnitt 2.4:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_{ti}^N \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix}^N = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}^N \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{bmatrix}^N . \quad (2.64)$$

Durch Integration der Spannungen über die entsprechenden Dehnungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int \sigma_{11} \cdot d\varepsilon_{11} &= \frac{1}{2} C_{11} \varepsilon_{11}^2 + C_{12} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + C_{13} \varepsilon_{11} \varepsilon_{33} , \\ \int \sigma_{22} \cdot d\varepsilon_{22} &= \frac{1}{2} C_{22} \varepsilon_{22}^2 + C_{21} \varepsilon_{22} \varepsilon_{11} + C_{23} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} , \\ \int \sigma_{33} \cdot d\varepsilon_{33} &= \frac{1}{2} C_{33} \varepsilon_{33}^2 + C_{31} \varepsilon_{33} \varepsilon_{11} + C_{32} \varepsilon_{33} \varepsilon_{22} , \\ \int \sigma_{12} \cdot d\varepsilon_{12} &= C_{44} \varepsilon_{12}^2 , \\ \int \sigma_{13} \cdot d\varepsilon_{13} &= C_{55} \varepsilon_{13}^2 , \\ \int \sigma_{23} \cdot d\varepsilon_{23} &= C_{66} \varepsilon_{23}^2 . \end{aligned} \quad (2.65)$$

Unter Berücksichtigung der Hauptfaserrichtung $a_0 \mathbf{e}_1$ liegt die entsprechende Materialsymmetrie vor und es gilt:

$$C_{44} = C_{55} , \quad C_{12} = C_{13} = C_{21} = C_{31} , \quad C_{22} = C_{33} . \quad (2.66)$$

Damit ergibt sich die Formänderungsenergie als Summe dieser Anteile:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}C_{11}\varepsilon_{11}^2 + \frac{1}{2}C_{22}(\varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) + 2C_{66}\varepsilon_{23}^2 + C_{23}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} \\ + C_{12}(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\varepsilon_{11} + 2C_{44}(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2) . \quad (2.67)$$

Mithilfe der Beziehung $C_{66} = (C_{22} - C_{23})/2$ und der ersten binomischen Formel entsteht die Umformung:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}C_{11}\varepsilon_{11}^2 + \frac{1}{2}C_{22}(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 + (C_{23} - C_{22})(\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{23}^2) \\ + C_{12}(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\varepsilon_{11} + 2C_{44}(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2) . \quad (2.68)$$

Auch hier lassen sich die Invarianten und Pseudo-Invarianten der transversalen Isotropie für eine in \mathbf{e}_1 ausgerichtete Faserrichtung mit der Strukturvariable $\mathbf{M} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$ identifizieren:

$$\begin{aligned} \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] &= \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} , \\ \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^2] &= \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + 2\varepsilon_{12}^2 + 2\varepsilon_{13}^2 + 2\varepsilon_{23}^2 , \\ \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}] &= \varepsilon_{ij}M_{ji} = \varepsilon_{11} , \\ \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^2\mathbf{M}] &= \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}M_{ki} = \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 . \end{aligned} \quad (2.69)$$

Die Energiefunktion für Isotropie wird zunächst in Abhängigkeit der Invarianten des linearen Verzerrungstensors betrachtet:

$$\begin{aligned} W(\boldsymbol{\varepsilon})_{\text{iso}} &= \frac{\lambda}{2}(\text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}])^2 + \mu \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^2] \\ &= \left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 \\ &\quad + 2\mu(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}) . \end{aligned} \quad (2.70)$$

Eine Aufteilung der Anteile für die transversal-isotrope Ebene 2-3:

$$\begin{aligned} W(\boldsymbol{\varepsilon})_{\text{iso}} &= \frac{\lambda}{2}(\text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}])^2 + \mu \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^2] \\ &= \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 + 2\mu(\varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{11}^2 + 2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 2\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}) + 2\mu(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 - \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}\varepsilon_{33}) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 + 2\mu(\varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11}^2 + \lambda(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\varepsilon_{11} + 2\mu(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2) , \end{aligned} \quad (2.71)$$

zeigt bereits an dieser Stelle, dass sich das Material in dieser Ebene isotrop verhält.

Dies wird durch die Materialparameter:

$$C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\mu_{\text{T}} \quad \text{bzw.} \quad C_{22} = C_{33} = \lambda + 2G_{\text{T}} \quad (2.72)$$

sowie durch die Beziehung:

$$(C_{22} - C_{23}) = 2\mu_T \quad (2.73)$$

bestätigt. Diese Zusammenhänge entsprechen der Definition der Spannungs-Dehnungs-Beziehung aus Gl. (2.54). In der bisherigen Formulierung ist jedoch zu viel Schubenergie in Faserrichtung enthalten, da sich der folgende Anteil bereits in der Energie befindet:

$$2\mu_T \operatorname{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^2 \mathbf{M}] = 2\mu_T \varepsilon_{11}^2 + 2\mu_T (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2) . \quad (2.74)$$

Der Term $-\mu_T \varepsilon_{11}^2$ muss daher mit anderen Invarianten verrechnet werden. Weiterhin muss der gleiche Anteil für die Faserrichtung mit dem Schubmodul für die Longitudinalrichtung ergänzt werden:

$$2\mu_L \operatorname{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^2 \mathbf{M}] = 2\mu_L \varepsilon_{11}^2 + 2\mu_L (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2) . \quad (2.75)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit Gl. (2.68), so lässt sich direkt erkennen, dass für den Materialkoeffizienten $C_{44} = \mu_L$ gilt. Zusätzlich muss der Anteil $+2\mu_L \varepsilon_{11}^2$ verrechnet werden. Es ergibt sich durch diese Betrachtung erneut die bekannte Beziehung:

$$C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\mu_T . \quad (2.76)$$

Die zuvor beschriebenen Maßnahmen passen die Schubanteile der 2-3 Ebene einer vollständigen Isotropie so an, dass sie zu einer transversal-isotropen Materialantwort passen. Die resultierende korrigierte Form der Deformationsenergiedichte lautet:

$$\begin{aligned} W(\boldsymbol{\varepsilon})_{\text{tr,iso,shear}} &= \frac{\lambda}{2} (\operatorname{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}])^2 + \mu_T \operatorname{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^2] + (2\mu_T - 2\mu_L) \operatorname{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^2 \mathbf{M}] \\ &= \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu_T) (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 + 2\mu_T (\varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu_L - \mu_T) \varepsilon_{11}^2 + 2\mu_L (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2) + \lambda (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \varepsilon_{11} . \end{aligned} \quad (2.77)$$

Um die Querschubverzerrungen in Faserrichtung sowie die Verzerrungsenergie entlang der Faser korrekt zu erfassen, müssen weitere Terme in die Deformationsenergiedichte aufgenommen werden.

Diese zusätzlichen Anteile sind:

- Ein Querschub-Term für die Faserrichtung:

$$a \operatorname{tr}[\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}] \operatorname{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] , \quad (2.78)$$

der die Wechselwirkung zwischen der durchschnittlichen Dehnung und der Dehnung entlang der Faserrichtung beschreibt.

- Ein Verzerrungsenergie-Term für die Faserrichtung:

$$\frac{b}{2} (\operatorname{tr}[\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}])^2 , \quad (2.79)$$

der die rein longitudinale Verzerrungsenergie entlang der Faser erfasst, welche unabhängig von den anderen Spannungs-Dehnungs-Kopplungen betrachtet werden muss.

Mit den zuvor eingeführten zusätzlichen Termen für die Querschubverzerrung in Faserrichtung und der Verzerrungsenergie entlang der Faser ergibt sich nun die vollständige Form der Deformationsenergiedichte für ein linear-elastisches transversal-isotropes Material:

$$\begin{aligned} W(\boldsymbol{\varepsilon})_{\text{tr,iso}} &= \frac{\lambda}{2} (\operatorname{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}])^2 + \mu_{\text{T}} \operatorname{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^2] + (2\mu_{\text{T}} - 2\mu_{\text{L}}) \operatorname{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^2 \mathbf{M}] \\ &\quad + a \operatorname{tr}[\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}] \operatorname{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] + \frac{b}{2} (\operatorname{tr}[\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}])^2 \\ &= \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu_{\text{T}}) (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 + 2\mu_{\text{T}} (\varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (b + 2a + \lambda + 2\mu_{\text{L}} - \mu_{\text{T}}) \varepsilon_{11}^2 \\ &\quad + 2\mu_{\text{L}} (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2) + (a + \lambda) (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \varepsilon_{11} . \end{aligned} \quad (2.80)$$

Diese Energiefunktion beschreibt vollständig die elastische Reaktion eines transversal-isotropen Materials, indem sie sowohl die Isotropie in der transversalen Ebene, als auch die Richtungsabhängigkeit der Faserorientierung berücksichtigt. Hier lassen sich nun auch die verbleibenden Materialkonstanten für die Primärrichtung (Faserrichtung) identifizieren. Diese ergeben sich als:

$$C_{11} = b + 2a + \lambda + 2\mu_{\text{L}} - \mu_{\text{T}} , \quad (2.81)$$

$$C_{12} = (a + \lambda) . \quad (2.82)$$

Zur Bestimmung der Spannungen wird die fest vorgegebene Materialstruktur $\mathbf{M} = \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0$ nicht variiert. Daher ergibt sich der zweistufige Cauchy-Spannungstensor allein aus der partiellen Ableitung der Deformationsenergie nach den Verzerrungen:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{M})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial W(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial W(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial W(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial I_4} \frac{\partial I_4}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial W(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial I_5} \frac{\partial I_5}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} . \quad (2.83)$$

Hierbei lauten die Ableitungen der Invarianten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{\partial \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}]}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial \varepsilon_{op}} \mathbf{e}_o \otimes \mathbf{e}_p = \delta_{op} \mathbf{e}_o \otimes \mathbf{e}_p = \mathbf{1} , \\
\frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{\partial \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^2]}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji}}{\partial \varepsilon_{op}} \mathbf{e}_o \otimes \mathbf{e}_p = (\delta_{io} \delta_{jp} \varepsilon_{ji} + \varepsilon_{ij} \delta_{jo} \delta_{ip}) \mathbf{e}_o \otimes \mathbf{e}_p = 2 \boldsymbol{\varepsilon} , \\
\frac{\partial I_4}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{\partial \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}]}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \varepsilon_{ij} M_{ji}}{\partial \varepsilon_{op}} \mathbf{e}_o \otimes \mathbf{e}_p = \delta_{io} \delta_{jp} M_{ji} \mathbf{e}_o \otimes \mathbf{e}_p = \mathbf{M}^\top = \mathbf{M} , \\
\frac{\partial I_5}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{\partial \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^2 \mathbf{M}]}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \varepsilon_{op}} \varepsilon_{jk} + \varepsilon_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial \varepsilon_{op}} \right) M_{ki} \mathbf{e}_o \otimes \mathbf{e}_p \\
&= (M_{ok}^\top \varepsilon_{kp}^\top + \varepsilon_{oi}^\top M_{ip}^\top) \mathbf{e}_o \otimes \mathbf{e}_p = \mathbf{M} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M} .
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Mit den aufgelösten Ableitungen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial W(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \lambda \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] \mathbf{1} + 2\mu_T \boldsymbol{\varepsilon} + (2\mu_T - 2\mu_L)(\mathbf{M} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}) \\
&\quad + a (\text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] \mathbf{M} + \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}] \mathbf{1}) + b \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}] \mathbf{M} .
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Weiterhin kann durch Ableitung des Spannungstensors nach dem linearen Verzerrungstensor der vierstufige symmetrische Materialtensor für transversale Isotropie bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_{ti} &= \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \lambda (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + 2\mu_T \mathbb{I} \\
&\quad + b (\mathbf{M} \otimes \mathbf{M}) + (2\mu_T - 2\mu_L) \frac{\partial (\mathbf{M} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + a (\mathbf{M} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{M}) .
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Mit $A(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{M} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}$ gilt in Indexnotation

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = M_{ik} \delta_{jl} + \delta_{ik} M_{lj} . \tag{2.87}$$

2.5 Ausrichtung des Materialtensors

Um die richtungsabhängigen Materialeigenschaften korrekt abzubilden, ist es notwendig die Orientierung des Materials im Raum durch eine Rotation der kartesischen Basis \mathbf{e}_i in ein lokales Materialkoordinatensystem \mathbf{d}_i zu beschreiben. Dabei repräsentiert \mathbf{a}_0 die Hauptfaserrichtung des Materials, gemessen im globalen (kartesischen) Koordinatensystem:

$$\mathbf{a}_0 = (a_0)_i \mathbf{e}_i . \tag{2.88}$$

Das lokale Materialkoordinatensystem \mathbf{d}_i ist mit $\mathbf{d}_1 = \mathbf{a}_0$ in die Hauptfaserrichtung ausgerichtet.

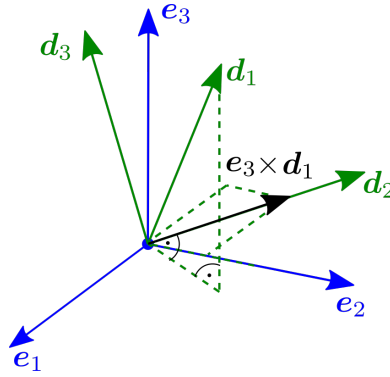


Abbildung 2.6: Lokales Rechtssystem $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ entlang der Stammrichtung $\mathbf{d}_1 = \mathbf{a}_0$.

Da die Richtungen von \mathbf{d}_2 und \mathbf{d}_3 bis auf die Orthogonalitätsbedingungen frei gewählt werden können, wird \mathbf{d}_2 in der $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ -Ebene so definiert, dass es senkrecht zu \mathbf{e}_3 steht. Dies entspricht der Konstruktion eines rechtshändigen Koordinatensystems, vgl. Abb. 2.6. Die Richtung von \mathbf{d}_2 wird über das Kreuzprodukt von \mathbf{e}_3 mit \mathbf{d}_1 bestimmt und anschließend normiert:

$$\mathbf{d}_2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{d}_1}{|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{d}_1|}. \quad (2.89)$$

Ist \mathbf{d}_1 parallel zu \mathbf{e}_3 , verschwindet das Kreuzprodukt. In diesem Fall wird \mathbf{d}_2 mithilfe eines alternativen Hilfsvektors (z. B. \mathbf{e}_1) orthogonal zu \mathbf{d}_1 konstruiert. Der dritte Richtungsvektor \mathbf{d}_3 ergibt sich über das Kreuzprodukt:

$$\mathbf{d}_3 = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2. \quad (2.90)$$

Damit ist das rechtshändige lokale Basissystem $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ vollständig bestimmt. Auf dieser Grundlage kann ein Rotationstensor $\mathbf{Q} \in \text{SO}(3)$ definiert werden, der die euklidische Standardbasis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ in das lokale System überführt:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{e}_i = \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{e}_3.$$

Die Komponenten des Rotationstensors lassen sich definieren über:

$$Q_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{d}_n = \mathbf{d}_n \cdot \mathbf{e}_m. \quad (2.91)$$

Obwohl das Skalarprodukt kommutativ ist, muss die Reihung der Indizierung strikt eingehalten werden, denn i.A. gilt: $Q_{mn} \neq Q_{nm}$. Daraus folgt die Darstellung der

Drehvektoren:

$$\mathbf{d}_i = Q_{mi} \mathbf{e}_m . \quad (2.92)$$

In der Drehmatrix Q_{mi} sind die Komponenten der Drehvektoren \mathbf{d}_i bezüglich der kartesischen Basis \mathbf{e}_m enthalten. Für ein linear-elastisches, transversal-isotropes Material lässt sich die Spannungs-Dehnungs-Beziehung in E^3 wie folgt:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_{\text{ti}} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.93)$$

formulieren, wobei $\boldsymbol{\sigma}$ sowie $\boldsymbol{\varepsilon}$ zweistufige Tensoren in $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ sind und der Materialtangentialtensor \mathbb{C}_{ti} in $\mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3 \times 3}$ liegt. Im faserorientierten Basissystem beschreiben die Komponenten des Materialtangentialtensors:

$$\mathbb{C}_{\text{ti}} = C_{\text{ti}}^{\parallel}{}_{ijkl} \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_j \otimes \mathbf{d}_k \otimes \mathbf{d}_l , \quad (2.94)$$

die elastischen Eigenschaften des Materials. Im Bezug auf die Holzmatrix wird dabei die Hauptfaserrichtung entlang der primären Wachstumsrichtung orientiert. Die Komponenten des Cauchy-Spannungs-Tensors im kartesischen Basissystem ergeben sich durch die Transformation:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_{\text{ti}} : \boldsymbol{\varepsilon} &= C_{\text{ti}}^{\parallel}{}_{ijkl} \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_j \otimes \mathbf{d}_k \otimes \mathbf{d}_l : \varepsilon_{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \\ &= C_{\text{ti}}^{\parallel}{}_{ijkl} Q_{oi} Q_{pj} Q_{mk} Q_{nl} \varepsilon_{mn} \mathbf{e}_o \otimes \mathbf{e}_p . \end{aligned} \quad (2.95)$$

Hierbei beschreibt \mathbf{Q} den orthogonalen Transformationstensor, der die Materialmatrix in das kartesische Basissystem überführt. Die daraus resultierenden transformierten Komponenten lauten:

$$\mathbb{C}_{\text{ti}} = C_{\text{ti}}^{\parallel}{}_{ijkl} Q_{oi} Q_{pj} Q_{mk} Q_{nl} \mathbf{e}_o \otimes \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n . \quad (2.96)$$

mit den Komponenten des Materialtensors der transversalen Isotropie in der kartesischen Basis:

$$C_{\text{ti}}{}_{mnop} = C_{\text{ti}}^{\parallel}{}_{ijkl} Q_{mi} Q_{nj} Q_{ok} Q_{pl} . \quad (2.97)$$

Durch diese Transformation werden die Materialeigenschaften aus dem faserorientierten lokalen System in das globale kartesische Bezugssystem überführt, wo Spannungen und Verzerrungen betrachtet werden.

2.6 Rückführung auf 2D

Auf Grundlage der zuvor beschriebenen Transformation kann nun eine Reduktion des Materialtensors auf einen ebenen Verzerrungszustand (EVZ) erfolgen. Die Reduktion auf den ebenen Verzerrungszustand kann wahlweise:

- (i) in der faserorientierten lokalen Basis durchgeführt und anschließend über eine Transformationsmatrix in das gewünschte globale Bezugssystem überführt werden, oder
- (ii) durch direkte Rotation der 3D-Steifigkeitsmatrix in das globale System, gefolgt von der Eliminierung der Verzerrungskomponente ε_{33} erfolgen.

Beide Vorgehensweisen sind äquivalent. Weiterführend wird Option (i) verfolgt. Eine vergleichbare Darstellung findet sich in ALTENBACH ET AL. [3].

Die Reduktion auf den EVZ erfolgt zunächst in der faserorientierten Basis $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$. Die mit einem Strich gekennzeichneten Größen (\cdot') beziehen sich hierbei auf die lokale, faserausgerichtete Basis $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$. Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung in dieser lokalen Basis lautet in Nye-Notation:

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & 0 \\ C'_{12} & C'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C'_{44} \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_{\text{ti}}^{\parallel}} \begin{bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ 2\varepsilon'_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.98)$$

Weiterhin gilt im EVZ mit $\varepsilon'_{33} = 0$:

$$\sigma'_{33} = C_{13} \varepsilon'_{11} + C_{23} \varepsilon'_{22}, \quad \sigma'_{13} = 0, \quad \sigma'_{23} = 0. \quad (2.99)$$

Für eine Drehung um \mathbf{e}_3 mit dem Winkel θ zwischen $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$ und $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ ergeben sich die Spannungs- und Dehnungsvektoren in der kartesischen Basis aus den 2D-Transformationsmatrizen $\mathbf{T}^{\sigma}(\theta)$ und $\mathbf{T}^{\varepsilon}(\theta)$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^{\sigma}(\theta) \boldsymbol{\sigma}', \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{T}^{\varepsilon}(\theta) \boldsymbol{\varepsilon}'. \quad (2.100)$$

Damit folgt für die Steifigkeitskomponenten in der kartesischen Basis:

$$\mathbf{C}_{\text{global}}(\theta) = \mathbf{T}^{\varepsilon}(\theta)^{\top} \mathbf{c}_{\text{ti}}^{\parallel} \mathbf{T}^{\varepsilon}(\theta). \quad (2.101)$$

Die lokale EVZ-Matrix $\mathbf{c}_{\text{ti}}^{\parallel}$ besitzt aufgrund der Orthotropie in der faserorientierten

Basis nur vier Einträge:

$$\mathbf{C}_{\text{ti}}^{\parallel} \hat{=} \begin{bmatrix} C'_{11} \\ C'_{22} \\ C'_{44} \\ C'_{12} \end{bmatrix}.$$

Die Transformation in die globale Basis kann daher auch als lineare Abbildung von den reduzierten lokalen Steifigkeitskomponenten auf die entsprechenden globalen Steifigkeitskomponenten formuliert werden:

$$\begin{bmatrix} C_{11}(\theta) \\ C_{22}(\theta) \\ C_{44}(\theta) \\ C_{12}(\theta) \\ C_{14}(\theta) \\ C_{24}(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & s^4 & 4s^2c^2 & 2s^2c^2 \\ s^4 & c^4 & 4c^2s^2 & 2c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & (c^2 - s^2)^2 & -2c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & -4c^2s^2 & c^4 + s^4 \\ c^3s & -cs^3 & -2cs(c^2 - s^2) & -cs(c^2 - s^2) \\ cs^3 & -c^3s & 2cs(c^2 - s^2) & cs(c^2 - s^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C'_{11} \\ C'_{22} \\ C'_{44} \\ C'_{12} \end{bmatrix}, \quad (2.102)$$

mit den Abkürzungen $c = \cos(\theta)$, $s = \sin(\theta)$.

2.7 Richtungsabhängigkeit der Materialparameter

Die Richtungsabhängigkeit der fünf Materialparameter eines transversal-isotropen Werkstoffs lässt sich durch die Drehung einer virtuellen Materialprobe im Raum verdeutlichen. Dabei dient das Kugelkoordinatensystem als geeignete Grundlage zur Beschreibung beliebiger Rotationen des lokalen Materialkoordinatensystems relativ zum globalen, kartesischen Koordinatensystem. Eine solche Rotation kann durch die Angabe des Azimutalwinkels ϑ (zwischen 0 und $\pi/2$) sowie des Polarwinkels ϕ (zwischen 0 und 2π) eindeutig beschrieben werden. Diese beiden Winkel definieren die Orientierung der Hauptfaserrichtung im Raum. Für eine detaillierte Darstellung sei auf PAPULA [80] sowie SCHÄFKE [93] verwiesen.

Die räumliche Position eines Punktes \mathbf{P} in sphärischen Koordinaten lässt sich in das kartesische Koordinatensystem durch folgende Umrechnungsvorschriften abbilden:

$$\mathbf{P} = r \sin \vartheta \cos \phi \mathbf{e}_1 + r \sin \vartheta \sin \phi \mathbf{e}_2 + r \cos \vartheta \mathbf{e}_3. \quad (2.103)$$

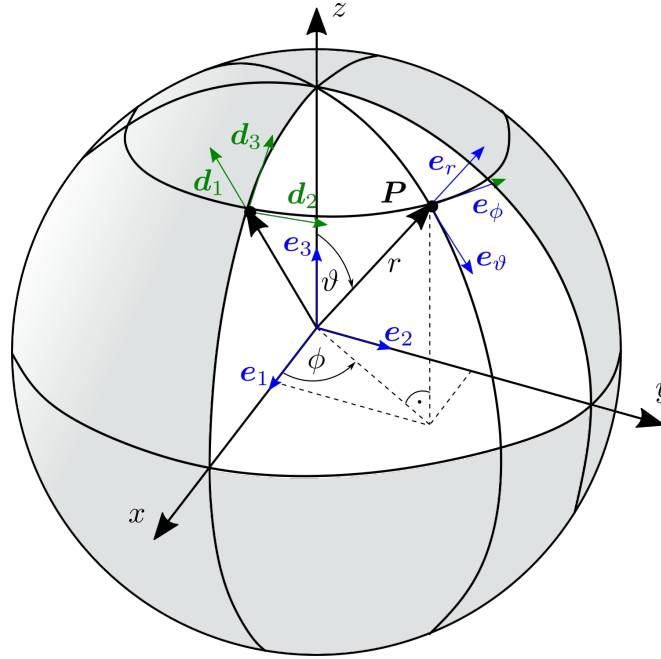


Abbildung 2.7: Darstellung der kartesischen Koordinaten x, y, z und sphärischen Koordinaten r, ϑ, ϕ eines Punktes P sowie der zugehörigen Orthonormalbasen e_r, e_ϑ, e_ϕ in Kugelkoordinaten und des konstruierten lokalen Basissystems d_1, d_2, d_3 .

Die Basisvektoren e_r, e_ϑ und e_ϕ beschreiben jeweils die Richtung der Bewegung des Punktes $P(r, \phi, \vartheta)$, wenn eine infinitesimale Änderung von r, ϕ bzw. ϑ erfolgt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{P}(r, \phi, \vartheta)}{\partial r} &= \frac{\partial P_1}{\partial r} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial P_2}{\partial r} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial P_3}{\partial r} \mathbf{e}_3 \\
 &= \sin \vartheta \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \vartheta \sin \phi \mathbf{e}_2 + \cos \vartheta \mathbf{e}_3, \\
 \frac{\partial \mathbf{P}(r, \phi, \vartheta)}{\partial \phi} &= \frac{\partial P_1}{\partial \phi} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial P_2}{\partial \phi} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial P_3}{\partial \phi} \mathbf{e}_3 \\
 &= -r \sin \vartheta \sin \phi \mathbf{e}_1 + r \sin \vartheta \cos \phi \mathbf{e}_2, \\
 \frac{\partial \mathbf{P}(r, \phi, \vartheta)}{\partial \vartheta} &= \frac{\partial P_1}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial P_2}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial P_3}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_3 \\
 &= r \cos \vartheta \cos \phi \mathbf{e}_1 + r \cos \vartheta \sin \phi \mathbf{e}_2 - r \sin \vartheta \mathbf{e}_3.
 \end{aligned} \tag{2.104}$$

Nur die partielle Ableitung nach dem Radius r ergibt unmittelbar einen Einheitsvektor:

$$\mathbf{e}_r = \sin \vartheta \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \vartheta \sin \phi \mathbf{e}_2 + \cos \vartheta \mathbf{e}_3. \tag{2.105}$$

Die Ableitungen nach den Winkeln ϑ und ϕ hingegen liefern Vektoren, die zunächst

normiert werden müssen:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\phi &= \frac{-r \sin \vartheta \sin \phi \mathbf{e}_1 + r \sin \vartheta \cos \phi \mathbf{e}_2}{\sqrt{(-r \sin \vartheta \sin \phi)^2 + (r \sin \vartheta \cos \phi)^2}} = \frac{-\sin \vartheta \sin \phi \mathbf{e}_1 + \sin \vartheta \cos \phi \mathbf{e}_2}{r \sin \vartheta} \\ &= -\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (2.106)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\vartheta &= \frac{r \cos \vartheta \cos \phi \mathbf{e}_1 + r \cos \vartheta \sin \phi \mathbf{e}_2 - r \sin \vartheta \mathbf{e}_3}{\sqrt{(r \cos \vartheta \cos \phi)^2 + (r \cos \vartheta \sin \phi)^2 + (-r \sin \vartheta)^2}} \\ &= \frac{r \cos \vartheta \cos \phi \mathbf{e}_1 + r \cos \vartheta \sin \phi \mathbf{e}_2 - r \sin \vartheta \mathbf{e}_3}{\sqrt{r^2 \cos^2 \vartheta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + (-r \sin \vartheta)^2}} \\ &= \frac{r \cos \vartheta \cos \phi \mathbf{e}_1 + r \cos \vartheta \sin \phi \mathbf{e}_2 - r \sin \vartheta \mathbf{e}_3}{\sqrt{r^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)}} \\ &= \cos \vartheta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \vartheta \sin \phi \mathbf{e}_2 - \sin \vartheta \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Dabei ist der trigonometrische Zusammenhang $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ hilfreich, um die orthogonalen Komponenten zu bestimmen.

Um eine eindeutige Übereinstimmung der lokalen Richtungsvektoren mit den kartesischen Koordinaten in den Referenzlagen zu gewährleisten, wird das lokale Rechtssystem wie folgt definiert: $\mathbf{d}_1 = \mathbf{e}_r$ radial, $\mathbf{d}_2 = \mathbf{e}_\phi$ azimuthal und $\mathbf{d}_3 = -\mathbf{e}_\vartheta$ anti-meridional:

$$\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \phi \\ \sin \vartheta \sin \phi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_3 = \begin{pmatrix} -\cos \vartheta \cos \phi \\ -\cos \vartheta \sin \phi \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}. \quad (2.108)$$

In einer standardmäßigen Orientierung der sphärischen Basisvektoren mit $\mathbf{d}_1 = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{d}_2 = \mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{d}_3 = \mathbf{e}_\vartheta$ sind \mathbf{d}_2 und \mathbf{d}_3 in der Ausgangsstellung entgegengesetzt zu \mathbf{e}_2 bzw. \mathbf{e}_3 orientiert. Daher würde eine Verwendung dieser Konvention die geometrische Interpretation beim Vergleich zur kartesischen Basis erschweren.

Beispiel zur Richtungsabhängigkeit der Materialparameter

Zur Veranschaulichung der Richtungsabhängigkeit der Materialparameter eines transversal-isotropen Werkstoffs wird folgendes Beispiel betrachtet.

Ein einachsiger Lastfall mit einer Kraft F_1 in \mathbf{e}_x -Richtung dient als Ausgangssituation. Die Faserrichtung \mathbf{d}_1 des Materials wird dabei durch die Kugelkoordinatenwinkel ϑ und ϕ beschrieben und variiert. Liegt $\vartheta = \pi/2$ und $\phi = 0$ vor, fällt die Vorzugsrichtung exakt mit der \mathbf{e}_x -Achse zusammen.

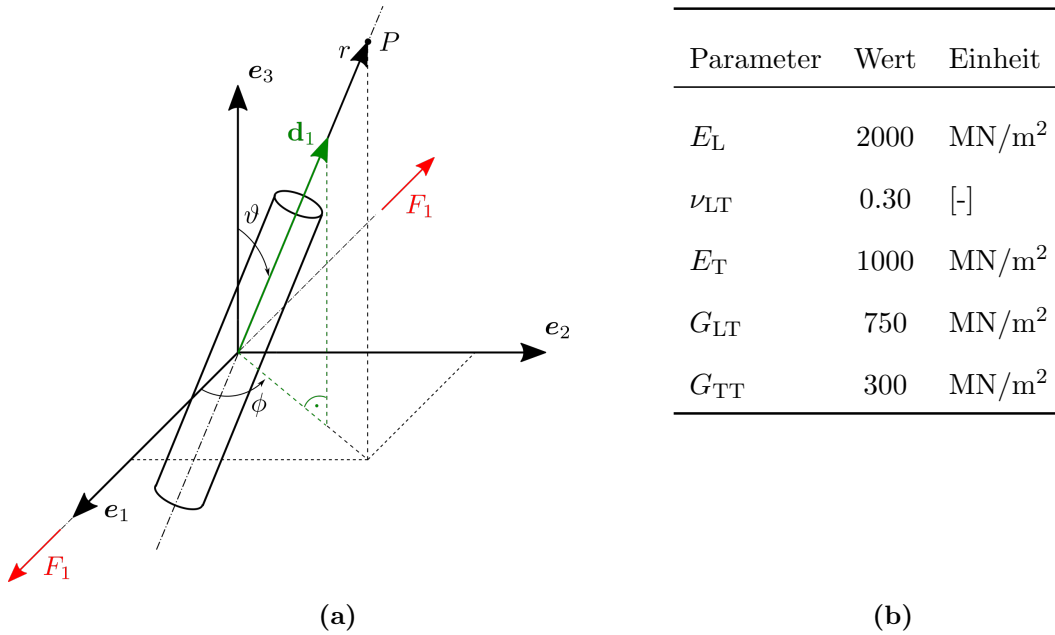


Abbildung 2.8: (a) Krafrichtung und Faserausrichtung. (b) Materialparameter für das transversal-isotrope Material.

Aus den in Tab. 2.8b angegebenen Materialparametern lassen sich die fehlenden Querkontraktionszahlen gemäß den klassischen Beziehungen berechnen. Für das transversal-isotrope Material ergeben sich:

$$\nu_{TT} = \frac{E_T}{2G_{TT}} - 1 = 0.66, \quad \nu_{TL} = \frac{E_T}{E_L} \nu_{LT} = 0.15.$$

Sobald die Vorzugsrichtung durch eine Rotation variiert wird, ist zur Beschreibung der Materialeigenschaften eine Rückführung auf das allgemein orthotrope Modell mit neun unabhängigen Materialparametern erforderlich. Die entsprechende Spannungs-Dehnungs-Beziehung lautet:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix}. \quad (2.109)$$

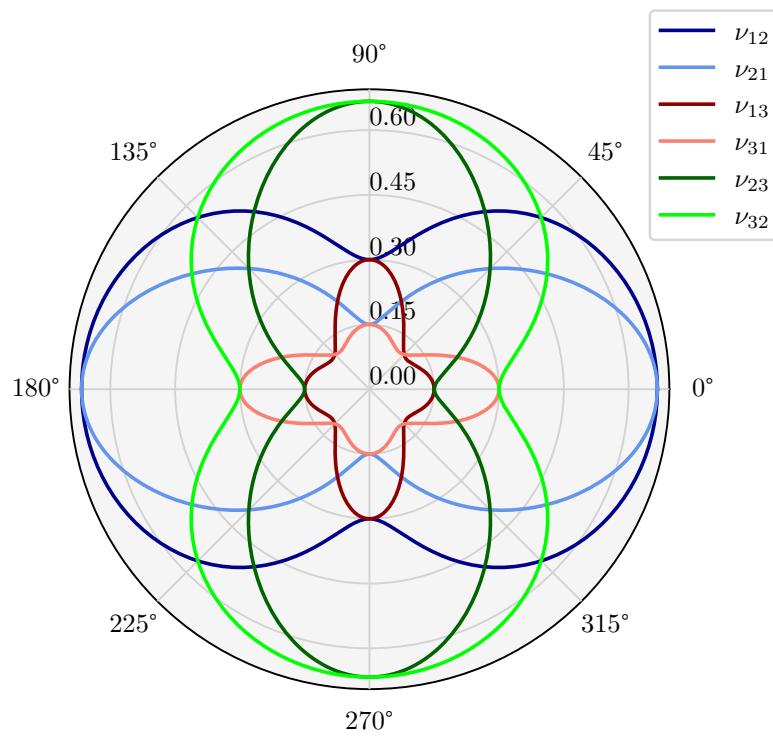


Abbildung 2.9: Querkontraktionen in Abhängigkeit einer Drehung des Winkels ϑ .

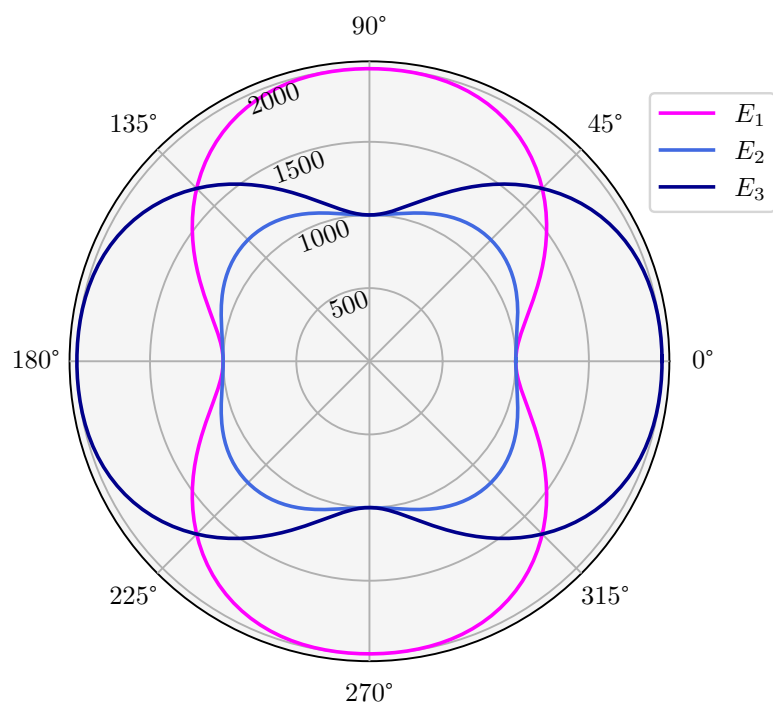


Abbildung 2.10: Elastizitätsmodul in Abhängigkeit einer Drehung des Winkels ϑ .

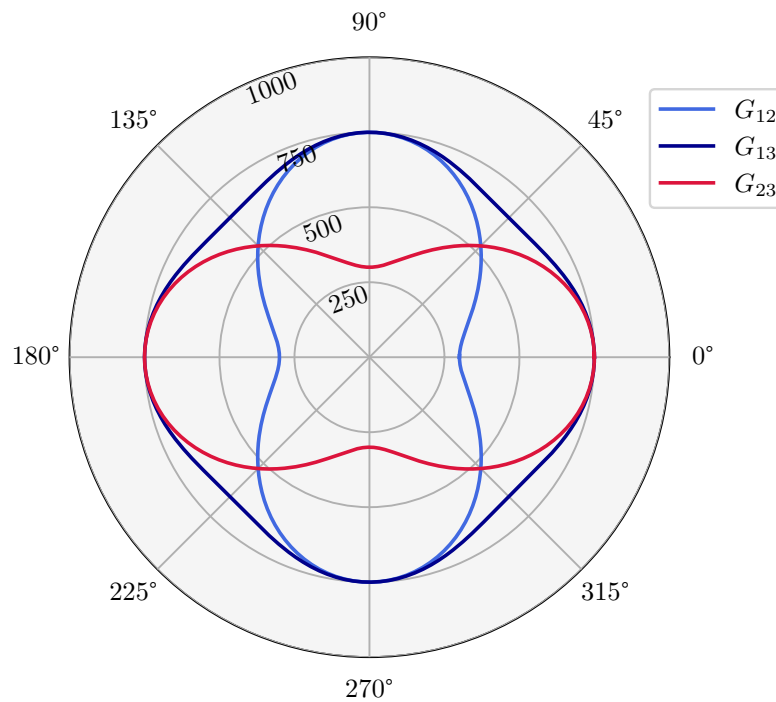


Abbildung 2.11: Schubmodul in Abhängigkeit einer Drehung des Winkels ϑ .

Jeweils zwei der sechs Querkontraktionszahlen sind identisch, wenn die Faserrichtung mit der Belastungsrichtung übereinstimmt, d.h. bei einem Winkel $\vartheta = \pi/2 = 90^\circ$. Bei einer Belastung in 1-Richtung treten in der transversal-isotropen Ebene (2-3-Ebene) identische Querkontraktionen auf, sodass $\nu_{12} = \nu_{13}$ gemessen wird.

Entsprechend gilt für eine Belastung in transversaler Richtung und eine Messung in Faserrichtung: $\nu_{21} = \nu_{31}$, wie bereits in Abb. 2.4 erläutert.

Dasselbe Symmetrieverhalten zeigt sich bei einer Rotation mit $\vartheta = 3\pi/2 = 270^\circ$: Auch hier entspricht die Faserrichtung wieder der Lastrichtung. Diese Konfiguration ist Bestandteil der Symmetrieoperationen durch Rotationstensoren $\mathbf{Q}_{2,3}^\pi$.

Für den Fall, dass Faser- und Belastungsrichtung orthogonal zueinander verlaufen, treten ebenfalls jeweils zwei identische Querkontraktionen auf. Wird beispielsweise um die 2-Achse rotiert, so entspricht die Vorzugsrichtung des Materials der 3-Richtung. In diesem Fall lässt sich eine Vertauschung der Indizes 1 und 3 vornehmen.

Diese Vertauschung spiegelt sich auch in den Elastizitätsmoduln wider: E_3 nimmt dann den höchsten Wert unter den drei Richtungen ein. In der Situation bei einer Drehung um $\vartheta = \pi/4 = 45^\circ$ sowie bei Vielfachen dieses Winkels tritt ein Sonderfall auf. Jeweils zwei der sechs Querkontraktionen sowie zwei der drei Elastizitätsmoduln stimmen hier

ebenfalls überein. Es ergeben sich damit nur fünf unabhängige Materialparameter zur vollständigen Beschreibung – analog zur Ausrichtung von $\vartheta = \pi/2 = 90^\circ$ sowie bei Vielfachen.

Es ist auch eine leichte Verfestigung des Materials in Richtung der Drehachse (hier der 2-Achse) zu beobachten. Dies widerspricht der naheliegenden Erwartung einer gleichmäßigen Verteilung der Steifigkeit entlang konzentrischer Kreise um die Faserichtung.

Auch in einer dreidimensionalen Darstellung zeigt sich die ausgeprägte Richtungsabhängigkeit der Materialparameter deutlich, siehe Abbildung 2.12. Nur bei spezifischen Ausrichtungen relativ zur Belastungsrichtung – etwa bei $[\vartheta = \pi/2, \phi = 0]$, $[\vartheta = \pi/2, \phi = \pi]$, $[\vartheta = 3\pi/2, \phi = 0]$ und $[\vartheta = 3\pi/2, \phi = \pi]$ – gelten die Relationen:

$$E_2 = E_3, \quad G_{12} = G_{13}, \quad \nu_{12} = \nu_{13}.$$

Diese symmetriebedingten Zusammenhänge lassen sich bei orthotropen Materialien nicht in gleicher Weise beobachten [35].

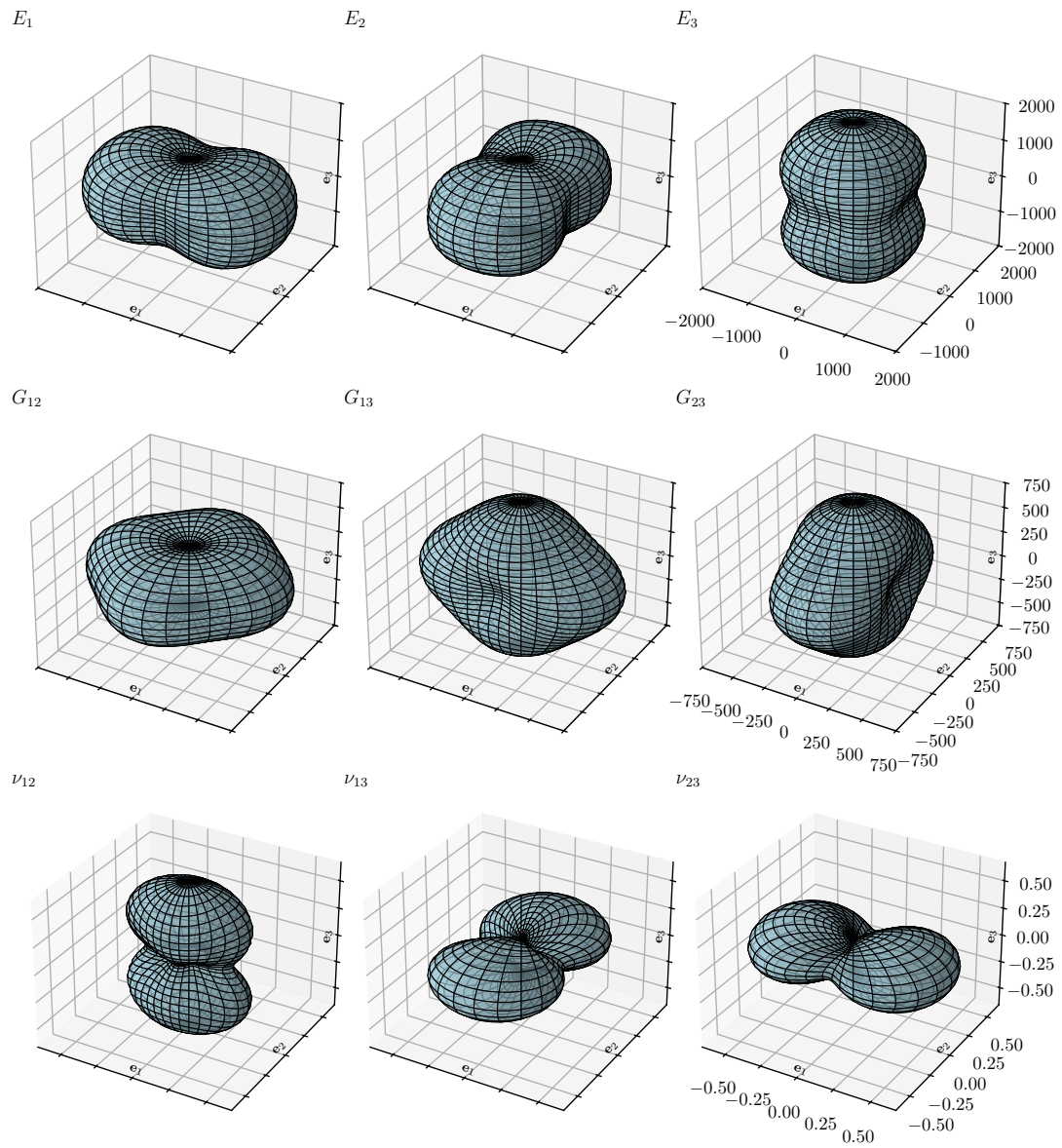


Abbildung 2.12: Materialparameter in Abhängigkeit einer Drehung des Winkels ϑ und ϕ .

3 Wachstum und Materialverhalten der Holzmatrix

Die Holzmatrix wächst durch Zellteilung. Dabei bilden sich schrittweise stabile Zellwände aus, wodurch sich auch die Tragfähigkeit des Stammes erhöht – eine Voraussetzung für das Höhenwachstum und die Ausbildung der Baumkrone. Zunächst werden Basisbegriffe des Baumwachstums eingeführt. Die Anordnung der Zellen spielt dabei eine entscheidende Rolle für die mechanischen Eigenschaften des Holzes, wie z. B. die Steifigkeit.

Technisch betrachtet handelt es sich bei Holz um einen natürlich gewachsenen Faser-verbundwerkstoff, dessen Zellausrichtung eine bevorzugte Richtungsabhängigkeit der Steifigkeiten zur Folge hat [24]. Im feuchten, lebenden Zustand unterscheidet sich die Holzmatrix wesentlich von dem getrocknetem oder technisch verarbeiteten Werkstoff – insbesondere durch den hohen Wasseranteil in Zellen und Zellzwischenräumen. Daher werden anschließend in diesem Kapitel die richtungsabhängigen Materialparameter der Holzmatrix und deren Feuchteabhängigkeit beschrieben.

3.1 Basisbegriffe des Stammwachstums

Im Inneren des Stammes liegt das Kernholz, das von Splintholz, der inneren Rinde (Bast) und der äußeren Rinde (Borke) umgeben ist, vgl. Abb. 3.1.

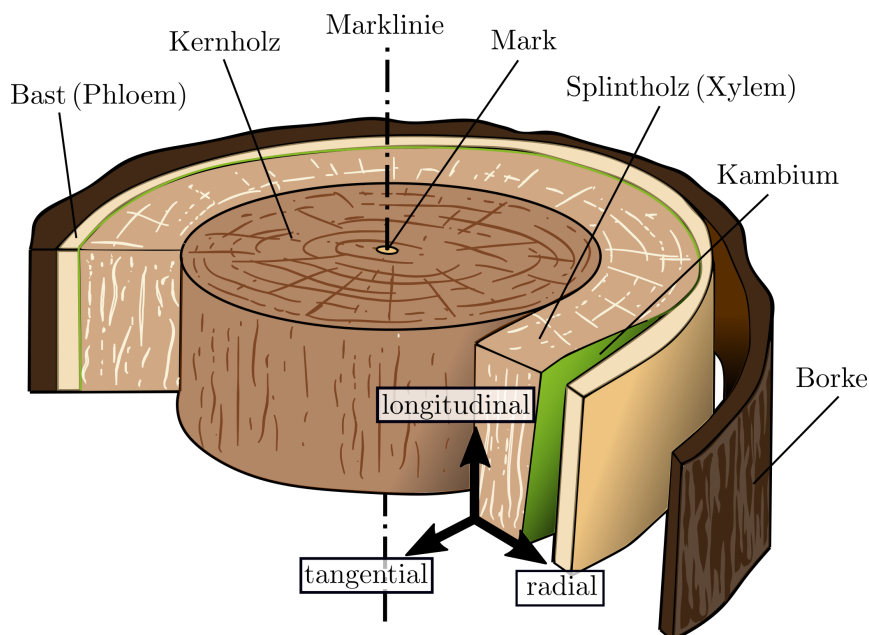


Abbildung 3.1: Der grobe Aufbau eines Stammes.

Die Marklinie – auch als Sprossachse bezeichnet – verläuft zentral durch den Stammquerschnitt und definiert die longitudinale Richtung entlang der Stammachse. Die tangentielle Richtung liegt parallel zur Stammoberfläche, während die radiale Richtung senkrecht dazu verläuft und vom Mark aus nach außen zeigt. Für detaillierte Erläuterungen sei auf RAVEN ET AL. [88] und KADEREIT ET AL. [49] verwiesen.

Das Wachstum des Stammes lässt sich in zwei Anteile unterscheiden:

1. **Primärwachstum:** Das primäre Wachstum eines Baumes erfolgt über die Triebspitzen. Dort teilen sich Zellen und lagern sich longitudinal entlang der Sprossachse an [49, 88].
2. **Sekundärwachstum:** Bei Bäumen erfolgt auch ein Sekundärwachstum in radialer Richtung. Dies geschieht durch eine spezielle Zellschicht (**Kambium**) zwischen **Phloem** und **Xylem**, die in der Wachstumsperiode fortlaufend neue Zellen bildet und diese anlagert. Dies sorgt dafür, dass Stamm oder Äste im Laufe der Jahre immer dicker werden. In gemäßigten Breiten führt die jahreszeitlich schwankende Aktivität des Kambiums zur Ausbildung von Jahresringen, anhand derer sich das Alter eines Baumes bestimmen lässt [49, 79, 88].




Im **Kambium** unterscheidet man zwei Typen von Initialzellen: fusiforme Initialen, die in Längsrichtung entlang der Marklinie ausgerichtet sind, und Strahlinitialen, die radial verlaufen, vgl. Abb. 3.2a. Der Großteil der Xylemzellen ist longitudinal in Marklinienrichtung orientiert, was der Holzmatrix eine ausgezeichnete Richtung mit höchster Steifigkeit verleiht. Die radial angeordneten Strahlzellen bieten eine gewisse radiale Steifigkeit. Da ihre volumenbezogene Menge kleiner ist und die longitudinal ausgerichteten Zellen in radialer Lastrichtung Querbelastung erfahren, ist die Steifigkeit hier geringer als in longitudinaler Richtung. Bei Belastung in tangentialer Richtung ist der Widerstand hingegen am geringsten, da in dieser Richtung alle Zellen quer zu ihrer Ausrichtung beansprucht werden.

Diese anisotrope Mikrostruktur erklärt das orthotrope mechanische Verhalten von Holz. Die typischen Steifigkeitsverhältnisse in Faserrichtung zu Radial- und Tangentialrichtung betragen etwa $13 : 1.7 : 1$ für Laubholz bzw. $20 : 1.7 : 1$ für Nadelholz [73].

Die Zellteilung im Kambium erfolgt immer parallel zur Stammoberfläche, entweder nach innen oder außen in radialer Richtung. Wird die Zelle nach innen abgegeben, wird sie Teil des Xylems. Wird die Zelle nach außen abgegeben, wird sie Teil des Phloems, siehe Abb. 3.2a. Dabei entstehen zu einem überwiegenden Anteil neue Xylemschichten

[88]. Dort werden verschiedene Zelltypen, deren Funktion in Tab. 3.1 aufgeführt sind, ausgebildet [24, 88]. Eine ausführlichere Beschreibung der Leitbahnen von Bäumen ist in SCHOPFER & BRENNICKE [94] zu finden.

Tabelle 3.1: Zelltypen in Nadel- und Laubhölzern [24], [88], [10].

Zelltyp	Nadel- baum	Laub- baum	Funktion	Zellaufbau
Parenchym	✓	✓	Speicherung	 dünnwandig, adaptiv
Tracheid	✓	✓	Lastabtrag, Transport (Splint)	 dickwandig, verholzt
Trachee	✗	✓	Transport	 weitelumig, röhrenartig

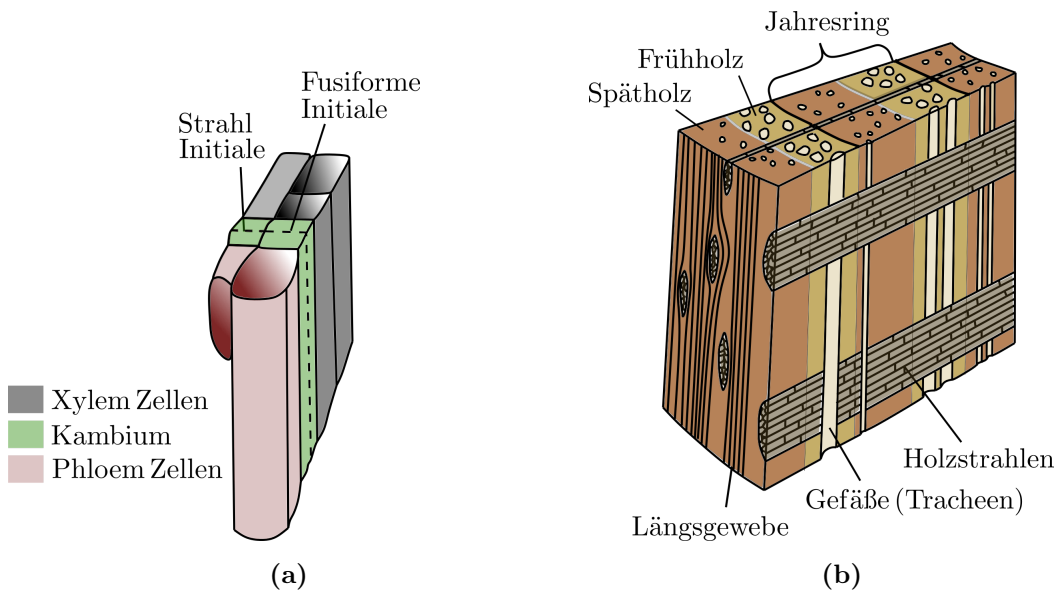


Abbildung 3.2: Zellinitialentypen im Kambium und resultierende Struktur der Xylemzellen in der Holzmatrix. (a) Anordnung von Zellschichten um das Kambium nach RAVEN ET AL. [88]. Die gestrichelte Linie deutet die Zellteilung der Initialzellen an. (b) Anordnung der Xylemzellen im Gewebestruktur eines Laubbaums nach MATYSSEK ET AL. [66].

Holzstrahlen entstehen durch die Anordnung von Strahlzellen und verlaufen radial und quer zum Längsgewebe, das aus fusiformen Zellen besteht, siehe Abb. 3.2b. In Mitteleu-

ropa bildet sich bis etwa Juni das Frühholz mit weiten Lumen und dünnen Zellwänden. Danach nimmt die Kambiumaktivität ab, wodurch Spätholz mit engeren Lumen und dickeren Zellwänden entsteht [49]. Dieser Aufbau ermöglicht im Frühjahr einen beschleunigten Wasser- und Mineralstofftransport zur Versorgung der Blatttriebe [95]. Der Übergang vom Früh- zum Spätholz erfolgt kontinuierlich, während der Wechsel zum nächsten Jahr deutlich abgegrenzt ist [88]. Dieses Prinzip aus Abb. 3.2b gilt gleichermaßen für Nadel- und Laubbäume. Die Zellbündel der Laubbäume enthalten jedoch mehr Zellen und es gibt dort spezialisierte Gefäße (Tracheen) für den Wassertransport [88]. Das im Splintholz befindliche Xylem lässt sich in Leitsplint und Speichersplint unterteilen, die beide an der Wasserleitung beteiligt sind [49]. In älteren Jahresringen sterben die Xylemzellen ab und bilden das Kernholz. Dabei lagern sich Gerbstoffe und Harze ein [49], die eine natürliche Imprägnierung bewirken. Dies geht häufig mit einer Einfärbung des Holzes einher [15].

3.2 Wachstumstropismen

Das Wachstum von Bäumen wird durch verschiedene Tropismen (Reizrichtungsreaktionen) gesteuert. Diese Prozesse werden durch Hormontransport vermittelt, was Zellwachstum oder -deformation auslöst. Bewegung oder Wachstum in Richtung des Reizes wird als positiver Tropismus bezeichnet, während eine Abwendung als negativer Tropismus gilt. Die für diese Arbeit relevanten Tropismen, die das primäre sowie das sekundäre Wachstum ansprechen, sind:

- **Phototropismus:** Die Reaktion pflanzlicher Strukturen auf elektromagnetische Strahlung, insbesondere blaues Licht und UV-A-Strahlung, erfolgt zur Strahlungsquelle hin [18, 25] (positiv phototrop). Dabei erhöht sich die Konzentration des Hormons Auxin auf der dem Licht abgewandten Seite im Spross, was dort zu verstärkter Zellstreckung führt. Dadurch neigt sich der Spross in Richtung der Lichtquelle. Man spricht bezüglich der Triebe auch von einem positiven, zum Reiz hin gerichteten Tropismus. Wurzeltriebe zeigen hingegen einen negativen Phototropismus: Sie krümmen sich bei direktem blauen Licht aktiv vom Licht weg und wachsen dadurch in tiefere Bodenschichten.
- **Gravitropismus:** Das Wachstum erfolgt entgegengesetzt zur Gravitationsrichtung, d. h., die Triebe wachsen vom Erdmittelpunkt weg [68] (positiv gravitrop). Die Auxinkonzentration spielt eine zentrale Rolle bei der Bildung von *Reaktionsholz*, welches im Gegensatz zu Normalholz eine höhere Steifigkeit aufweist.

Experimente mit extern appliziertem Auxin unterstützen diese Hypothese. Eine hohe Auxinkonzentration führt zur Bildung von *Druckholz* auf der Unterseite geneigter Nadelbaumstämme, während eine niedrige Konzentration die Bildung von *Zugholz* auf der Oberseite geneigter Laubbäume begünstigt. In der Literatur wird die gravitationsbedingte Reorientierung des Stammes als Hauptursache für die Bildung von Reaktionsholz angesehen, z. B. wenn der Stamm infolge von Hanglagen, Wind oder Schneelast geneigt ist [6, 103, 111]. Die Begriffe *Zugholz* und *Druckholz* beziehen sich dabei nicht auf die Art der mechanischen Spannungen aus externer Belastung im Stamm, sondern auf die notwendige gerichtete Dehnung, um eine Korrektur der Wuchsrichtung zu bewirken [76].

- **Thigmotropismus und Thigmomorphogenese:** Pflanzen reagieren auf mechanische Reize wie Berührung, Wind oder Schneelast mit gerichteten Wachstumsbewegungen (Thigmotropismus) oder mit langfristigen strukturellen Anpassungen ihres Wachstums (Thigmomorphogenese) [47, 76]. Bei Berührung zeigen Triebe z. B. einen positiven Thigmotropismus, wie er bei Rankenpflanzen beobachtet werden kann. Wurzeln hingegen reagieren negativ thigmotrop, um sich zwischen Gesteinskörnungen im Boden neu auszurichten. Mechanische Spannungen führen durch verstärktes sekundäres Wachstum zur Vergrößerung des Querschnitts und erhöhen somit die Tragfähigkeit der Pflanzenstruktur. Solche mechanischen Reize steigern die Ethylenproduktion, was ein verstärktes Dickenwachstum des Holzes induziert [46]. Gravitropismus und Thigmomorphogenese treten dabei oft gemeinsam auf. Studien von RIECH & CHING [90] zeigen jedoch, dass keine direkte Korrelation zwischen Biegespannung und der Bildung von Reaktionsholz besteht. Dies weist darauf hin, dass die Thigmomorphogenese allein nicht für die Entstehung von Reaktionsholz verantwortlich ist. Vielmehr beeinflusst die Biegespannung primär das radiale Wachstum, was auf einen thigmomorphen Effekt hindeutet. Wenn eine Belastung auftritt, die nur geringe Auslenkungen aus der vertikalen Wuchsrichtung verursacht, kann die Thigmomorphogenese – je nach Baumart – auf der Druck- oder auf der Zugseite zu einem verstärkten Dickenwachstum führen, ohne dass Reaktionsholz gebildet wird [19].

3.3 Bestimmung der Materialparameter gewachsener Holzmatrix

Die mechanischen Eigenschaften der Holzmatrix werden maßgeblich durch die Holzfeuchte u beeinflusst [24, 53, 73]. Diese ist definiert als

$$u = \frac{m_u - m_0}{m_0} = \frac{m_u}{m_0} - 1, \quad (3.1)$$

wobei m_u für die Masse des feuchten Holzes und m_0 für die Trockenmasse des Holzes steht.

Die Holzfeuchte von frisch gefälltem Holz variiert je nach Baumart zwischen 60 und 200%. Beispielsweise beträgt sie bei Buche im Durchschnitt 79% im Splintholz und 58% im Kernholz [24]. Generell weist Splintholz eine höhere Holzfeuchte auf als Kernholz, wobei dieser Unterschied insbesondere bei Nadelhölzern ausgeprägt ist [24]. Zudem unterliegt die Holzfeuchte saisonalen Schwankungen: Während sie im Sommer abnimmt und ihren niedrigsten Wert im Herbst erreicht, steigt sie im Frühjahr mit zunehmenden Temperaturen wieder an [122].

Das frisch gefällte, noch nicht getrocknete Holz wird als *grünes Holz* bezeichnet. Die Zellwände sind vollständig mit Wasser gesättigt und zusätzlich liegt freies Wasser in den Zellzwischenräumen vor [33]. Laut NIKLAS & SPATZ [75] kann das mechanische Verhalten von grünem Holz auch im Zustand der Fasersättigung beschrieben werden – also dann, wenn die Cellulose in den Zellwänden maximal mit Wasser gesättigt ist. Der Fasersättigungspunkt ist holzartspezifisch und liegt bei mitteleuropäischen Arten durchschnittlich bei $u_f \approx 0.28$ [73]. In diesem Bereich ist das Wasser ausschließlich in den Zellwänden enthalten und wird als gebundenes Wasser bezeichnet [24]. Auch [53] stellt fest, dass für Holzfeuchten unterhalb von u_f nahezu alle mechanischen Materialparameter und Festigkeiten eine lineare Abhängigkeit vom Feuchtegehalt u zeigen. Oberhalb der Fasersättigung – also bei grünem Holz mit $u > u_f$ – bleiben die meisten mechanischen Eigenschaften weitgehend konstant [24, 53]. Dies erlaubt es, das mechanische Verhalten von grünem Holz auch bei einer Holzfeuchte von etwa 30% hinreichend genau zu approximieren.

Eine Ausnahme bilden die Querkontraktionszahlen, die zwar ebenfalls linear mit der Holzfeuchte skalieren, jedoch je nach Faserrichtung entweder ansteigen oder abnehmen. Untersuchungen von HERING ET AL. [40] und OZYHAR [78] weisen jedoch darauf hin, dass die Querkontraktionszahlen nur eine geringe Sensitivität gegenüber der Holzfeuchte aufweisen. Daher können für variierende Holzfeuchten näherungsweise konstan-

te Querkontraktionen angenommen werden, um das feuchteabhängige orthotrope bzw. transversal-isotrope Verhalten für grünes Holz abzubilden.

HEARMON [38] zeigt, dass sowohl die Elastizitäts- als auch die Schubmoduln mit zunehmender Holzfeuchte deutlich abnehmen, und quantifiziert diesen Zusammenhang auf Basis experimenteller Daten. Diese Feuchteabhängigkeit ist insbesondere bei der Interpretation von Materialkennwerten relevant.

Für Fichtenholz beschreibt KOLLMANN & CÔTÉ [53] die Variation der elastischen Parameter in Abhängigkeit von der Holzfeuchte; entsprechende Kennwerte sind in Tab. 3.2 dargestellt. HERING [39] und OZYHAR [78] liefern vergleichbare Zusammenhänge für Buchenholz, wobei sie Elastizitäts- und Schubmoduln in Abhängigkeit von der Holzfeuchte u_f bestimmen. Basierend auf der Annahme von KOLLMANN & CÔTÉ [53] und DINWOODIE [24], dass die elastischen Eigenschaften von Holz unterhalb des Fasersättigungspunktes linear mit der Feuchte abnehmen, können mit diesen Daten durch lineare Regression Extrapolationen für den Fasersättigungspunkt durchgeführt werden, siehe Abb. 3.3. Für die Elastizitätsmoduln wurden in der Literatur vorhandene Variationskoeffizienten über eine gewichtete lineare Regression berücksichtigt [69]. Besonders auffällig ist die Abweichung des Elastizitätsmodulfaktors in E_3 -Richtung zwischen den Holzarten. Offenbar reagiert der Elastizitätsmodul von Buchenholz in dieser Richtung empfindlicher auf Feuchteveränderungen als Fichtenholz, siehe Tab. 3.2.

Tabelle 3.2: Durchschnittliche Faktoren für das Verhältnis der verschiedenen Materialparameter bei $u = 12\%$ und $u_f = 30\%$.

Spezies	E_1	E_2	E_3	G_{12}	G_{13}	G_{23}	Literatur
Fichte (<i>Picea</i>)	0.77	0.55	0.47	0.74	0.69	0.65	[16, 53]
Buche (<i>Fagus sylvatica</i>)	0.73	0.61	0.22	0.61	0.70	0.43	[39, 78]
Eiche (<i>Quercus spp.</i>)	0.72	-	-	-	-	-	[54]
Durchschnitt Nadelholz	0.78	-	-	-	-	-	[65]
Durchschnitt Laubholz	0.76	-	-	-	-	-	[65]

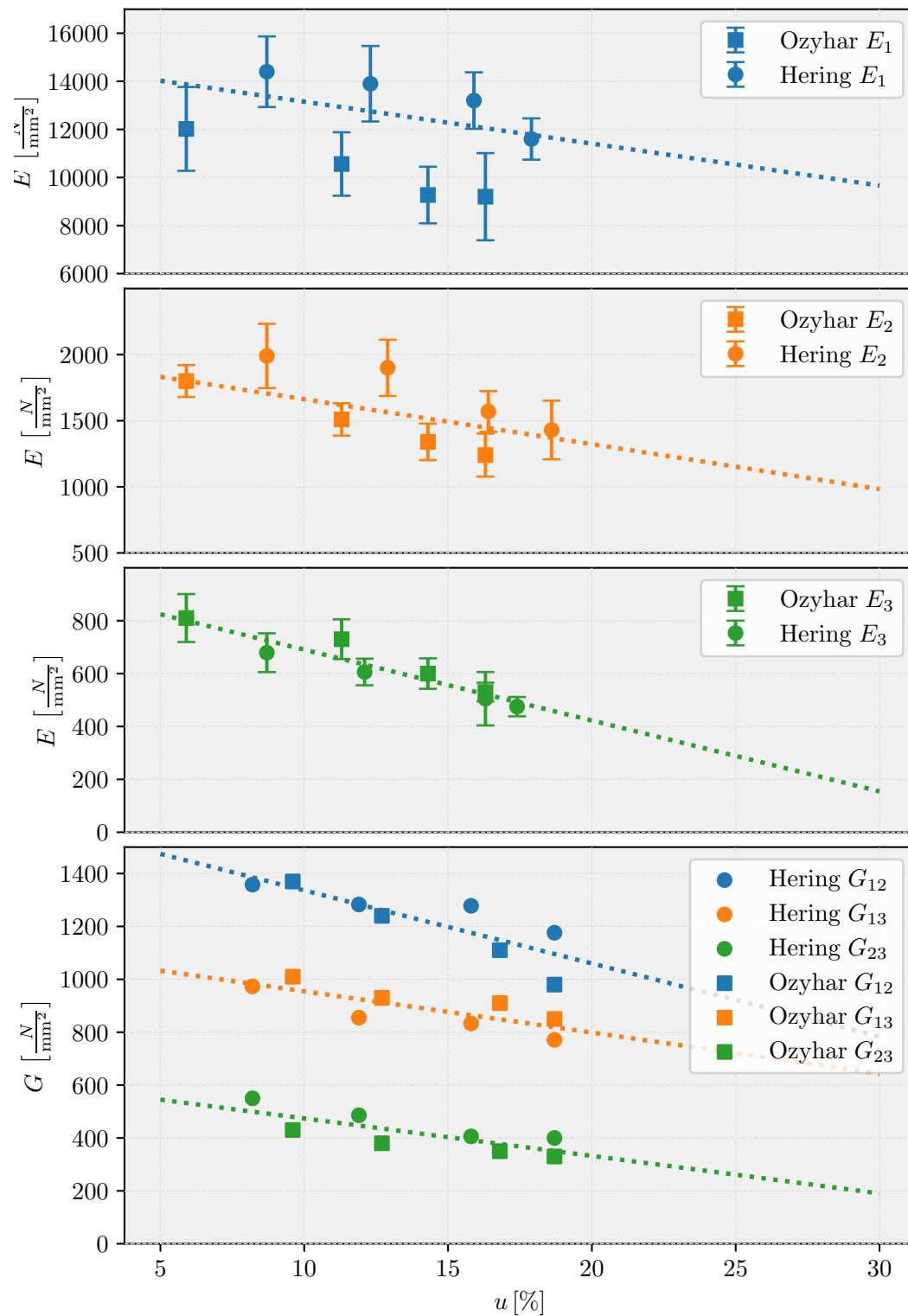


Abbildung 3.3: Lineare Regression der elastischen Parameter von Rotbuchenholz (*Fagus sylvatica*) in Abhängigkeit von der Holzfeuchte u . Die Daten basieren auf HERING [39] und OZYHAR [78]. Die Elastizitätsmoduln wurden gemäß DIN V 65352 bestimmt, während die Schubmoduln mittels Ultraschallmessung erfasst wurden.

Üblicherweise werden die 9 unabhängigen elastischen Konstanten S orthotropen Materialverhaltens mittels Messungen und Berechnungen bestimmt, siehe Gl. (2.45):

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Durch Gl. (2.44) bzw. die Symmetrie des Cauchy-Spannungstensors können 9 Messungen alle 12 Materialparameter $E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{13}, G_{23}$ (6 Messungen) sowie $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{21}, \nu_{31}, \nu_{32}$ (3 Messungen) bestimmen. Dabei werden verschiedene Methoden abhängig von den jeweiligen darin enthaltenen 12 Materialparametern angewandt:

1. longitudinaler Elastizitätsmodul (E_1)

- Biegeversuche mit der Longitudinalrichtung als Hauptspannungsrichtung [53, 62] - Diese unterscheiden sich in der Verwendung von kleinen Proben z. B. nach ASTM D143-52 oder großen Prüfkörpern nach DIN EN 408. Realistischer sind hierbei die Werte großer Prüfkörper, da sie auch Imperfektionen und Inhomogenitäten, wie Äste oder andere Strukturmängel einbezieht [24]. Hierbei werden allerdings auch Schubverzerrungen mitgemessen, was aber auf der sicheren Seite liegt, da E_1 kleiner ausfällt. Mit einem zusätzlichen Term kann dies berücksichtigt werden, sollte der Schubmodul für die jeweilige Richtung bekannt sein.
- Messung der Eigenfrequenz [24, 37, 53] - Dazu wird an einem kleinen dünnen Streifenprobe eine Masse angebracht und zum Schwingen gebracht und die Periodendauer T bestimmt. In Abhängigkeit der Länge der Probe, dem Trägheitsmoment, der Periodendauer sowie der Masse des Holzstreifens und der angebrachten Masse lässt sich E_1 bestimmen. Diese Messmethode erzielt vergleichbare Ergebnisse zu Biegeversuchen, der gleichen Probengröße mit Abweichungen von ca. 3%, [24].

2. radialer und tangentialer Elastizitätsmodul (E_2, E_3)

- Biegeversuche mit der jeweiligen Richtung als Hauptspannungsrichtung [53] - Die gleichen Messungen für kleine Proben mit anderer Faserorientierung lassen sich auch für E_2, E_3 durchführen.
- Druckversuche in die jeweilige Richtung [53].

3. Schubmoduln (G_{12}, G_{13}, G_{23})

- Zwei Verfahren nach DIN EN 408 - 1. Auswertung der Unterschiede von 3- zu 4-Punkt Biegeversuchen. 2. Messung mit 3-Punkt Biegeversuchen unterschiedlicher Probenlängen [24].
- Verdrehungsprüfung zur Ermittlung des Schubmoduls [43, 53].
- Schallgeschwindigkeitsmessung von Transversalwellen [40, 78].

4. Querkontraktionszahlen ($\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{21}, \nu_{31}, \nu_{32}$)

- Nur 3 Messungen notwendig, da gilt $S_{12} = S_{21}, S_{13} = S_{31}, S_{23} = S_{32}$. Mit weiteren 3 Messungen lassen sich die Ergebnisse validieren.
- Messung der Verhältnisse der elastischen Konstanten bei einachsiger Druckbelastung einer Probe in longitudinaler Richtung für $\nu_{12} = -\frac{S_{12}}{S_{11}}$, $\nu_{13} = -\frac{S_{13}}{S_{11}}$ und in radialer Richtung der $\nu_{23} = -\frac{S_{23}}{S_{22}}$, vgl. Gl. (2.45) [17, 53].
- Verwendung von Schallausbreitungsgeschwindigkeiten ist zu ungenau [74].

In neueren Messungen wird auch das DIC (digital image correlation) - Verfahren verwendet, welches in Verbindung mit der Finiten Elemente Methode Daten für alle elastischen Parameter basierend auf den gemessenen Deformationen berechnen kann [21, 40, 48].

Im Folgenden wird eine Übersicht der in der Literatur aufgeführten Parameter für grünes Holz einiger Arten mit westeuropäischem Ursprung und dorthin eingeführter Arten gegeben, siehe Tab. 3.4. Die vorhandene Literatur ist ausführlich bezüglich des Elastizitätsmoduls in Längsrichtung. Hier sind Daten für viele Spezies vorhanden. Orthotrope Parameter für eine Holzfeuchte bei ca. $u = 12\%$ lassen sich allerdings auch für einige Arten finden. Durch die Interpolationsverhältnisse, die für diese Arten vorliegen lassen sich daraus die orthotropen Materialparameter für den grünen Zustand ableiten, vgl. Tab. 3.3.

Tabelle 3.3: Übersicht für die 9 orthotropen Materialparameter für verschiedene Arten in fasergesättigtem Zustand (Holzfeuchte $u_f \approx 30\%$). ¹ Angaben basieren auf Umrechnungsfaktoren von CARRINGTON [16]. ² Angaben basieren auf linearer Regression der Daten von HERING ET AL. [40] und OZYHAR [78].

Spezies	E_1	E_2	E_3 [$10^3 \cdot \text{N}/\text{mm}^2$]	G_{12}	G_{13}	G_{23}	ν_{12}	ν_{13} [-]	ν_{23}
Esche [38] (<i>Fraxinus</i>)	12.90	0.71	0.32	0.95	0.60	0.16	0.26	0.77	0.92
Rotbuche [38] (<i>Fagus sylvatica</i>)	11.20	1.05	0.46	1.14	0.71	0.28	0.26	0.77	0.98
Birke [38] (<i>Betula</i>)	13.30	0.52	0.25	0.84	0.61	0.11	0.28	0.64	1.01
Ahorn [38] (<i>Acer</i>)	8.15	0.71	0.35	0.87	0.74	0.17	0.26	0.75	1.07
Eiche [38] (<i>Quercus</i>)	4.32	1.01	0.39	0.92	0.51	0.23	0.19	0.75	0.83
Walnuss [38] (<i>Juglans</i>)	9.13	0.56	0.25	0.68	0.47	0.14	0.28	0.94	0.94
Gelbpappel [38] (<i>Liriodendron</i>)	7.91	0.42	0.16	0.51	0.45	0.066	0.18	0.58	0.91
Douglasie [38] (<i>Pseudotsuga</i>)	12.80	0.50	0.31	0.62	0.59	0.053	0.16	0.68	0.51
Tanne [38] (<i>Abies</i>)	10.40	0.44	0.19	0.66	0.50	0.084	0.26	0.75	0.78
Kiefer [38] (<i>Pinus spp.</i>)	13.30	0.52	0.23	0.82	0.46	0.040	0.24	0.76	0.88
Sitka-Fichte [38] (<i>Picea sitchensis</i>)	9.45	0.42	0.20	0.53	0.48	0.023	0.21	0.70	0.56
Fichte ¹ [17] (<i>Picea</i>)	10.60	0.50	0.23	0.54	0.35	0.02	0.38	0.56	0.43
Fichte ¹ [38] (<i>Picea</i>)	13.12	0.46	0.31	0.60	0.47	0.03	0.45	0.54	0.56
Rotbuche ² [98] (<i>Fagus sylvatica</i>)	10.61	1.62	0.63	1.10	0.78	0.19	0.45	0.52	0.71

Tabelle 3.4: Übersicht für Durchschnittswerte von Elastischen Parametern einiger heimischer oder eingeführter Arten Europas in grünem Zustand (Holzfeuchte $u_f > 30\%$).

Spezies	E_1 [N/mm ²]	Literatur
Rotbuche (<i>Fagus sylvatica</i>)	10800	SAURAT & GUENEAU [92]
Rotbuche (<i>Fagus sylvatica</i>)	9800	NIKLAS & SPATZ [75]
Birke (<i>Betula</i>)	9900	NIKLAS & SPATZ [75]
Eiche (<i>Quercus spp.</i>)	8300	NIKLAS & SPATZ [75]
Roteiche (<i>Quercus rubra</i>)	10500	NIKLAS & SPATZ [75]
Weiß-Esche (<i>Fraxinus americana</i>)	9500	NIKLAS & SPATZ [75]
Pappel (<i>Populus</i>)	6800	NIKLAS & SPATZ [75]
Waldkiefer (<i>Pinus silvestris</i>)	7300	NIKLAS & SPATZ [75]

Mithilfe dieser Methode kann die Abhängigkeit der richtungsbezogenen transversal-isotropen Materialparameter von der Holzfeuchte visualisiert werden, wie bereits in Abb. 2.12 dargestellt. Zur Veranschaulichung wird ein Vergleich zwischen Fichte und Buche durchgeführt. Dabei werden ausschließlich der Elastizitätsmodul E_1 sowie der Schubmodul G_{23} betrachtet, da die Deformationskörper eine rotationssymmetrische Struktur entlang ihrer Achse aufweisen.

In Abb. 3.4 wird deutlich, dass das Anisotropieverhältnis E_1/E_2 bei Fichtenholz – typisch für Nadelhölzer – wesentlich ausgeprägter ist. Wie bereits zuvor erläutert, liegt die Ursache in der unterschiedlichen Faserstruktur. Nadelhölzer besitzen im Vergleich zu Laubhölzern weniger radiale Holzstrahlen, was zu einer höheren Nachgiebigkeit in dieser Richtung führt.

Die Abhängigkeit der Elastizitätsmoduln von der Holzfeuchte zeigt bei beiden Holzarten eine ähnliche Tendenz, sodass im direkten Vergleich keine signifikanten Unterschiede im Verlauf der moduln erkennbar sind. Auffälliger ist hingegen der stärkere Rückgang des Schubmoduls G_{23} bei Buchenholz im Vergleich zu Fichtenholz. Es zeigt sich auch hier die ausgeprägtere Schubmodul-Anisotropie G_{12}/G_{23} beim Fichtenholz, was auf die strukturelle Zusammensetzung und die geringere Anzahl an radialen Strukturen zurückzuführen ist.

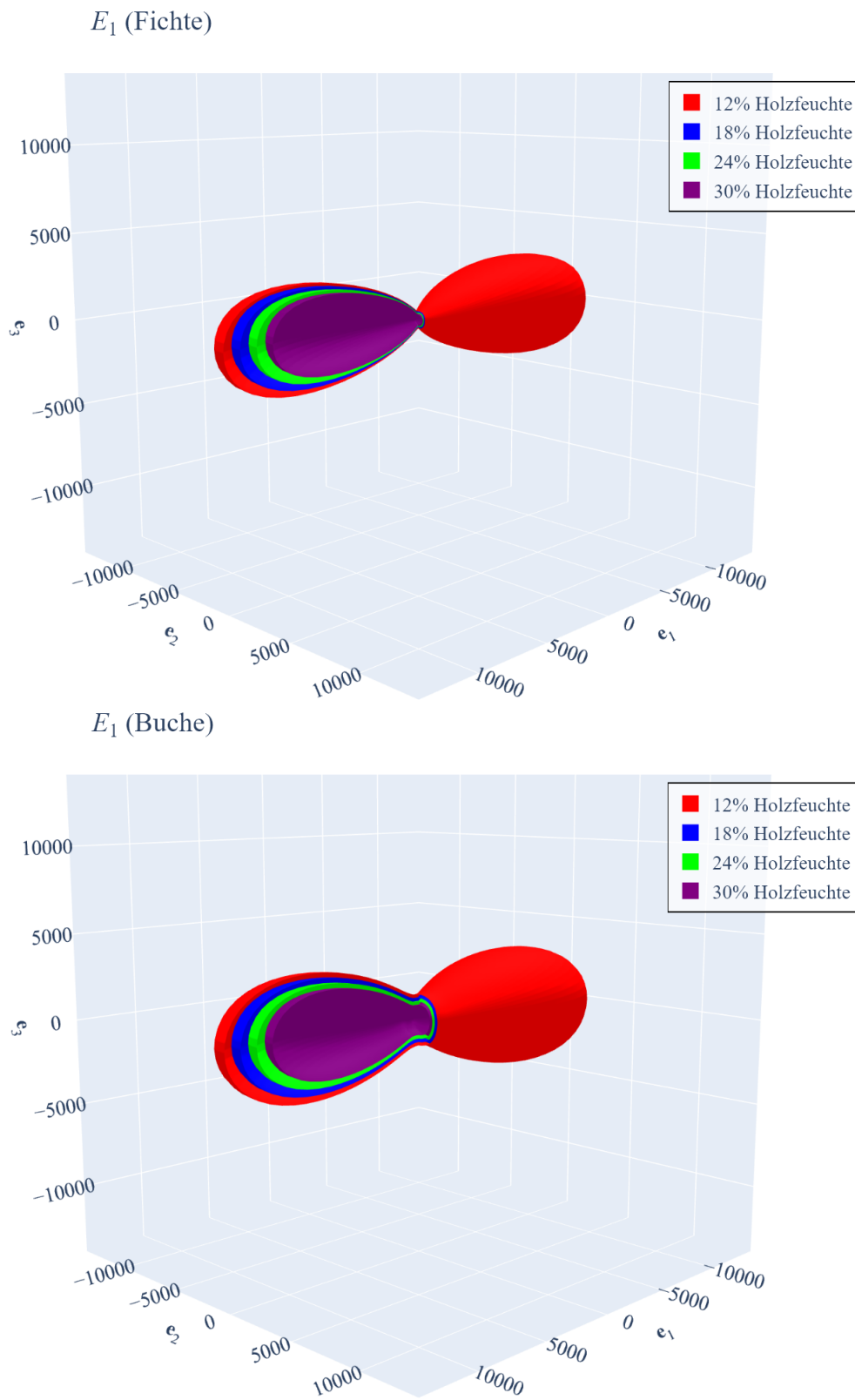


Abbildung 3.4: Vergleich der holzfeuchteabhängigen Elastizitätsmoduln zwischen Fichten und Buchenholz im Bereich von $\phi \in [\pi/2, 2\pi]$.

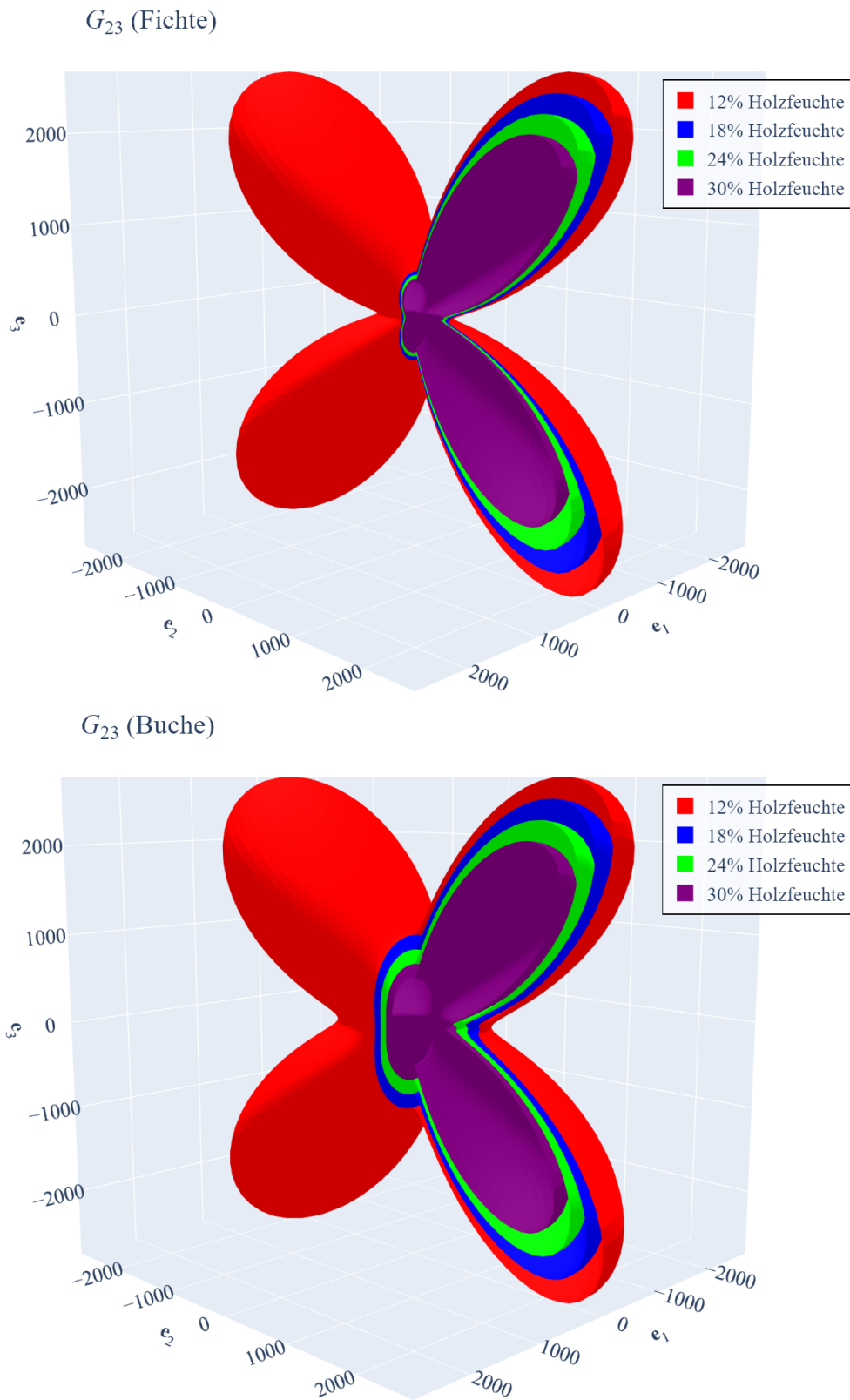


Abbildung 3.5: Vergleich der holzfeuchteabhängigen Schubmoduln zwischen Fichten und Buchenholz im Bereich von $\phi \in [\pi/2, 2\pi]$.

4 Messung und Modellierung von Wachstumsspannungen

Wachstumsspannungen entwickeln sich infolge des sekundären Wachstums in den neuen Schichten des Xylems nach der Zellteilung. Dieses Kapitel behandelt ihren Ursprung, gängige Messverfahren sowie deren Überführung in mechanische Modelle. Zunächst wird die Entstehung der Wachstumsspannungen auf Zellebene verfolgt. Anschließend werden etablierte Methoden zu dessen experimenteller Bestimmung vorgestellt. Abschließend wird aufgezeigt, wie diese Erkenntnisse in analytische und numerische Modelle übertragen werden können, um Wachstumsspannungen im Querschnitt zu beschreiben.

4.1 Entstehung von Wachstumsspannungen

Die Entstehung von Wachstumsspannungen wird maßgeblich durch den zellulären Aufbau und die Reifungsprozesse im Xylem beeinflusst, insbesondere durch die Ausbildung der Tracheidzellen.

Biopolymere des Zellaufbaus

Für eine Beschreibung des Ursprungs von Wachstumsspannungen sind zunächst die **Biopolymere**⁵ des Zellaufbaus zu erläutern, deren Zusammensetzung in der Zellwand als natürlicher Faserverbund verstanden werden kann:

- **Cellulose** ist ein Polysaccharid⁶ und lagert sich zu langen unverzweigten **Cellulose-Mikrofibrillen** zusammen, die als Verstärkungsfasern die Zugfestigkeit der Zellwand bestimmen [49].
- **Hemicellulose** ist ebenfalls ein Polysaccharid und bildet weniger geordnete strukturlose und verzweigte Strukturen [77, 88]. Sie bildet zusammen mit **Pektinen** eine bettende Matrix zwischen den Cellulose-Mikrofibrillen.
- **Lignin** besteht hauptsächlich aus Phenolen⁷ und lagert sich in die Zwischenräume der Cellulose-Mikrofibrillen ein [49]. Durch dessen isotrope Steifigkeit

⁵Natürliche, von Pflanzen gebildete Grundbausteine, aus denen die Zellwände bestehen.

⁶Langkettiges Kohlenhydrat aus Zuckerbausteinen.

⁷Natürliche Ausgangsstoffe, die in der Industrie unter anderem zur Herstellung von Kunststoffen, Klebstoffen und Beschichtungen verwendet werden.

trägt es wesentlich zur Erhöhung der Druckfestigkeit bei [49, 88].

- **Pektin** ist ein wasserbindendes Polysaccharid und hat ein starkes Quellungsvermögen [49, 88]. Es sorgt für die Verbindung von Zellen und verleiht ihnen Flexibilität.

Im Allgemeinen bestehen die Zellwände aus etwa 40 – 44 % (Nadelholz) bzw. 43 – 47 % (Laubholz) Cellulose, 25 – 29 % bzw. 25 – 35 % Hemicellulose sowie 25 – 31 % bzw. 16 – 24 % Lignin [24]. Die mechanische Festigkeit des Holzes hängt maßgeblich von diesem zellulären Aufbau ab: Je höher der Zellwandanteil und je geringer der Anteil an Hohlräumen, desto dichter und fester ist das Holz [20]. Die Holzmatrix einiger Eisenholzarten weist z. B. aufgrund des geringen Anteils an Zellhohlräumen selbst im luftgetrockneten Zustand eine Dichte auf, die über der von Wasser liegt, und sinkt daher [117].

Aufbau und Reifung der Tracheidzellen

Der Aufbau der Xylemzellen, insbesondere der Tracheiden wird z. B. von PLOMION ET AL. [83], SUGIYAMA ET AL. [101], YAMAMOTO [116], RAFSANJANI ET AL. [86], MATYSSEK ET AL. [66], FROMM [30] und THIBAUT ET AL. [104] beschrieben, siehe Abb. 4.1.

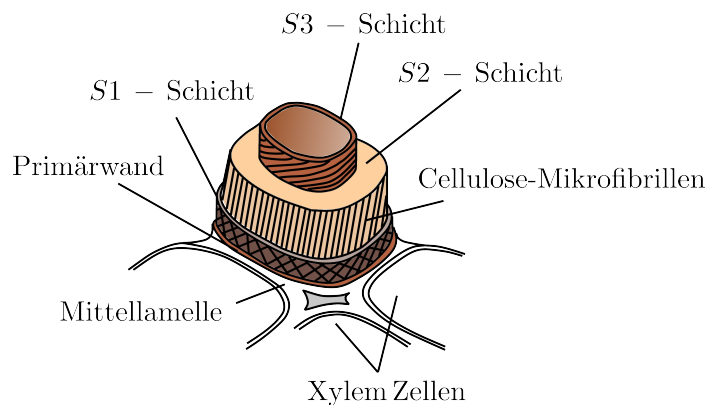


Abbildung 4.1: Zellwandschichten innerhalb einer Tracheidzelle nach RAFSANJANI ET AL. [86].

Nach der Zellteilung bildet sich zunächst die Mittellamelle, eine pektinreiche Schicht, die benachbarte Zellen miteinander verbindet und für den Zellverband strukturelle Integrität schafft. Daran anschließend entsteht die Primärwand, eine zunächst dehnbare Zellwandschicht, die gemeinsam mit der Mittellamelle den äußeren Abschluss der Zelle bildet. Da die Cellulose-Mikrofibrillen dort diffus orientiert sind, wird der Zelle eine

flexible Volumenexpansion ermöglicht. Die Matrix der Zellwand besteht zu diesem Zeitpunkt überwiegend aus Pektinen und Hemicellulose.

Im weiteren Verlauf der Zelldifferenzierung lagert sich Lignin ein, wodurch die Steifigkeit der Zellwand zunimmt und dessen Form manifestiert wird. Es folgen die Ausbildung der Sekundärwände (S-Schichten), die sich durch unterschiedliche Orientierungen der Cellulose-Mikrofibrillen und variierenden Ligningehalt auszeichnen. Die S2-Schicht stellt den volumetrisch dominierenden Anteil der Zellwand dar und weist eine nahezu longitudinale Ausrichtung der Cellulose-Mikrofibrillen entlang der Zellachse auf. Diese Anordnung verleiht der Zelle eine hohe axiale Zugfestigkeit.

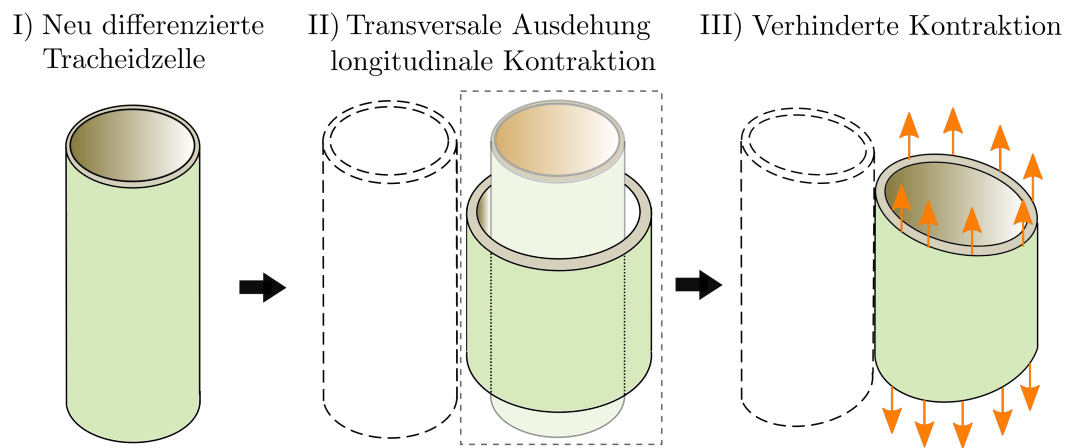
Während dieser „Reifung“ der Tracheidzelle beeinflussen drei grundlegende Abläufe die Zellwände [83]:

1. Die Zelle schwillt durch Anlagerung von Lignin in Querrichtung auf.
2. Die Cellulose-Mikrofibrillen ziehen sich durch die Kristallisation der umgebenden Hemicellulosematrix zusammen. Aufgrund der nahezu longitudinalen Ausrichtung der Fasern in der S2-Schicht kommt es zu einer Verkürzungstendenz der Zelle in Längsrichtung. Da die Zellen jedoch mit bereits verholzten, weniger nachgiebigen Nachbarzellen verbunden sind, kann diese Längenänderung nicht ungehindert erfolgen. Der resultierende mechanische Zwang führt zur Ausbildung von Zugspannungen in der neu gebildeten Zelle.
3. Lignin wird in die Zellwände eingelagert, was die entstehende Form und den mechanischen Zustand manifestiert (Verholzung).

Diese Mechanismen führen dazu, dass sich die Zellen nach ihrer Differenzierung in longitudinaler Richtung zusammenziehen und gleichzeitig in transversaler Richtung ausdehnen möchten, vgl. Abb. 4.2, Schritt II). Die Anbindung an benachbarte, bereits verholzte und steifere Zellen über die Mittellamelle verhindert jedoch diese freie Kontraktion, vgl. Abb. 4.2, Schritt III). Dadurch entsteht ein mechanischer Zwangszustand, in dem Zugspannungen in den Zellwänden aufgebaut werden. Infolge dessen wird das zuvor gebildete Xylem im Stamminneren zunehmend unter Druckspannung gesetzt. Jede neu gebildete Zellschicht übt eine Kraft auf die bereits vorhandene Holzmatrix aus. Während das Kernholz durch diesen Effekt unter Druck steht, verbleiben die jüngeren Schichten zunächst in einem Zustand axialer Zugspannung, vgl. Abb. 4.2, Schritt IV). Da diese Eigenspannungen infolge des Wachstums entstehen, werden sie in der Literatur häufig als „Wachstumsspannungen“ bezeichnet [4]. Der damit verbundene innere Spannungszustand kann nur durch Einschnitte aufgelöst werden – eine Methode, die auch experimentell zur Bestimmung dieser Spannungen genutzt wird. Das durch einen sol-

chen Schnitt gestörte Gleichgewicht führt zu äußeren Reaktionskräften, die einen neuen Gleichgewichtszustand erzeugen. Dies äußert sich typischerweise in einer Verschiebung oder Verkrümmung der Querschnittsteile, vgl. Abb. 4.2 Schritt V).

Reifungsprozess



Auswirkung der Zellreifung im Stammquerschnitt:

IV) Inneres Kräftegleichgewicht V) Verkrümmung durch gestörtes Gleichgewicht

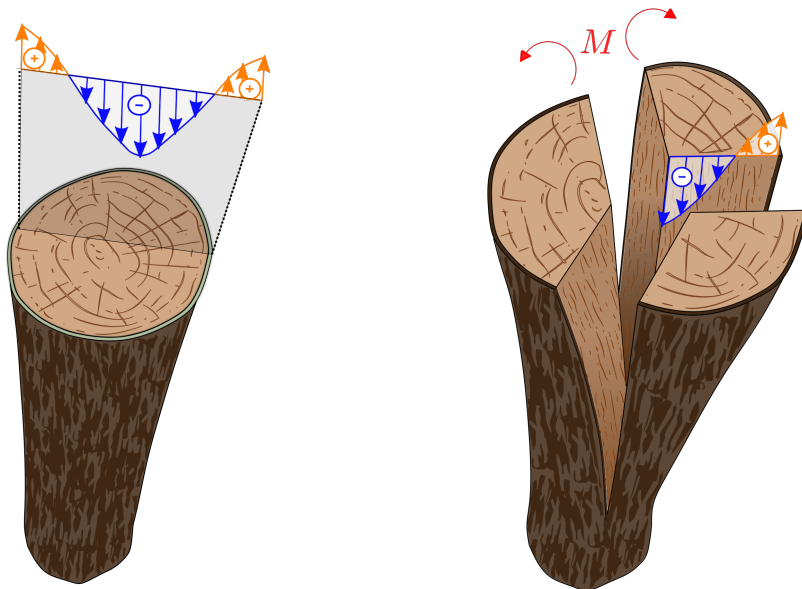


Abbildung 4.2: Schematische Darstellung der Entstehung von Wachstumsspannungen in den Entwicklungsschritten (I-III) auf zellulärer Ebene und die Auswirkungen im Querschnitt (IV-V).

Reaktionsholz

Wie bereits in Abschnitt 3.2 erläutert, führt die auxininduzierte Reaktion auf Gravitropismus zu einer gesteigerten Kambiumaktivität und bildet Reaktionsholz aus. Dabei entstehen auf Zellebene Gestaltänderungen in unterschiedlicher Weise für Laub- und Nadelholz [30, 83], siehe Tab. 4.1:

- In **Laubhölzern** wird die Ausbildung einer gelatinösen Schicht (G-Schicht) zwischen S3 und Lumen induziert [83]. Diese besteht fast ausschließlich aus Cellulose mit nahezu axial ausgerichteten Cellulose-Mikrofibrillen. Dies führt zu einer verstärkten Verkürzungstendenz während der Reifung und spiegelt sich in höheren Zugeigenspannungen an der Oberfläche wider.
- In **Nadelhölzern** erhalten Cellulose-Mikrofibrillen durch den erhöhten Ligningehalt in der bettenden Matrix eine flachere Ausrichtung in der S2-Schicht, wodurch die Zellwand während der Reifung einen Drang ausbildet sich in Longitudinalrichtung auszudehnen, statt zu schrumpfen. Dies erzeugt ein Druckkraftinkrement, was zu einer Reduktion oder sogar Umkehrung der Wachstumsspannungsrichtung im Bereich der Oberfläche führen kann [92].

Der Gravitropismus induziert also Anpassungen der Zellreifung - bei Laubhölzern um den Stamm in eine vertikale Ausrichtung zu ziehen, während bei Nadelhölzern der Stamm aufrecht gedrückt wird [4].

Tabelle 4.1: Vergleich der Zelleigenschaften von Druck- und Zugholz.

Eigenschaft	Druckholz (Nadelholz)	Zugholz (Laubholz)
Lignin-Gehalt	Hoch	Gering
Cellulose-Gehalt	Gering	Hoch
Mikrofibrillenrichtung	Flach	Steil, nahezu axial
Mechanischer Effekt	Ausdehnung der Zelle	Kontraktion der Zelle

4.2 Ermittlung von Wachstumsspannungen

Durch den zellularen, geschichteten Aufbau der Holzmatrix liegt kein homogenes, kristallines Material vor, welches z. B. durch Messung der Gitterabstandsänderungen mittels Röntgenstrahlung auf Eigenspannungen untersuchbar ist. Auch Ultraschallverfahren, die auf Schalllaufzeitmessungen beruhen, erlauben es nur bei homogenen Werkstoff-

fen Rückschlüsse auf vorhandene Eigenspannungen zu ziehen. Für Holz existieren derzeit keine solchen zerstörungsfreien Methoden zur Wachstumsspannungsanalyse. Stattdessen basieren die gängigen Verfahren auf der Entnahme von Proben, welche durch die Zerlegung des Querschnitts kinematischen Zwang zu angrenzenden Schichten verlieren. Die dabei entstehenden Dehnungen lassen Rückschlüsse auf die ursprünglichen Wachstumsspannungen im Holz zu. Diese Verfahren lassen sich in zwei Kategorien unterteilen:

- **Innendehnungsmessung:** Hierbei werden größere Proben aus dem Holz entnommen und im Labor untersucht, was üblicherweise die Fällung eines Baumes erfordert. Diese Methode ermöglicht eine detaillierte Analyse der Spannungsverteilung im Inneren, ohne dass Modelle zur Rekonstruktion erforderlich sind. Solche umfassenden Datensätze sind besonders wertvoll für die Validierung von Spannungsmodellen und tragen zur präziseren Nachbildung der Wachstumsspannungen im Holz bei.
- **Oberflächendehnungsmessung:** Diese Methoden setzen auf oberflächliche Eingriffe wie Schnitte oder Bohrungen. Dabei bleibt der Großteil des Querschnitts intakt, so dass der Baum vom Prüfverfahren nur lokal geschädigt wird und sich i. d. R. davon regeneriert. Da jedoch nur Oberflächendehnungen erfasst werden, dienen diese Messdaten als Datengrundlage für Modelle, welche die Spannungsverteilung im Inneren des Stammes schätzen. Einige solcher Modellierungsansätze werden in dieser Arbeit vorgestellt und diskutiert.

In diesem Abschnitt erfolgt eine systematische Klassifizierung der Literatur, die sich der Ermittlung von Eigendehnungen im gewachsenen Holz widmet, um quantitative Werte bestimmter Baumarten zu gewinnen. Diese Erkenntnisse fließen anschließend in die Kalibrierung der Modellparameter ein.

Innendehnungsmessung

Eine der ältesten Methoden ist die sogenannte Holzstreifenmethode (HS), die erstmals von JACOBS [45] beschrieben wurde. Dabei wird aus einem Stammabschnitt eine Bohle in Faserrichtung entnommen und anschließend in gleichmäßige, streifenförmige Proben geschnitten. Die Längenänderung der einzelnen Streifen gibt Auskunft über die ursprünglichen Längsspannungen: äußere Streifen verkürzen sich, innere verlängern sich. Auch die durch innere Spannungsgradienten verursachte Krümmung der Messstreifen wird bei der Auswertung berücksichtigt.

BOYD [9] entwickelt die Scheibenschnitt-Methode, bei der ein mittiger Spalt parallel zur Stammachse gefräst wird. An definierten Stellen (z. B. nahe der Borke und des Marks) werden Wegaufnehmer angebracht. Durch das sequentielle Entfernen von Stammscheiben erfolgt eine schrittweise Entlastung, aus der sich das radiale Spannungsprofil rekonstruieren lässt.

Ein verwandtes Verfahren wendet KÜBLER [57] an: Hierbei wird ein Loch in Stammrichtung gebohrt und mit einem Extensometer (Methode E) die Längsdehnung über definierte Messpunkte bestimmt. Um eine vollständige Spannungsfreisetzung zu erreichen, werden umliegende Stammsegmente schrittweise entfernt. Die Methode wurde später auch von KÜBLER [58] weiterentwickelt.

Allen genannten Verfahren ist gemeinsam, dass bereits durch das Fräsen, Bohren oder Sägen vor der eigentlichen Messung ein Teil vorhandener Spannung entlastet wird. So führt z. B. das Ausschneiden rechteckiger Bohlen oder Ausschnitte zu einer stärkeren Freisetzung als punktuelle oder keilförmige Einschnitte [57]. Diese Entlastungseffekte bewirken eine systematische Überschätzung der tatsächlichen Wachstumsspannungen an der Oberfläche. Dies wird in Abschnitt 4.4 genauer beschrieben.

Oberflächendehnungsmessung

NICHOLSON [72] entwickelt ein Verfahren, bei dem an einem rechteckigen Holzprisma mehrere Messpunkte angebracht werden. Nach Entfernung eines Holzstücks wird die Längsverformung zwischen den Punkten gemessen. Ein dritter Messpunkt ermöglicht die Korrektur eventueller Durchbiegung des Prismas.

Ein präziseres Verfahren ist die Dehnungsmessstreifen-Methode, bei der elektrische Dehnungsmessstreifen auf der Oberfläche des Splintholzes angebracht werden. In der von SAURAT & GUENEAU [92] und KIKATA & MIWA [51] beschriebenen Variante – auch bekannt als 2-Loch-Methode (DMS 2L) – wird zunächst unterhalb des Messstreifens eine erste Bohrung gesetzt. Nachdem sich die daraus resultierende Verschiebungsantwort stabilisiert hat, folgt eine zweite Bohrung oberhalb des Messstreifens. Durch dieses Vorgehen lassen sich störende sekundäre Effekte minimieren. Der Vergleich mit der HS-Methode zeigt, dass die mit DMS 2L ermittelten Spannungen um etwa 15 % geringer ausfallen, was auf eine unvollständige Spannungsfreisetzung an der Oberfläche zurückzuführen ist.

Eine weitere Methode zur Oberflächendehnungsmessung ist die sogenannte Ein-

Loch-Methode, wie sie ARCHER [5] beschreiben. Dabei werden mehrere Messpunkte ringförmig um eine geplante Bohrposition auf der Stammoberfläche markiert. Nach dem Einbringen des Lochs werden die Veränderung der Abstände zwischen den Punkten analysiert, um daraus die Oberflächendehnungen zu berechnen.

Alle Verfahren zur Oberflächenmessung sind vor Ort einsetzbar, weisen jedoch die grundsätzliche Einschränkung einer unvollständigen Spannungsfreisetzung an der Oberfläche auf, was die Genauigkeit der Ergebnisse mindert.

4.3 Zusammenstellung von Durchschnittswerten

Die Literatur dokumentiert zahlreiche Durchschnittswerte für die Wachstumsspannungen sowohl heimischer als auch nicht-heimischer Baumarten aus gemäßigten Klimazonen. Tabelle 4.3 gibt eine Übersicht über die typischen Dehnungswerte der jeweiligen Spezies, die angewandten Messmethoden sowie die Anzahl der untersuchten Proben.

Um verlässliche Messdaten zu erhalten, ist es essenziell, die Spannungen an mehreren Stellen des Stamms zu messen und Proben von verschiedenen Bäumen derselben Art zu entnehmen. Einzelmessungen können durch lokale Einflüsse, wie beispielsweise eine Schrägstellung des Baums aufgrund unebenem Boden, verzerrt sein und zu fehlerhaften Ergebnissen führen [58]. Daher gilt: Je mehr Proben untersucht werden, desto aussagekräftiger sind die ermittelten Durchschnittswerte.

Die häufigsten Messungen wurden an Rotbuchen (*Fagus sylvatica*) und Riesen-Eukalypten (*Eucalyptus regnans*) durchgeführt. Diese Arten weisen im Durchschnitt die höchsten Oberflächenwerte der Wachstumsspannungen auf. Generell zeigen Laubhölzer höhere Zugeigenspannungen als Nadelhölzer, was auf Unterschiede im Zellaufbau und in der Reaktionsholzbildung zurückzuführen ist [27, 92], siehe Tab. 4.1.

In den meisten Quellen wird nicht angegeben, ob eine Korrektur für entlastungsbedingte Überschätzungen vorgenommen wurde. Eine Ausnahme bildet SAURAT & GUENEAU [92], wo systematische Kalibrierungen und Abweichungsanalysen durchgeführt wurden (max. Abweichung: 5%). Der Vergleich der gemessenen Zugeigendehnungen bei Rotbuche deutet darauf hin, dass in den Arbeiten von LENZ & STRÄSSLER [62] und KÜBLER [57] eine Korrektur der Messwerte erfolgt ist, auch wenn dies nicht ausdrücklich dokumentiert ist.

Tabelle 4.3: Durchschnittswerte der Zugeigendehnung an der Stammoberfläche verschiedener Arten mit Angabe der verwendeten Methode, der Probenzahl (Anzahl Bäume \times Proben pro Baum) und ob das Vorhandensein von Reaktionsholz berücksichtigt wurde. Methoden: HS = Holzstreifenmethode, DMS = Dehnungsmessstreifen, DMS 2L = Dehnungsmessstreifen mit der 2-Loch Methode, E = Extensometer-Messung mit Lochbohrung.

Spezies / Literatur	Dehnungen $\cdot 10^{-4}$	Methode	Unterscheidung für Reaktionsholz
Rotbuche [92] (<i>Fagus sylvatica</i>)	9.73	DMS 2L	+
Rotbuche [62] (<i>Fagus sylvatica</i>)	10.50	HS	-
Rotbuche [57] (<i>Fagus sylvatica</i>)	8.00	E	-
Rotbuche [105] (<i>Fagus sylvatica</i>)	9.65	DMS 2L	+
Birke [58] (<i>Betula</i>)	3.50	E	-
Eiche [58] (<i>Quercus spp.</i>)	7.50	E	-
Roteiche [58] (<i>Quercus rubra</i>)	14.00	E	-
Weiß-Esche [58] (<i>Fraxinus americana</i>)	5.50	E	-
Pappel [110] (<i>Populus</i>)	7.00	HS	-
Waldkiefer [57] (<i>Pinus sylvestris</i>)	3.00	HS	-
Kiefer [58] (<i>Pinus spp.</i>)	2.20	DMS 2L	-

Literatur mit Berücksichtigung des Reaktionsholzes

Die Bildung von Wachstumsspannungen ist unmittelbar an den Entstehungs- und Reifungsprozess der Holzzellen gekoppelt. Da sich dadurch sowohl Oberflächenwerte als auch die Verteilung der Wachstumsspannungen deutlich von Normalholz unterscheiden, ist es für die Bewertung der in Tab. 4.3 aufgeführten Durchschnittswerte wesentlich zu wissen, ob die zugrunde liegenden Messungen Bereiche mit Reaktionsholz enthalten.

Entsprechende Hinweise sind in der Tabelle vermerkt.

Die Bildung von Wachstumsspannungen ist unmittelbar an den Entstehungs- und Reifungsprozess der Holzzellen gekoppelt. Wie bereits in Abschnitt 4.1 beschrieben, verändert die Ausbildung von Reaktionsholz diesen Prozess, indem die zelluläre Struktur gezielt anpasst wird, was zu veränderten Oberflächenwerten und Spannungsverteilungen führt. Zugholz erhöht typischerweise die Zugdehnungen an der Stammoberfläche, während Druckholz diese deutlich verringern oder sogar umkehren kann. Für die Bewertung der in Tab. 4.3 aufgeführten Durchschnittswerte ist es daher entscheidend zu wissen, ob die zugrunde liegenden Messungen Bereiche mit Reaktionsholz enthalten [4]. Entsprechende Hinweise sind in der Tabelle vermerkt.

Einen klaren Zusammenhang zwischen hohen Oberflächendehnungen und dem Vorkommen von Zugholz zeigen die Untersuchungen von SAURAT & GUENEAU [92] an mikroskopisch analysierten Rotbuchenproben. Insbesondere Proben der untersuchten Laubhölzer mit ausgeprägter gelatinöser Schicht der Zellen - ein Anzeichen für Zugholz - weisen signifikant höhere Dehnungswerte auf als solche ohne Zugholzausbildung, vgl. Abschnitt 4.1. Auch TRENARD & GUENEAU [105] und LENZ & STRÄSSLER [62] berichten von deutlich niedrigeren Dehnungswerten in Stammabschnitten ohne Reaktionsholz. Da viele der in Tabelle 4.3 aufgeführten Studien keine systematische Trennung von Proben mit und ohne Reaktionsholz vornehmen oder diese nicht dokumentiert ist, kann eine verlässliche Interpretation dieser Mittelwerte nicht ohne Weiteres erfolgen. Für eine zuverlässige Einordnung müssen sowohl die Ausprägung von Reaktionsholz als auch die Lage im Querschnitt explizit berücksichtigt werden.

Eine differenzierte Datengrundlage liefert die Studie von TRENARD & GUENEAU [105], in der für Rotbuche (*Fagus sylvatica*) spezifische Durchschnittswerte unter Berücksichtigung des Reaktionsholzanteils ermittelt werden. Mit der Zwei-Loch-Dehnungsmessstreifen-Methode (DMS 2L) untersuchen TRENARD & GUENEAU [105] je Stammquerschnitt fünf radial verteilte Messpunkte. Die Proben sind in drei Kategorien eingeteilt: (i) starker Zugholzanteil, (ii) gemischte Ausprägung und (iii) ohne erkennbares Reaktionsholz.

Die Werte für Proben ohne Reaktionsholz sind in Tab. 4.4 dargestellt. Daraus ergibt sich die Normalverteilung in Abb. 4.3. Der Mittelwert für Oberflächendehnungen in diesen Normalholz-Proben liegt bei etwa $3 \cdot 10^{-4}$ und damit deutlich unter den Durchschnittswerten aus Studien ohne Differenzierung zwischen Normal- und Reaktionsholz, vgl. Tab. 4.3. Diese Messwerte liefern eine Referenz für typische Eigendehnungen für Reaktionsholz-freie Rotbuchenstämme.

Tabelle 4.4: Einzelwerte der longitudinalen Oberflächendehnung bei reaktionsholzfreien Querschnitten von Rotbuche (*Fagus sylvatica*) nach TRENARD & GUENEAU [105].

Messpunkt	Dehnung [$\cdot 10^{-4}$]	Messpunkt	Dehnung [$\cdot 10^{-4}$]
1	3.36	13	2.17
2	4.02	14	1.63
3	3.70	15	3.02
4	2.15	16	2.25
5	1.40	17	3.14
6	2.53	18	2.71
7	3.31	19	3.60
8	2.28	20	3.56
9	2.19	21	1.92
10	2.72	22	3.84
11	2.32	23	3.40
12	1.87		

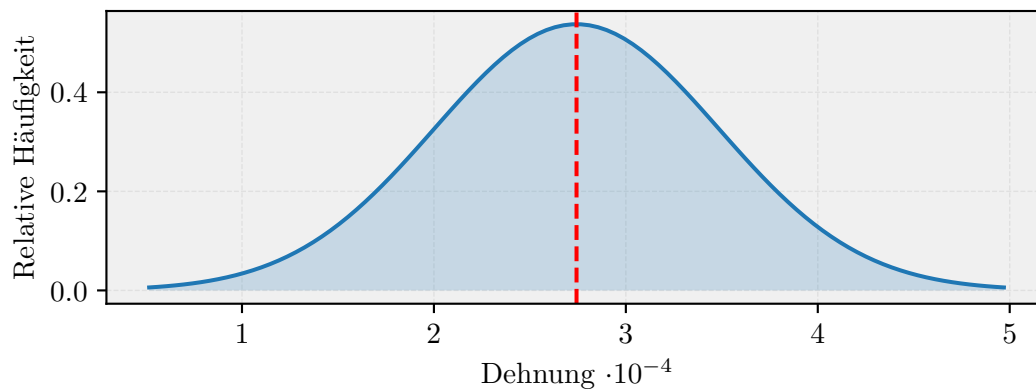


Abbildung 4.3: Wahrscheinlichkeitsdichte einer Normalverteilung der Oberflächendehnungen in Rotbuchenholz (ohne Reaktionsholz) nach [105].

4.4 Wachstumsspannungsmodell nach Kübler

Ein oft zitiertes Modell zum longitudinalen Eigenspannungsverlauf wird in KÜBLER [57] vorgestellt. Das Modell beruht auf der Annahme, dass jede neu gebildete Holzschicht eine initiale Eigenspannung σ_L^0 aufweist. Die resultierende Kraft dieser neuen Holzschicht erzeugt eine homogene Veränderung $\Delta\sigma$ im restlichen Querschnitt.

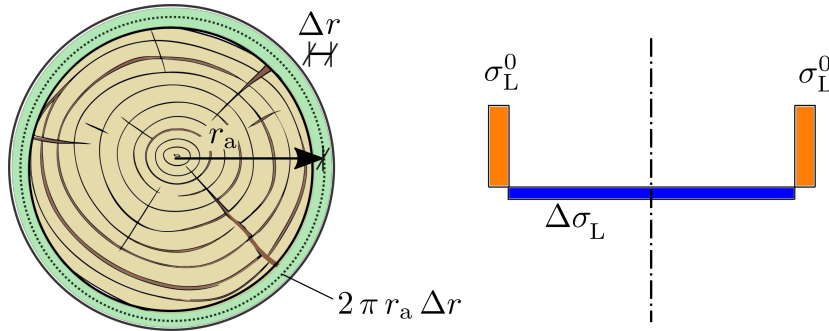


Abbildung 4.4: Modell nach KÜBLER [57] mit der Annahme einer konstanten Wachstumsspannung in der neuen Schicht (grün) sowie einer konstanten Spannungsänderung im Restquerschnitt.

Aus der Kräftebilanz lässt sich somit die Veränderung der longitudinalen Spannung im Restquerschnitt ablesen:

$$\begin{aligned} \pi r_a^2 \Delta\sigma_L + 2\pi r_a \sigma_L^0 \Delta r &= 0 \\ \Rightarrow \Delta\sigma_L &= -\frac{2\sigma_L^0}{r_a} \Delta r, \end{aligned} \quad (4.1)$$

mit dem Außenradius r_a und der Dicke der neuen Schicht Δr . Fasst man den Zuwachs neuer Holzschichten als kontinuierlichen Vorgang differenziell kleiner Schichten dr auf, geht Gl.(4.1) in die differenzielle Veränderung der longitudinalen Spannung im Restquerschnitt über. Diese differenzielle Veränderung steht in einem reziproken Verhältnis zum Radius r_a . Integriert man nun ausgehend von einem Radius r bis zum Außenradius r_a , wird der Spannungszuwachs durch Gl.(4.1) mit $r_a = r$ beschrieben, was auf folgenden, integralen Zusammenhang führt:

$$\begin{aligned} \sigma_L &= \sigma_L^0 - 2\sigma_L^0 \int_r^{r_a} \frac{dr}{r} \\ \Rightarrow \sigma_L &= \sigma_L^0 \left(1 + 2 \ln \left(\frac{r}{r_a} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Mit der Annahme linear elastischen Materialverhaltens folgt daraus mit dem Hooke'schen Gesetz der Verlauf der Eigendehnung:

$$\varepsilon_L = \varepsilon_L^0 \left(1 + 2 \ln \left(\frac{r}{r_a} \right) \right) . \quad (4.3)$$

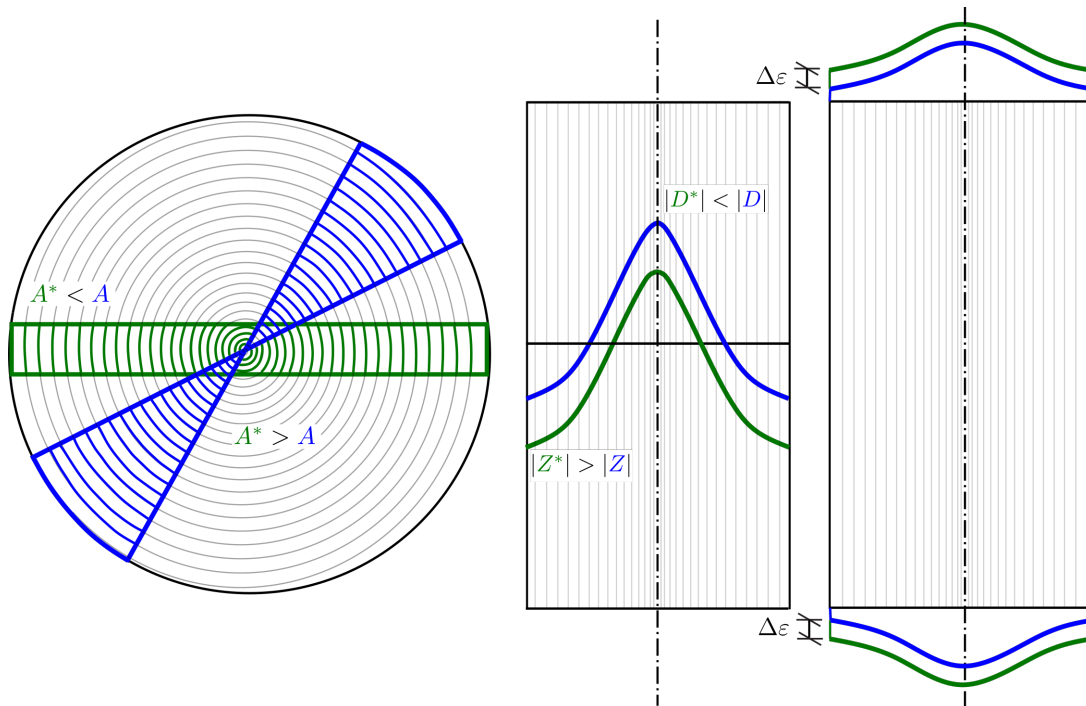


Abbildung 4.5: Flächenunterschiede zwischen rechteckigem und keilförmigem Prüfquerschnitt beeinflussen das Ergebnis der Holzstreifenmethode.

Der Spannungsverlauf aus Gl. (4.2) wird in KÜBLER [57] durch experimentelle Messungen an Holzstreifen nicht unmittelbar bestätigt. So findet beim Herauslösen einer Bohle aus dem Querschnitt bereits eine gleichmäßige Ausdehnung statt, welche die Ergebnisse des Experiments beeinflussen.

Auch ARCHER [5] schreibt, dass die Experimente von JACOBS [45] an Riesen Eukalyptus, sowie MAYER-WEGELIN & MAMMEN [67] an Rotbuchen diese Beobachtung bestätigen. Demnach bleibt zwar der Gradient der Eigenspannungen durch das Entfernen von Holzplanken bestehen. Die absoluten Werte weichen allerdings durch einen Wert ab, der den Eigenspannungen am äußeren Rand entspricht. Die Spannungswerte aus der Holzstreifenmethode weichen an der Oberfläche des Querschnitts vom realen Verlauf der Eigenspannung um etwa den Faktor 2 ab. Dieser Effekt ist in den Werten der Tabelle für die Übersicht der Durchschnittswerte von verschiedenen Arten Tab. 4.3, die mit der Holzstreifenmethode geprüft wurden, bereits berücksichtigt.

Da das analytische Modell auf Rotationssymmetrie basiert, müsste die Holzstreifenmethode für passende Ergebnisse keilförmige Prüfkörper untersuchen, vgl. Abb. 4.5 links. Die rechteckigen Prüfkörper enthalten mehr Kernholz im Vergleich zu den Keilförmigen. Infolgedessen bildet sich in den rechteckigen Prüfkörpern unmittelbar nach der Entnahme ein veränderter Eigenspannungszustand aus, vgl. Abb. 4.5 mitte.

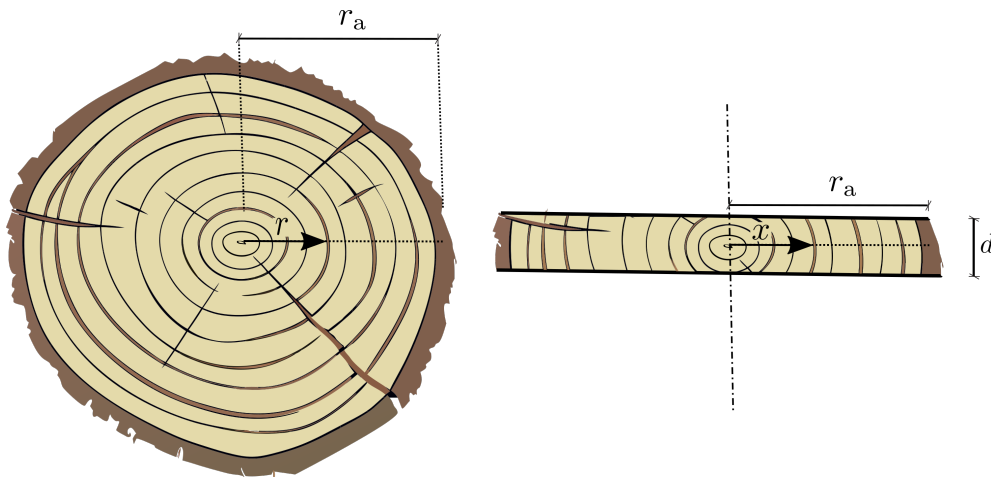


Abbildung 4.6: Entnahme einer achsensymmetrischen Holzplanke mit gleicher Dicke d aus einem Kreisquerschnitt mit dem Radius r_a .

Über die Analyse der theoretischen Axialkraftunterschiede zwischen der Spannungsverteilung gemäß der Holzstreifenmethode und dem rotationssymmetrischen Modell von KÜBLER [57] verdeutlicht ARCHER [5] diesen Effekt. Dabei identifiziert er zwei wesentliche Mechanismen, die die Spannungsverteilung nach dem Herausschneiden einer Planke bestimmen:

- Entlastung der Querspannungen auf den Seitenflächen (transversal und radial).
- Entlastung der Längsspannungen auf den Stirnflächen (longitudinal).

ARCHER [5] vereinfacht die Betrachtung, indem er die Spannungsentlastungen in transversaler und radialer Richtung vernachlässigt, da diese im Vergleich zu den longitudinalen Spannungen in der Regel deutlich kleiner sind. Diese Annahme wird durch die Ergebnisse von VENDHAN & ARCHER [108] gestützt. Damit beschränkt sich die Analyse auf die Betrachtung der Querschnittsfläche, siehe Abb. 4.6.

Für den ursprünglichen Spannungsverlauf nach KÜBLER [57] gilt, dass die resultierende Axialkraft F_K in einem punktsymmetrischen Querschnitt Null ist:

$$F_K = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_a} \sigma_L r \, dr \, d\vartheta = 0. \quad (4.4)$$

Nach dem Herausschneiden einer Planke tritt eine Entlastung der Stirnflächen auf, die zu einer Änderung des Spannungsverlaufs führt, beschrieben durch $\Delta\sigma_L^H$. Der neue Spannungsverlauf ergibt sich als:

$$\sigma_L^H = \sigma_L + \Delta\sigma_L^H . \quad (4.5)$$

Aufgrund der geringen Dicke des geschnittenen Bretts wird r mit x substituiert, siehe Abb. 4.6. Für die resultierende Axialkraft im Spannungsverlauf der Planke muss ebenfalls das axiale Gleichgewicht erfüllt sein:

$$F_H = 2t \int_0^{r_a} \sigma_L + \Delta\sigma_L^H \, dx = 0 . \quad (4.6)$$

Eingesetzt ergibt sich:

$$F_H = 2t \int_0^{r_a} \sigma_L^0 \left(1 + 2 \ln \left(\frac{x}{r_a} \right) \right) + \Delta\sigma_L^H \, dx = 0 . \quad (4.7)$$

Durch Integration und anschließende Vereinfachung ergibt sich folgende Bedingung:

$$2t r_a [-\sigma_L^0 + \Delta\sigma_L^H] = 0 , \quad (4.8)$$

die abgesehen von trivialen Fällen nur erfüllt ist, wenn:

$$\Delta\sigma_L^H = \sigma_L . \quad (4.9)$$

Somit ergibt sich für den Spannungsverlauf in der Planke:

$$\sigma_L^H = \sigma_L + \Delta\sigma_L^H = \left(2 + 2 \ln \left(\frac{x}{r_a} \right) \right) . \quad (4.10)$$

Der theoretische Spannungsverlauf unterscheidet sich daher bei der Vernachlässigung der transversalen und radialen Spannungsentlastungen um einen konstanten Wert, der den Spannungen an der Oberfläche entspricht.

4.5 Wachstumsspannungsmodell nach Gillis

GILLIS [32] leitet für linear-elastisches, transversal-isotropes Material dieselbe Gleichung für longitudinale Eigenspannungen her wie KÜBLER [57]. Darüber hinaus erweitert er seine Herleitung auf radiale und tangential-eigenspannungen und berücksichtigt explizit die Spannungsverläufe im Kernbereich des Stammes. Seine mathematische Herangehensweise erlaubt es zudem, den Unterschied zwischen den bauminternen Eigenspannungen und den durch die Holzstreifenmethode gemessenen Dehnungen präzise zu beschreiben.

Ausgangspunkt seiner Überlegungen ist das Hookesche Gesetz für isotropes Material, das durch gezielte Manipulation der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen angepasst wird, sodass es ein transversal-isotropes Materialmodell repräsentiert. In der Darstellung mit den Lamé-Konstanten lautet das Gesetz für die Spannungs-Dehnungs-Beziehung:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda\text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}]\mathbf{1}, \quad (4.11)$$

und in Indexschreibweise:

$$\sigma = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (4.12)$$

Für ein Koordinatensystem $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ in den Hauptachsen reduziert sich die Analyse auf Normalspannungen ($i = j$), da die Schubspannungen entfallen:

$$\bar{\sigma}_i = 2\mu\varepsilon_{ii} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}). \quad (4.13)$$

Normiert man diese Spannungswerte mit $2\mu + \lambda$, ergibt sich eine vereinfachte Spannungs-Dehnungs-Beziehung in den Hauptspannungsrichtungen. Diese ist nicht mehr von den absoluten Werten der Lamé-Konstanten, sondern lediglich von deren Verhältnis abhängig:

$$\hat{\sigma}_i = \varepsilon_{ii} + \frac{\lambda}{2\mu + \lambda}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} - \varepsilon_{ii}). \quad (4.14)$$

Für die weitere Analyse dienen Zylinderkoordinaten, wobei die Longitudinalrichtung durch \mathbf{e}_z (1-Richtung), die Radialrichtung durch \mathbf{e}_r (2-Richtung) und die Zirkularrichtung durch \mathbf{e}_ϕ beschrieben wird, siehe Abb. 4.7.

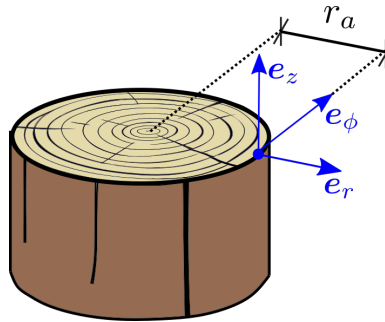


Abbildung 4.7: Zylinderkoordinaten für radiale, axiale sowie zirkulare Eigenspannungen und Eigendehnungen.

Das Gleichgewicht in Longitudinalrichtung lässt sich damit für ein rotationssymmetrisches Problem (Keilausschnitt) beschreiben über:

$$2\pi \int_0^{r_a} r \hat{\sigma}_1 dr = 0. \quad (4.15)$$

Weiterhin ist das Gleichgewicht in Radialrichtung beschrieben durch:

$$r \frac{\partial \hat{\sigma}_2}{\partial r} + \hat{\sigma}_2 - \hat{\sigma}_3 = 0. \quad (4.16)$$

In dieser Richtung muss am freien Ende $r = r_a$ die Randbedingung $\sigma_{22} = 0$ eingehalten werden. Nur in Longitudinal- und in Zirkularrichtung gibt es hier Randspannungen. Spannungsinkremente, die durch den Zuwachs von Material der Dicke dr im restlichen Stamm entstehen lauten:

$$d\hat{\sigma}_i = d\varepsilon_{ii} + \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} (d\varepsilon_{11} + d\varepsilon_{22} + d\varepsilon_{33} - d\varepsilon_{ii}). \quad (4.17)$$

Es wird auch hier angenommen, dass eine konstante Spannungsverteilung infolge des Zuwachses einer neuen Schicht entsteht. Diese Annahme ist gleichbedeutend mit einem eben bleiben der Querschnittsfläche während einer Neubelastung durch zugewachsene Schichten. Das Inkrement der Eigendehnungen in die Longitudinalrichtung ist somit unabhängig von r . Mithilfe der partiellen Ableitungen der Wegstrecke $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ nach den Polarkoordinaten r, ϕ :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_2, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{r} \mathbf{e}_3, \quad (4.18)$$

lassen sich die Inkremente für die Dehnungen $du(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r}$ in die jeweiligen Richtungen beschreiben. Da die Bewegungsfunktion nicht von dem Winkel ϕ abhängt, lauten diese für die 2-Richtung (radial) und die 3-Richtung (zirkular):

$$d\varepsilon_{22} = \frac{\partial du(\mathbf{r})}{\partial r} = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \mathbf{e}_r = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \mathbf{e}_2, \quad d\varepsilon_{33} = \frac{\partial du(\mathbf{r})}{\partial \phi} = \frac{f(r)}{r} \mathbf{e}_\phi = \frac{f(r)}{r} \mathbf{e}_3. \quad (4.19)$$

Wenn man annimmt, dass die Bewegungsfunktion $f(r) = a \cdot r$ eine lineare Beziehung mit der Konstante a darstellt, folgt daraus, dass die Inkremente der Dehnungen in diesen Richtungen betragsmäßig identisch sind. Die Spannungsinkremente aus Gl.(4.17) vereinfachen sich dann mit $d\varepsilon_{22} = d\varepsilon_{33}$ zu:

$$\begin{aligned} d\hat{\sigma}_1 &= d\varepsilon_{11} + \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} (2 d\varepsilon_{22}), \\ d\hat{\sigma}_2 &= d\varepsilon_{22} + \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} (d\varepsilon_{11} + d\varepsilon_{22}). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Diese Spannungsinkremente müssen das Gleichgewicht in Longitudinalrichtung gemäß Gl. (4.15) erfüllen. Gleichzeitig ist zu berücksichtigen, dass sich der Radius r_a um den

Betrag dr_a vergrößert hat und in diesem Bereich eine Längsspannung $\hat{\sigma}_1$ anliegt:

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^{r_a} r \hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_1^0 dr_a dr &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} d\hat{\sigma}_1 r_a^2 + \hat{\sigma}_1^0 dr_a r_a &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \left(d\varepsilon_{11} + \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} 2 d\varepsilon_{22} \right) r_a^2 + \hat{\sigma}_1^0 dr_a r_a &= 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Gleichwohl der äußere Radius sich geändert hat, muss die Randbedingung für die Radialspannungen $\hat{\sigma}_2 = 0$ bei $r = r_a + dr_a$ weiterhin gelten. Die radialen Spannungsinkremente an der Stelle $r = r_a$ ändern sich entsprechend des radialen Gleichgewichts Gl.(4.16) zu $-\hat{\sigma}_3^0 dr_a/r_a$, mit den initialen Spannungen in zirkularer Richtung $\hat{\sigma}_3^0$. Für das Spannungsincrement in radialer und zirkularer Richtung folgt also durch das Einsetzen von $d\sigma_{22}$:

$$d\varepsilon_{22} + \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} (d\varepsilon_{11} + d\varepsilon_{22}) = -\hat{\sigma}_3^0 \frac{dr_a}{r_a}. \quad (4.22)$$

Durch Umformung der Gleichungen erhält man Ausdrücke für die Dehnungsinkremente in Abhängigkeit der initialen longitudinalen und zirkularen Spannungen:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{22} = d\varepsilon_{33} &= \left(2A\hat{\sigma}_1^0 - \hat{\sigma}_3^0 \right) \frac{dr_a}{B r_a}, \\ d\varepsilon_{11} &= -2 \left((1 + A)\hat{\sigma}_1^0 - A\hat{\sigma}_3^0 \right) \frac{dr_a}{B r_a}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

mit $A = \lambda/(2\mu + \lambda)$ und $B = 1 + A - 2A^2$. Durch die Integration dieser Inkremente kann unter Berücksichtigung der initialen Werte der Verlauf der Dehnungen beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} &= \frac{2A\hat{\sigma}_1^0 - \hat{\sigma}_3^0}{B} \int_r^{r_a} \frac{dr_a}{r_a} = -\frac{2A\hat{\sigma}_1^0 - \hat{\sigma}_3^0}{B} \ln\left(\frac{r}{r_a}\right) + \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_{11} &= -\frac{2 \left[(1 + A)\hat{\sigma}_1^0 - A\hat{\sigma}_3^0 \right]}{B} \int_r^{r_a} \frac{dr_a}{r_a} = \frac{2 \left[(1 + A)\hat{\sigma}_1^0 - A\hat{\sigma}_3^0 \right]}{B} \ln\left(\frac{r}{r_a}\right) + \varepsilon_1^0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Die Randspannungen, die jedenfalls in radialer Richtung nicht vorhanden sind, müssen mit den Randdehnungen konform sein. Daher lässt sich Gl.(4.14) in ein Gleichungssystem mit den unbekanntnen initialen Dehnungen ε_i^0 aufstellen:

$$\begin{bmatrix} 1 & A & A \\ A & 1 & A \\ A & A & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1^0 \\ 0 \\ \hat{\sigma}_3^0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= \frac{(1 + A)\hat{\sigma}_1^0 - A\hat{\sigma}_3^0}{B} \\ \varepsilon_2^0 &= \frac{-A(\hat{\sigma}_1^0 + \hat{\sigma}_3^0)}{B} \\ \varepsilon_3^0 &= \frac{(1 + A)\hat{\sigma}_3^0 - A\hat{\sigma}_1^0}{B}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Mit den vollständigen Dehnungsverläufen findet man mit Gl.(4.17) zusätzlich zu dem longitudinalen Spannungsverlauf den KÜBLER [57] herleitet Gl.(4.2), die Spannungsverläufe in radialer und zirkularer Richtung:

$$\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_1^0 \left[1 + 2 \ln \left(\frac{r}{r_a} \right) \right], \quad \hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_3^0 \ln \left(\frac{r}{r_a} \right), \quad \hat{\sigma}_3 = \hat{\sigma}_3^0 \left[1 + \ln \left(\frac{r}{r_a} \right) \right]. \quad (4.26)$$

Identifizierbar ist hier der Zusammenhang zwischen den Verläufen. Die radial und zirkular Spannungen unterscheiden sich nur um dem Anfangswert der zirkularen Spannungen $\hat{\sigma}_3^0$. Für weiterführende Erläuterungen erhalten diese Verläufe $\hat{\sigma}_i^B$ einen zusätzlichen Index B, der anzeigt, dass es sich um einen Spannungsverlauf im Inneren des Baumstammes handelt.

Die Spannungsinkremente Gl.(4.17) sind im Folgenden in finite Inkremente überführt. In 2- und 3- Richtung sind diese nun nicht mehr identisch, da die Annahme in Gl. (4.19) aufgrund der fehlenden Symmetrie nicht anwendbar ist:

$$\Delta \hat{\sigma}_i = \Delta \varepsilon_{ii} + A (\Delta \varepsilon_{11} + \Delta \varepsilon_{22} + \Delta \varepsilon_{33} - \Delta \varepsilon_{ii}). \quad (4.27)$$

Aufgrund der geringen Dicke des geschnittenen Bretts werden auch hier Kartesische Koordinaten entsprechend Abb. 4.8 verwendet.

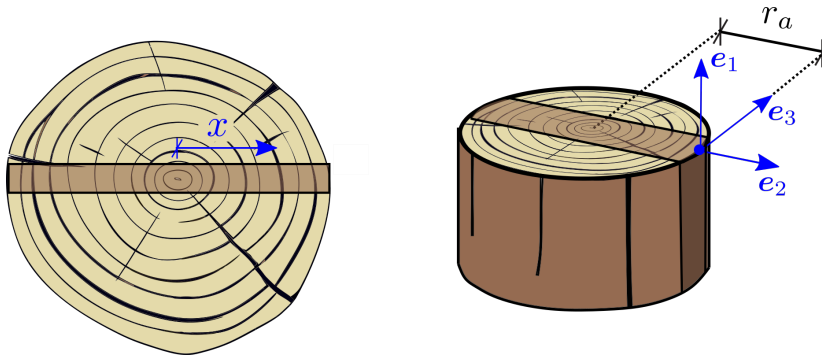


Abbildung 4.8: Kartesische Koordinaten für radiale, axiale sowie zirkulare Eigenspannungen und Eigendehnungen innerhalb des Bretts.

Die Voraussetzungen für die Umverteilung der Spannungen nach dem Schnittvorgang für die Holzstreifenmethode ist, dass die Spannungskomponenten an den Oberflächen verschwinden. Das bedeutet, dass die Spannungsverteilung in die 3-Richtung $\Delta \hat{\sigma}_3 + \hat{\sigma}_3^B = 0$ vor dem Schnittvorgang in Kombination mit dem Inkrement gleich Null sein muss. Dadurch gilt auch, dass in Radialrichtung alle Eigenspannungen entlastet werden $\Delta \hat{\sigma}_2 + \hat{\sigma}_2^B = 0$. Durch das Einsetzen der Spannungsinkremente ergibt sich mit der

Substitution der Koordinate r durch x das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \Delta\hat{\sigma}_2 + \hat{\sigma}_2^B \\ \Delta\hat{\sigma}_3 + \hat{\sigma}_3^B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & 1 & A \\ A & A & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\varepsilon_{22} \\ \Delta\varepsilon_{33} \end{pmatrix} + \hat{\sigma}_3^0 \begin{pmatrix} \ln\left(\frac{x}{r_a}\right) \\ \left[1 + \ln\left(\frac{r}{r_a}\right)\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

das nach dem Auflösen nach $\Delta\varepsilon_{22}$ und $\Delta\varepsilon_{33}$ zu

$$\begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_{22} \\ \Delta\varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & 0 & -A \\ -A & -A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\varepsilon_{22} \\ \Delta\varepsilon_{33} \end{pmatrix} - \hat{\sigma}_3^0 \begin{pmatrix} \ln\left(\frac{x}{r_a}\right) \\ \left[1 + \ln\left(\frac{r}{r_a}\right)\right] \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

führt. Durch die Kombination der Gleichungen lässt sich nun ein Ausdruck für die Inkremente in die 2- und 3-Richtung ableiten

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{22} &= -A\Delta\varepsilon_{11} - A \left[A(\Delta\varepsilon_{11} + \Delta\varepsilon_{22}) + \hat{\sigma}_3^0 \left[1 + \ln\left(\frac{r}{r_a}\right) \right] \right] - \hat{\sigma}_3^0 \ln\left(\frac{x}{r_a}\right) \\ \Delta\varepsilon_{33} &= -A\Delta\varepsilon_{11} - A \left[A(\Delta\varepsilon_{11} + \Delta\varepsilon_{33}) + \hat{\sigma}_3^0 \ln\left(\frac{x}{r_a}\right) \right] - \hat{\sigma}_3^0 \left[1 + \ln\left(\frac{r}{r_a}\right) \right] \\ \Delta\varepsilon_{22} &= \left(\frac{1}{A+1} - 1 \right) \Delta\varepsilon_{11} + \frac{A\hat{\sigma}_3^0}{(A+1)(A-1)} - \frac{\hat{\sigma}_3^0}{(A+1)} \ln\left(\frac{x}{r_a}\right) \\ \Delta\varepsilon_{33} &= \left(\frac{1}{A+1} - 1 \right) \Delta\varepsilon_{11} - \frac{\hat{\sigma}_3^0}{(A+1)(A-1)} - \frac{\hat{\sigma}_3^0}{(A+1)} \ln\left(\frac{x}{r_a}\right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{22} &= \frac{1}{A+1} \left(-A\Delta\varepsilon_{11} + \frac{A\hat{\sigma}_3^0}{(A-1)} - \hat{\sigma}_3^0 \ln\left(\frac{x}{r_a}\right) \right) \\ \Delta\varepsilon_{33} &= \frac{1}{A+1} \left(-A\Delta\varepsilon_{11} - \frac{\hat{\sigma}_3^0}{(A-1)} - \hat{\sigma}_3^0 \ln\left(\frac{x}{r_a}\right) \right). \end{aligned}$$

Diese Inkremente für die 2- und 3-Richtung ergänzen die Gleichung des Hookschen Gesetzes Gl.(4.27) in Logitudinalrichtung:

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\sigma}_1 &= \Delta\varepsilon_{11} + \frac{A}{A+1} \left[-A\Delta\varepsilon_{11} + \frac{A\hat{\sigma}_3^0}{(A-1)} \right. \\ &\quad \left. - \hat{\sigma}_3^0 \ln\left(\frac{x}{r_a}\right) - A\Delta\varepsilon_{11} - \frac{\hat{\sigma}_3^0}{(A-1)} - \hat{\sigma}_3^0 \ln\left(\frac{x}{r_a}\right) \right] \\ &= \frac{B}{A+1} \Delta\varepsilon_{11} - \frac{A\hat{\sigma}_3^0}{A+1} \left(1 + 2 \ln\left(\frac{x}{r_a}\right) \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Die Randbedingungen müssen nun für die Holzstreifenmethode angepasst werden. Da keine Rotationssymmetrie mehr vorhanden ist, können Gl.(4.15) und Gl.(4.16) in der vorliegenden Form nicht angewendet werden. Es muss aber gelten, dass die

Längsspannungen nach dem Schnitt für die Holzstreifenmethode, abgekürzt mit dem Index H, über den Querschnitt mit:

$$\int_0^{r_a} \hat{\sigma}_1^H dx = \int_0^{r_a} \Delta \hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_1^B dx = 0, \quad (4.32)$$

im Gleichgewicht stehen. Durch das Einsetzen der zuvor bestimmten Spannungskremente der Logitudinalrichtung und den bauminternen Verlauf $\hat{\sigma}_1^B$ lässt sich das Dehnungskrement dieser Richtung bestimmen:

$$\begin{aligned} & \int_0^{r_a} \frac{B\Delta\varepsilon_{11} - A\hat{\sigma}_3^0 \left(1 + 2\ln\left(\frac{x}{r_a}\right)\right)}{1+A} + \hat{\sigma}_1^0 \left(1 + 2\ln\left(\frac{x}{r_a}\right)\right) dx = 0 \\ \Rightarrow & \left[\frac{B\Delta\varepsilon_{11}x - A\hat{\sigma}_3^0 x \left(2\ln\left(\frac{x}{r_a}\right) - 1\right)}{1+A} + \hat{\sigma}_1^0 x \left(2\ln\left(\frac{x}{r_a}\right) - 1\right) \right]_0^{r_a} = 0 \quad (4.33) \\ & = \frac{B\Delta\varepsilon_{11}r_a + A\hat{\sigma}_3^0 r_a}{1+A} - \hat{\sigma}_1^0 r_a = \frac{B\Delta\varepsilon_{11} + A\hat{\sigma}_3^0}{1+A} - \hat{\sigma}_1^0 \\ \Rightarrow & \Delta\varepsilon_{11} = \frac{(1+A)\hat{\sigma}_1^0 - A\hat{\sigma}_3^0}{B}. \end{aligned}$$

Setzt man diese wiederum in den Spannungsverlauf $\hat{\sigma}_1^H$ in Logitudinalrichtung ein, erhält man den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1^H &= \Delta \hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_1^B \\ &= \frac{(1+A)\hat{\sigma}_1^0 - A\hat{\sigma}_3^0 - A\hat{\sigma}_3^0 \left(1 + 2\ln\left(\frac{x}{r_a}\right)\right)}{1+A} + \hat{\sigma}_1^0 \left(1 + 2\ln\left(\frac{x}{r_a}\right)\right) \quad (4.34) \\ &= \frac{((1+A)\hat{\sigma}_1^0 - A\hat{\sigma}_3^0) \left(2 + 2\ln\left(\frac{x}{r_a}\right)\right)}{1+A} \\ &= (\hat{\sigma}_1^0 - \nu \hat{\sigma}_3^0) \left(2 + 2\ln\left(\frac{x}{r_a}\right)\right). \end{aligned}$$

Vernachlässigt man den in Relation gesehen kleinen Term $-\nu\hat{\sigma}_3^0$, ist erkennbar, dass sich der Spannungsverlauf $\hat{\sigma}_1^H$ in Logitudinalrichtung im Gegensatz zu den bauminternen Spannungen $\hat{\sigma}_1^B$ konstant um einen Betrag erhöht hat, der den durch die Holzstreifenmethode an der Oberfläche gemessenen Längsspannungen $\hat{\sigma}_1^0$ entspricht.

Mit dem Modell von GILLIS [32] lassen sich auch konstante Spannungen für den Kern darstellen. Dabei wird angenommen, dass es einen zu Anfang des Wachstumsprozesses spannungsfreien und dehnungsfreien Kern mit dem Radius r_1 gibt. Indem man die

Dehnungen ohne Anfangswerte gemäß Gl.(4.24) in die Spannungsgleichung Gl.(4.17) einsetzt, erhält man die folgenden Spannungen für den Kern $0 < r < r_i$:

$$\hat{\sigma}_1 = 2\hat{\sigma}_1^0 \ln\left(\frac{r_i}{r_a}\right), \quad \hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_3^0 \ln\left(\frac{r_i}{r_a}\right), \quad \hat{\sigma}_3 = \hat{\sigma}_3^0 \ln\left(\frac{r_i}{r_a}\right). \quad (4.35)$$

Für den restlichen Bereich des Querschnitts $r_i < r < r_a$ gelten weiterhin die zuvor bestimmten Spannungsverläufe Gl.(4.25).

Aufbauend auf diesen Überlegungen entwickelten ARCHER & BYRNES [4] ein linear-elastisches, orthotropes Modell und können damit die Ergebnisse von Gillis bestätigen. Besonders bei den longitudinalen Eigenspannungen liefert dieses Modell für Bereiche außerhalb eines Kernradius von etwa $r_i = 0.1 r_a$ eine gute Näherung, wie bereits von KÜBLER [57] und GILLIS [32] gezeigt wurde [4].

Für die transversalen und radialen Eigenspannungen treten jedoch größere Abweichungen auf. Insbesondere bei den radialen Eigenspannungen im Kernbereich weichen die Ergebnisse des Modells um den Faktor 2 von den Spannungswerten des orthotropen Modells ab [4].

4.6 1-D Modell zur Erfassung axialer Wachstumsspannungen

Zunächst wird ein 1-D Modell zur Erfassung axialer Eigenspannungen vorgestellt. Basierend auf einer festgelegten genetisch veranlagten Axialkontraktion $\bar{\varepsilon}_0$ werden über die Jahre am Rand Zugeigendehnungen aktiviert. Diese müssen über den Querschnitt über Druckspannungen im Kern ins Gleichgewicht gesetzt werden. Der lokale Dehnungswert in der Schicht n im Jahr a ist definiert durch:

$$\varepsilon_n^{(a)} = \sum_{i=n}^a \Delta\varepsilon_h^{(i)} = \varepsilon_n^{(a-1)} + \Delta\varepsilon_h^{(a)}, \quad n = 1 \dots (a-1). \quad (4.36)$$

Hierbei beschreibt $\Delta\varepsilon_h^{(a)}$ die Veränderung des integralen Dehnungszustandes im aktuellen Jahr. Demnach ergibt die Summe über alle Veränderungen des integralen Dehnungszustandes über die Jahre den aktuellen Zustand. Dies gilt für alle Jahresringe außer den äußersten Jahresring. Im Modell beschreibt dieser die Verholzung der Kambiumschicht $n = a$ und manifestiert dessen Dehnungszustand mit:

$$\varepsilon_a^{(a)} = \Delta\varepsilon_h^{(a)} + \bar{\varepsilon}_0. \quad (4.37)$$

Die Sproßachse ($n = 1$) sei allerdings im ersten Jahr ($a = 1$) frei von Eigenspannung und Dehnung:

$$\varepsilon_1^{(1)} = 0. \quad (4.38)$$

Unter Berücksichtigung linearer Elastizität und der Annahme von transversaler Isotropie ergibt das Gleichgewicht:

$$\int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sum_{i=1}^a E_i \varepsilon_i^{(a)} d\varphi dr = 0 . \quad (4.39)$$

Nimmt man an, dass die Jahresringe konzentrische Kreise bilden und E_i sowie $\varepsilon_i^{(a)}$ innerhalb jedes Ringbereichs konstant sind, ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^a E_i A_i \varepsilon_i^{(a)} = 0 , \quad (4.40)$$

wobei die Breite der Jahresringe durch die Fläche A_i festgelegt ist. Der Flächeninhalt der inneren Jahresringbegrenzung wird vom äußeren Jahresringflächeninhalt subtrahiert

$$A_i = \pi \left(\left(\sum_{i=1}^n d_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i \right)^2 \right) . \quad (4.41)$$

4.7 Vergleich mit experimentellen Messungen

Vergleicht man die Ergebnisse einiger Holzstreifen-Versuche von JACOBS [45] sowie JACOBS [44] mit den Innendehnungsmessungen nach der Methode von KÜBLER [57], siehe Abschnitt 4.2, so ergeben sich die Diagramme in Abb. 4.9 und Abb. 4.10.

Das Modell von Gillis berücksichtigt hierbei einen Kernradius von $r_1 = 0.05$. Auch das 1-D-Modell zur Bestimmung axialer Eigenspannungen mit 100 Jahresringen weist einen Kernradius von $r_1 = 0.05$ auf, wobei die Dicke der ersten Schicht $d_1 = 0.05$ beträgt. Für die weiteren Jahresringe wird die Dicke proportional zum verbleibenden Abstand zur Oberfläche definiert.

Die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Wachstumsmodelle werden deutlich: Abgesehen vom Kernbereich verlaufen die Kurven weitgehend identisch. Im Kern ähneln sich das Modell von Gillis und das 1D-Akkumulationsmodell, da beide eine Unstetigkeit der Steigung aufweisen. Diese entsteht im Gillis-Modell durch ein separates Integrationsgebiet, im 1D-Akkumulationsmodell durch die Annahme eines spannungsfreien Ausgangszustands $\varepsilon_1^{(1)} = 0$. In beiden Fällen werden die Dehnungen im Kernbereich durch die Dicke des initialen Sprosses bestimmt. Der Unterschied: Das 1D-Akkumulationsmodell baut bereits in der nachfolgenden Schicht d_2 einen Gradienten auf, während der Kern im Gillis-Modell eine echte Unstetigkeit darstellt.

Im Vergleich zu den experimentellen Daten zeigen sich die in Abschnitt 4.4 und 4.5 beschriebenen Unterschiede zwischen den Innendehnungsmessungen mit rechteckigem Prüfquerschnitt und den Wachstumsspannungsmodellen. Dabei unterliegen die Messpunkte durch Spannungsentlastung Abweichungen zum bauminternen Verlauf der Wachstumsspannungen, vgl. Abb. 4.5. Sie sind um einen konstanten Betrag verschoben, der den an der Stammoberfläche gemessenen Eigendehnungen $\bar{\varepsilon}_0$ entspricht.

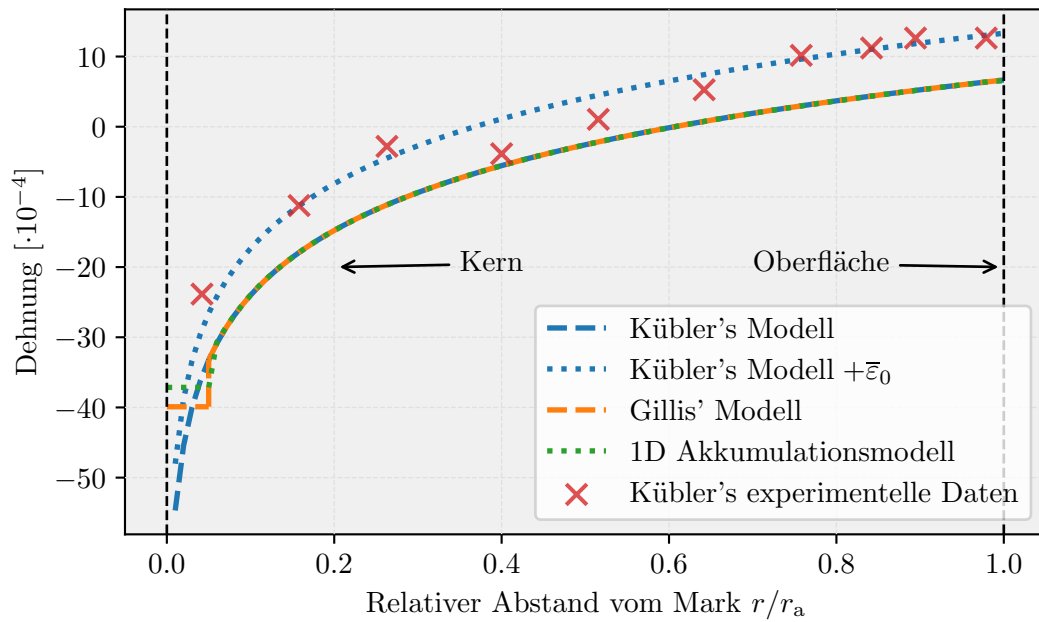


Abbildung 4.9: Vergleich der 1D-Modelle mit Messdaten von KÜBLER [57] einer Rotbuche nach Bohrzyylinderentnahme und Innenmessung mit Extensometer sowie einer gemessenen Oberflächendehnung: $\varepsilon_L^0 = 6.66 \cdot 10^{-4}$.

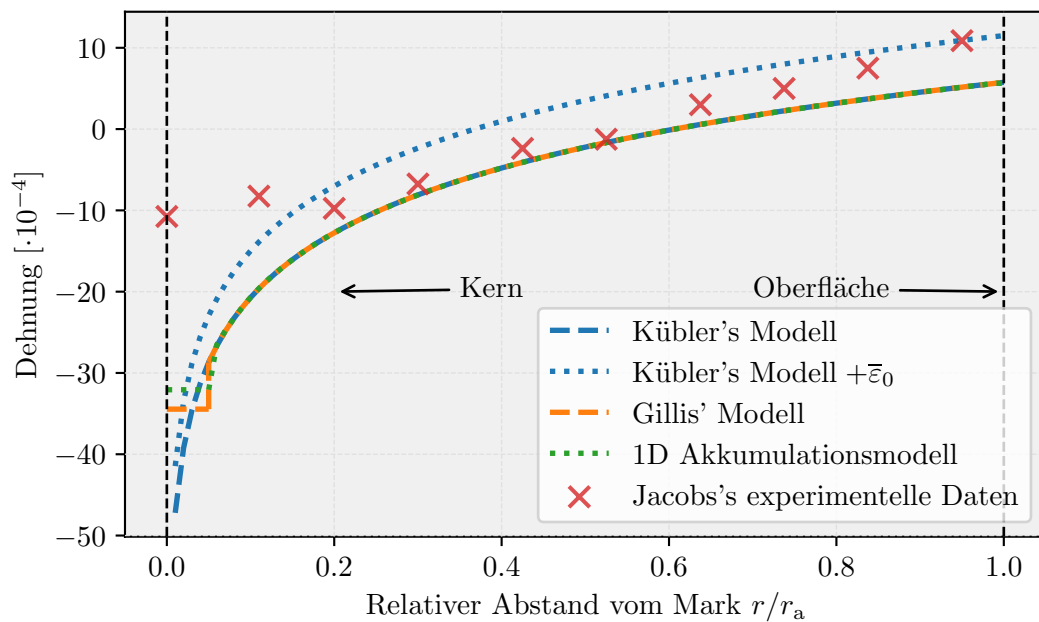


Abbildung 4.10: Vergleich der 1D-Modelle mit Messdaten von [44] eines Riese-neukalyptus mittels Holzstreifenmethode sowie einer gemessenen Oberflächendehnung: $\bar{\varepsilon}_0 = 5.75 \cdot 10^{-4}$.

5 Phasenfeldmodell für Wachstumsspannungen

Die in Kapitel 4.4 bis 4.6 betrachteten Modelle zur Bestimmung von Eigenspannungsverläufen beruhen auf der Annahme isotropen, linear-elastischen Materialverhaltens. Sie sind zudem auf exakt vertikale Stammabschnitte mit Kreisquerschnitt beschränkt und vernachlässigen äußere Belastungen. Somit kann weder die Belastungsgeschichte noch der aktuelle Belastungszustand in diesen Modellen erfasst werden.

Mit Hilfe der Phasenfeldmethode lässt sich hingegen das Wachstum der Holzmatrix auch unter Berücksichtigung der Belastungshistorie und mit komplexem Materialverhalten simulieren.

In diesem Kapitel wird zunächst eine allgemeine Einführung in die Grundlagen von Phasenfeldmodellen für zwei Phasen gegeben. Anschließend folgt eine Analyse der spezifischen Modellparameter, die das Baumwachstum sowie die Entstehung und Akkumulation von Wachstumsspannungen beschreiben.

5.1 Grundprinzip von Phasenfeldmodellen

Ein gemeinsames Merkmal aller Phasenfeld-Anwendungen ist das Auftreten bzw. die Annahme einer diffusen Phasengrenze. Im Unterschied zu einer scharfen Phasengrenze weist die diffuse Phasengrenze eine Übergangszone auf, in der beide Phasen koexistieren, vgl. Abb. 5.1.

Ein oder mehrere Phasenfeldparameter φ werden zur Beschreibung der einzelnen Phasen vorgesehen. Im Übergangsbereich zwischen den Phasen werden abhängig vom jeweiligen Modell Materialeigenschaften durch eine Sigmoidfunktion $f(\varphi)$, die Werte im Intervall $[0, 1]$ annimmt, interpoliert. Die zeitliche Entwicklung des Phasenfelds erfolgt je nach Problemstellung i.d.R. durch eine Differentialgleichung, wobei zusätzliche Gleichungen genutzt werden können, um die physikalischen Eigenschaften der Phasen näher zu beschreiben. Eine Sensitivitätsfunktion determiniert die Verteilung der Phasen und führt auf eine Allen-Cahn-Gleichung [1] oder eine Cahn-Hilliard-Gleichung [14]. Der wesentliche Unterschied zwischen diesen beiden Gleichungen besteht in der Erhaltung des Phasenfeldparameters: Die Allen-Cahn-Gleichung ist nicht-konservierend und eignet sich daher insbesondere für Wachstumsprozesse, bei denen sich Phasengrenzen ohne Massentransport bewegen. Im Gegensatz dazu ist die Cahn-Hilliard-Gleichung konservierend, sodass Masse lediglich durch Diffusionsprozesse umverteilt werden kann, wie es z. B. bei der Dendritenbildung in der Erstarrungsdynamik der Fall ist [91].

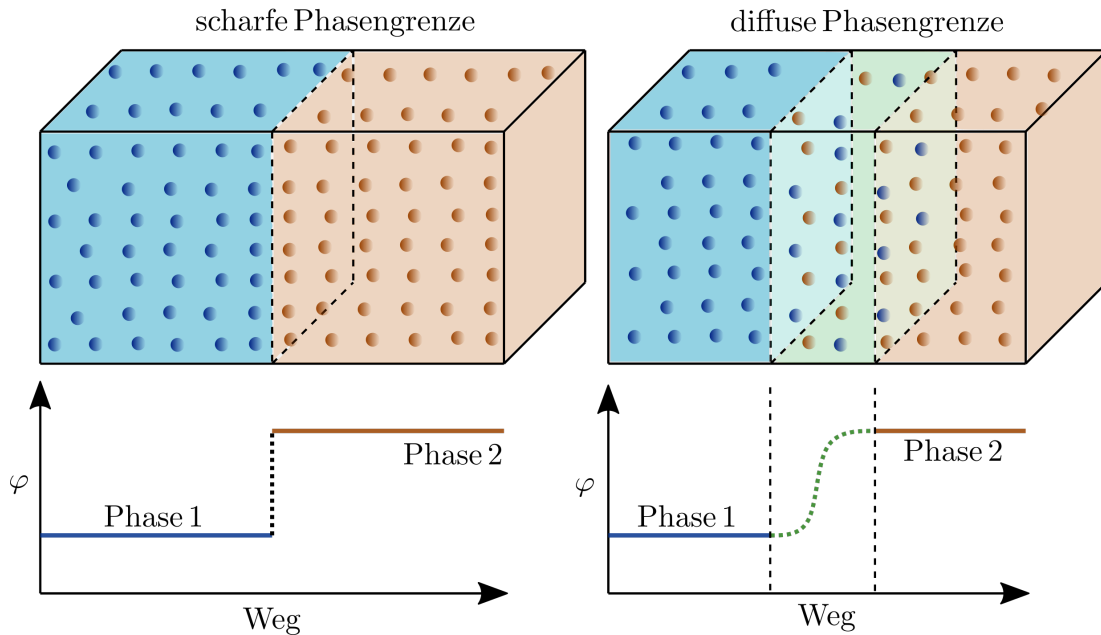


Abbildung 5.1: Scharfer und diffuser Phasenübergang.

5.2 Spezifizierung des Phasenfeldparameters

Hier dient der Phasenfeldparameter φ zur Beschreibung der Morphologie⁸ des Stammes. Strebt der Phasenfeldparameter φ gegen 1, so repräsentiert er die Holzmatrix. Strebt er gegen -1 , steht er für Hohlräume bzw. die umgebende Luft. Dazwischen liegt die Übergangszone, welche in diesem konkreten Anwendungsfall die Schicht zwischen Holzmatrix und Baumoberfläche abbildet. Hier findet sich das Kambium des Stammes, welches wie in Kap. 2 beschrieben neue Holzschichten bildet und für die Anlage von Eigenspannungen verantwortlich ist. Insofern liegt es nahe, den Phasenfeldparameter als Parameter zur Steuerung von Wachstumsdehnungen zu nutzen. Weiterhin wird er zur Definition der Materialdichte herangezogen:

$$f(\varphi, \epsilon, \varphi_\rho) = \frac{e^{\epsilon(\varphi - \varphi_\rho)}}{e^{\epsilon(\varphi - \varphi_\rho)} + 1} \quad \text{mit} \quad \rho = f(\varphi) \rho_0. \quad (5.1)$$

In der Materialdichte-Funktion Gl. (5.1) steuert der Faktor ϵ im Exponent die Unschärfe des Phasenübergangs und damit die Dicke des Übergangsbereiches zwischen Luft ($\rho \approx 0$) und Holzmatrix ($\rho \approx \rho_0$), vgl. Abb. 5.2. Der Schwellenwert φ_ρ bestimmt die Lage des Wendepunkts dieser Sigmoidfunktion. Über das Kambium ($\varphi > 0$) steigt die

⁸Der Begriff *Morphologie* stammt aus dem Altgriechischen: *morphé* bedeutet „Gestalt“ oder „Form“ und *lógos* steht für „Lehre“ oder „Wissenschaft“.

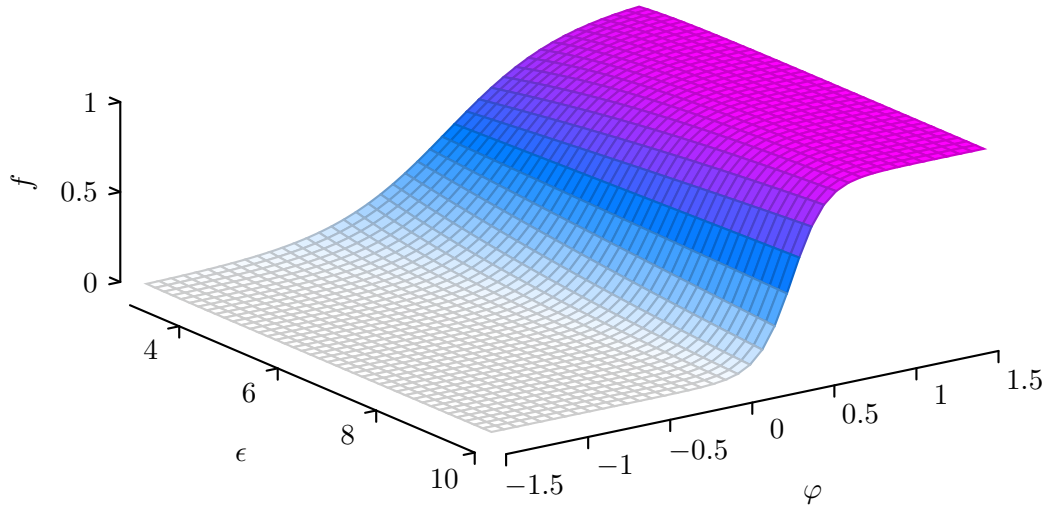


Abbildung 5.2: Materialdichte-Funktion $f(\varphi, \epsilon, \varphi_\rho = \frac{1}{3})$ in Abhängigkeit des Exponenten ϵ , der die Wertemenge des Phasenfeldparameters φ im Wertebereich $(f(0), f(1))$ ausweitet.

Materialdichte kontinuierlich an, sodass für $f(\varphi = 1)$ die Bedingung für das Vorhandensein von Holz $\rho \approx \rho_0$ erfüllt ist. Mit der Wahl der Parameter $\varphi_\rho = \frac{1}{3}$, $\epsilon = 5$ ergibt sich für $f(\varphi = 1) \approx 0.97$ und $f(\varphi = 0) \approx 0.16$ eine hinreichend genaue Anpassung an die gewünschte Materialverteilung.

Der Materialtensor wird als transversal-isotropes Stoffgesetz an die Faserrichtung der Holzmatrix sowie an die Dichtefunktion im Gebiet gekoppelt:

$$\mathbb{C}_{\varphi, \text{ti}}(\varphi) = f(\varphi) \mathbb{C}_{\text{ti}}. \quad (5.2)$$

Das Phloem wird aufgrund seiner geringen Steifigkeit im Modell nicht berücksichtigt. Die freie Energiedichte durch elastische Dehnung wird über:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, \varphi) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbb{C}_{\varphi, \text{ti}}(\varphi) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \quad (5.3)$$

mit dem linearen Dehnungsmaß $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \text{sym}[\mathbf{H}]$ eingeführt. Es wird somit von kleinen Deformationen im Bereich des Stammes ausgegangen.

5.3 Zielfunktionen des Baumwachstums

Wie in Kapitel 3.2 beschrieben, spiegelt die Morphologie eines Baumes das Ergebnis einer Vielzahl von wechselwirkenden Umweltfaktoren wider, die sich im Verlauf seiner Genese verändern und verschiedene Wachstumstropismen auslösen.

Definition (Morphologielinie). *Die Morphologielinie fasst die langfristige Wirkung aller während des Baumlebens einwirkenden Wachstumstropismen und -reize zu einer idealisierten Wuchsrichtung zusammen.*

Eine Erfassung dieser Einflüsse durch ein umfängliches Modell wird hier nicht in Erwägung gezogen. Stattdessen wird die bestehende Geometrie eines Baumes als gegeben angenommen, um die Eigenspannungen in dessen vorliegender Form zu berechnen. Vor diesem Hintergrund werden im Modell Morphologielinien $\mathcal{M}(t)$ eingeführt, welche den Verlauf der Marklinie im Zentrum des Stammes beschreiben. Für eine präzise Darstellung solcher Morphologielinien erweisen sich natürliche Koordinaten als besonders geeignet. Jeder simulierte Starkast wird dabei durch eine eigene Morphologielinie $\mathcal{M}_n(t)$ repräsentiert. Die Tangenten \mathbf{e}_t entlang des Markkanals definieren die Wachstumsvektoren $\mathbf{d}_\theta^{\mathcal{M}}$, siehe Abb. 5.3.

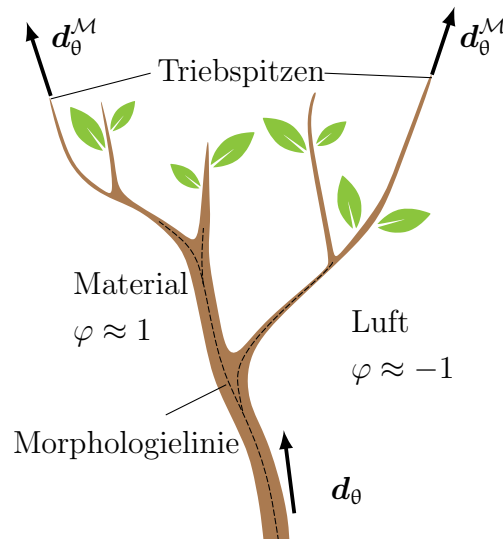


Abbildung 5.3: Darstellung der primären Wachstumsrichtung $\mathbf{d}_\theta^{\mathcal{M}}$ innerhalb der Morphologielinie und des Gradienten der Phasenfeldvariablen $\text{Grad}[\varphi]$ senkrecht zur Oberfläche im Stammbereich nach WULF & MUENCH [115].

Diese Vektoren bilden die Grundlage für die Formulierung des primären Wachstums über die folgende Zielfunktion:

$$J_1 = \int_{\mathcal{B}} - \underbrace{|\mathbf{d}_\theta^{\mathcal{M}}|}_{\gamma_1} \varphi \, dV \quad \rightarrow \min \text{ w.r.t. } \varphi . \quad (5.4)$$

Da $|\mathbf{d}_\theta^{\mathcal{M}}| > 0$, wird die zugehörige Zielfunktion für $\varphi > 0$ minimiert. Dies erzeugt entlang der Morphologielinie einen Wachstumsdruck, der die Ausbildung der primären Baumtopologie induziert. Um jedoch zu verhindern, dass das Material entlang der gesamten

Morphologielinie gleichzeitig entsteht, wird die Zielfunktion erst in der Übergangszone aktiviert.

Mit fortschreitender Topologieentwicklung wächst die Übergangszone auch in Dickenrichtung über den Bereich der Morphologielinie hinaus. Zur Modellierung des sekundären Wachstums werden in diesen neu hinzukommenden Bereichen zusätzliche Richtungsvektoren \mathbf{d}_θ eingeführt. Diese werden durch einen in Abschnitt 5.7 beschriebenen Mechanismus bestimmt und sprechen eine zweite Zielfunktion an:

$$J_2 = \int_{\mathcal{B}} - \underbrace{|\mathbf{d}_\theta|}_{\gamma_2} \varphi \, dV \quad \rightarrow \min \text{ w.r.t. } \varphi . \quad (5.5)$$

Die explizite Trennung beider Zielfunktionen erlaubt eine unabhängige Steuerung des Wachstums in Längs- und Querrichtung.

Die Richtungsvektoren \mathbf{d}_0^M und \mathbf{d}_θ definieren zugleich die Faserausrichtung innerhalb der Holzmatrix und werden als Vorzugsrichtungen \mathbf{a}_0 im Sinne transversal-isotroper Materialmodelle gemäß Kapitel 2.4 verwendet.

5.4 Freie Energieformulierung und Grenzflächenbreite

Die freie Energie, die sowohl der Cahn-Hilliard- als auch der Allen-Cahn-Gleichung zugrunde liegt, setzt sich aus zwei Anteilen zusammen [96]:

$$\psi = \psi_{\text{well}} + \psi_{\text{Grad}} , \quad (5.6)$$

wobei ψ_{well} ein lokales Potential beschreibt und ψ_{Grad} den Einfluss von Gradienten des Phasenfeldparameters berücksichtigt. Das Potential ψ_{well} wird in dieser Arbeit über:

$$\psi_{\text{well}} = \beta(\varphi^2 - 1)^2 \quad (5.7)$$

beschrieben und weist zwei energetische Minima auf, die durch ein Maximum getrennt sind, siehe Abb. 5.4.

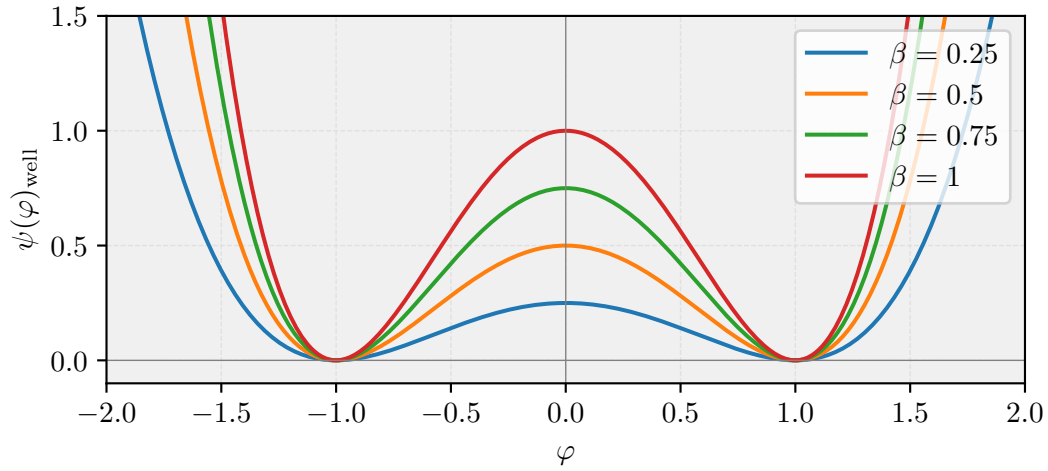


Abbildung 5.4: Potentialkurve mit zwei energiearmen Zuständen.

In Anwendungen wie der Topologieoptimierung werden hingegen häufig andere Potentiale verwendet, um die energetische Trennung zwischen Material und Leerraum zu verstärken [8]. Dabei ist die mechanische Steifigkeit der Struktur direkt mit dem Phasenfeld verknüpft. Dementsprechend sind dort auch die Phasenfeldwerte auf $\varphi \in [0, 1]$ zu beschränken. In der vorliegenden Arbeit wird darauf jedoch bewusst verzichtet, da über die Materialdichte-Funktion gemäß Gl. (5.1) gezielt auch die Zwischenzustände $\varphi \in [-1, 1]$ genutzt werden, um das Kambium als Übergangsbereich zwischen Luft und Holz zu modellieren.

Dieses Potential begünstigt Zustände, in denen der Phasenfeldparameter φ einer der beiden Phasen zugeordnet ist, z. B. Material oder Luft. Da ψ_{well} zwei gleichwertige Minima besitzt, könnten allerdings diskontinuierliche Phasensprünge in beliebiger Ausprägung auftreten. Dies wird durch die Gradientenenergie:

$$\psi_{\text{Grad}} = \frac{1}{2} L_c |\text{Grad}[\varphi]|^2 \quad (5.8)$$

verhindert, da hohe Gradienten $\text{Grad}[\varphi]$ in der Phasenfeldvariable über den Parameter $L_c > 0$ zu hohen energetischen Beiträgen führen. Zusammengenommen resultiert daraus eine Übergangszone mit endlicher Breite ℓ , die über den Parameter L_c eingestellt werden kann.

Unter Berücksichtigung der Wachstumsrichtung \mathbf{d}_θ kann die Übergangszone anisotrop vergrößert werden, vgl. Abb. 5.5. Dazu wird die Gradientenenergie über eine Matrix \mathbf{P}_d

bestimmt:

$$\psi_{\text{Grad}} = \frac{1}{2} \text{Grad}[\varphi] \cdot \mathbf{P}_d \cdot \text{Grad}[\varphi], \quad (5.9)$$

mit

$$\mathbf{P}_d = L_c \mathbf{1} + p_s \text{diag}(\mathbf{d}_\theta). \quad (5.10)$$

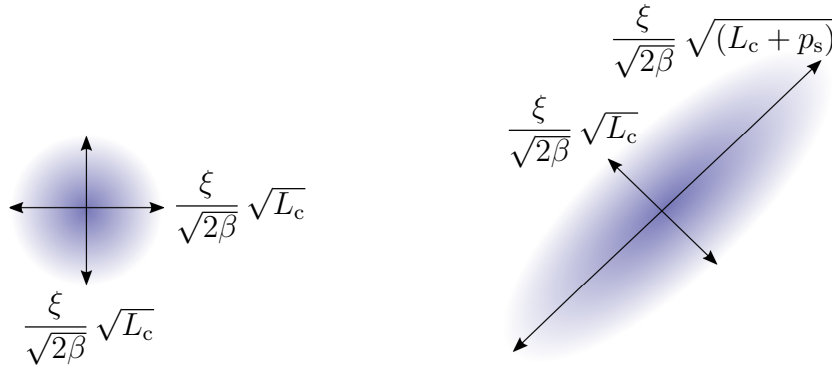


Abbildung 5.5: Links: Kreisförmige Ausdehnung der Grenzfläche über einen einzelnen Parameter L_c . Rechts: Elliptische Ausdehnung der Grenzfläche in Richtung des Wachstumsvektors \mathbf{d}_θ .

Der Faktor $\xi/\sqrt{2\beta}$ beschreibt den Einfluss von L_c sowie \mathbf{P}_d auf die Breite der Grenzfläche ℓ und ist durch das gewählte Potential festgelegt. Zur Bestimmung des stationären Profils, der Breite ℓ und des Faktors ξ wird das funktionale Minimum der Gesamtenergie:

$$\Psi = \int_{\mathcal{B}} \psi \, dV \quad (5.11)$$

gesucht. Dies erfolgt über die erste Variation:

$$\delta\Psi = \int_{\mathcal{B}} \text{Grad}[\varphi] \cdot \mathbf{P}_d \cdot \text{Grad}[\delta\varphi] + \frac{\partial\Psi_{\text{well}}}{\partial\varphi} \delta\varphi \, dV = 0. \quad (5.12)$$

Die partielle Integration des Gradiententerms führt zu:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \text{Grad}[\varphi] \cdot \mathbf{P}_d \cdot \text{Grad}[\delta\varphi] \, dV &= - \int_{\mathcal{B}} \delta\varphi \cdot \text{Div}[\text{Grad}[\varphi] \cdot \mathbf{P}_d] \, dV \\ &+ \int_{\partial\mathcal{B}} \delta\varphi \cdot (\text{Grad}[\varphi] \cdot \mathbf{P}_d) \cdot \mathbf{n} \, dA. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Unter Vernachlässigung des Randterms, resultiert durch Einsetzen in Gl. (5.12):

$$\delta\Psi = \int_{\mathcal{B}} \left(-\text{Div}[\text{Grad}[\varphi] \cdot \mathbf{P}_d] \delta\varphi + \frac{\partial\psi_{\text{well}}}{\partial\varphi} \right) \cdot \delta\varphi \, dV = 0. \quad (5.14)$$

Da die Variation für beliebige $\delta\varphi$ verschwindet, folgt:

$$-\text{Div}[\text{Grad}[\varphi] \cdot \mathbf{P}_d] + \frac{\partial\psi_{\text{well}}}{\partial\varphi} = 0 \quad (5.15)$$

$$-\sum_i P_{ii} \frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 X_i} + \frac{\partial\psi_{\text{well}}}{\partial\varphi} = 0. \quad (5.16)$$

Für die Richtung X_1 ergibt sich die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\varphi}{d^2 X_1} = \varphi'' = \frac{1}{P_{11}} \cdot \frac{d\psi_{\text{well}}}{d\varphi}. \quad (5.17)$$

Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit φ' und wendet die Kettenregel an, so erhält man:

$$\begin{aligned} \varphi'' \cdot \varphi' &= \frac{1}{P_{11}} \cdot \frac{d\psi_{\text{well}}}{d\varphi} \cdot \varphi' \\ \Rightarrow \frac{d}{dX_1} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dX_1} \right)^2 \right) &= \frac{1}{P_{11}} \cdot \frac{d\psi_{\text{well}}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dX_1}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Die Integration über X_1 liefert:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dX_1} \right)^2 = \frac{1}{P_{11}} \psi_{\text{well}}(\varphi) + C. \quad (5.19)$$

Durch die Annahme eines stationären, isolierten Systems ohne Triebkräfte oder Zwang treten für $\varphi \rightarrow \pm 1$ keine weiteren Änderungen auf, sodass die Ableitung verschwindet $d\varphi/dX_1 \rightarrow 0$. Setzt man dies ein, z. B. für $\varphi = 1$, ergibt sich $C = 0$ gemäß:

$$0 = \frac{1}{P_{11}} \psi_{\text{well}}(1) + C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{P_{11}} \psi_{\text{well}}(1). \quad (5.20)$$

Damit vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$\left(\frac{d\varphi}{dX_1} \right)^2 = \frac{2}{P_{11}} \psi_{\text{well}}(\varphi). \quad (5.21)$$

Setzt man das Potential ψ_{well} ein:

$$\left(\frac{d\varphi}{dX_1} \right)^2 = \frac{2\beta}{P_{11}} (\varphi^2 - 1)^2, \quad (5.22)$$

so ergeben sich die möglichen Steigungen des Profils:

$$\frac{d\varphi}{dX_1} = \pm \sqrt{\frac{2\beta}{P_{11}}} (\varphi^2 - 1), \quad (5.23)$$

wobei das Vorzeichen die Richtung des Übergangs entlang der Raumkoordinate X_1 bestimmt. Bei einem Übergang von $\varphi = +1$ nach $\varphi = -1$, wird die negative Steigung verwendet. Die Separation der Variablen liefert:

$$\frac{d\varphi}{\varphi^2 - 1} = -\sqrt{\frac{2\beta}{P_{11}}} dX_1. \quad (5.24)$$

Zur Bestimmung von $X_1(\varphi)$ wird integriert:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\varphi^2 - 1} d\varphi &= -\int \sqrt{\frac{2\beta}{P_{11}}} dX_1 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \varphi}{1 - \varphi} \right) &= -\left(\sqrt{\frac{2\beta}{P_{11}}} X_1 + D \right), \end{aligned} \quad (5.25)$$

wobei $D = 0$ zur Lokalisierung der Grenzfläche bei $X_1 = 0$ gewählt wird. Damit ergibt sich für $|\varphi| < 1$ das stationäre Profil als:

$$\varphi(X_1) = \tanh \left(-\sqrt{\frac{2\beta}{P_{11}}} X_1 \right). \quad (5.26)$$

Für einen Wachstumsvektor $\mathbf{d}_\theta = (1, 0, 0) e_i$ sowie $L_c = 0.01$ und $p_s = 0.1$ sowie $\beta = 0.25$ ergibt sich die in Abb. 5.6 dargestellte Profilverteilung.

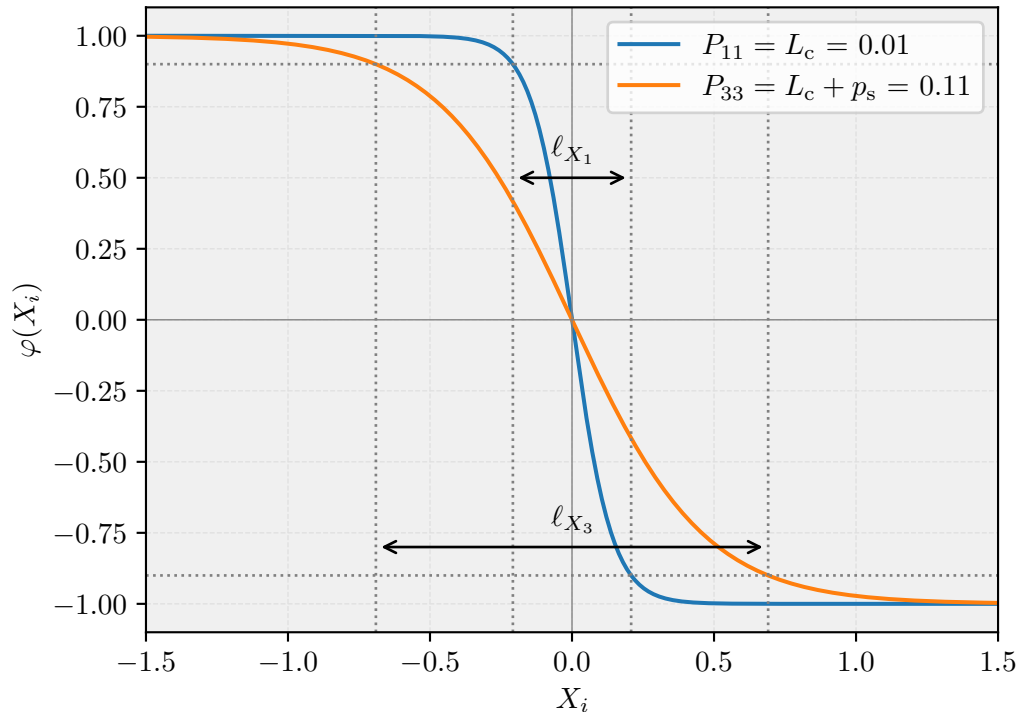


Abbildung 5.6: Grenzflächenprofil für $\psi_{\text{well}} = \psi_{\text{GL}}$ mit markierter Breite ℓ für unterschiedliche Richtungsvektoren.

Zur Bestimmung der Grenzflächenbreite ℓ wird die Umkehrfunktion des stationären Profils herangezogen:

$$X_1(\varphi) = -\sqrt{\frac{P_{11}}{2\beta}} \tanh^{-1}(\varphi), \quad (5.27)$$

Üblicherweise erfolgt eine Definition von ℓ als der Abstand zwischen den Punkten an denen das Phasenfeld φ die Werte -0.95 bzw. 0.95 annimmt [100]. Daraus ergibt sich eine Proportionalität der Breite zur Wurzel $\ell \propto \sqrt{P_{11}}$:

$$\ell = 2 \cdot \left| -\sqrt{\frac{P_{11}}{2\beta}} \tanh^{-1}(0.95) \right| = \frac{\xi}{\sqrt{2\beta}} \sqrt{P_{11}} \approx \frac{4}{\sqrt{2\beta}} \sqrt{P_{11}}. \quad (5.28)$$

Ein größerer Eintrag P_{11} in Richtung \mathbf{e}_i führt somit zu einer breiteren und flacheren Übergangszone.

5.5 Variationsformulierung des Phasenfeldmodells

Zur Modellierung der Strukturmechanik wird nun eine mechanische Kopplung eingeführt, bei der die elastische Energie vom Phasenfeldparameter φ abhängt.

Die kombinierte freie Energie setzt sich aus einem mechanischen Beitrag W sowie den Phasenfeldenergien zusammen:

$$\psi_{\text{int}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \varphi, \text{Grad}[\varphi]) = W(\boldsymbol{\varepsilon}, \varphi) + \psi_{\text{well}}(\varphi) + \psi_{\text{Grad}}(\text{Grad}[\varphi]). \quad (5.29)$$

Da die Materialdichte vom Phasenfeldparameter φ abhängt, gilt dies auch für die mechanische Energie W , vgl. Gl. (5.3). Während der Materialzustand $\varphi = 1$ mechanische Energie speichern kann, ist dies für den Leerraum mit $\varphi = -1$ nicht der Fall.

Die Einführung der Wachstumsfunktionalterme J_1 und J_2 , vgl. Gl. (5.4) bzw. Gl. (5.5) in die Gesamtenergie des Modells ermöglicht es, das Wachstum und die Ausbreitung der Phasenstruktur zu steuern:

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_{\mathcal{B}} \Psi_{\text{int}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \varphi, \text{Grad}[\varphi]) \, dV - \int_{\mathcal{B}} (c_{\gamma,1} \gamma_1 + c_{\gamma,2} \gamma_2) \varphi \, dV \\ & - \int_{\mathcal{B}} f(\varphi) \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{u} + y \varphi) \, dA. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Dabei wird J_1 als Wachstumsdruck interpretiert, der entlang der Morphologielinie verläuft, während J_2 den sekundären Wachstumsdruck erzeugt. Die Faktoren $c_{\gamma,1}$ und

$c_{\gamma,2}$ modifizieren dabei die Triebkraft in die jeweilige Richtung, indem sie die Beiträge zur Energie gewichten.

Durch die Variation der Gesamtenergie Π bezüglich der Verschiebung \mathbf{u} und des Phasenfeldparameters φ wird ein stationärer Punkt der Energie bestimmt. Diese Variation lautet mit den zusätzlichen Randtermen aus Gl. (5.13):

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \int_{\mathcal{B}} \left[f(\varphi) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbb{C}_{\text{ti}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}) + \eta \delta\varphi + \text{Grad}[\varphi] \cdot \mathbf{P}_d \cdot \text{Grad}[\delta\varphi] \right] dV \\ & - \int_{\mathcal{B}} (c_{\gamma,1} \gamma_1 + c_{\gamma,2} \gamma_2) \delta\varphi dV - \int_{\mathcal{B}} f'(\varphi) \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \delta\varphi dV \\ & - \int_{\mathcal{B}} f(\varphi) \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} dV - \int_{\partial\mathcal{B}_N^u} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} dA - \int_{\partial\mathcal{B}_N^\varphi} y \delta\varphi dA \stackrel{!}{=} \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Dabei beschreibt η die Ableitung der freien Energie $\Psi_{\text{int}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \varphi, \text{Grad}[\varphi])$ nach dem Phasenfeldparameter φ durch:

$$\eta = \frac{\partial\Psi_{\text{int}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \varphi, \text{Grad}[\varphi])}{\partial\varphi} = \frac{W}{\partial\varphi} + \frac{\partial\Psi_{\text{well}}}{\partial\varphi} = \frac{1}{2} f'(\varphi) \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_{\text{ti}} : \boldsymbol{\varepsilon} + 4\beta\varphi(\varphi^2 - 1). \quad (5.32)$$

Die Triebkräfte γ_1 und γ_2 der Zielfunktion werden explizit hinzugefügt. Ihre Variationen $\delta\gamma_1$ und $\delta\gamma_2$ werden nicht betrachtet. Innerhalb eines Berechnungsschritts bleiben γ_1 und γ_2 konstant. Nach Abschluss einer auskonvergierten Konfiguration wird ein Update durchgeführt, um die Wachstumsfunktionen der aktuellen Materialverteilung abzubilden. Dies ermöglicht größere Schrittweiten. Zur weiteren Vereinfachung der Darstellung werden γ_1 und γ_2 und ihre Vorfaktoren $c_{\gamma,1}$ und $c_{\gamma,2}$ mit γ zusammengefasst:

$$\gamma = c_{\gamma,1} \gamma_1 + c_{\gamma,2} \gamma_2. \quad (5.33)$$

Das Cauchysche Spannungstheorem Gl. (2.9) definiert die Neumann-Randbedingungen der Traktionen auf dem Rand:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{auf} \quad \partial\mathcal{B}_N^u. \quad (5.34)$$

Mechanische Randkräfte können nur dort einwirken, wo Material vorhanden ist $\rho(\varphi) > 0$. Äußere Belastungen innerhalb des Gebiets können über Knotenkräfte oder als Volumenkräfte aufgebracht werden.

Die Neumann-Randbedingungen des Phasenfelds:

$$\text{Grad}[\varphi] \cdot \mathbf{P}_d \cdot \mathbf{n} = \bar{y} \quad \text{auf} \quad \partial\mathcal{B}_N^\varphi \quad (5.35)$$

gehen aus dem Randterm hervor, der sich durch die partielle Integration der Variation bezüglich $\text{Grad}[\varphi]$ ergibt, siehe Gl. (5.13). Dies entspricht einer Aussage über Richtung und Betrag des Phasenfeldgradienten am Rand des Gebiets:

- $\bar{y} > 0$: Die projizierte Komponente von $\mathbf{P}_d \cdot \text{Grad}[\varphi]$ in Richtung \mathbf{n} ist positiv.
- $\bar{y} < 0$: Die projizierte Komponente in Richtung \mathbf{n} ist negativ.
- $\bar{y} = 0$: $\mathbf{P}_d \cdot \text{Grad}[\varphi]$ besitzt keine projizierte Komponente in Richtung \mathbf{n} .

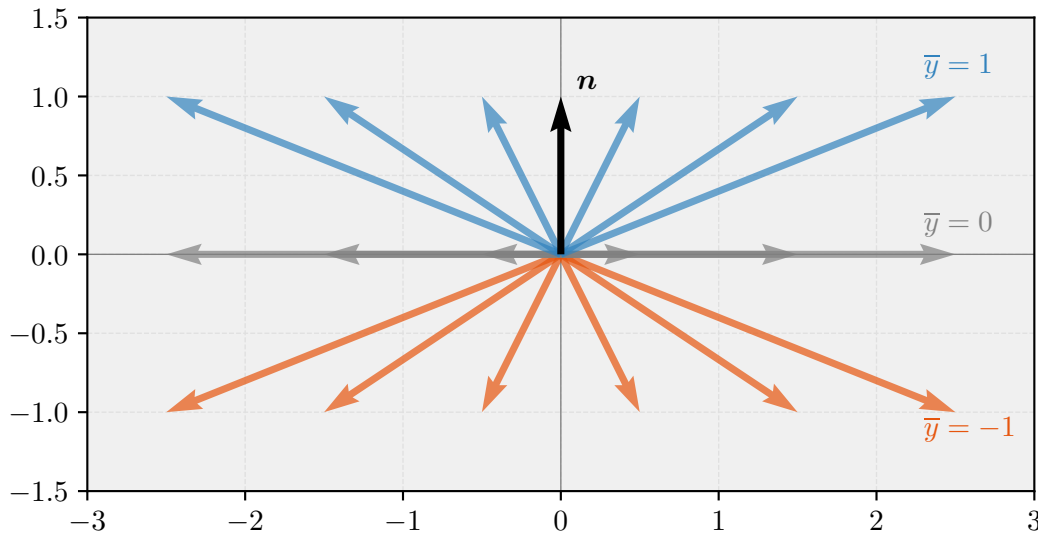


Abbildung 5.7: Darstellung für exemplarische Vorgaben von \bar{y} und Beispiele für mögliche resultierende gewichtete Gradienten $\mathbf{P}_d \cdot \text{Grad}[\varphi]$.

Dies resultiert in einem indirekten Wachstumsdruck an den Grenzen des betrachteten Gebiets, um die Phasenfeldgradienten entsprechend der Vorgabe zu regulieren, vgl. Abb. 5.7. Dabei wird auch die bevorzugt elliptische Ausdehnung des Phasenfeldgradienten in die Wachstumsrichtung mit $\mathbf{P}_d(\mathbf{d}_\theta)$ berücksichtigt. Die Auswertung konkreter Randwerte erfolgt in Kapitel 6.

Die Dirichlet-Randvorgaben für das Verschiebungsfeld sowie das Phasenfeld lauten:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \quad \delta \mathbf{u} = 0 \quad \text{auf} \quad \partial \mathcal{B}_D^u, \quad \text{und} \quad \varphi = \bar{\varphi}, \quad \delta \varphi = 0 \quad \text{auf} \quad \partial \mathcal{B}_D^\varphi. \quad (5.36)$$

Die starke Form der Gleichgewichtsbedingungen für das Verschiebungsfeld sowie das Phasenfeld lässt sich wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned} \text{Div}[\boldsymbol{\sigma}] + f(\varphi)\rho_0 \mathbf{b} &= 0 \\ \text{Div}[\text{Grad}[\varphi] \cdot \mathbf{P}_d] - \eta + f'(\varphi)\rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} + \gamma &= 0. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Während das lokale Gleichgewicht des Verschiebungsfelds die Verteilung innerer Spannungen beschreibt, steuert das Gleichgewicht des Phasenfelds die räumliche Verteilung und die lokale Entwicklung der Materialstruktur innerhalb des betrachteten Gebiets. Bei Annahme eines linear-elastischen Materials und kleiner Verschiebungen stellt das Gleichgewicht des Verschiebungsfeldes bei gegebener Phasenfeldverteilung eine lineare Differentialgleichung dar. Das Gleichgewicht des Phasenfeldes bleibt hingegen nichtlinear in φ , sodass zur Lösung des gekoppelten Problems das Newton-Raphson-Verfahren unumgänglich ist.

5.6 Linearisierung und Zeitdiskretisierung

Im Gegensatz zu Größen wie Energie, Volumen oder Impuls ist der Phasenfeldparameter – und damit auch die Massendichte – in diesem Modell keine Erhaltungsgröße⁹. Diese Eigenschaft ist von grundlegender Bedeutung, da – ähnlich wie im Lebenszyklus eines Baumes – kontinuierlich neues Material entstehen kann.

Durch die Einführung einer zeitlichen Entwicklung des Phasenfeldparameters $\dot{\varphi}$ wird aus dem Gleichgewicht des Phasenfelds eine kinetische Gleichung¹⁰ [13], welche die Verteilung von Material und Leerraum durch Minimierung der freien Energie im betrachteten Gebiet steuert:

$$\text{Div}[\text{Grad}[\varphi] \cdot \mathbf{P}_d] - \eta + f'(\varphi) \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} + \gamma = \omega \dot{\varphi}. \quad (5.38)$$

Mit der Beschreibung der zeitlichen Entwicklung eines nicht-konservierten Phasenfeldparameters ohne Massenerhaltungsterm entspricht dies der Festlegung auf die Allen-Cahn-Gleichung [1, 59]. Der Parameter ω mit der Einheit [Energie · Zeit] ist die Relaxationszeit der Phasenänderung und kann aufgrund der Analogie zu einem gedämpften Schwingsystem als „Dämpfungskonstante“ bezeichnet werden. Sie legt die Dämpfung des Systems auf dem Weg zum energetischen Gleichgewicht fest und bestimmt damit – bei festgelegtem Ortsbereich – auch den Zeitraum, innerhalb dessen ein neuer stationärer Zustand erreicht wird. Für das vorliegende Modell wird die Einheit der Zeit t über die Relaxationszeit ω zu [Monaten] festgelegt. Dabei wird die Energie als dimensionslos [–] betrachtet.

⁹Eine Erhaltungsgröße ist eine physikalische Größe, deren Gesamtwert in einem abgeschlossenen System über die Zeit konstant bleibt.

¹⁰Eine kinetische Gleichung beschreibt die zeitliche Entwicklung eines Systems in Richtung eines energetischen Gleichgewichts.

Unter Vernachlässigung der mechanischen Kopplung in der Grenzschicht ergibt sich die Phasenfeldgleichung als:

$$\omega \dot{\varphi} = \text{Div}[\text{Grad}[\varphi] \cdot \mathbf{P}_d] - \frac{\partial \psi_{\text{well}}}{\partial \varphi} + \gamma. \quad (5.39)$$

Die Differentialgleichung für die X_1 -Richtung mit einem Wachstumsvektor $\mathbf{d}_\theta = (1, 0, 0) \mathbf{e}_i$ lautet dann, vgl. Gl. (5.17):

$$\omega \frac{\partial \varphi}{\partial t} = P_{11} \frac{d^2 \varphi}{d^2 X_1} - \frac{d \psi_{\text{well}}}{d \varphi} + \gamma. \quad (5.40)$$

Wie bereits in Abschnitt 5.4 gezeigt wurde, stellt sich ohne eine zusätzliche Triebkraft γ ein stationäres Gleichgewicht mit einem charakteristischen Grenzflächenprofil zwischen der Gradientenenergie und dem Potential ein, siehe Gl. (5.26). Wie STEINBACH [100] zeigt, kann die hinzugefügte Triebkraft γ so gewählt werden, dass eine reine Translation des Profils mit konstanter Geschwindigkeit v hervorgerufen wird, vgl. Abb. 5.8:

$$\tilde{\varphi}(X_1 - vt) = \tanh \left(-\sqrt{\frac{2\beta}{P_{11}}} (X_1 - vt) \right). \quad (5.41)$$

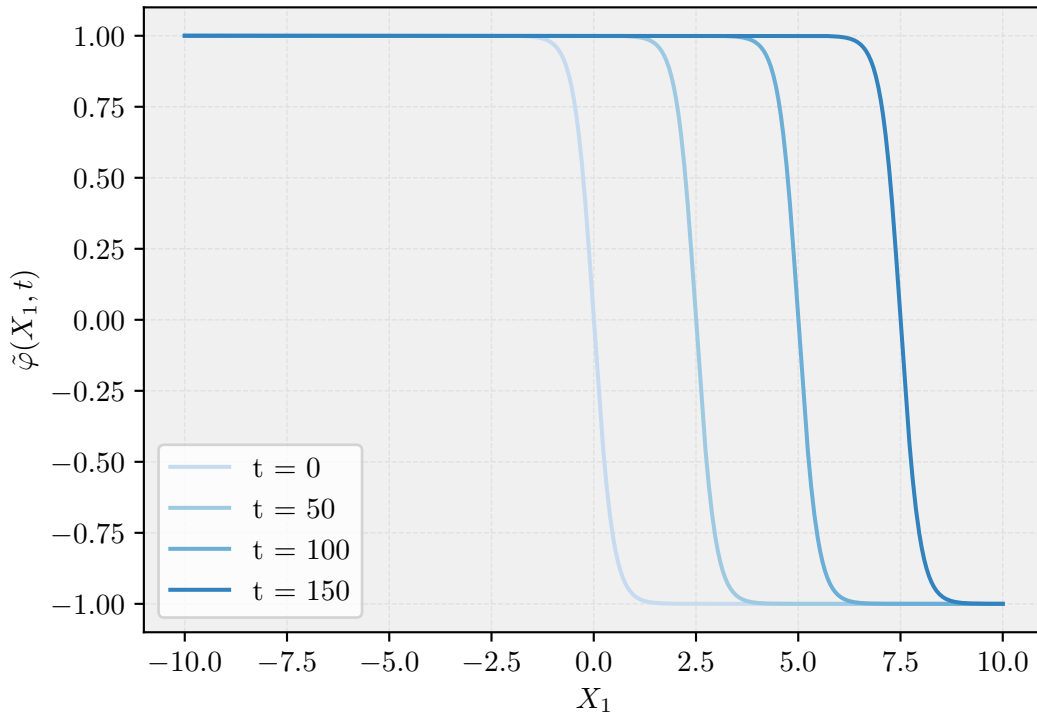


Abbildung 5.8: Laufende Welle $\tilde{\varphi}(X_1, t)$ mit $v = 0.05$. Parameter: $\beta = 0.25$, $P_{11} = 0.11$.

Dabei kann mit der Koordinate $\zeta = X_1 - vt$ die Zeitableitung des Phasenfeldparameters über die Geschwindigkeit und die Steigung des Grenzflächenprofils ausgedrückt werden:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = \frac{d\tilde{\varphi}}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dt} = -v \cdot \frac{d\tilde{\varphi}}{d\zeta} = -v \cdot \frac{d\varphi}{dX_1}. \quad (5.42)$$

Dieser Ansatz lässt sich nun in die Differentialgleichung Gl. (5.40) einsetzen:

$$-\omega v \cdot \frac{d\varphi}{dX_1} = P_{11} \frac{d^2\varphi}{d^2X_1} - 4\beta\varphi(\varphi^2 - 1) + \gamma. \quad (5.43)$$

Mit dem Einsetzen der Ableitungen:

- $\frac{d\varphi}{dX_1} = -\sqrt{\frac{2\beta}{P_{11}}} (1 - \varphi^2),$
- $\frac{d^2\varphi}{dX_1^2} = -2\sqrt{\frac{2\beta^2}{P_{11}}} \varphi (1 - \varphi^2),$

folgt:

$$\begin{aligned} \omega v \sqrt{\frac{2\beta}{P_{11}}} &= -2P_{11} \sqrt{\frac{2\beta^2}{P_{11}}} \varphi + 4\beta\varphi + \frac{\gamma}{(1 - \varphi^2)} \\ &= \left(2P_{11} \sqrt{\frac{2\beta^2}{P_{11}}} - 4\beta \right) \varphi + \frac{\gamma}{(1 - \varphi^2)} = \frac{\gamma}{(1 - \varphi^2)}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Das Profil bewegt sich dann mit der Geschwindigkeit:

$$v(\varphi) = \sqrt{\frac{P_{11}}{2\beta} \frac{\gamma}{\omega(1 - \varphi^2)}}. \quad (5.45)$$

Eine konstante Geschwindigkeit v des Grenzflächenprofils erhält man nur dann, wenn die Triebkraft $\propto (1 - \varphi^2)$ mit dem Verlauf der ersten Ableitung der Grenzfläche $(1 - \varphi^2)$ skaliert wird:

$$\gamma(\varphi) = \omega v_t \sqrt{\frac{2\beta}{P_{11}}} (1 - \varphi^2) = \gamma_0 (1 - \varphi^2). \quad (5.46)$$

Nur bei einem geeigneten Verlauf der Triebkraft $\gamma(\varphi)$ ist eine gleichmäßige Bewegung möglich, siehe Abb. 5.9. Die Wachstumsreize werden demnach mit $(1 - \varphi^2)$ gezielt innerhalb der Grenzfläche lokalisiert. Dies ist essenziell, da Phasenänderungen nur im Übergangsbereich zwischen den reinen Phasen stattfinden dürfen. Die maximale Wirkung der Triebkraft wirkt im Zentrum der Grenzfläche und strebt an den Rändern gegen Null.

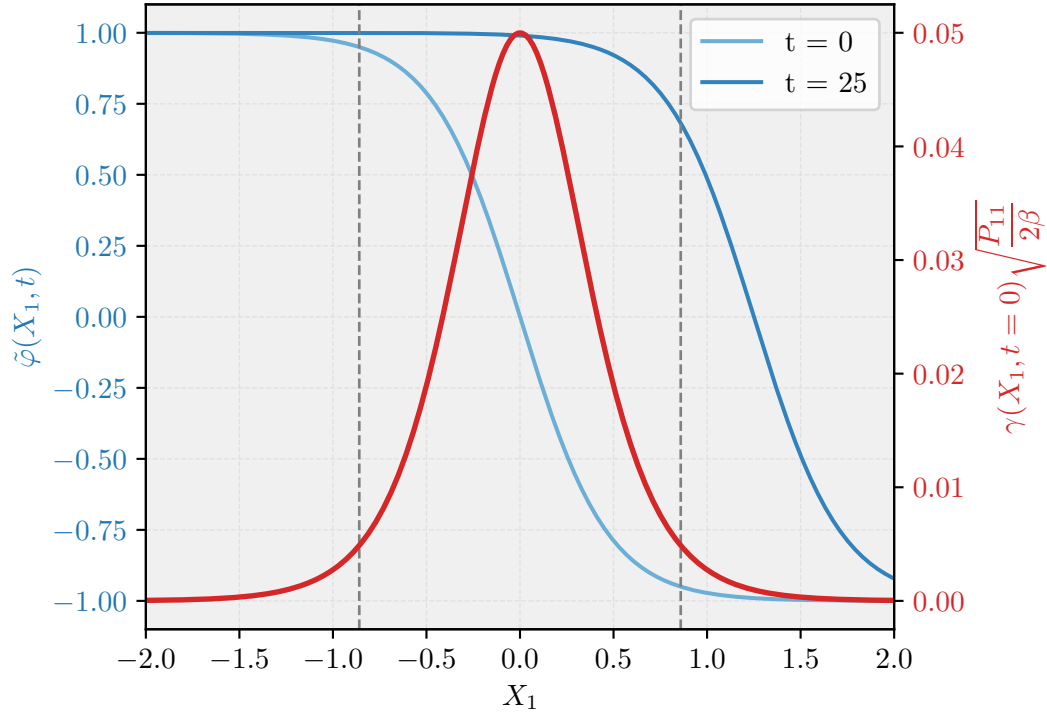


Abbildung 5.9: Laufende Welle $\tilde{\varphi}(X_1, t)$ mit einer Zielgeschwindigkeit von $v_t = 0.05$. Parameter: $\omega = 1$, $\beta = 0.25$, $P_{11} = 0.11$.

In Bezug auf die primäre und sekundäre Wachstumsrichtung ergeben sich die Parameter $c_{\gamma,1}$ und $c_{\gamma,2}$ gemäß Definition Gl. (5.10) zu:

$$c_{\gamma,1} = \omega v_1 \sqrt{\frac{2\beta}{L_c + p_s}} (1 - \varphi^2) , \quad (5.47)$$

$$c_{\gamma,2} = \omega v_2 \sqrt{\frac{2\beta}{L_c}} (1 - \varphi^2) . \quad (5.48)$$

Dabei beschreibt v_1 die primäre und v_2 die sekundäre Wachstumsgeschwindigkeit.

Der Galerkin-Ansatz [120] führt wieder zur schwachen Form:

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \int_B \left[f(\varphi) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbb{C}_{ti} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}) + \eta \delta\varphi + \text{Grad}[\varphi] \cdot \mathbf{P}_d \cdot \text{Grad}[\delta\varphi] \right] dV \\ & + \int_B \omega \dot{\varphi} \delta\varphi dV - \int_B \gamma \delta\varphi dV - \int_B f'(\varphi) \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV \\ & - \int_B f(\varphi) \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} dV - \int_{\partial B} (\mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} + y \delta\varphi) dA \stackrel{!}{=} \mathbf{0} . \end{aligned} \quad (5.49)$$

Dabei wird die ursprüngliche Differentialgleichung nicht direkt gelöst, sondern in eine äquivalente Integralform überführt, die nun die zeitliche Entwicklung des gekoppelten

Problems beschreibt. Diese Umformulierung bildet die Grundlage für eine Diskretisierung des Problems.

Die Diskretisierung in der Zeit erfolgt mittels eines impliziten Euler-Schemas, das auch als Euler-Rückwärts-Verfahren bezeichnet wird [41]. Dabei kann das nichtlineare Gleichungssystem in jedem Zeitschritt mit dem Newton-Raphson-Verfahren gelöst werden. Innerhalb der Iterationen wird die Änderungsrate $\dot{\varphi}$ fortlaufend in Abhängigkeit vom aktuellen Phasenfeldwert bestimmt:

$$\begin{aligned} \varphi(t_{n+1}) &= \varphi(\Delta t_{n+1}) + \varphi(t_n) = \dot{\varphi}(t_{n+1})\Delta t + \varphi(t_n) \\ \Rightarrow \dot{\varphi}(t_{n+1}) &= \frac{1}{\Delta t} [\varphi(t_{n+1}) - \varphi(t_n)] . \end{aligned} \quad (5.50)$$

Die Linearisierung von Gl. (5.49) erfordert die Aufteilung der Variation $\delta\Pi$ in die folgenden Anteile:

$$\Delta\delta\Pi = \Delta_{\mathbf{u}}\delta\Pi + \Delta_{\varphi}\delta\Pi + \Delta_{\text{Grad}[\varphi]}\delta\Pi + \Delta_{\dot{\varphi}}\delta\Pi \stackrel{!}{=} 0 . \quad (5.51)$$

Die einzelnen Beiträge ergeben sich zu:

- Linearisierung bezüglich der Verschiebung \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{u}}\delta\Pi &= \int_{\mathcal{B}} \left[f(\varphi) \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}) : \mathbb{C}_{\text{ti}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}) + \delta\varphi f'(\varphi) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}) \right] dV \\ &\quad - \int_{\mathcal{B}} \delta\varphi f'(\varphi) \rho_0 \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} dV , \end{aligned} \quad (5.52)$$

- Linearisierung bezüglich des Phasenfeldes φ :

$$\begin{aligned} \Delta_{\varphi}\delta\Pi &= \int_{\mathcal{B}} \delta\varphi \left[\frac{1}{2} f''(\varphi) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbb{C}_{\text{ti}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + 4\beta(3\varphi^2 - 1) - f''(\varphi) \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \right] \Delta\varphi dV \\ &\quad + \int_{\mathcal{B}} f'(\varphi) \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}) : \mathbb{C}_{\text{ti}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \Delta\varphi dV - \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} \cdot \mathbf{b} f'(\varphi) \rho_0 \Delta\varphi dV , \end{aligned} \quad (5.53)$$

- Linearisierung bezüglich des Gradienten des Phasenfeldes $\text{Grad}[\varphi]$:

$$\Delta_{\text{Grad}[\varphi]}\delta\Pi = \int_{\mathcal{B}} \left[\text{Grad}[\delta\varphi] \cdot \mathbf{P}_d \cdot \text{Grad}[\Delta\varphi] \right] dV , \quad (5.54)$$

- Linearisierung bezüglich der zeitlichen Änderung $\dot{\varphi}$:

$$\Delta_{\dot{\varphi}}\delta\Pi = \int_{\mathcal{B}} \delta\varphi \omega \Delta\dot{\varphi} dV . \quad (5.55)$$

Das Inkrement der Änderungsrate im Phasenfeld $\Delta\dot{\varphi}$ in Gleichung Gl. (5.55), entspricht dem Beitrag der aktuellen Newton-Iteration i :

$$\Delta\dot{\varphi} = \frac{\Delta\varphi^i}{\Delta t}. \quad (5.56)$$

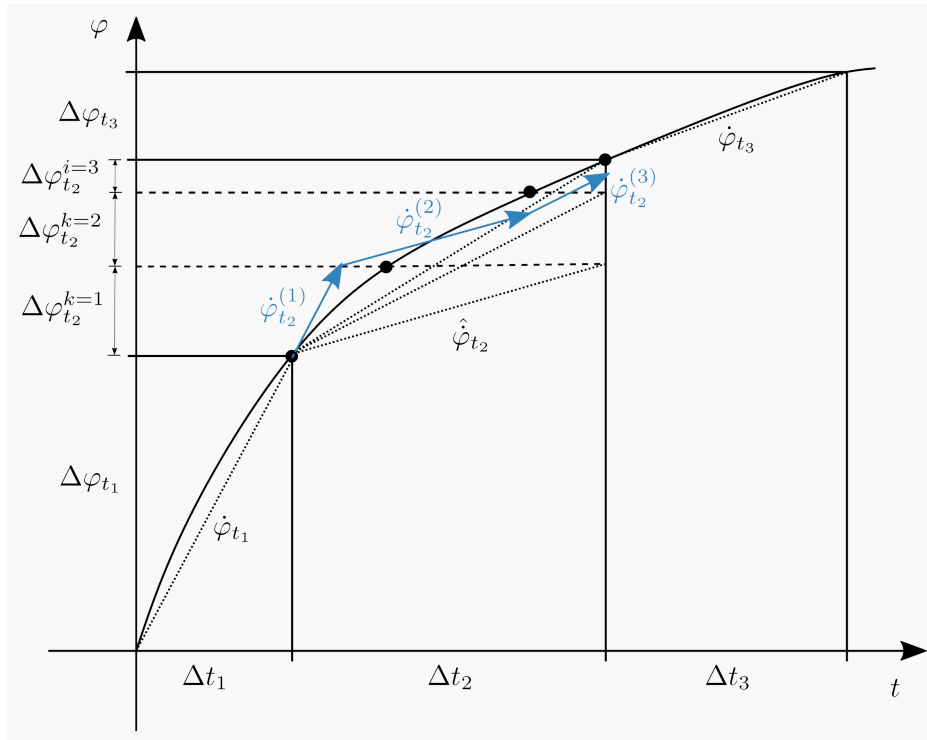


Abbildung 5.10: Implizite Zeitintegration mit dem Euler-Rückwärts-Verfahren für das Phasenfeldmodell. Die Änderungsrate $\dot{\varphi}$ wird iterativ über Newton-Inkmente angenähert, wobei $\hat{\varphi}$ den akkumulierten Zwischenwert bis zur aktuellen Iteration darstellt.

Während der Newton-Raphson-Iteration wird die gesamte Änderungsrate $\dot{\varphi}$ in einen bereits akkumulierten Anteil $\hat{\varphi}$ aus den vorherigen Iterationen und das aktuelle Inkrement $\Delta\dot{\varphi}$ zerlegt, vgl. Abb. 5.10:

$$\dot{\varphi}(t_{n+1}) = \sum_{k=1}^i \frac{\Delta\varphi^k}{\Delta t} = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\Delta\varphi^k}{\Delta t} + \frac{\Delta\varphi^i}{\Delta t} = \hat{\varphi}(t_{n+1}) + \Delta\dot{\varphi}. \quad (5.57)$$

Der Index k bezeichnet dabei die bisherige Newton-Iteration innerhalb eines Zeitschritts.

Obwohl das implizite Verfahren aufgrund der notwendigen Newton-Raphson-Iterationen einen höheren Rechenaufwand für einen neuen Zeitschritt benötigt, erlaubt im Vergleich zu einem expliziten Verfahren die Verwendung deutlich größere Zeitschrittweiten [121].

5.7 Phytomorphologische Beschreibung der Triebspitzenrichtung

Im Folgenden wird beschrieben, wie die Phytomorphologie¹¹ über eine Morphologielinie als Eingabegröße für das Finite-Elemente-Modell vorbereitet wird. Sie stellt dabei eine zeitlich gemittelte Wachstumsrichtung der gegebenen Stammgeometrie dar und dient als Grundlage für die Ableitung der Richtungsvektoren \mathbf{d}_θ^M innerhalb der Modellierung.

Im vorliegenden Modell werden die Morphologielinien $\mathcal{M}(t)$ durch stetige Funktionen $g(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, \dots , $g_n(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ beschrieben [114, 115]. Im Preprocessing erfolgt die Übergabe dieser Informationen an das Finite-Elemente-Modell durch das Markieren von Elementen in einem vorgegebenen Radius um den aktuellen Funktionswert, vgl. Abb. 5.11.

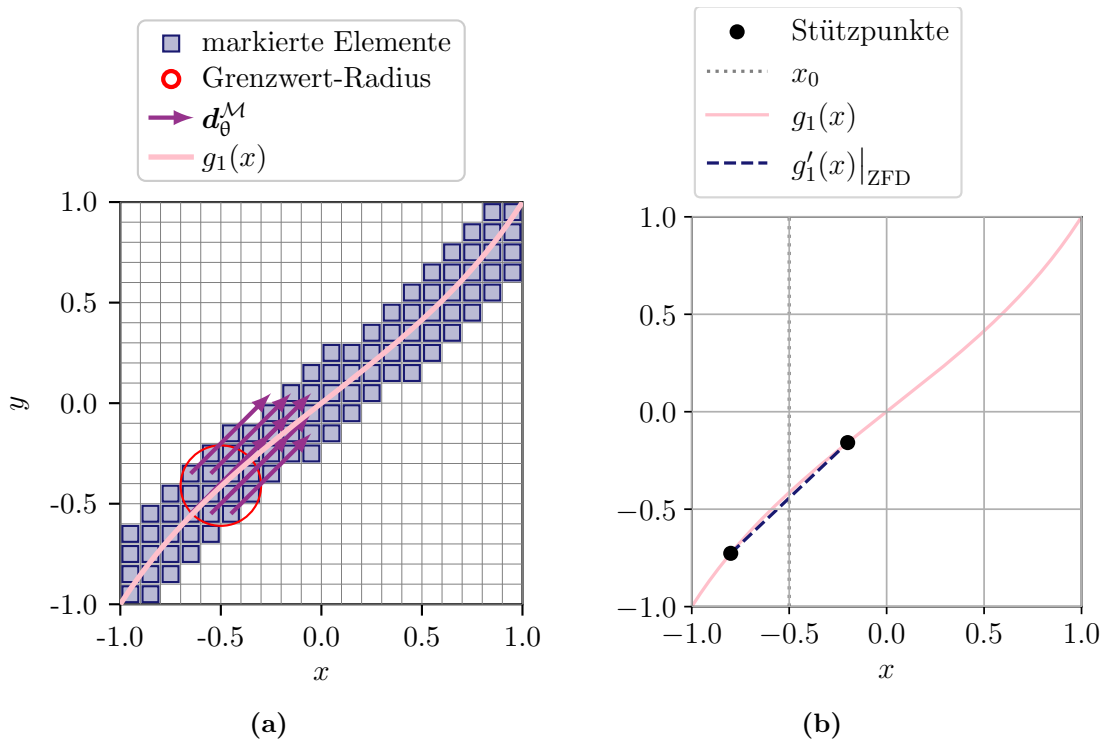


Abbildung 5.11: (a) Darstellung der Zuweisung von Wachstumsvektoren in einem 2D-FE-Netz mit einer Beispielfunktion $g_1(x) = \tan \pi x/4$, Elementseitenlängen $x_e = 0.1$, $y_e = 0.1$ und einem Grenzwert-Radius von $\sqrt{x_e^2 + y_e^2}$. (a) Bestimmung der Steigung der Funktion $g_1(x)$ über die zentrale finite Differenzen Methode.

¹¹Phytomorphologie bezeichnet die wissenschaftliche Untersuchung der äußeren Form und des Aufbaus von Pflanzen.

Zur Abbildung dieser Funktionen innerhalb des FE-Netzes ist eine Rasterung dieser kontinuierlichen Funktionen nötig. Dazu wird ein modifizierter Algorithmus nach [11] eingesetzt, der ursprünglich in der Computergrafik zur Darstellung diskreter Linien auf Rasterstrukturen entwickelt wurde, vgl. Abb. 5.12. Den markierten Elementen wird ein Richtungsvektor $\mathbf{e}_t = \mathbf{d}_\theta^M$ zugeordnet vgl. Abb. 5.11(a), dessen Steigung mithilfe der zentralen Finite-Differenzen-Methode (ZFD) bestimmt wird, siehe Abb. 5.11(b) [97]:

$$\mathbf{d}_\theta^M = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{(g')^2 + 1} \\ g'/\sqrt{(g')^2 + 1} \end{bmatrix}. \quad (5.58)$$

Sobald der Phasenfeldparameter φ einen bestimmten Schwellenwert in der Übergangszone überschreitet, wird die Wachstumsfunktion J_1 mit γ_1 Gl. (5.4) im jeweiligen Element aktiv. Das Vorhandensein dieser Wachstumsvektoren erzeugt somit lokal einen neuen Wachstumsdruck entlang der Marklinie. Auf diese Weise entwickelt sich schrittweise eine Topologie, die der Marklinie folgt.

Damit erfasst das Modell das primäre Wachstum des Baumes, jedoch noch nicht das sekundäre Wachstum. Für dessen Beschreibung ist ein Mechanismus erforderlich, der auch in Bereichen die nicht der Morphologielinie zugehörig sind Wachstumsvektoren erzeugt, die senkrecht zur Querschnittsebene stehen, siehe Abb. 5.13b. Hierfür werden zwei Methoden vorgeschlagen.

Die erste Methode nutzt den Gradienten des Phasenfelds $\text{Grad}[\varphi]$, um Elementen, die von Leerraum zu Holz übergehen ($\varphi > 1$), Wachstumsvektoren zuzuweisen. Da der Gradient des Phasenfelds stets senkrecht auf der Oberfläche steht, genügt in zwei Dimensionen eine Rotation um $\pm\pi/2$, um einen Vektor zu erzeugen, der tangential zur Grenze und damit senkrecht zur Oberfläche des Querschnitts liegt. Dazu wird ein Hilfsvektor bestimmt, der senkrecht zur kartesischen \mathbf{e}_2 -Richtung sowie zum Phasenfeldgradienten $\text{Grad}[\varphi]$ steht. Dieser Hilfsvektor befindet sich dann in der \mathbf{e}_3 -Richtung, je nach Gradienten-Richtung negativ oder positiv, siehe Abb. 5.13a. Durch das Kreuzprodukt zwischen $\text{Grad}[\varphi]$ und dem Hilfsvektor ergibt sich der neue Wachstumsvektor:

$$\mathbf{d}_\theta = \text{Grad}[\varphi] \times (\mathbf{e}_2 \times \text{Grad}[\varphi]). \quad (5.59)$$

Dieser Ansatz ist jedoch nur in 2D praktikabel, da dort die Orientierung der Grenzfläche eindeutig bestimmt ist und das Kreuzprodukt mit einem festen Vektor stets ein orthogonales Ergebnis in der Ebene liefert. In 3D hingegen ist dieser Zusammenhang nicht direkt übertragbar: Der Gradient $\text{Grad}[\varphi]$ kann in eine beliebige Raumrichtung zeigen und es existiert kein einheitlicher Hilfsvektor, der in jedem Fall eine sinnvolle

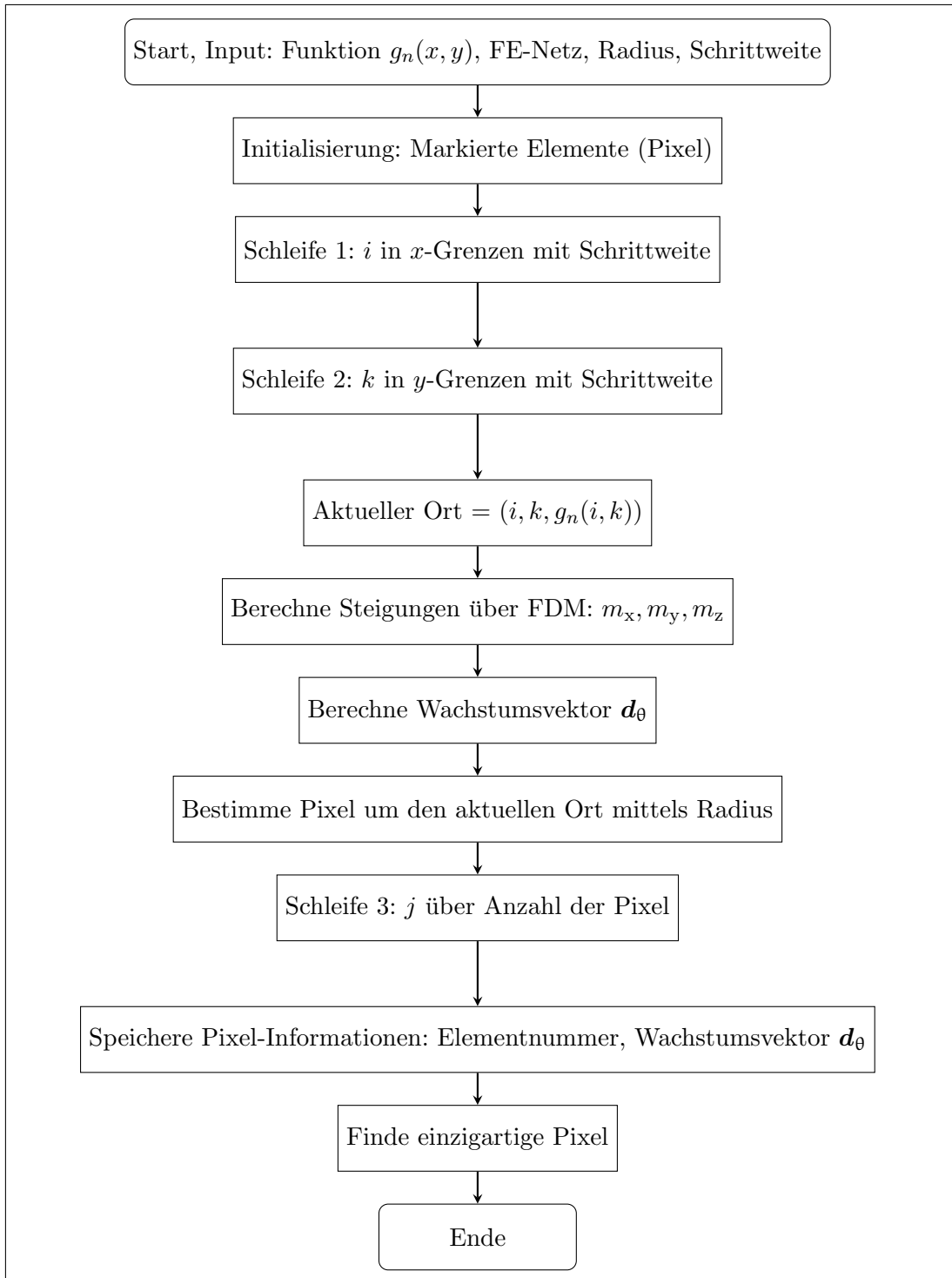


Abbildung 5.12: Berechnungsverfahren zur Rasterisierung von stetigen Funktionen in einem 3D-Raster mit unterschiedlichen Parzellenlängen in x , y und z -Richtung basierend auf dem Bresenham-Algorithmus (2D Rasterisierung von Geraden).

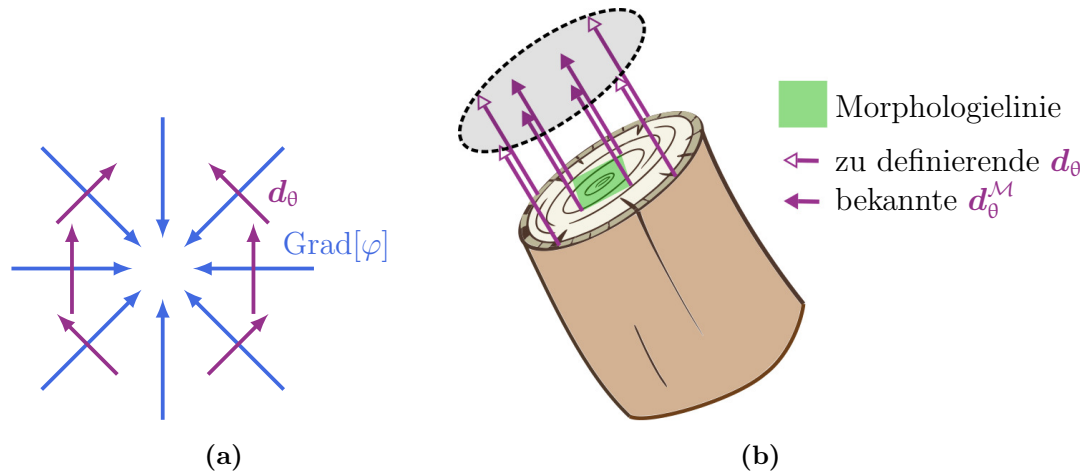


Abbildung 5.13: (a) Ausrichtung der neuen Wachstumsvektoren in 2D über den Phasenfeldgradienten. (b) Zuweisung neuer Wachstumsvektoren außerhalb des Morphologielinienbereichs.

Rotation erzeugt. Die Tangentialebene an die Phasengrenze ist in drei Dimensionen zweidimensional, was bedeutet, dass es unendlich viele orthogonale Richtungen zu einem gegebenen Normalenvektor gibt. Daher ist das Kreuzprodukt mit einem festen Vektor – wie in der 2D-Methode – in 3D nicht eindeutig definiert und kann nicht verlässlich eine konsistente Wachstumsrichtung erzeugen.

Die zweite Methode, die auch in 3D erprobt ist, erfolgt direkt innerhalb der Finite-Elemente-Berechnung. Hierbei wird die Information über die Wachstumsrichtung \mathbf{d}_θ^M an benachbarte Elemente durch die geteilten Knoten weitergeleitet. Die Übertragung der Wachstumsvektoren von den Gauss-Punkten zu den Knoten erfolgt mithilfe der Fehlerquadratmethode, die auch zur Mittelung von Spannungswerten genutzt wird [120]. Hierfür wird ein separates lineares globales Gleichungssystem formuliert und gelöst. Das Minimierungsproblem der Least-Squares-Methode lautet:

$$\Pi = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\mathbf{d}_\theta^* - \mathbf{d}_\theta)^2 dV \rightarrow \min. \quad (5.60)$$

Ziel ist es, die quadrierten Abweichungen zwischen den bekannten Wachstumsvektoren an den Gauß-Punkten \mathbf{d}_θ und den gesuchten Knotenwerten \mathbf{d}_θ^* im betrachteten Gebiet zu minimieren. Da es sich um ein lineares Problem handelt, ist nur die erste Variation des Energieansatzes notwendig. Die Ableitung der Energie nach den Knotenwerten wird mit der jeweiligen Testfunktion multipliziert. Die Diskretisierung der notwendigen

Bedingung:

$$\delta\Pi = \int_{\mathcal{B}} \delta\mathbf{d}_\theta^* (\mathbf{d}_\theta^* - \mathbf{d}_\theta) \, dV = 0 \quad (5.61)$$

ergibt unter Annahme der Ansatzfunktionen $\delta\mathbf{d}_{\theta,h}^* = \sum_{I=1}^n N^I \delta\mathbf{d}_\theta^*$ und $\mathbf{d}_{\theta,h}^* = \sum_{J=1}^n N^J \mathbf{d}_\theta^*$:

$$\delta\Pi \approx \delta\mathbf{d}_{\theta,h}^{*,I} \int_{\Omega} N^I (N^J \mathbf{d}_{\theta,h}^{*,J} - \mathbf{d}_\theta) \, dV = 0. \quad (5.62)$$

Dies lässt sich umformen zu:

$$\delta\mathbf{d}_{\theta,h}^{*,I} \int_{\Omega} N^I N^J \mathbf{d}_{\theta,h}^{*,J} \, dV = \delta\mathbf{d}_{\theta,h}^{*,I} \int_{\Omega} N^I \mathbf{d}_\theta \, dV. \quad (5.63)$$

Damit ergibt sich das Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekanntenen Knotenwerte $\delta\mathbf{d}_{\theta,h}^{*,I}$. Vor jedem neuen Zeitschritt im Rahmen des Euler-Rückwärts-Verfahrens werden diese Knotenwerte mithilfe geeigneter Ansatzfunktionen auf die Gauß-Punkte projiziert. Diese Projektion dient der numerischen Stabilisierung, da die Wachstumsrichtungen – und damit die Orientierung der Materialmatrix in Bezug auf die Faserausrichtung – innerhalb eines Zeitschritts konstant gehalten werden.

Durch die Glättung werden die Wachstumsrichtungen schrittweise an benachbarte Elemente weitergegeben. Dadurch entstehen kontinuierlich abfallende Wachstumsvektoren, die von der Morphologielinie ausgehen und mit zunehmender Entfernung gegen null streben. Relevant ist dabei nicht der Betrag, sondern ausschließlich die Richtung dieser Vektoren. Deshalb werden die Wachstumsvektoren normiert, sodass sich ausgehend von der Morphologielinie ein Richtungsfeld über das gesamte Gebiet ausbreitet.

5.8 Akkumulation von Wachstumsspannungen

In Kapitel 4.1 wurde der Mechanismus zur Entstehung von Wachstumsspannungen im Stamm bereits beschrieben. Es ist nun erforderlich, ein auf das Modell übertragbares Äquivalent zu identifizieren, das die Entstehung von Wachstumsspannungen innerhalb der neuer Schichten der Holzmatrix abbildet. Im Rahmen des Modells kann ausgenutzt werden, dass zwei Phasen mit einer diffusen Phasengrenze existieren. Es ist nicht notwendig, eine zusätzliche Phase für eine unabhängige Materialbeschreibung einzuführen. Die Kambiumschicht wird innerhalb der diffusen Phasengrenze basierend auf dem Phasenfeldparameter φ durch einen oberen Schwellenwert $\bar{\varphi}^t$ und einen unteren Schwellenwert $\bar{\varphi}_b$ abgebildet, siehe Abb. 5.14.

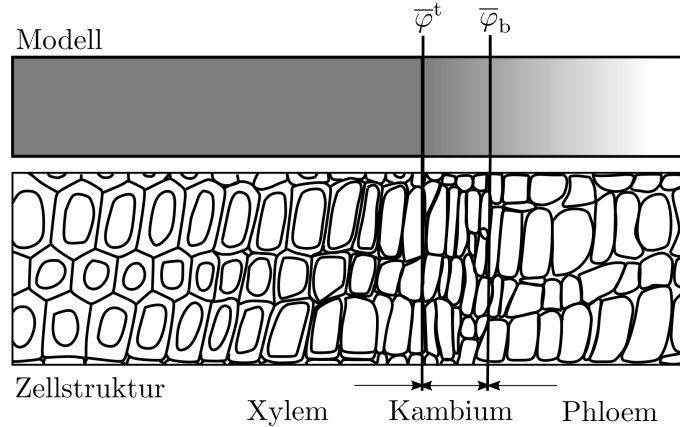


Abbildung 5.14: Definition der Kambiumschicht auf Basis des Phasenfeldparamenters im Modell mit einer Abbildung der Zellstruktur.

Die Ablagerung von Lignin und das Zusammenziehen der Zellulosefasern, welches in longitudinaler Richtung mit der Schrumpfung der Zelle einhergeht, wird im Modell für das Kambium im Bereich $\bar{\varphi}_b < \varphi < \bar{\varphi}^t$ durch die Aufbringung einer Dehnung $\bar{\varepsilon}_0$ in Richtung der Wachstumsvektoren \mathbf{d}_θ und somit der Faserrichtung realisiert. Diese Dehnung $\bar{\varepsilon}_0$ ist für jede Spezies genetisch veranlagt und dient als Eingangsparameter für das Modell. Eine Übersicht über die geläufige Werte einiger Spezies wurde in Tab. 4.3 dargestellt.

Dieser Zustand manifestiert sich während der Verholzung der Xylemzellen und wird als Dehnungsgeschichte $\boldsymbol{\varepsilon}_h(t_{n+1})$ gespeichert. Mit dem Rotationstensor \mathbf{Q} lässt sich eine Darstellung des Dehnungszinkrements in der kartesischen Basis formulieren:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}_\theta \otimes \mathbf{d}_\theta = \mathbf{Q}^\top \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}, \quad (5.64)$$

die sich zur Dehnungsgeschichte addiert:

$$\bar{\varphi}_b < \varphi < \bar{\varphi}^t \quad \boldsymbol{\varepsilon}_h(t_{n+1}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(t_{n+1}). \quad (5.65)$$

Dabei bezeichnet $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_0$ die Änderung des integralen Dehnungszustands zum Zeitpunkt t_{n+1} . Eine Ausnahme besteht für Gl. (5.65) in der Triebspitze, die spannungsfrei bleibt. Modell unterscheidet zwischen Kambium und Triebspitze anhand der Wachstumsvektoren der Morphologielinie mit $|\mathbf{d}_\theta^M| = 1$.

Die Adhäsion zu den bereits verholzten Xylemschichten führt dazu, dass der Dehnungszustand sowohl von der Dehnungsgeschichte als auch von der Änderung des integralen

Dehnungszustands abhängt. Dies wird durch folgende Beziehung beschrieben:

$$\bar{\varphi}^t < \varphi \quad \varepsilon_h(t_{n+1}) = \varepsilon_h(t_n) + \Delta\varepsilon(t_{n+1}). \quad (5.66)$$

Innerhalb des Modells resultiert dieser Mechanismus in akkumulierten Längswachstumsspannungen.

Das Flussdiagramm in Abb. 5.15 veranschaulicht die Wachstumsspannungsakkumulation mit der spannungsfreien Sprossspitze, wobei die Zuordnung neuer Wachstumsrichtungen \mathbf{d}_θ gemäß Abschnitt 5.7 berücksichtigt wird.

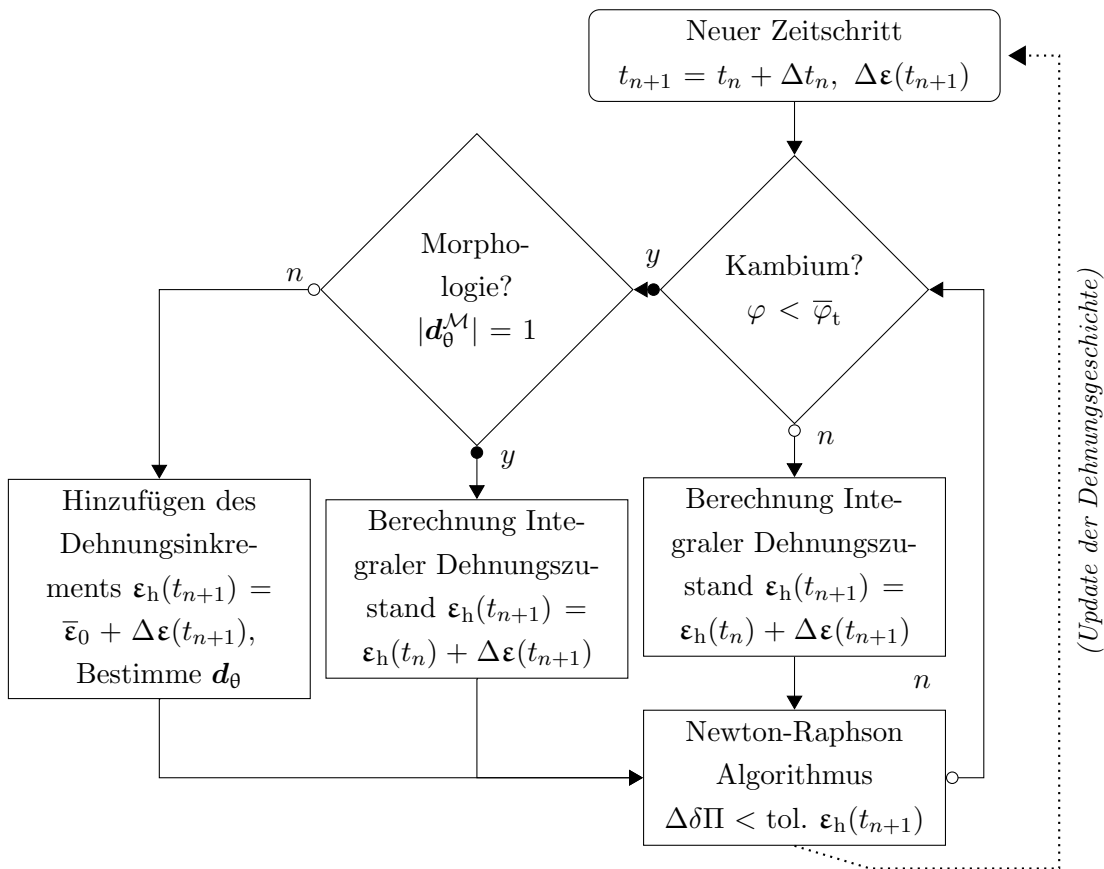


Abbildung 5.15: Flussdiagramm nach WULF & MUENCH [115] zur Akkumulation von Wachstumsspannungen im impliziten Euler-Rückwärtsverfahren des Phasenfeldmodells.

5.9 Thigmomorphes Wachstum

Wie bereits in Kap 3.1 beschrieben, führt die Thigmomorphogenese als Reaktion auf mechanische Belastungen – vermittelt unter anderem durch eine erhöhte Ethylenproduktion – zu verstärktem Dickenwachstum. Bei Biegebelastung tritt dieser Effekt bei

Nadelhölzern auf der Druckseite und bei Laubhölzern auf der Zugseite des Stammes auf. Um diesen biologischen Mechanismus im Modell abzubilden, wird im Folgenden zusätzlich zu den bestehenden Triebkräften des primären und sekundären Wachstums:

$$\gamma = c_{\gamma,1} \gamma_1 + c_{\gamma,2} \gamma_2 , \quad (5.67)$$

ein weiterer Triebkraftterm $c_{\gamma,s} \gamma_s$ eingeführt, der auf lokale mechanische Beanspruchung reagiert und so die Materialanlagerung des thigmomorphen Wachstums erfasst.

Zunächst wird ein Vorzeichenparameter eingeführt, der die Reaktionsrichtung des Baumes auf mechanische Belastung festlegt:

- $s = +1$ für druckgesteuertes Wachstum (Nadelholz),
- $s = -1$ für zuggesteuertes Wachstum (Laubholz).

Die axialen Dehnungen werden entlang der Faserrichtung als

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \mathbf{d}_\theta \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{d}_\theta) , \quad (5.68)$$

gemessen, wobei ausschließlich die durch äußere Lasten verursachten Dehnungen berücksichtigt werden, die den thigmomorphen Effekt auslösen können. Weiterhin werden sie bei voller Materialsteifigkeit des Gebiets ohne die Materialdichte-Funktion $f(\varphi)$ berücksichtigt, da die Steifigkeit innerhalb der Grenzfläche abfällt, vgl. Gl. (5.1). Somit ist der Einfluss äußerer Lasten auch innerhalb der Grenzfläche messbar, wo die Triebkraft $c_{\gamma,s} \gamma_s$ wirkt, vgl. Gl. (5.46).

Als Referenzwert wird die Dehnung im unbelasteten Zustand innerhalb der Grenzfläche $\bar{\varepsilon}_0$ verwendet. Aus dieser Referenzdehnung ergibt sich ein kritischer Schwellenwert $\varepsilon_{\text{crit}}$, ab dem das Modell auf eine Belastung reagiert. Um sicherzustellen, dass Druck- bzw. Zugreaktionen korrekt zugeordnet werden, wird der Schwellenwert vorzeichenabhängig definiert als $\varepsilon_{\text{crit}} = -s \cdot \bar{\varepsilon}_0$. Erst wenn die lokale Dehnung $\varepsilon_{\theta\theta}$ diesen Schwellenwert überschreitet (bei Zug) oder unterschreitet (bei Druck), wird der Indikator für spannungsinduziertes Wachstum aktiviert.

Wie in früheren Arbeiten gezeigt wurde, lässt sich im Modell eine Zielfunktion definieren um ein spannungs- oder in diesem Fall - dehnungsinduziertes Wachstum zu erfassen [70, 113]. Der Minimierungsansatz ist in diesem Fall formal und dient zur Indikation von wachstumsrelevanten Gebieten:

$$J_3 = \int_{\mathcal{B}} -\gamma_s(\bar{\varepsilon}_0, \mathbf{u}, \varphi) \varphi \, dV, \quad \rightarrow \min \text{ w.r.t. } \mathbf{u}, \varphi. \quad \text{mit} \quad (5.69)$$

$$\gamma_s = H [s(\varepsilon_{\text{crit}} - \varepsilon_{\theta\theta})] . \quad (5.70)$$

Dabei ist die Heaviside-Funktion H definiert durch:

$$H [s(\varepsilon_{\text{crit}} - \varepsilon_{\theta\theta})] = \begin{cases} 1 & \text{wenn } s(\varepsilon_{\text{crit}} - \varepsilon_{\theta\theta}) > 0 \\ 0 & \text{sonst ,} \end{cases} \quad (5.71)$$

womit sich die Schaltbedingung gemäß Tab. 5.1 ergibt.

Tabelle 5.1: Indikator γ_s für dehnungsinduziertes Wachstum in Abhängigkeit des Materialtyps (s) sowie des kritischen Schwellenwerts $\varepsilon_{\text{crit}} = -s \bar{\varepsilon}_0$.

Material	Bedingung an $\varepsilon_{\theta\theta}$	$s(\varepsilon_{\text{crit}} - \varepsilon_{\theta\theta})$	γ_s
Nadelholz ($s = 1$)	$\varepsilon_{\theta\theta} < \varepsilon_{\text{crit}}$ (hohe Kontraktion)	> 0	1
	$\varepsilon_{\theta\theta} \geq \varepsilon_{\text{crit}}$	≤ 0	0
Laubholz ($s = -1$)	$\varepsilon_{\theta\theta} > \varepsilon_{\text{crit}}$ (hohe Streckung)	> 0	1
	$\varepsilon_{\theta\theta} \leq \varepsilon_{\text{crit}}$	≤ 0	0

Im Gesamtenergiepotential wird die Zielfunktion durch einen Faktor $c_{\gamma,s}$ gewichtet, um eine Abhängigkeit zur Grenzflächenbreite zu schaffen und die Wachstumsgeschwindigkeit parameterabhängig zu regulieren. Dieser Faktor wird analog zum sekundären Wachstum Gl. (5.48) mit dem Ansatz der laufenden Welle ermittelt:

$$c_{\gamma,s} = \omega v_s \sqrt{\frac{2\beta}{L_c}} (1 - \varphi^2) . \quad (5.72)$$

Die Vorgabegeschwindigkeit des thigmomorphen Wachstums v_s ergibt sich dabei durch den normierten relativen Unterschied zum Schwellenwert:

$$v_s = k_s \cdot \left| \frac{\varepsilon_{\text{crit}} - \varepsilon_{\theta\theta}}{\varepsilon_{\text{crit}}} \right| \cdot \frac{1}{\omega} , \quad (5.73)$$

wobei k_s die Empfindlichkeit der Triebkraft für den Dehnungsunterschied zum Schwellenwert beschreibt. Obwohl v_s von lokalen Dehnungen abhängt, wird bei geringer Ausdehnung der Grenzfläche ein konstanter Wert angenommen, sodass eine reine Translation des Profils mit konstanter Geschwindigkeit hervorgerufen wird, vgl. Gl. (5.46).

Der zusätzliche Term ergänzt die Triebkraft des Modells:

$$\gamma = c_{\gamma,1} \gamma_1 + c_{\gamma,2} \gamma_2 + c_{\gamma,s} \gamma_s . \quad (5.74)$$

Die Verteilung des Phasenfeldparameters wird somit nicht mehr nur durch das primäre und sekundäre Wachstum gesteuert, sondern auch durch einen Spannungsindikator, der ab einem kritischen Wert das Wachstum von Material initiiert.

5.10 Rotationssymmetrie zur Simulation kreisförmiger Querschnitte in 2D

Werden Baumstämmen mit kreisförmigem Querschnitt nur durch eine radiale und longitudinale Achse r bzw. z beschrieben, erhält man ein 2D Modell, welches die Rotationssymmetrie des Querschnitts zu berücksichtigen hat. Hierfür wird in tangentialer Richtung ϕ der ebene Verzerrungszustand (EVZ) vorausgesetzt. Weiterhin wird die Integration über das Volumen auf ein Flächenintegral unter Berücksichtigung des radialen Abstands vom Symmetriemittelpunkt zurückgeführt, was sich im infinitesimalen Volumenelement in Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) widerspiegelt:

$$dV = r \, dr \, d\phi \, dz . \quad (5.75)$$

Da im 2D-Modell keine explizite Koordinate ϕ vorliegt, wird die infinitesimale Ausdehnung $d\phi$ durch die Bedingung $r_a(t) \, d\phi = 1$ ersetzt, was einer Bogenlänge von 1 am äußeren Rand des Kreisquerschnitts entspricht. Da sich im hier angestrebten 2D Phasefeldmodell der Radius des Kreisquerschnitts über der longitudinalen Richtung z sowie mit der Zeit verändern kann, ist diese Bedingung orts- und zeitabhängig:

$$dV = \frac{r}{r_a(t, z)} \, dr \, dz . \quad (5.76)$$

Für die FE-Technik des 2D-Modells bedeutet dies, dass je weiter ein Integrationspunkt von der Morphologielinie entfernt liegt, welche als Symmetrieachse betrachtet wird, desto größer ist sein Beitrag zur Integration. Daher muss für jeden Integrationspunkt in der Querschnittsebene senkrecht zur Wachstumsrichtung \mathbf{d}_θ sowohl der Abstand r zur Morphologielinie als auch der Radius $r_a(t)$ zum äußeren Rand des Querschnitts bekannt sein.

Tabelle 5.2: Vor- und Nachteile des 2D-Modells im EVZ im Vergleich zum 3D-Modell.

Kriterium	2D (EVZ)	3D
Modellierungsaufwand	Permanente Berechnungen der Radien r , $r_a(t)$ notwendig	Hohe Anzahl an Freiheitsgraden
Geometrieforderung	Nur für rotationssymmetrische Querschnitte geeignet	beliebige Querschnitte möglich
Lastanforderung	Nur für Belastungen in der r - z -Ebene möglich	Sämtliche Belastungsrichtungen möglich
Spannungsberechnung	Nur Spannungszustände in der r - z -Ebene erfassbar	Spannungszustände in sämtlichen Schnittebenen erfassbar

6 Validierung und Anwendung des Modells

Ziel dieses Kapitels ist es, das in den vorangegangenen Abschnitten entwickelte Phasenfeldmodell hinsichtlich seiner Eignung zur Beschreibung von Wachstumsspannungen in der Holzmatrix zu kalibrieren, zu validieren und exemplarisch anzuwenden. Das Modell soll insbesondere die Differenzierung zwischen neu gebildetem und bestehendem Holzgewebe, die Entstehung von Wachstumsspannungen infolge axialer Dehnung sowie deren Interaktion mit äußerer Belastung erfassen.

Das entwickelte Phasenfeldmodell ermöglicht eine kontinuierliche Beschreibung des Materialwachstums entlang beliebiger Stammgeometrien sowie der damit verbundenen Entwicklung von Wachstumsspannungen in der Holzmatrix. Dabei wird die Faserrichtung des Materials mit dem in Kapitel 2 beschriebenen transversal-isotropen Materialgesetz mit den in Kapitel 3.3 aufgeführten Materialparameter berücksichtigt. Die resultierende Struktur ist mechanisch beanspruchbar, sodass eine Überlagerung von Wachstumsspannungen und Spannungen aus äußerer Belastung simuliert werden kann. Um das Modell an reale Wachstumsraten anzupassen, erfolgt eine Kalibrierung zentraler Modellparameter. Darüber hinaus wird die Aussagekraft des Modells durch den Vergleich mit den in Kapitel 4.4 - 4.6 vorgestellten analytischen Lösungen aus der Literatur überprüft.

Kalibrierung der Modellparameter

Zur Kalibrierung der Modellparameter werden folgende Aspekte untersucht:

- Einfluss der Randbedingung $\bar{\gamma}$ auf die Phasenfeldverteilung am Rand,
- Netzabhängigkeit der resultierenden Grenzflächenform $\varphi(\mathbf{X})$,
- Genauigkeit der Reproduktion vorgegebener Grenzflächengeschwindigkeiten v_t .

Validierung der Wachstumsspannungen anhand analytischer und numerischer 1D-Modelle

Die Validierung des Modells erfolgt anhand folgender Kriterien:

- Vergleich der simulierten Wachstumsspannungen mit analytischen Lösungen nach KÜBLER [56] und GILLIS [32] sowie mit dem 1-D-Akkumulationsmodell.

Anwendung auf exemplarische Szenarien

Folgende exemplarische Szenarien kommen zur Anwendung:

- Einfluss äußerer mechanischer Belastung auf die überlagerten Spannungsverteilungen,

- Untersuchung der Modellfähigkeit zur Abbildung thigmomorpher Wachstumsreaktionen.

Modellannahmen

In allen numerischen Beispielen finden folgende Anfangs- und Randbedingungen sowie grundlegende Annahmen Verwendung:

- Die initiale Materialvorgabe erfolgt entlang der vorgegebenen Morphologielinie bis zu einer definierten Sprosshöhe oder alternativ über eine Dirichlet-Randbedingung am Sprossanfang ($\varphi = 1$). Der übrige Simulationsbereich ist initial homogen mit $\varphi = -1$ belegt und stellt damit leeren Raum dar. Andere Anfangsverteilungen werden im Kontext des Triebwachstums nicht berücksichtigt.
- Sofern nicht anders angegeben, wird an den Rändern des Simulationsgebiets eine Neumann-Randbedingung $\bar{y} = 0$ verwendet.
- Die Zeitintegration erfolgt schrittweise über Inkremente Δt , die maximal der Dauer einer Wachstumsperiode von sechs Monaten in gemäßigten Breiten entspricht.

6.1 Natürliche Randbedingung für das Phasenfeld

Wie in Kapitel 5 erläutert, legt die Neumannsche Randbedingung:

$$\text{Grad}[\varphi] \cdot \mathbf{P}_d \cdot \mathbf{n} = \bar{y}$$

die Orientierung und den Betrag des faserausgerichteten Gradienten $\text{Grad}[\varphi] \cdot \mathbf{P}_d$ an den Rändern des betrachteten Gebiets fest. Auch im Fall $\bar{y} = 0$ ergibt sich dadurch eine Randvorgabe, da dies den Gradienten von φ orthogonal zur Grenzfläche erzwingt. Zur Veranschaulichung dieses Einflusses werden zwei Szenarien mit identischer Gebietsgeometrie betrachtet, bei denen die Randwerte $\bar{y} = 0$ bzw. $\bar{y} = -0.005$ an den in Abb. 6.1b markierten Stellen aufgebracht werden.

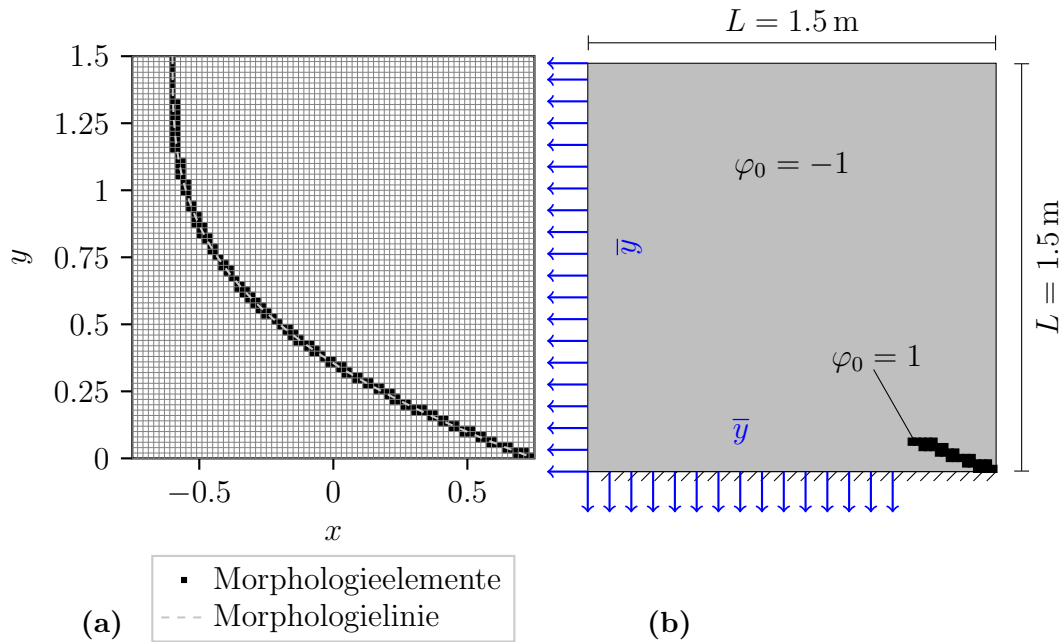


Abbildung 6.1: (a) Diskretisierung und Morphologielinie für 75×75 Elemente. (b) Simulationsraum mit einem Phasenfeldparameter von $\varphi = -1$, einem Initialbereich von $\varphi = 1$ als Spross und einer Neumann-Randbedingung für das Phasenfeld an den markierten Rändern von \bar{y} .

Im Fall $\bar{y} = 0$ bildet sich an allen Rändern ein Phasenfeldgradient aus, der orthogonal zur Oberfläche verläuft. Besonders im Initialbereich führt dies zu einer verstärkten Materialbildung, vgl. Abb. 6.2.

Entlang des vertikalen Randes im Bereich der nahezu parallel verlaufenden Morphologielinie entsteht aufgrund der geringen Entfernung eine Verbindung zwischen Materialfront und Rand. Auch dort erzwingt die Randbedingung orthogonale Gradienten, was eine zusätzliche Materialbildung herbeiführt.

Wird hingegen $\bar{y} = -0.005$ an den markierten Randabschnitten vorgegeben, sind orthogonale Gradienten nicht mehr zulässig. Stattdessen verbleibt ein Gradient mit festgelegter Normalenkomponente gemäß dem vorgegebenen Wert \bar{y} . Dadurch fällt die erzwungene Materialbildung im Initialbereich deutlich geringer aus, da keine horizontal ausgerichteten Gradienten gefordert sind, vgl. Abb. 6.3. Entlang des vertikalen Randes und der Morphologielinie unterbindet die Randbedingung zudem eine vollständige Materialverbindung zum Rand.

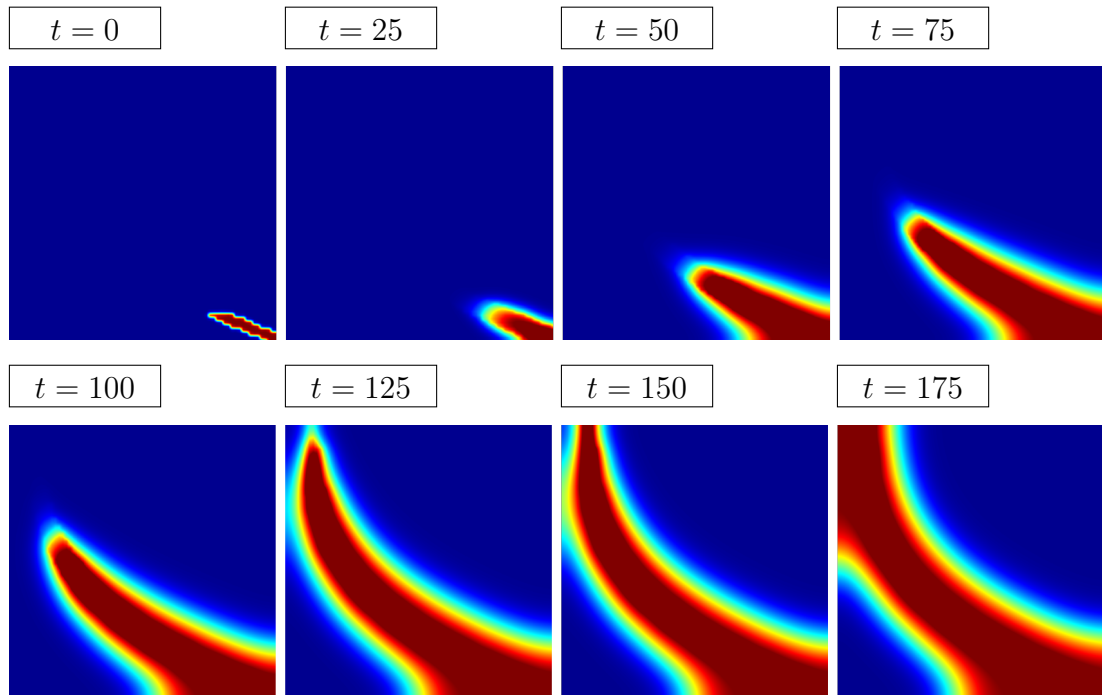


Abbildung 6.2: Wachstumsverlauf für $\bar{y} = 0$, wobei $\varphi = 1$ durch rote Bereiche markiert ist.

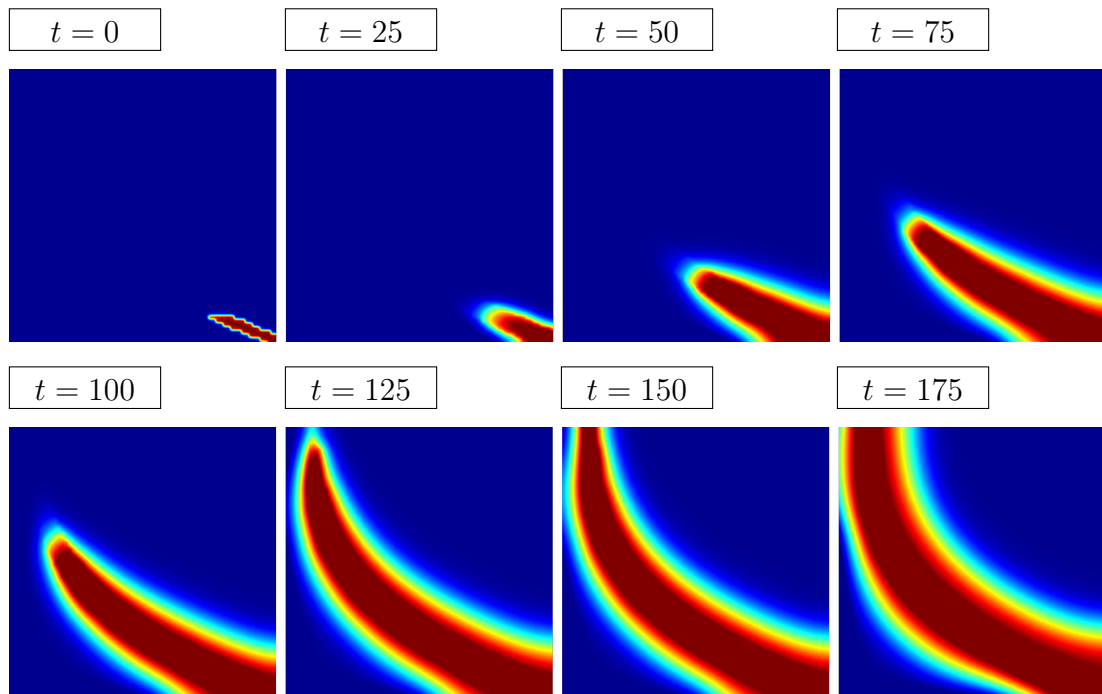


Abbildung 6.3: Wachstumsverlauf für $\bar{y} = -0.005$, wobei $\varphi = 1$ durch rote Bereiche markiert ist.

6.2 Notwendige Auflösung der Grenzfläche

Die numerische Auflösung der Grenzfläche hängt maßgeblich von der gewählten Elementgröße im Simulationsgebiet ab. In der folgenden Untersuchung wird ein eindimensionales Gebiet $X_1 \in [-5, 5]$ mit 20, 30, ..., 200 linearen Elementen betrachtet. Ziel ist es, die Netzabhängigkeit der resultierenden Grenzflächenform zu analysieren und zu bestimmen, ab welcher Diskretisierungseinheit eine ausreichende numerische Genauigkeit erreicht ist. Das Verschiebungsfeld wird hierbei nicht betrachtet, sodass mechanische Komponenten keinen Einfluss auf das Phasenfeld bewirken.

Als initiale Materialverteilung wird das stationäre Grenzflächenprofil:

$$\varphi(X_1) = \tanh\left(-\sqrt{\frac{2\beta}{P_{11}}}X_1\right) \quad (6.1)$$

durch Interpolation an den Knoten des Finite-Element-Netzes vorgegeben. Da keine Randeffekte untersucht werden, genügt hier die Betrachtung des Teilgebiets $I_1 = X_1 \in [-0.5, 0.5]$. Um sicherzustellen, dass der Phasenübergang innerhalb von I_1 liegt wird $P_{11} = 0.03$ und $\beta = 0.25$ vorgegeben, was:

$$\ell \approx \frac{4}{\sqrt{2\beta}} \sqrt{P_{11}} \approx 0.9 \quad (6.2)$$

entspricht.

Es wird ein L^2 -Fehlermaß durch die Differenz zwischen der numerischen Lösung $\varphi_h(X_1)$ und dem analytischen Profil $\varphi(X_1)$ aus Gl. (6.1) definiert:

$$e_{L^2} = \left(\int_{I_1} [\varphi_h(X_1) - \varphi(X_1)]^2 dX_1 \right)^{1/2}. \quad (6.3)$$

Mit zunehmender Netzfeinheit nähert sich die numerische Lösung dem analytischen Verlauf an, vgl. Abb. 6.4. Während bei grober Diskretisierung die Übergangszone stark polygonalisiert erscheint, wird ab etwa 80 Elementen eine hinreichend genaue Abbildung des analytischen Profils erreicht. Dies entspricht innerhalb des Teilintervalls $I_1 = X_1 \in [-0.5, 0.5]$ einer Unterteilung von $n = 8$ Elementen. Der Fehler e_{L^2} nimmt etwa ab dieser Verfeinerung exponentiell mit der Anzahl der Elemente ab und es liegt ein asymptotischer Konvergenzbereich vor, vgl. Abb. 6.5. Dies bestätigt auch die Aussage in STEINBACH [100], wonach etwa 6–8 Elemente für die Diskretisierung der Grenzfläche erforderlich sind. Wie PROVATAS & ELDER [85] beschreiben, kann die Genauigkeit der Phasenfeldlösung auch durch Finite-Elemente höherer Ordnung verbessert werden.

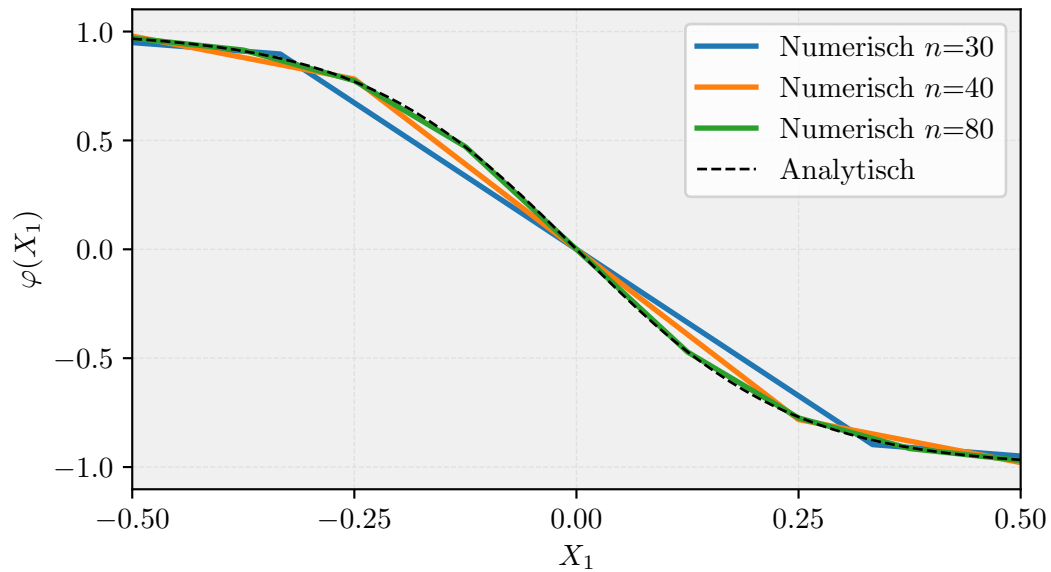


Abbildung 6.4: Vergleich der numerisch berechneten Phasenfeldprofile $\varphi_h(X_1)$ für verschiedene Netzfeinheiten mit dem analytischen Grenzflächenverlauf $\varphi(X_1)$.

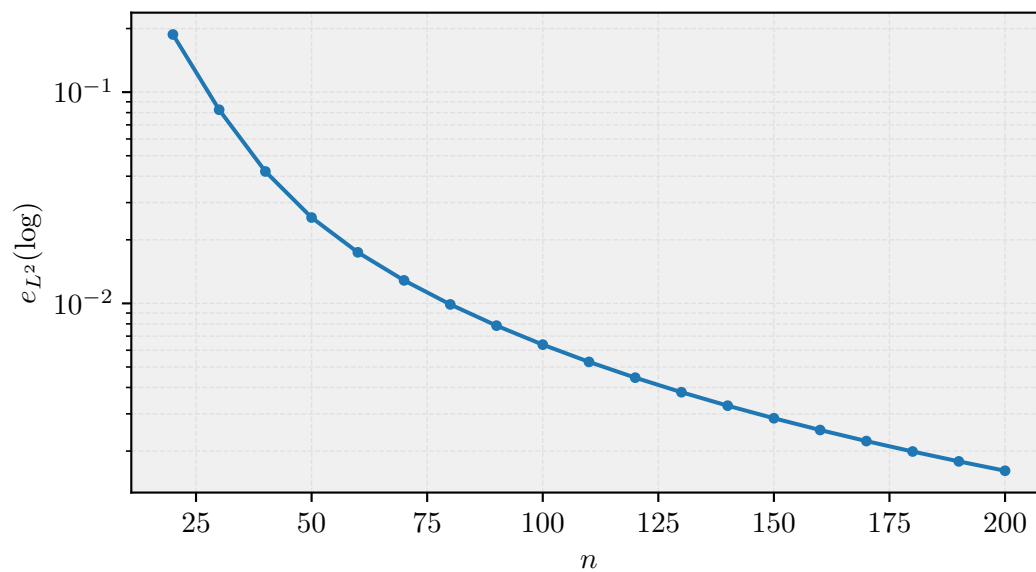


Abbildung 6.5: Verlauf des Fehlers e_{L^2} zwischen numerischer Lösung φ_h und analytischem Profil φ in Abhängigkeit der Elementgröße mit $n \in 20, 30, \dots, 200$ Unterteilungen des Gebiets $X_1 \in [-5, 5]$.

Die Auswirkungen der Netzabhängigkeit können auch in 2D beobachtet werden. Als Beispiel wird ein quadratischer Simulationsbereich mit den Abmessungen $0.75 \text{ m} \times$

0.75 m, eine vorgegebenen Morphologielinie, vgl. Abb. 6.6a, sowie der Initialisierung des Gebiets und den Randbedingungen gemäß Abb. 6.6b betrachtet.

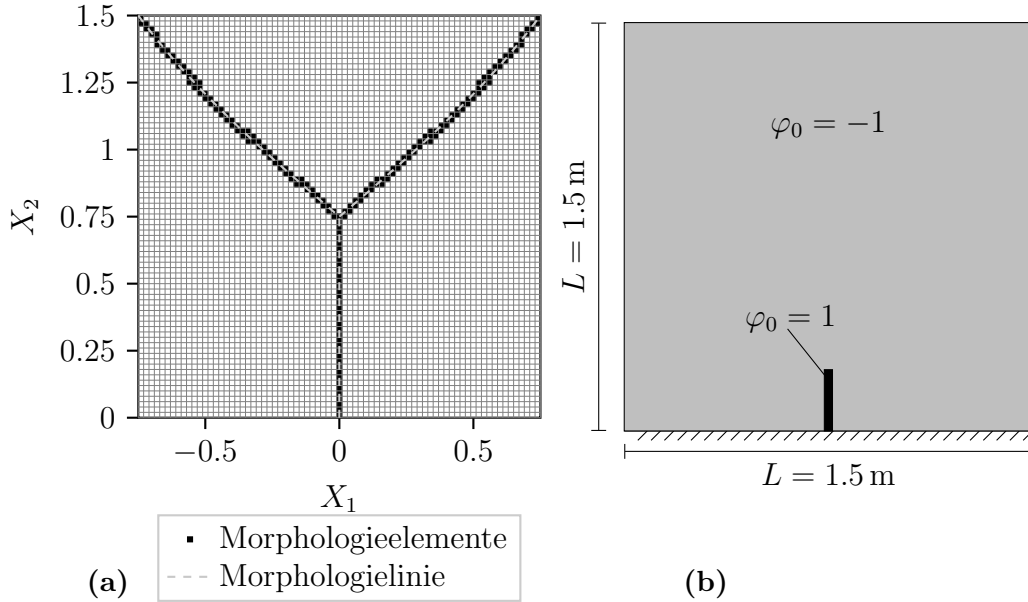


Abbildung 6.6: (a) Diskretisierung und Morphologielinie für 75×75 Elemente. (b) Simulationsraum mit einem Phasenfeldparameter von $\varphi = -1$ und einem Initialbereich von $\varphi = 1$ als Spross.

Es werden unterschiedliche Elementnetze gemäß Abb. 6.6 mit 25×25 , 50×50 , 75×75 sowie 100×100 Elementen zum Pseudozeitpunkt $t = 200$ verglichen.

Die Matrix \mathbf{P}_d setzt sich aus dem konstanten Anteil $L_c \mathbf{1}$ und dem nach Wachstumsrichtung veränderlichen Anteil $p_s \text{diag}(\mathbf{d}_\theta)$ zusammen. Die darin enthaltenen Parameter werden zu $L_c = 0.005$ und $p_s = 0.01$ vorgegeben.

Die Grenzflächenbreite des stationären Profils wurde bereits in Kapitel 5.4 beschrieben:

$$\ell \approx \frac{4}{\sqrt{2\beta}} \sqrt{P_{11}}. \quad (6.4)$$

Damit lässt sich bei vorgegebener Elementgröße x_e sowie der Elementunterteilungen n eine Grenzflächenbreite von $\ell \approx n \cdot x_e$ einstellen. Der Grenzflächenparameter P_{11} in Richtung X_1 muss dann bestimmt sein durch:

$$\ell \approx \frac{4}{\sqrt{2\beta}} \sqrt{P_{11}} \Rightarrow P_{11} \approx \frac{\beta}{8} \ell^2 = \frac{\beta}{8} (n \cdot x_e)^2. \quad (6.5)$$

Um das Kriterium von $n = 8$ in der Grenzfläche einzuhalten, ergibt sich:

$$P_{11} > 8\beta x_e^2. \quad (6.6)$$

Bei bekanntem P_{11} hingegen ergibt sich eine Bedingung für die Elementbreite von:

$$x_e < \sqrt{\frac{P_{11}}{8\beta}}. \quad (6.7)$$

In sekundärer Wuchsrichtung X_1 mit $P_{11} = Lc$ ist diese Bedingung für 25×25 Elemente nicht erfüllt. Insbesondere bei diesem groben Netz zeigt sich ab der Verzweigung eine deutliche Netzstruktur: Die Grenzfläche zeigt in diesen Bereichen einen unruhigen Verlauf. Dies verdeutlicht die Notwendigkeit einer Netzverfeinerung für die gewählte Parametrierung, vgl. Abb. 6.7. Mit zunehmender Netzfeinheit verschwinden die eckigen Topologieränder zunehmend, vgl. Abb. 6.7.

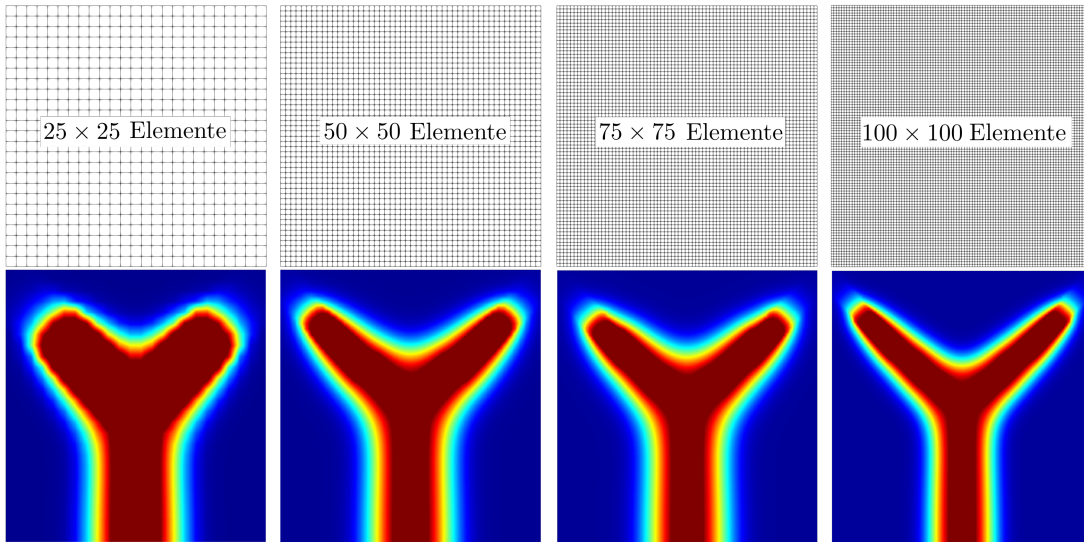


Abbildung 6.7: Phasenfeld zum Zeitpunkt $t = 200$ für 4 verschiedene Elementgrößen, wobei $\varphi = 1$ durch rote Bereiche markiert ist.

6.3 Untersuchungen und Kriterien zur Grenzflächendynamik

Zur Überprüfung der modellierten Grenzflächengeschwindigkeit infolge einer lokalisierten Triebkraft wird ein eindimensionales Szenario mit bekannter analytischer Lösung herangezogen:

$$\tilde{\varphi}(X_1 - vt) = \tanh\left(-\sqrt{\frac{2\beta}{P_{11}}}(X_1 - vt)\right). \quad (6.8)$$

In der Simulation wird über die Triebkraft

$$\gamma(\varphi) = \omega v_t \sqrt{\frac{2\beta}{P_{11}}}(1 - \varphi^2) = \gamma_0(1 - \varphi^2) \quad (6.9)$$

eine konstante Zielgeschwindigkeit v_t vorgegeben. Der betrachtete eindimensionale Bereich $X_1 \in [-10, 10]$ liegt mit der Vorgabe von $P_{11} = 0.11$ und einer Unterteilung in 250 Elemente innerhalb des zuvor ermittelten praktikablen Auflösungsbereichs der Grenzfläche. Zur Vermeidung von Randeffekten erfolgt die Initialisierung des Profils bei $X_1 = -5$. Die Relaxationszeit wird mit $\omega = 1$ angesetzt.

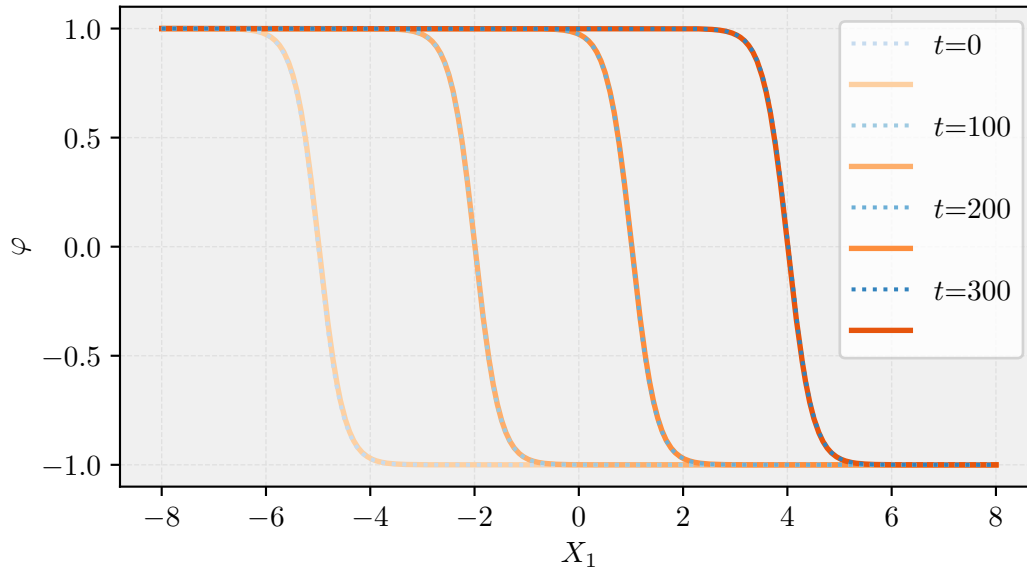


Abbildung 6.8: Vergleich der numerisch berechneten Phasenfeldprofile $\varphi_h(X_1)$ (rot) mit der Vorgabegeschwindigkeit $v_t = 0.03$ und einer Zeitschrittweite $\Delta t = 0.5$ und der analytischen Lösung der laufenden Welle $\tilde{\varphi}(X_1)$ (blau gepunktete Linien).

Zunächst wird der Verlauf der numerisch berechneten Phasenfeldprofile $\varphi_h(X_1)$ bei einer vorgegebenen Geschwindigkeit $v_t = 0.03$ mit der analytischen Lösung der laufenden Welle $\tilde{\varphi}(X_1)$ verglichen, vgl. Abb. 6.8. Für eine moderate Zeitschrittweite von $\Delta t = 0.5$ ergibt sich eine gute Übereinstimmung zwischen numerischer und analytischer Lösung, was auf eine korrekte Implementierung der lokalisierten Triebkraft $\gamma(\varphi)$ hinweist.

Eine Erhöhung der Zeitschrittweite wirkt sich deutlich auf die resultierende Grenzflächengeschwindigkeit v_{num} aus, vgl. Abb. 6.9. Mit zunehmender Zeitschrittweite sowie Vorgabegeschwindigkeit nimmt die Genauigkeit der Frontbewegung merklich ab, wodurch geringere Werte für v_{num} resultieren. Die zugrunde liegende Ursache ist in der Fachliteratur beschrieben: Implizite Zeitintegrationsverfahren sind zwar bei großen Zeitschrittweiten numerisch stabil, ihre Genauigkeit bleibt jedoch schrittabhängig – insbesondere, wenn die Bewegung von Phasengrenzen präzise aufgelöst werden soll [28]. Das verwendete Euler-Rückwärts-Verfahren ist zwar stabil, führt jedoch bei schnellen

Frontbewegungen zu einer ungenügenden Abbildung der zeitlichen Dynamik.

Für das vorliegende Modell bedeutet dies, dass zur zuverlässigen Reproduktion der erwarteten Frontgeschwindigkeit v_t eine ausreichend feine Zeitdiskretisierung erforderlich ist.

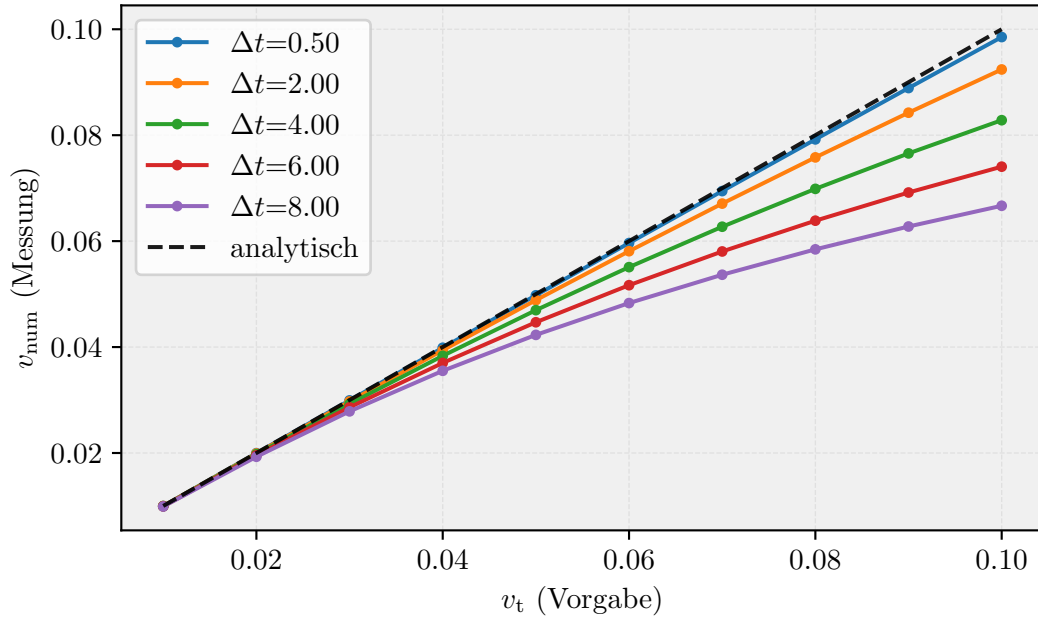


Abbildung 6.9: Einfluss der Zeitschrittweite Δt auf die numerisch gemessene Frontgeschwindigkeit v_{num} infolge der Vorgabegeschwindigkeiten v_t im Vergleich zur analytischen Lösung.

Zur Abschätzung der notwendigen Zeitschrittweite wird die eindimensionale Phasenfeldgleichung betrachtet:

$$\omega \dot{\varphi} = P_{11} \frac{d^2 \varphi}{d^2 X_1} - \frac{d\psi_{\text{well}}}{d\varphi} + \gamma. \quad (6.10)$$

Unter Verwendung der Triebkraft $\gamma^n = \gamma(\varphi^n)$ aus dem letzten Zeitschritt (Näherung) ergibt sich im Euler-Rückwärts-Verfahren die zeitdiskrete Formulierung:

$$\begin{aligned} \omega \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} &= P_{11} \frac{d^2 \varphi^{n+1}}{d^2 X_1} - 4\beta \varphi^{n+1} \left((\varphi^{n+1})^2 - 1 \right) + \gamma^n \\ \Rightarrow \varphi^{n+1} &= \varphi^n + \frac{\Delta t}{\omega} \left[P_{11} \frac{d^2 \varphi^{n+1}}{d^2 X_1} - 4\beta \varphi^{n+1} \left((\varphi^{n+1})^2 - 1 \right) + \gamma^n \right]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Setzt man die analytische Lösung aus Gl. (6.1) für das Grenzflächenprofil in Gl. (6.11) ein, heben sich die Terme aus dem Gradienten und des Potentials auf. Im Update des

Phasenfeldparameters verbleibt der lineare Einfluss der Triebkraft:

$$\varphi^{n+1} \approx \varphi^n + \frac{\Delta t}{\omega} \cdot \gamma^n. \quad (6.12)$$

Die maximale Triebkraft tritt aufgrund der Abhängigkeit von $(1 - \varphi^2)$ bei $\varphi^n = 0$ auf und lautet dort:

$$\gamma_{\max} = \omega v_t \cdot \sqrt{\frac{2\beta}{P_{11}}}. \quad (6.13)$$

Somit lässt sich die maximale Änderung des Phasenfeldparameters pro Zeitschritt abschätzen:

$$\Delta\varphi_{\max} := \varphi^{n+1} - \varphi^n \approx \frac{\Delta t}{\omega} \cdot \gamma_{\max} = \frac{\Delta t}{\omega} \cdot \omega v_t \cdot \sqrt{\frac{2\beta}{P_{11}}} = \Delta t \cdot v_t \sqrt{\frac{2\beta}{P_{11}}}. \quad (6.14)$$

Da der Phasenfeldparameter auf den Bereich $\varphi \in [-1, 1]$ beschränkt ist und hier an der Stelle $\varphi^n = 0$ betrachtet wird, ist seine maximale Änderung auf $\Delta\varphi_{\max} = 1$ pro Zeitschritt zu limitieren, um Überschwung im Lösungsverhalten zu vermeiden. Daraus ergibt sich das Kriterium:

$$\Delta t \cdot v_t \cdot \sqrt{\frac{2\beta}{P_{11}}} \leq 1. \quad (6.15)$$

Dieses Kriterium begrenzt die maximal zulässige Zeitschrittweite in Abhängigkeit der Modellparameter und der Grenzflächengeschwindigkeit.

In der Forderung zur maximal zulässigen Zeitschrittweite taucht der Faktor $\sqrt{\frac{2\beta}{P_{11}}}$ auf, welcher bereits bei der Diskussion zur notwendigen Netzdiskretisierung in der Grenzfläche in Erscheinung trat. Nutzt man diesen Sachverhalt, lässt sich eine Aussage zum maximal zurückgelegten Weg $\Delta t \cdot v_t$ einer Grenzfläche innerhalb eines Zeitschritts formulieren. Für ein Grenzflächenprofil in X_1 -Richtung mit P_{11} und n Elementen innerhalb der Grenzfläche Gl. (6.5) folgt:

$$\Delta t \cdot v_t \cdot \sqrt{\frac{2\beta}{P_{11}}} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta t \cdot v_t \leq \sqrt{\frac{P_{11}}{2\beta}} \approx \sqrt{\frac{\frac{\beta}{8}(n \cdot x_e)^2}{2\beta}} \Rightarrow \Delta t \cdot v_t \leq \frac{n \cdot x_e}{4}. \quad (6.16)$$

Geht man von einer Elementunterteilung der Grenzfläche mit $n = 8$ Gl. (6.6) aus, erhält man $\Delta t \cdot v_t \leq 2x_e$. Somit darf sich eine Grenzfläche innerhalb eines Zeitschritts maximal um zwei Elemente weiterbewegen.

Bei hohen Vorgabegeschwindigkeiten v_t treten sonst zunehmend Abweichungen im Phasenfeldprofil auf [50]. Wie auch ZHANG ET AL. [118] zeigen, steigt mit wachsender Triebkraft die Instabilität in der Übergangszone, wodurch Anforderungen an die zeitliche und räumliche Auflösung zunehmen. Zur genaueren Erfassung dieser Abweichungen wird der maximale Fehler:

$$e_{L^\infty} = \max_{X_1 \in \Omega} |\varphi_h(X_1) - \varphi(X_1)| \quad (6.17)$$

verwendet. Dieser identifiziert insbesondere lokal ausgeprägte Fehler, die vom globalen L^2 -Fehler nicht vollständig abgebildet werden können. Bei Überschreitung des Kriteriums aus Gl. (6.16) zeigen sich deutlich verstärkte Profilabweichungen, die auf ein Überschwingen des Phasenfeldparameters über den zulässigen Wertebereich ($\varphi > 1$) hinweisen, vgl. Abb. 6.10.

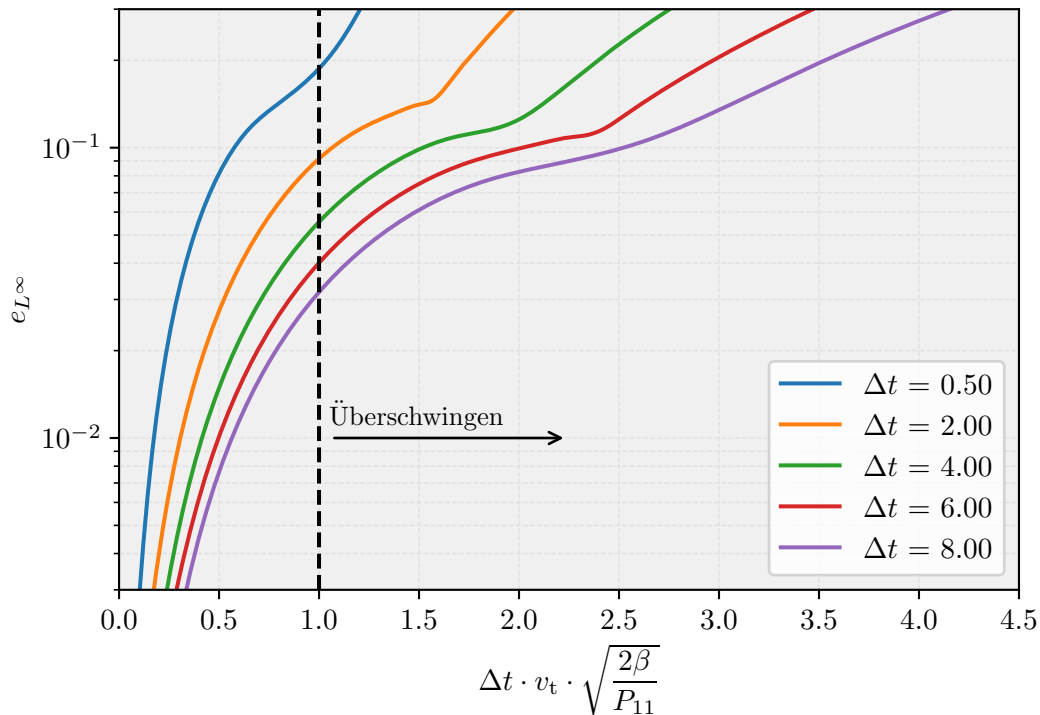


Abbildung 6.10: Über die Zeit gemittelter L^∞ -Fehler zwischen numerischem und analytischem Profil in Abhängigkeit der Vorgabegeschwindigkeit v_t für verschiedene Zeitschrittweiten Δt .

Der Fehler steigt dabei für kleinere Zeitschrittweiten bereits bei niedrigeren überkritischen Werten an, während bei größeren Zeitschrittweiten höhere Grenzwerte erforderlich sind, um ein vergleichbares Fehlverhalten zu beobachten.

In Abbildung 6.11 sind exemplarisch numerische Profile für eine Zeitschrittweite von $\Delta t = 0.5$ dargestellt. Besonders bei kleinen Zeitschrittweiten wird deutlich: Bereits bei geringfügiger Verletzung der kritischen Parameterkombination treten sichtbare Abweichungen auf, was die hohe Sensitivität und die praktische Schärfe des Kriteriums bestätigt. Da die Triebkraft mit $(1 - \varphi^2)$ skaliert, tragen auch die Bereiche der Überschwingung zum überkritischen Verhalten bei und erzeugen sogar negative Triebkräfte, wodurch sich der Profilfehler weiter erhöht. Es macht daher Sinn, die Triebkraft

mit der Bedingung $(1 - \varphi^2) > 0$ künstlich auf den Bereich $\varphi \in [-1, 1]$ zu begrenzen.

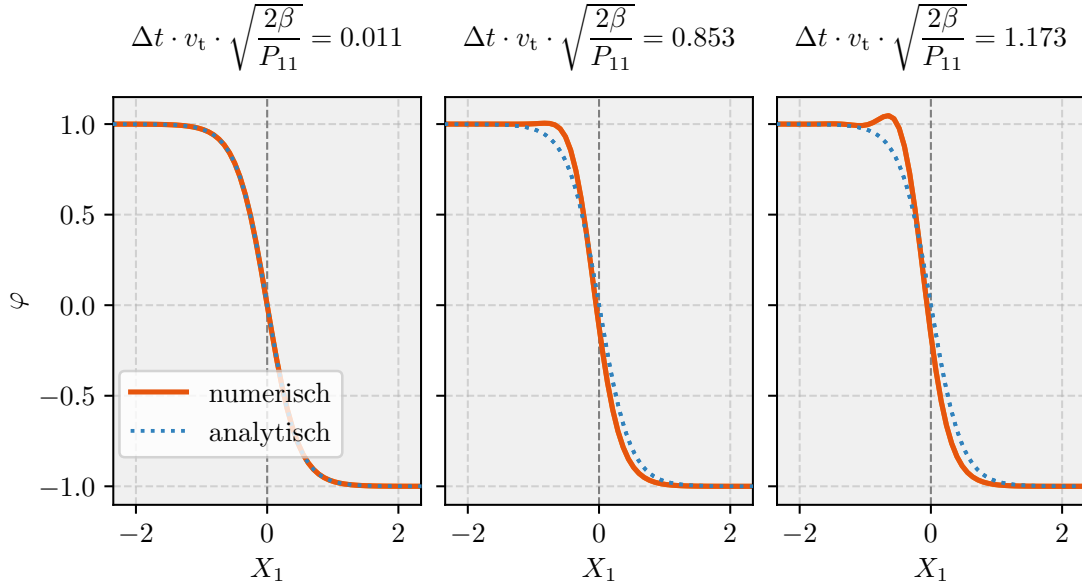


Abbildung 6.11: Vergleich zwischen numerischem und analytischem Profil für die Zeitschrittweite $\Delta t = 0.5$ für verschiedene Vorgabegeschwindigkeiten v_t .

In den nun nachfolgenden, numerischen Beispielen werden die Kriterien zur Auflösung und zur Vermeidung von Überschwingung in der Grenzfläche stets eingehalten.

Parameter zur Steuerung des primären und sekundären Wachstums

Für die nachfolgenden Beispiele wird das zuvor definierte 2D-Netz mit 75×75 Elementen genutzt, siehe Abb. 6.6a. Die Matrix \mathbf{P}_d basiert auf den Parametern $L_c = 0.005$ und $p_s = 0.01$. Wie bereits gezeigt wurde, ist für dieses Netz und die vorliegenden Parameter eine erforderliche Grenzflächenbreite eingehalten. Die zeitliche Diskretisierung erfolgt mit einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 6$. Damit lauten die maximal vorgebbaren Wachstumsgeschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} v_1 &\leq \frac{1}{\Delta t} \cdot \sqrt{\frac{L_c + p_s}{2\beta}} \approx 0.028 \\ v_2 &\leq \frac{1}{\Delta t} \cdot \sqrt{\frac{L_c}{2\beta}} \approx 0.016. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Somit sind die numerische Stabilität und die Profilkonsistenz gewährleistet.

Im ersten Schritt wird das Primärwachstum entlang der Morphologielinie validiert. Zu diesem Zweck wird das Sekundärwachstum durch $v_2 = 0$ zunächst deaktiviert und v_1

variiert. Die resultierenden Topologien sind zum Zeitpunkt $t \approx 100$ in Abb. 6.12 zu sehen. Je größer die Geschwindigkeit v_1 des primären Wachstums ist, desto schneller wird die finale Morphologie erreicht.

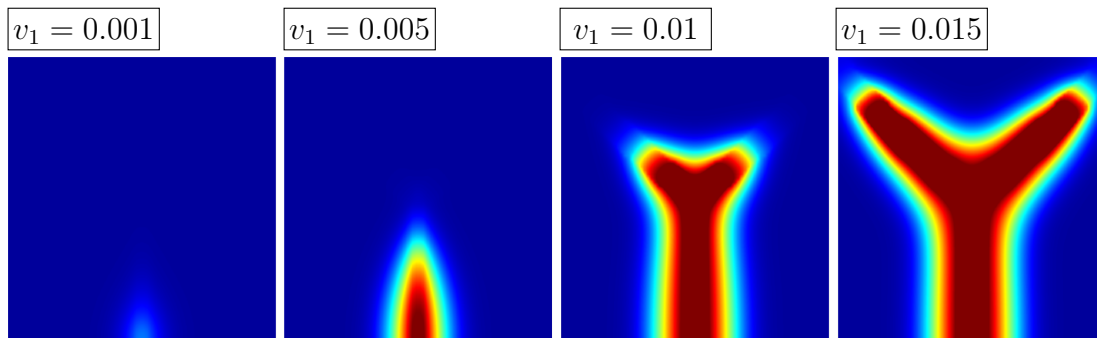


Abbildung 6.12: Entwicklung des Phasenfelds mit verschiedenen Vorgaben der primären Wachstumsgeschwindigkeit v_1 zum Zeitpunkt $t \approx 100$, wobei $\varphi = 1$ durch rote Bereiche markiert ist.

Im zweiten Schritt wird $v_1 = 0.015$ gewählt und die Geschwindigkeit v_2 des sekundären Wachstums variiert. Das hierdurch gesteuerte Sekundärwachstum äußert sich in unterschiedlichen Dicken zum Zeitpunkt $t \approx 100$ in Abb. 6.13.

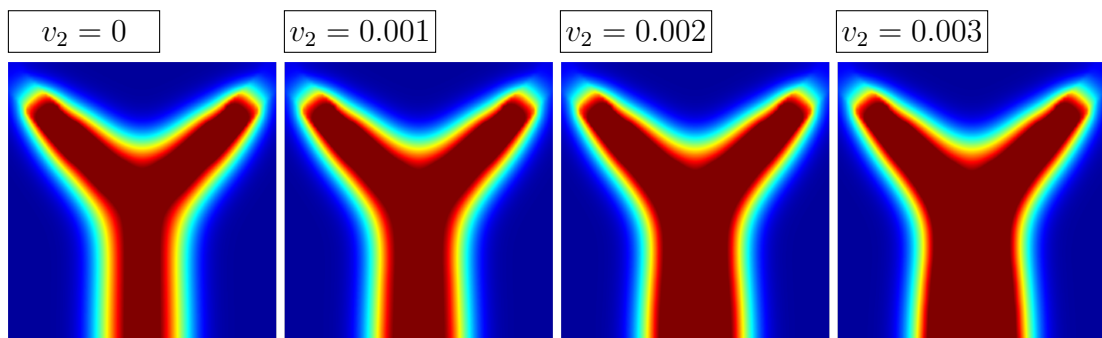


Abbildung 6.13: Entwicklung des Phasenfelds mit verschiedenen Vorgaben der sekundären Wachstumsgeschwindigkeit v_2 zum Zeitpunkt $t \approx 100$, wobei $\varphi = 1$ durch rote Bereiche markiert ist.

6.4 Einfluss der Wachstumsgeschwindigkeiten auf die Abholzigkeit

Der Begriff Abholzigkeit beschreibt in der Forst- und Holzwirtschaft die konische Verjüngung eines Baumstamms. Nach KOLLMANN [52] wird damit die Abnahme des

Stammdurchmessers d (1 m) vom Erdstammabschnitt¹² bis zum Kronenansatz bezeichnet. So gilt z. B. der Stamm eines Nadelbaums als abholzig, wenn die Durchmesserabnahme mehr als 1 cm/m beträgt. Dies ist besonders bei der Verarbeitung von Nadelholz von Bedeutung, da in der Verarbeitung zu Konstruktionsholz vermehrt Fasern schräg angeschnitten werden, was zu einer geringeren Biegefestigkeit der Holzprodukte führt. Daher werden in der Rahmenvereinbarung für den Rohholzhandel in Deutschland Stämme gemäß ihrer Abholzigkeit in verschiedene Qualitäten eingeteilt [22]. Das Kriterium der Abholzigkeit wird hier hingegen zur Kalibrierung der Parameter des primären und sekundären Wachstums genutzt.

Für das Primärwachstum wird in der Literatur oft die Chapman-Richards-Funktion:

$$h(t) = h_{\max} \cdot (1 - e^{-bt})^c \quad (6.19)$$

mit der Maximalhöhe des Baumes h_{\max} , der Primärwachstumsparameter b und der Krümmung bzw. Wendepunktlage c verwendet [84, 89]. Dadurch wird die Abnahme des Höhenwachstum mit zunehmendem Alter berücksichtigt.

Der gleiche Ansatz wird mit $c = 1$ nach PRETZSCH [84] auch für das Dickenwachstum auf Brusthöhe $h = 1.3$ m vorgeschlagen:

$$d_{1.3}(t) = d_{\max} \cdot (1 - e^{-kt}) \quad (6.20)$$

mit dem Maximaldurchmesser des Baumes d_{\max} und dem Sekundärwachstumsparameter k . Die Parameter in Gl. (6.19) und Gl. (6.20) sind von der jeweiligen Baumart abhängig. Im Folgenden wird ausschließlich die Baumart Rotbuche (*Fagus sylvatica*) betrachtet. Dazu liegen Wachstumsdatenreihen von UTSCHIG & KÜSTERS [107] vor. Insgesamt liegen 16 systematische Aufnahmen in Waldparzellen aus dem Zeitraum von 1871 bis 2002 vor, die vollständige Einzelbaumdaten zur Höhenentwicklung $h(t)$ sowie zum Brusthöhendurchmesser $d_{1.3}(t)$ enthalten. Zur Bestimmung geeigneter Wachstumsfunktionen werden diese Daten genutzt, um mittels des Python-Moduls `scipy.optimize.curve_fit` die Parameter der Wachstumskurven zu kalibrieren:

$$\begin{aligned} b &\approx 0.02, & c &\approx 1.42 \\ k &\approx 0.01. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Es handelt sich dabei um ein Standardverfahren der nichtlinearen Least-Square-Methode. Aus UTSCHIG & KÜSTERS [107] Abb.2 ist zudem eine durchschnittliche Maximalhöhe $h_{\max} \approx 40$ m ersichtlich. Für den durchschnittlichen maximalen

¹²Als Erdstammabschnitt bezeichnet man den unteren Abschnitt eines Baumstammes, der sich unmittelbar über dem Wurzelansatz befindet [55].

Brusthöhendurchmesser wird auf Basis der vorhandenen Daten $d_{\max} = 85 \text{ cm}$ angenommen. Hierbei sei angemerkt, dass in Einzelfällen gerade bei freistehenden Buchen auch deutlich größere Durchmesser entstehen können.

Die resultierenden Wachstumskurven sind für $h(t)$ in Abb.6.14b und für $d_{1.3}(t)$ in Abb.6.14d auf Brusthöhe aufgetragen, aus der sich direkt das Jahresringmuster in Abb.6.14c ergibt.

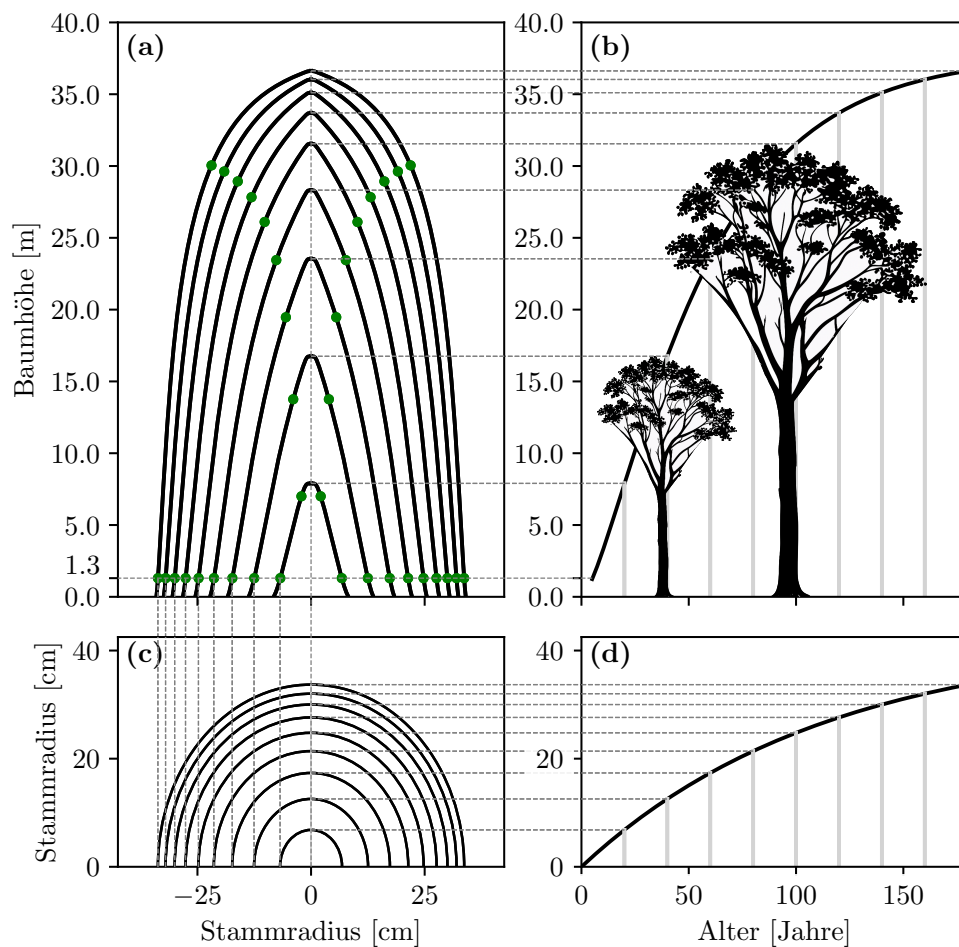


Abbildung 6.14: Zusammenhang zwischen Alter, Baumhöhe und Stammform einer Buche nach PRETZSCH [84]. **(a)** Modellierte Stammformen für verschiedene Altersstufen und Messstellen der Abholzigkeit. **(b)** Höhenentwicklung nach der Chapman-Richards-Funktion. **(c)** Stammquerschnitte in Brusthöhe. **(d)** Radiusentwicklung in Brusthöhe gemäß der sekundären Wachstumsfunktion-Funktion.

Aus Gl. (6.19) lässt sich der Zeitpunkt bestimmen, an welchem die Höhe h durch

Primärwachstum erreicht wird:

$$t_h(h) = -\frac{1}{b} \cdot \ln \left(1 - \left(\frac{h}{h_{\max}} \right)^{1/c} \right). \quad (6.22)$$

Nimmt man an, dass das Sekundärwachstum nicht nur auf Brusthöhe, sondern auch am restlichen Stamm gemäß Gl. (6.20) abläuft, lässt sich eine höhenabhängige Zeitachse definieren, welche berücksichtigt, dass der Baum nur dann in Dickenrichtung wächst, wenn die Höhe h erreicht wird:

$$\tau(h) = t - t_h(h). \quad (6.23)$$

Wird die Zeitachse aus Gl. (6.23) in Gl. (6.20) verwendet, ergibt sich unter der Annahme einer Starthöhe von $z_0 = 1.3$ m eine Formfunktion für den Stamm:

$$d(z, t) = \Lambda \cdot d_{\max} \cdot \left(1 - e^{-k \cdot (t - t_h(z) + t_h(z_0))} \right), \quad (6.24)$$

für $t \geq t_h(h) - t_h(z_0)$. Diese Formfunktion ist in Abb. 6.14a dargestellt. Mit einer geometrische Verjüngung Λ lässt sich dabei die Abholzigkeit im betrachteten Zeitraum t mit dem Verhältnis der aktuellen Gesamthöhe $H(t)$ und der vertikalen Position im Stamm h einstellen:

$$\Lambda = \left[1 - \left(\frac{z}{H(t)} \right)^r \right]^{1/s}, \quad (6.25)$$

wobei r die Abholzigkeit im Stammbereich dominiert ($r = 1$ stark abholzig, $r = 2$ weniger abholzig, etc.) und s den Verlauf im Kronenbereich kontrolliert ($s < 1$ spitz, $s > 1$ stumpf).

Das Erntealter einer Buche im Wirtschaftswald beträgt etwa 120 Jahre [71]. In diesem Alter wird i. d. R. eine maximale Abholzigkeit von unter 1 cm/m beobachtet. So stellt die Studie von RAIS ET AL. [87] im Alter von 125 Jahren im Mittel eine Abholzigkeit von 9.3 ± 3.2 mm/m fest. Die Formfunktion Gl. (6.24) lässt sich mit den Parametern $r = 4$ und $s = 5$ so einstellen, dass diese Abholzigkeit tatsächlich mit etwa 120 Jahren erreicht wird, vgl. Abb. 6.15. Hierbei wird für die obere Messstelle der Abholzigkeit die durchschnittliche Höhenausdehnung der Krone aus Daten von [106] berücksichtigt, siehe Markierungen des Kronenansatzes in Abb. 6.14a. Als untere Messstelle wird wie in RAIS ET AL. [87] die Brusthöhe verwendet.

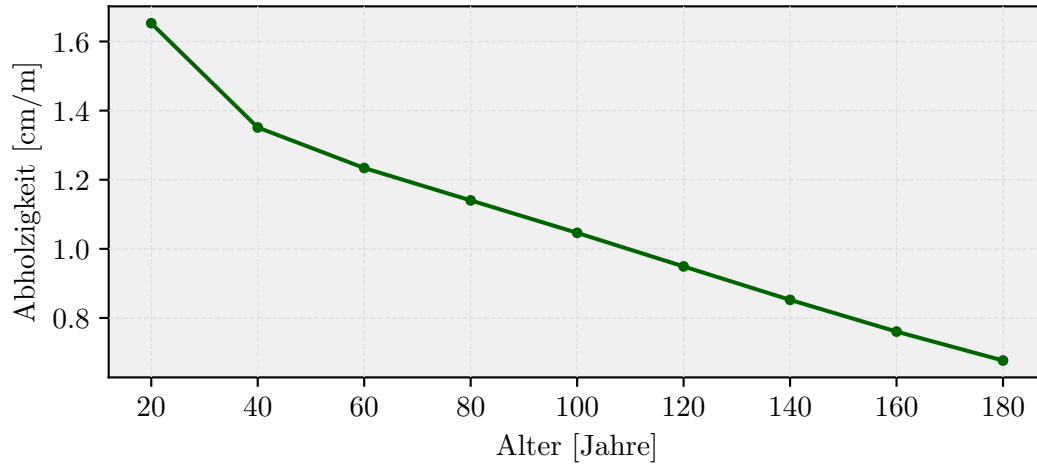


Abbildung 6.15: Verlauf der Abholzigkeit in Abhängigkeit vom Baumalter für die Formfunktion aus Gl. (6.24) mit den Parametern $r = 4$ und $s = 5$.

Zur Vereinfachung des numerischen Modells wird die sekundäre Wachstumsfunktion durch eine bilineare Funktion approximiert, vgl. Abb. 6.16. Diese berücksichtigt ein schnelleres Dickenwachstum in der juvenalen Phase bis zum Alter von 25 Jahren. So lässt sich die sekundäre Wachstumsgeschwindigkeit unabhängig von der Wuchshöhe definieren. Prinzipiell ließe sich die Approximation durch weitere Zeitpunkte genauer polygonalisieren.

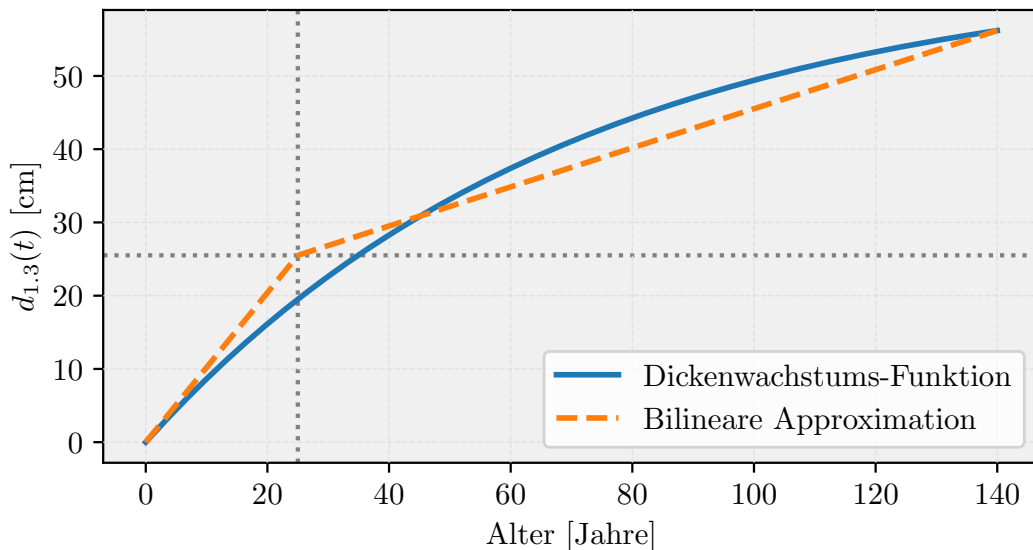


Abbildung 6.16: Bilineare Form der sekundären Wachstumsfunktion.

Um die Morphologielinie lässt sich nun ein Bereich mit dem Radius d_c spannen, in welchem die erhöhte juvenale Wachstumsgeschwindigkeit greift. Für die oben gewählten Parameter ergeben sich die sekundären Wachstumsgeschwindigkeiten $v_2^j = 1.02 \text{ cm/Wachstumsperiode}$ ($1.7 \cdot 10^{-3} \text{ m/Wachstumsmonat}$) und $v_2 = 0.27 \text{ cm/Wachstumsperiode}$ ($4.45 \cdot 10^{-4} \text{ m/Wachstumsmonat}$).

Zur Überprüfung der Abholzigkeit im Modell wird die Simulation gemäß Abb. 6.17 durchgeführt. Daraus ergeben sich unter Berücksichtigung der Diskretisierung und der Zeitschrittweite Δt die folgenden maximal vorgebbaren Wachstumsgeschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} v_1 &\leq \frac{1}{\Delta t} \cdot \sqrt{\frac{L_c + p_s}{2\beta}} \approx 0.98, \\ v_2 &\leq \frac{1}{\Delta t} \cdot \sqrt{\frac{L_c}{2\beta}} \approx 0.75, \end{aligned} \quad (6.26)$$

welche hier eingehalten sind.

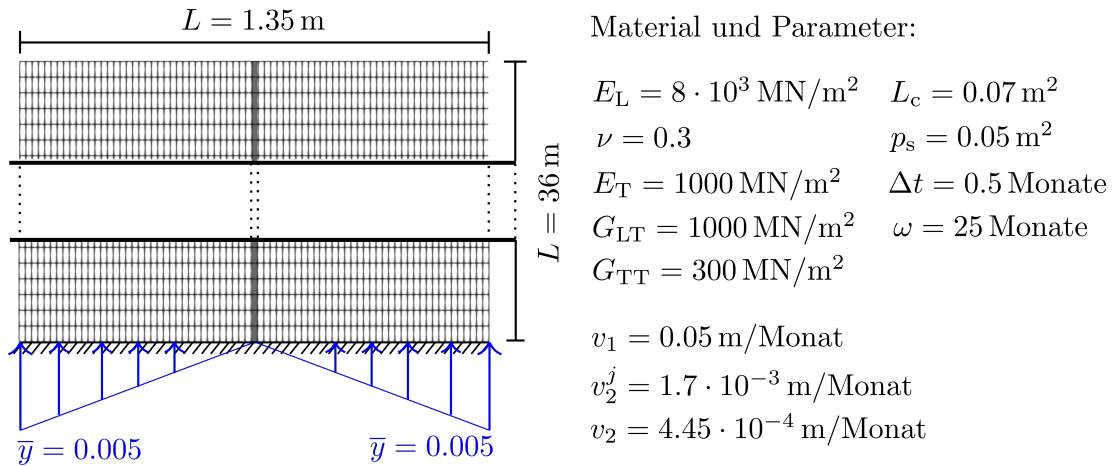


Abbildung 6.17: 2D Simulationsgebiet mit Morphologielinie und 125×1250 Elementen zur Diskretisierung. Entlang der Morphologielinie wird ein 1.3 m hoher Spross initialisiert.

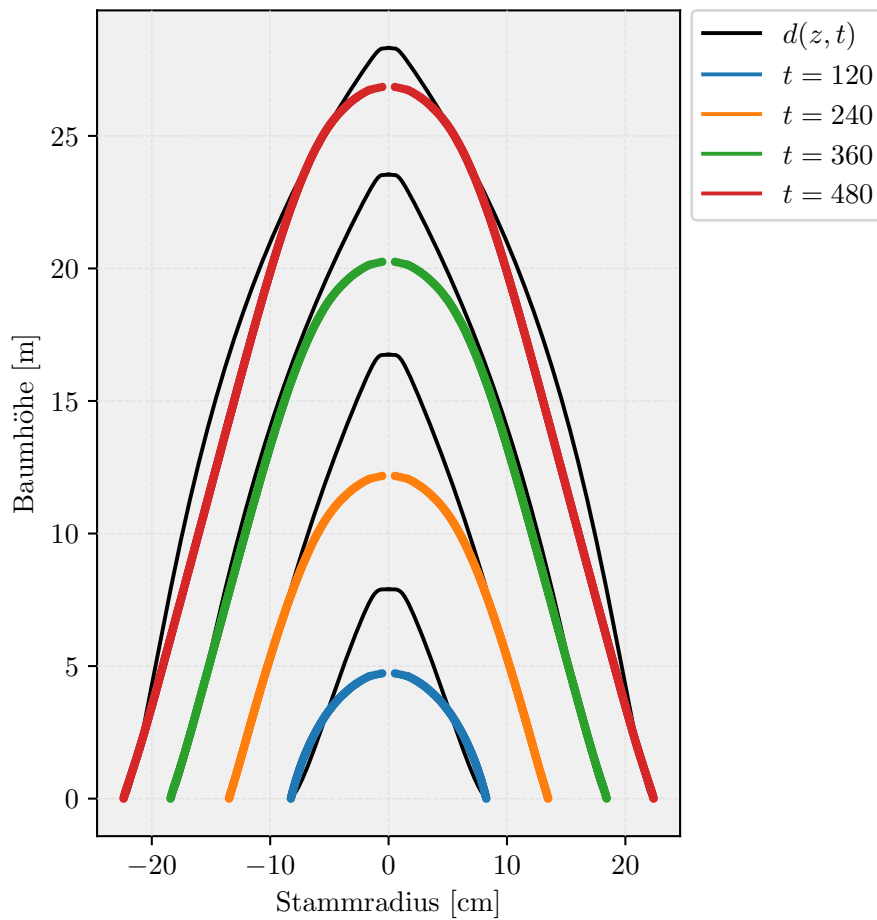


Abbildung 6.18: Kontur der Grenzflächen (bei $\varphi = 0.5$) im Vergleich zur Formfunktion aus Gl. (6.24).

Das Beispiel zeigt, dass sich das Phasenfeldmodell mit den oben angegebenen Zielgeschwindigkeiten in der Triebkraft auf die gewünschte Formfunktion einstellen lässt. Mithilfe der linear ansteigenden Neumann-Randbedingung \bar{y} lässt sich die Phasenfeldtopologie so beeinflussen, dass sich mit zunehmendem Alter ein immer stärkerer Wurzelanlauf ausbildet.

6.5 Validierung der Wachstumsspannungen anhand analytischer und numerischer 1D-Modelle

Die Validierung des Phasenfeldmodells zur Abbildung von Wachstumsspannungen erfolgt durch den Vergleich mit den analytischen Modellen sowie dem 1D-Akkumulationsmodell, vgl. Kapitel 4.4 – 4.6. Die Geometrie setzt hierfür einen geraden Stamm sowie Rotationssymmetrie voraus. Externe Lasten sowie Eigengewicht werden nicht berücksichtigt. Wachstumsspannungen werden auf Brusthöhe mit den Ergebnissen der Phasenfeldsimulation in Richtung der horizontalen ξ -Achse verglichen, siehe Abb. 6.19 und Abb. 6.20. Diese Achse ist durch den Außenradius r_a zum Zeitpunkt t der Auswertung normiert.

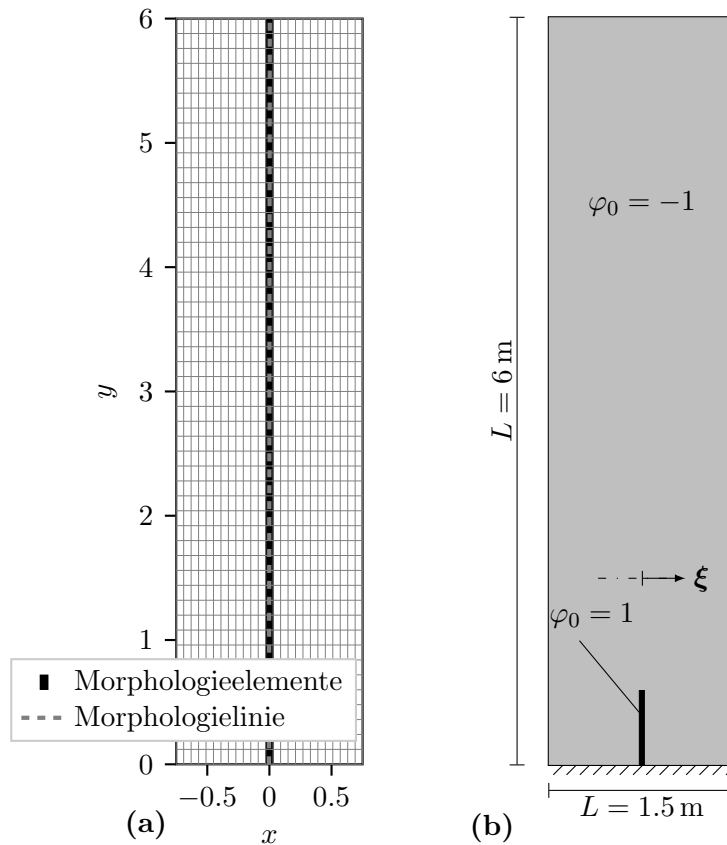


Abbildung 6.19: (a) Diskretisierung und Morphologielinie im 2D-Simulationsraum. (b) Die ξ -Achse wird auf Brusthöhe zur Abbildung der Ergebnisverläufe verwendet.

Für die initiale Phasenfeldgeometrie im 2D- und 3D-Modell wird ein Spross mit einem Meter Länge und dem Radius $0.04 r_a$ verwendet. Als genetisch veranlagte Axialkontraktion wird der aufgerundete Mittelwert aus Tab. 4.4 zu $\bar{\varepsilon}_0 = 3 \cdot 10^{-4}$ angesetzt.

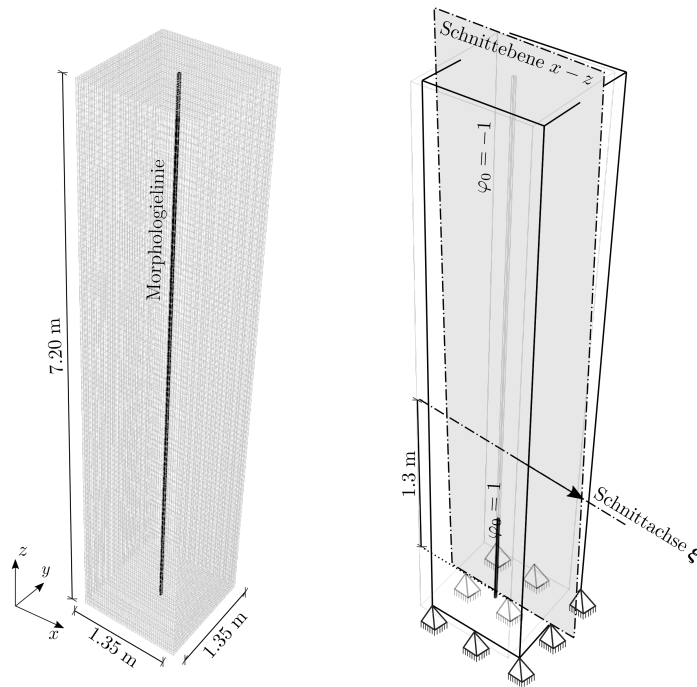


Abbildung 6.20: Diskretisierung und Morphologielinie im 3D-Simulationsraum. Die ξ -Achse in der Schnittebene $x - z$ wird auf Brusthöhe zur Abbildung der Ergebnisverläufe verwendet.

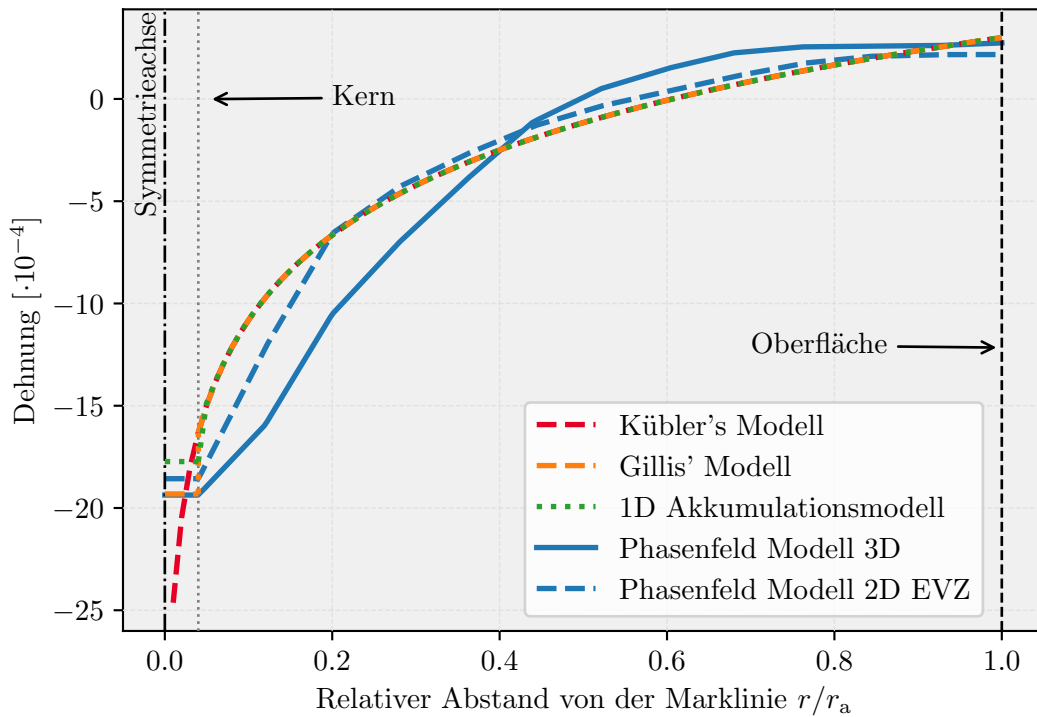


Abbildung 6.21: Vergleich der Modelle unter Berücksichtigung eines Kerndurchmessers von $0,04 r_a$.

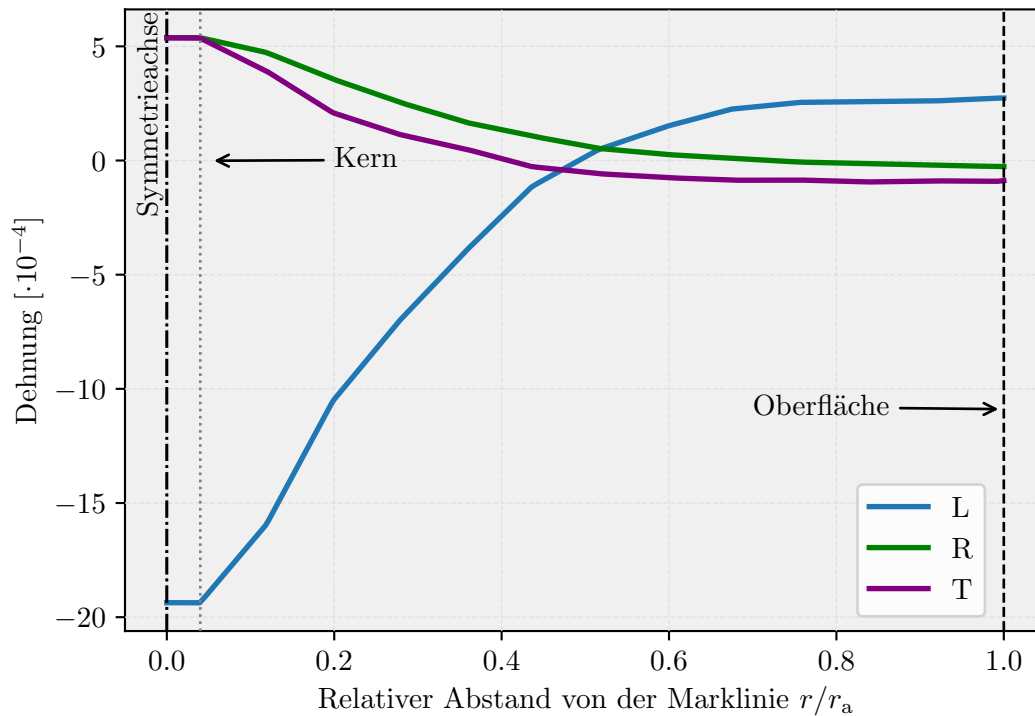


Abbildung 6.22: Verlauf der Dehnungen in longitudinaler, radialer sowie tangentialer Richtung im 3D-Modell.

Die Ergebnisverläufe der Eigendehnungen in Abb. 6.21 zeigen qualitative Übereinstimmung des Phasenfeldmodells zum Verlauf der Vergleichsmodelle, wobei Abweichungen beim 3D-Modell stärker ausgeprägt sind als im 2D-Modell. Das 3D-Modell zeigt einen flacher werdenden Verlauf der Druckdehnung in Richtung der Marklinie (Symmetrieachse), was auf den komplexeren 3D Dehnungszustand rückführbar ist. So treten im 3D-Modell auch Dehnungen in radialer sowie tangentialer Richtung auf, vgl. Abb. 6.22. Diese sind im 2D-Modell durch den ebenen Verzerrungszustand eingeschränkt, vgl. Kap 5.10. Die Kerndehnung des 3D-Modells zeigt eine gute Übereinstimmung mit dem Modell von Gillis.

Das 2D-Modell ist zwar hinsichtlich Modellierungsaufwand und Rechenzeit effizient, kann jedoch komplexe Geometrien und Belastungsszenarien nicht abbilden, vgl. Tab. 5.2. Aus diesem Grund wird im Folgenden nur noch das 3D-Modell verwendet.

6.6 Wachstumsspannungen unter dem Einfluss externer Lasten

Das folgende 3D-Beispiel simuliert das Wachstum einer geraden, vertikalen Stammgeometrie unter dem Einfluss eines zeitabhängigen, externen Lastszenarios. Die Untersuchung fokussiert sich auf die Entwicklung der axialen Spannung einer Rotbuche im Zeitraum von 100 Jahren, welche sich hier aus Wachstums- und Biegespannungen zusammensetzen wird. Die Ergebnisse werden auch hinsichtlich der Holzfestigkeit im fasergesättigten Zustand bewertet. Dafür wird die Druckfestigkeit nach LOSKE [63] mit $f_c = 32 \text{ N/mm}^2$ herangezogen. Da die Zugfestigkeit der Rotbuche die Druckfestigkeit deutlich übersteigt, ist eine Bewertung der elastischen Tragfähigkeit über die Druckfestigkeit gegeben, vgl. LOSKE [63].

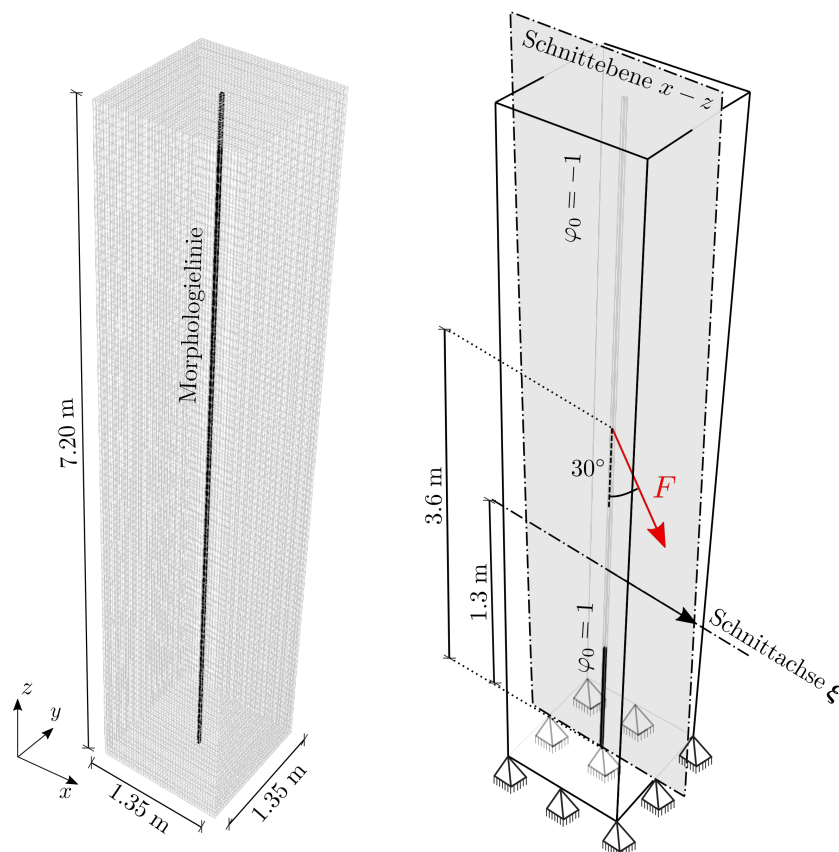


Abbildung 6.23: Links: Abmessungen und Diskretisierung des 3D-Simulationsraums sowie Darstellung der Morphologielinie. Rechts: Anfangs- und Randvorgaben sowie die Schnittachse ξ (in $x - z$ -Ebene) zur Darstellung der Spannungsverläufe.

Zu Beginn der Simulation ($t = 0$) wird ein Spross der Länge 1 m über $\varphi = 1$ initialisiert,

vgl. Abb. 6.23 (rechts). Der sonstige Simulationsbereich mit den Abmessungen $1.35 \text{ m} \times 1.35 \text{ m} \times 7.2 \text{ m}$ repräsentiert mit $\varphi = -1$ zunächst leeren Raum. Spannungszustände werden in Brusthöhe $z = 1.3 \text{ m}$ durch die Achse ξ dargestellt.

Das Finite-Elemente-Netz umfasst ca. 200.000 Elemente mit einer Größe von $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} \times 7.5 \text{ cm}$. Davon definieren 96 Elemente die Morphologielinie, siehe Abb. 6.23 links. Im Modell liegen ca. 800.000 Freiheitsgrade vor.

Die Baumkrone liegt außerhalb des Simulationsgebietes und dient in Abb. 6.25 lediglich zur Illustration. Eigengewichte werden im vorliegenden Beispiel vernachlässigt, um lediglich Effekte aus Wachstumsdehnung und Biegebelastung zu beobachten.

Die elastischen Materialkennwerte für das Modell sind in Tab. 6.1 aufgeführt. Für die genetisch veranlagte Axialkontraktion wird $\bar{\varepsilon} = 3 \cdot 10^{-4}$ verwendet. Die zuvor kalibrierten Parameter des Modells sind Tab. 6.2 zu entnehmen und erfüllen das Kriterium aus Gl. (6.15) an die Parameterkombination der Zeitschrittweite, der vorgegebenen primären und sekundären Wachstumsgeschwindigkeit sowie der Grenzflächenbreite:

$$\begin{aligned} \Delta t \cdot v_1 \cdot \sqrt{\frac{2\beta}{L_c + p_s}} &\approx 0.61 \leq 1, \\ \Delta t \cdot v_2^j \cdot \sqrt{\frac{2\beta}{L_c}} &\approx 0.03 \leq 1. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Tabelle 6.1: Elastische Materialkennwerte (gerundet) für grünes Holz der Rotbuche nach HEARMON [38].

Parameter	Wert	Einheit
E_L	$8.00 \cdot 10^3$	MN/m^2
ν	0.30	1
E_T	1000	MN/m^2
G_{LT}	1000	MN/m^2
G_{TT}	300	MN/m^2

Tabelle 6.2: Modellparameter für die 3D-Simulation.

Parameter	Wert	Einheit
L_c	0.07	m^2
p_s	0.05	m^2
v_1	0.05	m/Monat
v_2^j	$1.7 \cdot 10^{-3}$	m/Monat
v_2	$4.45 \cdot 10^{-4}$	m/Monat
Δt	6	Monate
ω	25	Monate
t_c	25	Monate

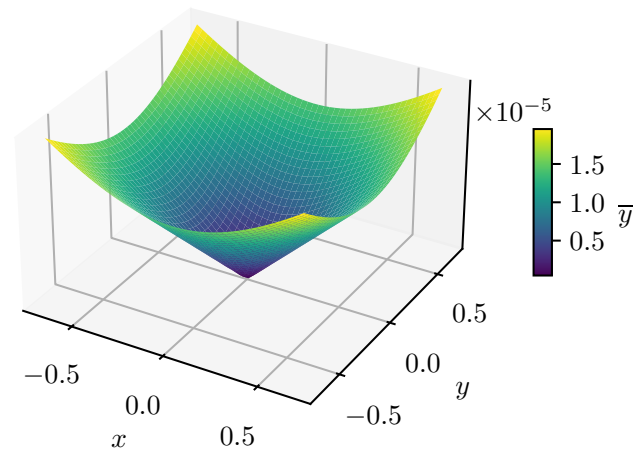


Abbildung 6.24: Neumann-Randbedingung des Phasenfelds.

Zur Modellierung des Wurzelanlaufs werden am unteren Rand des Simulationsgebietes sämtliche Verschiebungen gelagert und die natürliche Randbedingung gemäß Abb. 6.24 aufgebracht.

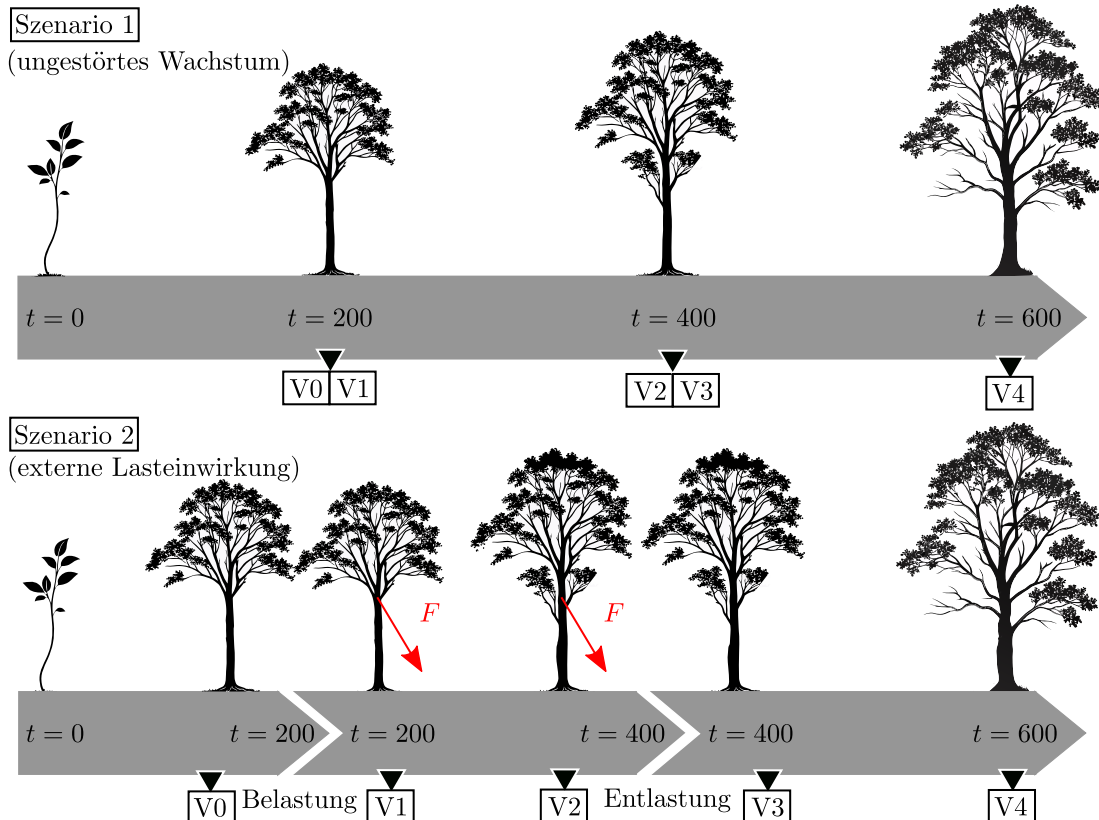


Abbildung 6.25: Wachstumsszenarien im zeitlichen Verlauf der Wachstumsmonate t mit markierten Beobachtungspunkten V0–V4 zur Analyse des Spannungsverhaltens.

Es werden zwei Szenarien untersucht, vgl. auch Abb. 6.25:

- **Szenario 1:** Ungestörtes Wachstum über 100 Wachstumsperioden ohne äußere Krafteinwirkung.
- **Szenario 2:** Ab der 34. Wachstumsperiode wird eine exzentrische externe Last aufgebracht, die den Stamm u. a. auf Biegung beansprucht, siehe Abb. 6.25. Diese wirkt über 33 Wachstumsperioden und wird anschließend entfernt. Untersucht werden zwei Lastintensitäten:
 1. **Lastfall 1:** $F = 12.5 \text{ kN}$
 2. **Lastfall 2:** $F = 50 \text{ kN}$

Die Entwicklung des Phasenfeldparameters $\varphi > 0.5$ zu charakteristischen Zeitpunkten beider Szenarien ist in Abb. 6.26 dargestellt. In Abb. 6.27 sind die Deformationen des Stammes unter Einfluss der Lasten bei Beobachtungspunkt V2 abgebildet.

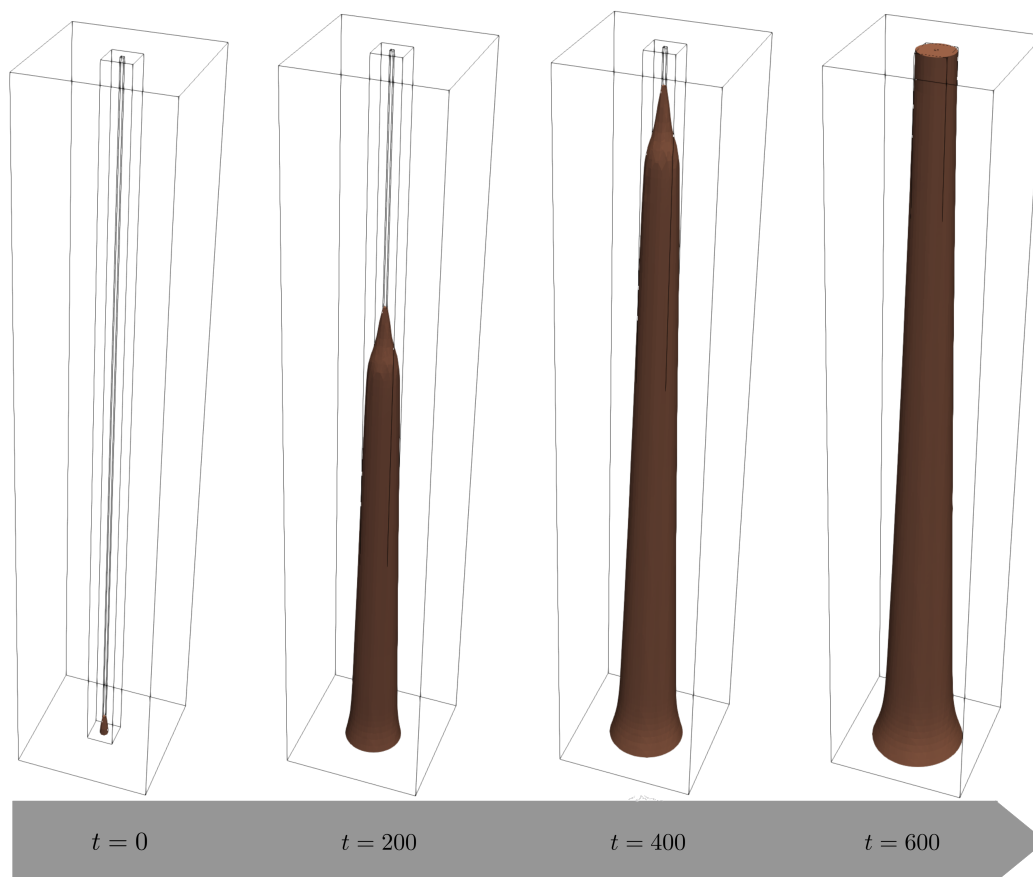


Abbildung 6.26: Phasenfeldparameterentwicklung für $\varphi > 0.5$ im zeitlichen Verlauf der Wachstumsmonate t .

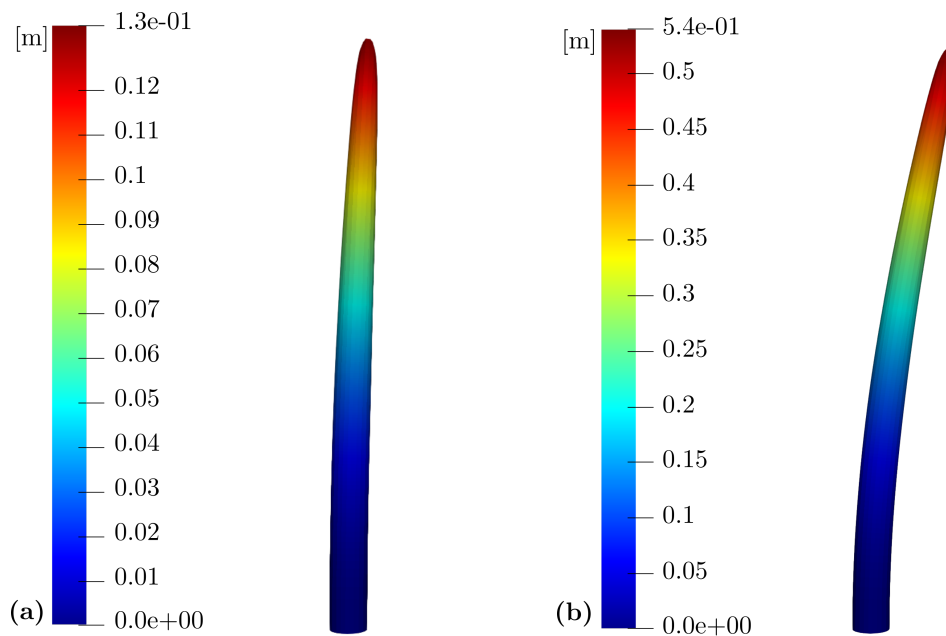


Abbildung 6.27: Deformation des Baumes unter den angegebenen Lastfällen zum Zeitpunkt $t = 200$. (a) Lastfall 1: $F = 12.5 \text{ kN}$. (b) Lastfall 2: $F = 60 \text{ kN}$.

Szenario 1 - ungestörtes Wachstum

Die Spannungsverteilungen an den Beobachtungspunkten V0/V1 und V2/V3 zeigen eine ähnliche Charakteristik, siehe Abb. 6.28.

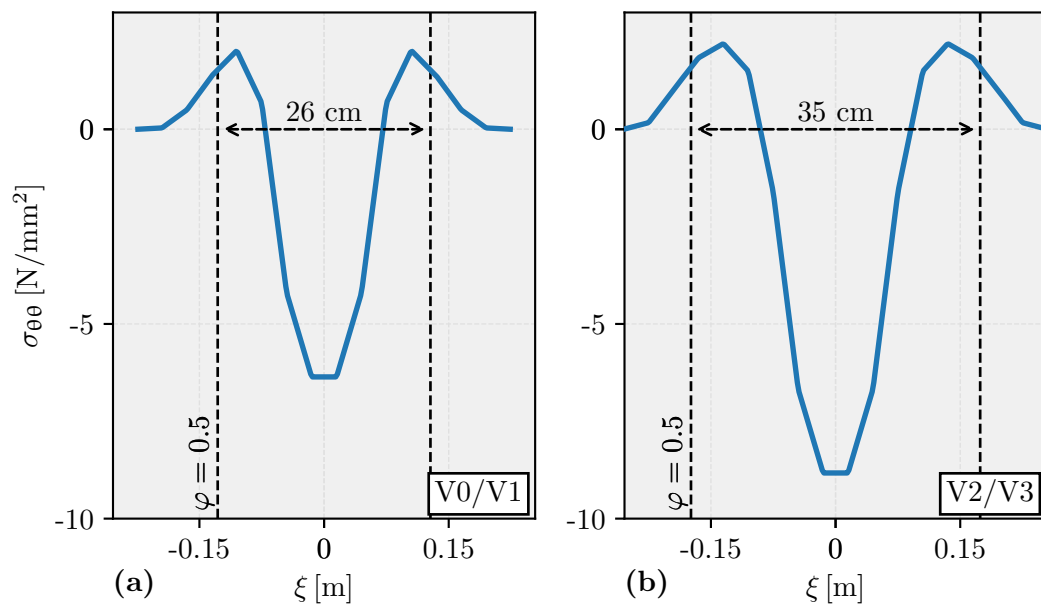


Abbildung 6.28: Spannungsverteilung im Stammquerschnitt auf Brusthöhe für das Szenario 1: (a) zum Zeitpunkt $t = 200$, (b) zum Zeitpunkt $t = 400$.

Zwischen den Beobachtungspunkten V0/V1 und V2/V3 liegen 33 Wachstumsperioden, in welchen sich der Stammdurchmesser um ca. 9 cm vergrößert. In den äußeren Schichten entstehen Zugspannungen, während sich im Kernbereich zunehmend axiale Druckspannungen aufbauen. Am äußeren Rand des Querschnitts wird im Phasenübergang gemäß Gl. (5.1) die Steifigkeit der Materialphase reduziert, so dass sich die axiale Zugspannung zwangsläufig dem Nullniveau nähert.

Szenario 2 - externe Lasteinwirkung - Belastung

Der Spannungszustand im Querschnitt zum Beobachtungspunkt V0 und nach der Belastungsphase V1 ist in Abb. 6.29 dargestellt. Die über die ersten 33 Wachstumsperioden aufgebauten Wachstumsspannungen überlagern sich hierbei mit den durch die äußere Last hervorgerufenen mechanischen Spannungen, vgl. Abb. 6.28. Die Überlagerung mit den Wachstumsspannungen führt dazu, dass auf der Biegezugseite betragsmäßig größere Spannungen als auf der Biegedruckseite entstehen. Dabei entspricht der Unterschied den Zugwachstumsspannungen an der Oberfläche.

Während der folgenden 33 Wachstumsperioden ($\Delta t = 200$) nehmen die Druckspannungen auf der Biegedruckseite kontinuierlich ab, bis infolge der fortschreitenden Wachstumsspannungsakkumulation erneut Zugspannungen erreicht werden, siehe Abb. 6.30(a). Gleichzeitig steigen die Druckspannungen im Kernbereich weiter an, bis sich erneut ein charakteristischer Spannungsverlauf einstellt, der dem eines unbelasteten Stammes ähnelt, vgl. Abb. 6.30(b). Der Betrag der Spannungsumverteilung innerhalb der ersten Wachstumsperiode ($t = 210$) entspricht in etwa den Zugspannungen, die im unbelasteten Fall an der Oberfläche auftreten.

Auch im Fall einer höheren Belastung (Lastfall 2) stellen sich nach ausreichender Wachstumszeit erneut Zugspannungen an der Stammoberfläche ein. Gleichzeitig steigen die Druckspannungen im Inneren um einen Betrag, der etwa den Zugspannungen an der Oberfläche im unbelasteten Fall entspricht. Obwohl die Druckfestigkeit f_c zum Zeitpunkt der Lastaufbringung noch eingehalten wurde, überschreiten die Spannungen in den folgenden Wachstumsperioden diesen Wert. Der Zeitraum von $t = 200$ reicht hier nicht aus, um den charakteristischen Verlauf eines unbelasteten Stammes zu erreichen.

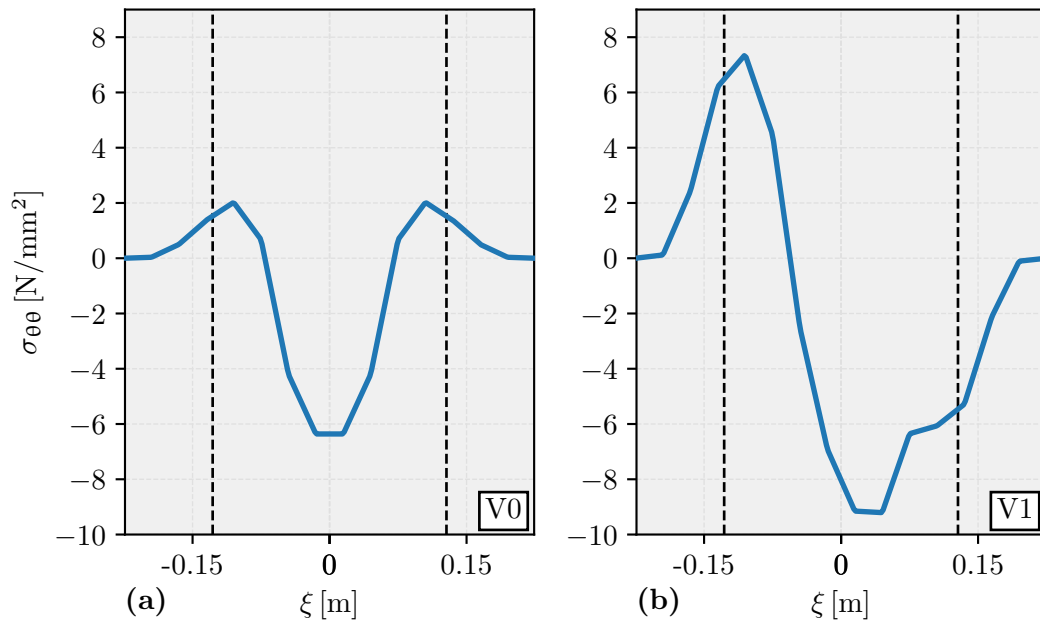


Abbildung 6.29: Spannungverteilung im Stammquerschnitt auf Brusthöhe für das Szenario 2, Lastfall 1: (a) zum Zeitpunkt $t = 200$ vor der Belastung, (b) zum Zeitpunkt $t = 200$ nach der Belastung.

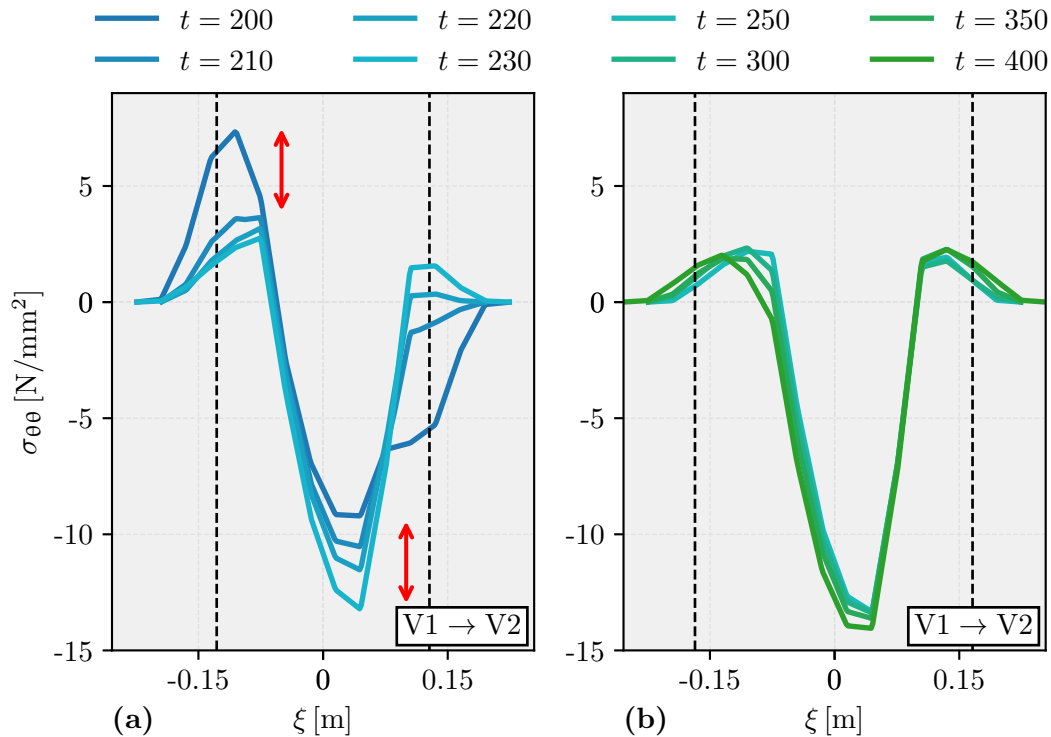


Abbildung 6.30: Spannungverteilung im Stammquerschnitt auf Brusthöhe für Szenario 2, Lastfall 1: (a) zum Zeitpunkt $t = 200$ nach der Belastung, (b) zum Zeitpunkt $t = 400$ vor der Entlastung.

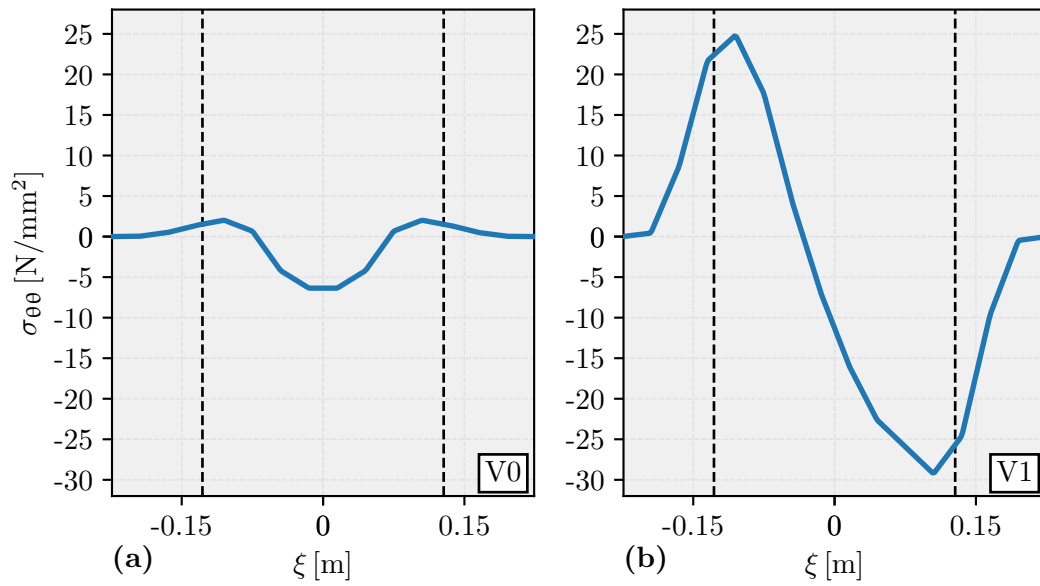


Abbildung 6.31: Spannungsverteilung im Stammquerschnitt auf Brusthöhe für das Szenario 2, Lastfall 2: (a) zum Zeitpunkt $t = 200$ vor der Belastung, (b) zum Zeitpunkt $t = 200$ nach der Belastung.

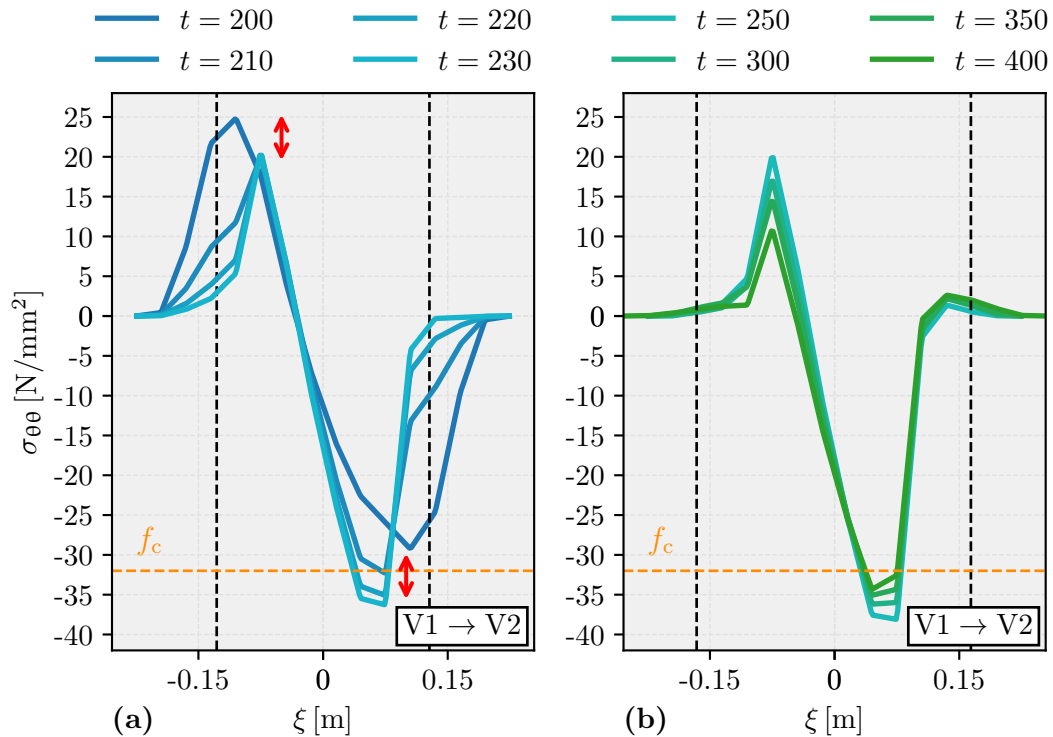


Abbildung 6.32: Spannungsverteilung im Stammquerschnitt auf Brusthöhe für Szenario 2, Lastfall 2: (a) zum Zeitpunkt $t = 200$ nach der Belastung, (b) zum Zeitpunkt $t = 400$ vor der Entlastung.

Szenario 2 - externe Lasteinwirkung - Entlastung

Wird zum Beobachtungspunkt V3 entlastet, stellt man eine bleibende Deformation entgegen der Lastrichtung fest, vgl. Abb. 6.33. Dies bedeutet, dass sich durch den Wachstumsprozess ein innerer Spannungszustand manifestiert hat, welcher sich nun wie eine inverse Belastung repräsentiert und mit der Intensität der externen Last korreliert. Durch die zwischenzeitliche Zunahme des Stammdurchmessers um etwa 9 cm bewirkt dieser innere, manifestierte Spannungszustand geringe Deformationen als dies durch die externe Last zum Zeitpunkt V1 der Fall war.

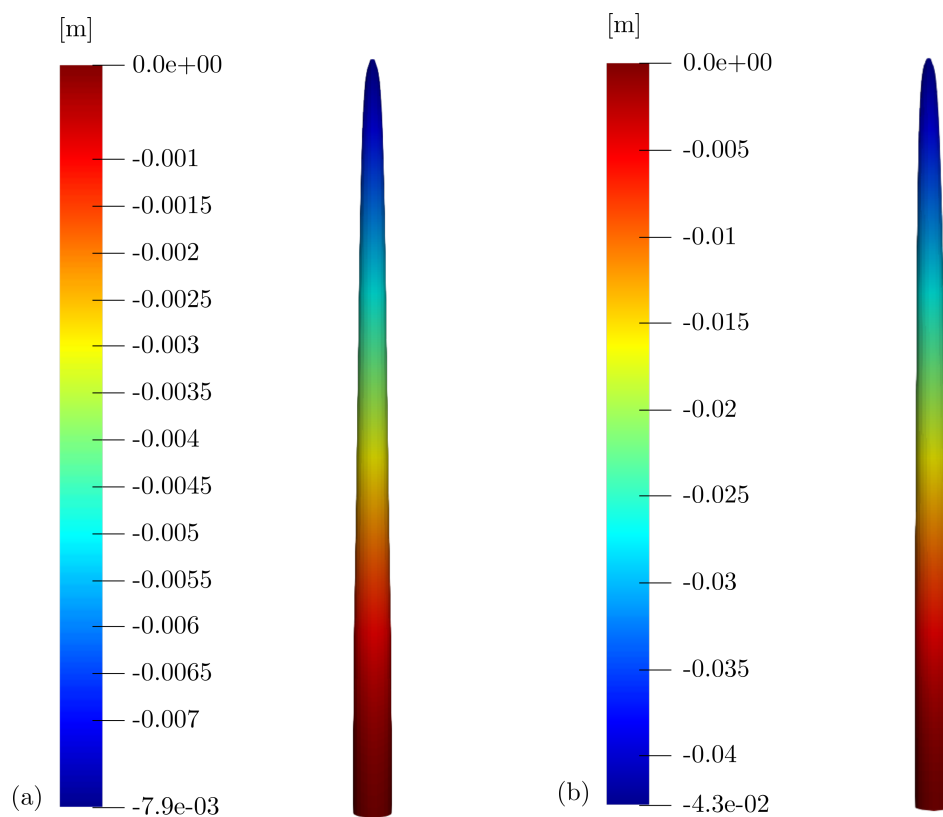


Abbildung 6.33: Resultierende Deformation des Baumstammes nach der Entlastung zum Zeitpunkt $t = 400$. (a) Lastfall 1: $F = 12.5 \text{ kN} \rightarrow 0$. (b) Lastfall 2: $F = 60 \text{ kN} \rightarrow 0$.

An der Stammoberfläche betragen die Spannungsänderungen infolge der Entlastung bei $t = 400$ nur noch etwa 10% der Spannungsänderung zum Zeitpunkt der Lastaufbringung bei $t = 200$, vgl. Abb. 6.29(b) und Abb. 6.31(b).

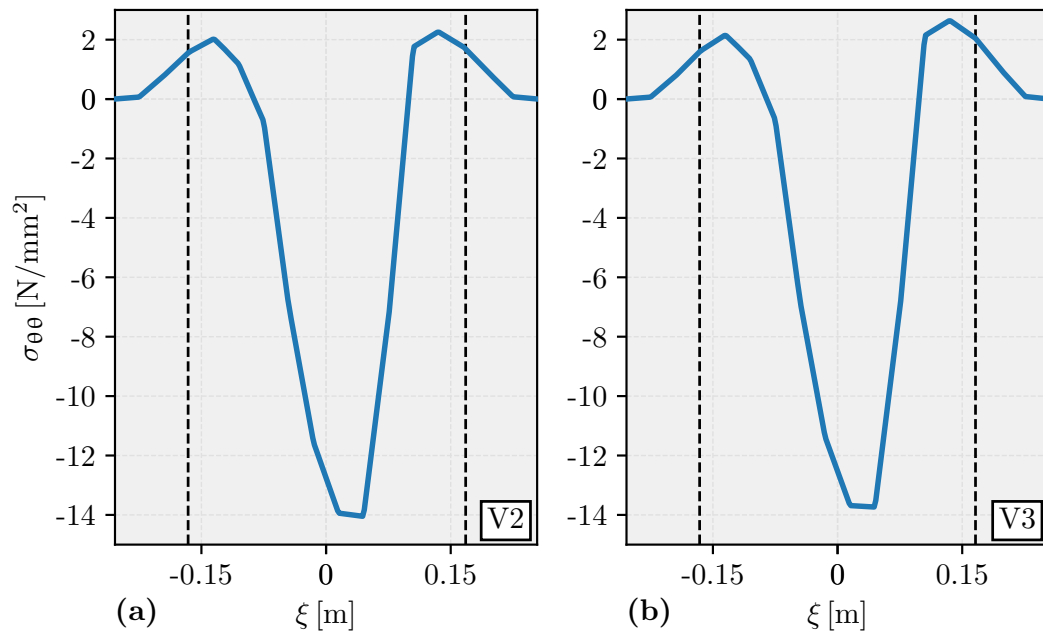


Abbildung 6.34: Spannungsverteilung im Stammquerschnitt auf Brusthöhe für Szenario 2, Lastfall 1: (a) zum Zeitpunkt $t = 400$ vor der Entlastung, (b) zum Zeitpunkt $t = 400$ nach der Entlastung.

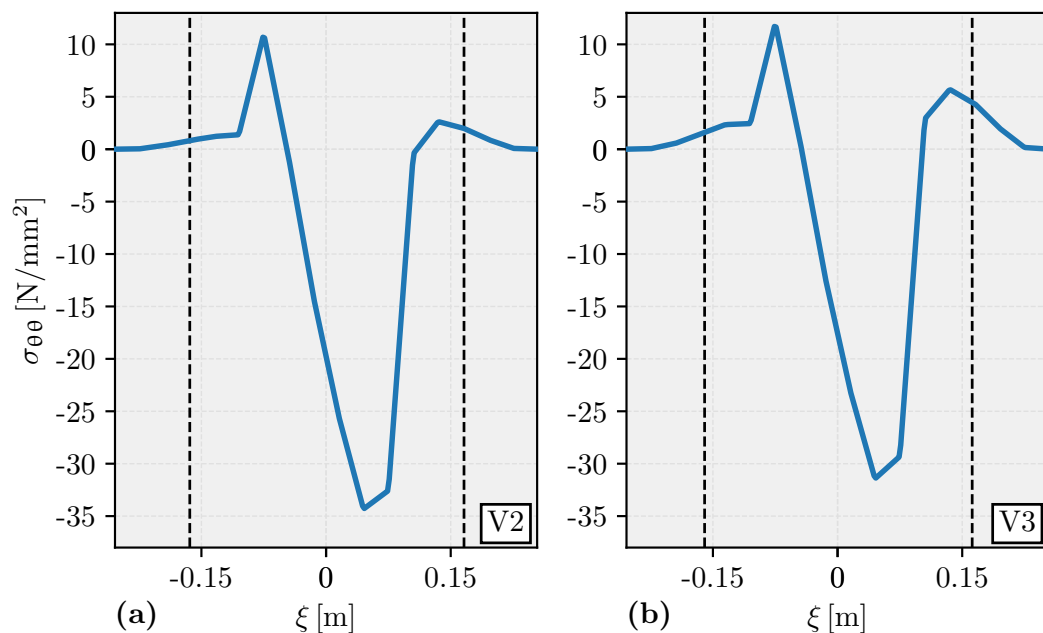


Abbildung 6.35: Spannungsverteilung im Stammquerschnitt auf Brusthöhe für Szenario 2, Lastfall 2: (a) zum Zeitpunkt $t = 400$ vor der Entlastung, (b) zum Zeitpunkt $t = 400$ nach der Entlastung.

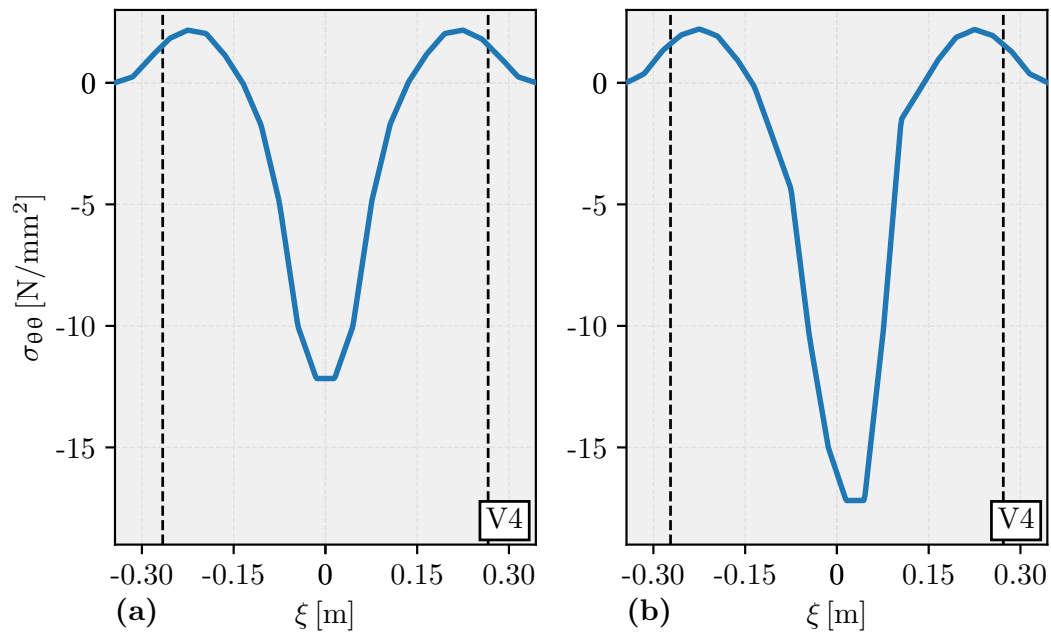


Abbildung 6.36: Spannungsverteilung im Stammquerschnitt auf Brusthöhe für **V4** zum Zeitpunkt $t = 600$: (a) Szenario 1, (b) Szenario 2: Lastfall 1.

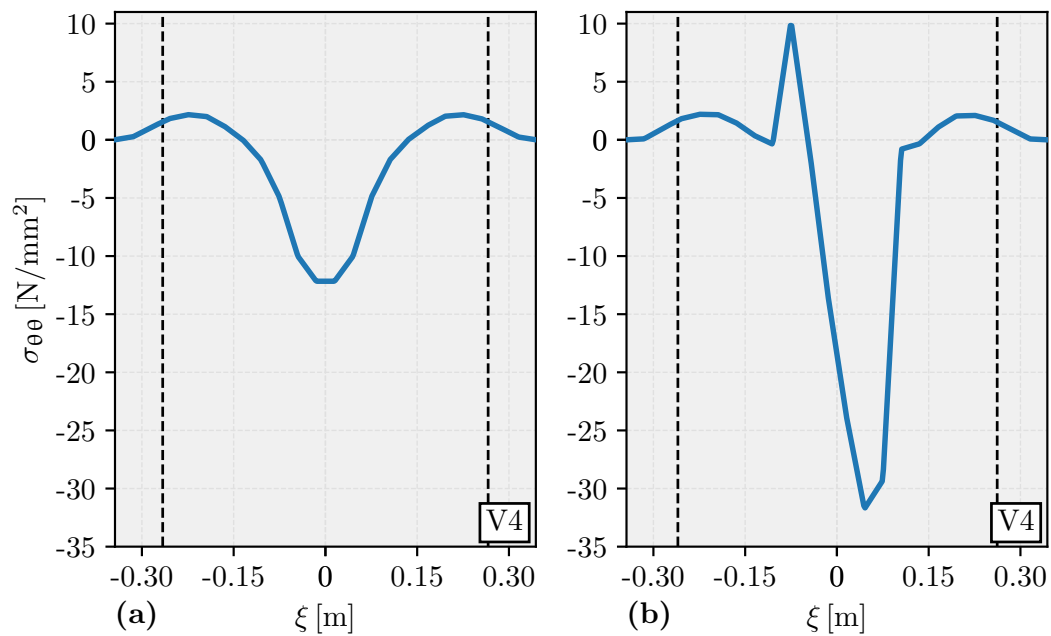


Abbildung 6.37: Spannungsverteilung im Stammquerschnitt auf Brusthöhe für **V4** zum Zeitpunkt $t = 600$: (a) Szenario 1, (b) Szenario 2: Lastfall 2.

Langfristige Auswirkung der temporären externen Belastung

Nach dem Entfernen der äußeren Last werden nochmals $\Delta t = 200$ Wachstumsperioden simuliert. Der sich dann einstellende Wachstumsspannungsverlauf zum Beobachtungszeitpunkt V4 zeigt, dass die erhöhten Druckspannungen im Stamminneren bestehen bleiben, vgl. Abb. 6.36 sowie Abb. 6.37. An der Stammoberfläche gleicht sich die Zugspannung dem natürlichen Wert an. Bei großer externer Last (Lastfall 2) verbleibt im Stamminneren eine noch sichtbare Spannungsanomalie, siehe Abb. 6.37.

Bewertung der Ergebnisse

Das Beispiel zeigt, dass ein Baum durch kontinuierliche Eigenspannungsakkumulation im Laufe der Zeit ein Spannungsprofil entwickelt, das äußere Belastungen gezielt kompensieren kann. Bei moderaten technischen Lasten wird hier das natürliche Spannungsbild nach 33 Jahren nahezu vollständig wiederhergestellt. Bei hohen Lasten hingegen sind längere Zeiträume notwendig.

Werden derartige externe Lasten nach mehreren Jahren entfernt, bewegt sich die Struktur geringfügig über ihren Ausgangszustand vor Belastung zurück. Es verbleibt eine dauerhafte Erhöhung der axialen Druckspannung im Kern.

Bäume sind also in der Lage, durch genetisch veranlagten Eigendehnungen innere Momente gegen externe Lasten aufzubauen. Hierbei ist die Reduzierung der axialen Druckspannung an der Stammoberfläche zentral. Dadurch erhöht sich die Tragfähigkeit gegenüber Biegebelastung unter Einfluss einer externen Last stärker, als dies ohne Einwirkung der Fall wäre. Dieser Effekt kommt zum natürlichen Dickenwachstum hinzu.

Somit kann gesagt werden, dass extern belastete Bäume über die Jahre eine größere Traglast entwickeln und damit für zukünftige Lasterhöhungen besser vorbereitet sind als „untrainierte“ Bäume. Zu beachten ist jedoch, dass dieser Effekt richtungsabhängig ist und daher nur bei gleichgerichteter Belastung greift.

Ein weiterer „Trainings“-Effekt, ist die zuvor in Kap. 3.2 beschriebene, aus der Literatur bekannte Thigmomorphogenese [47, 76]. In den Beispielen des folgenden Kapitels wird dessen Einfluss im Modell berücksichtigt und diskutiert.

6.7 Thigmomorphe Wachstumsanpassungen

Wie in Kapitel 5.9 beschrieben, wird der biologische Mechanismus der Thigmomorphogenese – d. h. die durch mechanische Reize ausgelöste Anpassung des Dickenwachstums – im Modell durch einen dehnungsinduzierten Wachstumsterm im Phasenfeld $c_{\gamma,s} \gamma_s$ erfasst. Dieser ergänzt die Triebkräfte des primären und sekundären Wachstums und reagiert auf lokale Dehnungen entlang der Faserrichtung. Die Art der Reaktion, ob Zuwachs auf Druck- oder Zugseite erfolgt, kann in Abhängigkeit von der Holzart gemäß dem zuvor eingeführten Vorzeichenparameter s erfolgen.

Testbeispiel zum thigmomorphen Wachstum

Im ersten Testbeispiel wird der beschriebene Modellansatz auf eine 2D-Geometrie angewendet, bei der ausschließlich der Einfluss der thigmomorphen Wachstumstriebkraft Verwendung findet. Innerhalb des Simulationsgebiets von $6\text{ m} \times 1.5\text{ m}$ wird ein durchgängiger beidseitig eingespannter 15 cm breiter Materialstreifen entlang der Morphologielinie vorgegeben, der zentral durch eine vertikale Knotenlast $F = 10\text{ kN}$ belastet ist, siehe Abb. 6.38. Es werden die bisher verwendeten geläufigen Material und Modellparameter gemäß Abb. 6.38 verwendet.

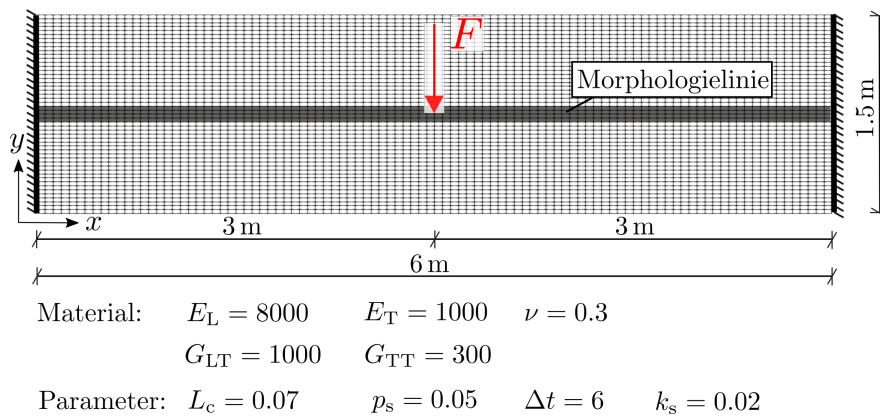


Abbildung 6.38: Modellgeometrie mit Randbedingungen und Belastung sowie Parametern.

Simulationen für Laubholz ($s = -1$) und Nadelholz ($s = 1$) werden über einen Zeitraum von $t = 75$ Wachstumsmonaten durchgeführt. Primäres und sekundäres Wachstum sind explizit deaktiviert ($v_1 = 0$, $v_2^j = 0$, $v_2 = 0$), um den Einfluss der Triebkraft des thigmomorphen Wachstums isoliert darzustellen. Das Dehnungsfeld der äußeren Last steuert das Wachstum lokal in Abhängigkeit von der Überschreitung des Schwellenwerts

$\varepsilon_{\text{crit}} = 3 \cdot 10^{-4}$, siehe Kapitel 5.9. Dadurch konzentriert sich das Wachstum – abhängig vom Vorzeichenparameter – bei Laubholz auf die Biegezugseite und bei Nadelholz auf die Biegedruckseite im Bereich großer Momente, vgl. Abb. 6.39. Da der Momentenverlauf direkt mit dem Dehnungsverlauf in Normalenrichtung korreliert, ergibt sich eine Flächenverteilung, die dem Momentenverlauf entspricht.

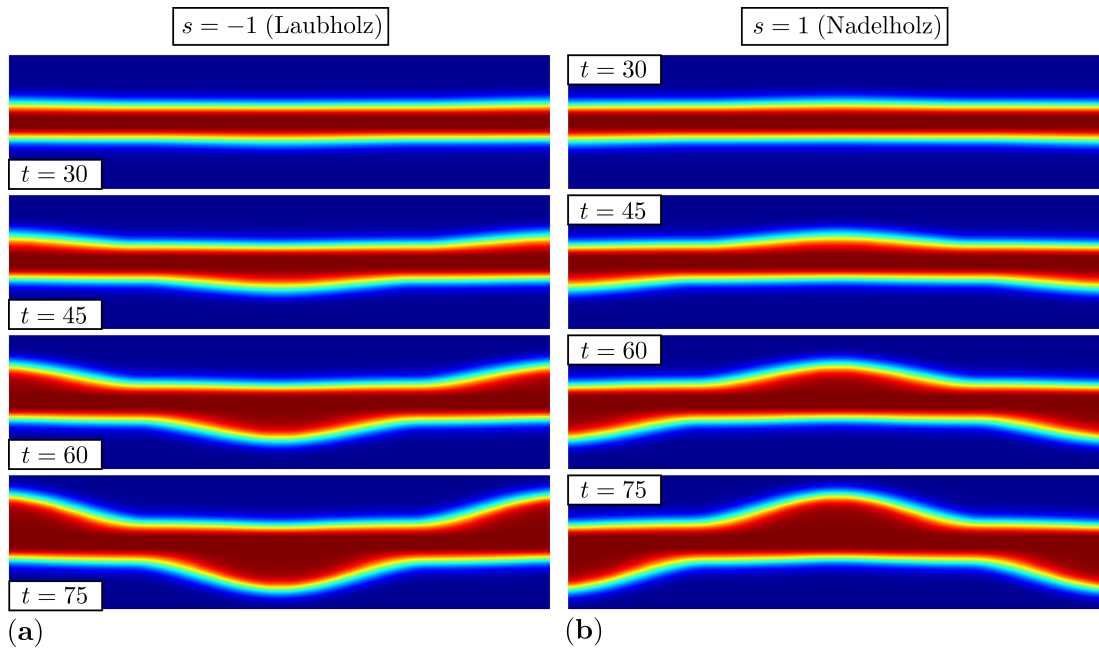


Abbildung 6.39: Entwicklung des Phasenfelds bei ausschließlich thigmomorphem Wachstum für (a) Laubholz und (b) Nadelholz zu verschiedenen Zeitpunkten, wobei $\varphi = 1$ durch rote Bereiche markiert ist.

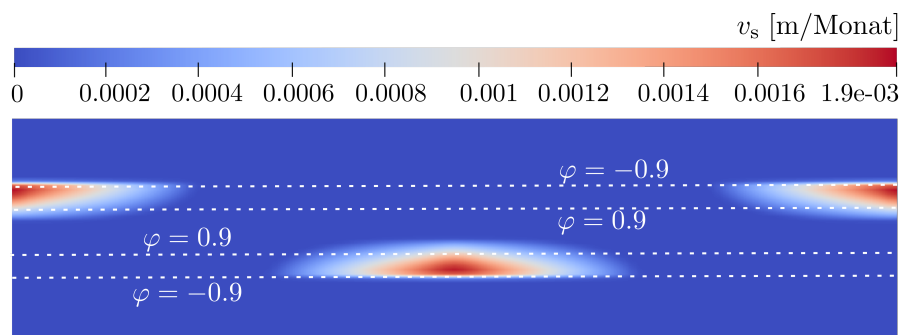


Abbildung 6.40: Zielgeschwindigkeit des thigmomorphen Wachstums und Darstellung der Grenzflächenbreite $\varphi = \pm 0.9$ zum Zeitpunkt $t = 30$ für $s = -1$.

Wie in Abb. 6.40 für Laubholz zu sehen ist, bezieht sich die Schwellenwertbetrachtung nicht nur auf die Holzmatrix $\varphi > 0.5$, was für eine Verschiebung der Grenzflächenzone

entscheidend ist. Mit den gewählten Parametern ergeben sich Wachstumsgeschwindigkeiten im Bereich von 0.6–1.2 cm/Wachstumsperiode. Zonen mit Biegedruckbelastung und geringer mechanischer Beanspruchung zeigen hingegen, wie gewünscht, keine Wachstumsaktivität.

Einfluss des thigmomorphen Wachstums auf die Wachstumsspannungen

Zuvor wurde bereits der Einfluss verschiedener Lastszenarien auf die Ausbildung von Wachstumsspannungen ohne Berücksichtigung des thigmomorphen Wachstums untersucht. Über lange Zeiträume applizierte externe Lasten führen zu einer Art „Training“ des Baumes, indem sich innere Spannungszustände aufbauen, die der Belastung entgegenwirken. Da die Wachstumsspannungen im Modell unmittelbar aus dem sekundären Wachstum resultieren, wirkt sich eine durch Thigmomorphogenese erhöhte Zuwachsrate direkt auf die zeitliche Entwicklung und Ausprägung dieser Spannungen und somit auch den beschriebenen „Trainings“- Effekt aus.

Um den Einfluss des thigmomorphen Wachstums auf die Wachstumsspannungsakkumulation unter externer Belastung darzustellen, wird folgendes Beispiel herangezogen, welches denselben grundlegenden Modellaufbau und Parameteransatz wie in Abschnitt 6.6 verwendet. Geometrie, Diskretisierung und Materialeigenschaften bleiben unverändert. Zur Bewertung der Wachstumsanpassung werden die Spannungsverteilungen in der ξ -Achse der Schnittebene $x - y$ betrachtet. Querschnittzuwächse und die resultierende thigmomorphe Wachstumsgeschwindigkeit werden in einer zusätzlichen Schnittebene $x - y$ auf Brusthöhe herangezogen, vgl. Abb. 6.41.

Im Gegensatz zu den zuvor untersuchten Szenarien, bei denen mehrere Lastzyklen mit unterschiedlichen Lastfällen betrachtet wurden, wird hier nur ein Lastfall untersucht. Wie zuvor erfolgt die Lastaufbringung nicht zu Beginn der Simulation, sondern nach einer initialen Wachstumsphase ohne äußere Einwirkungen. In diesem Beispiel beträgt diese Phase $t = 300$ Wachstumsmonate, bevor eine konstante äußere Last von $F = 12.5$ kN aufgebracht wird. Es werden zwei Varianten verglichen:

- **Variante A:** Wachstum ohne Berücksichtigung thigmomorpher Effekte mit $k_s = 0$,
- **Variante B:** zusätzlich aktivierte thigmomorphogenetische Verstärkung des Dickenwachstums mit $k_s = 1 \cdot 10^{-3}$.

Dieser direkte Vergleich bei identischer Last und identischem Belastungszeitpunkt erlaubt es, den spezifischen Einfluss der Thigmomorphogenese auf die zeitliche Entwicklung der Wachstumsspannungen und den Querschnittszuwachs isoliert zu bewerten.

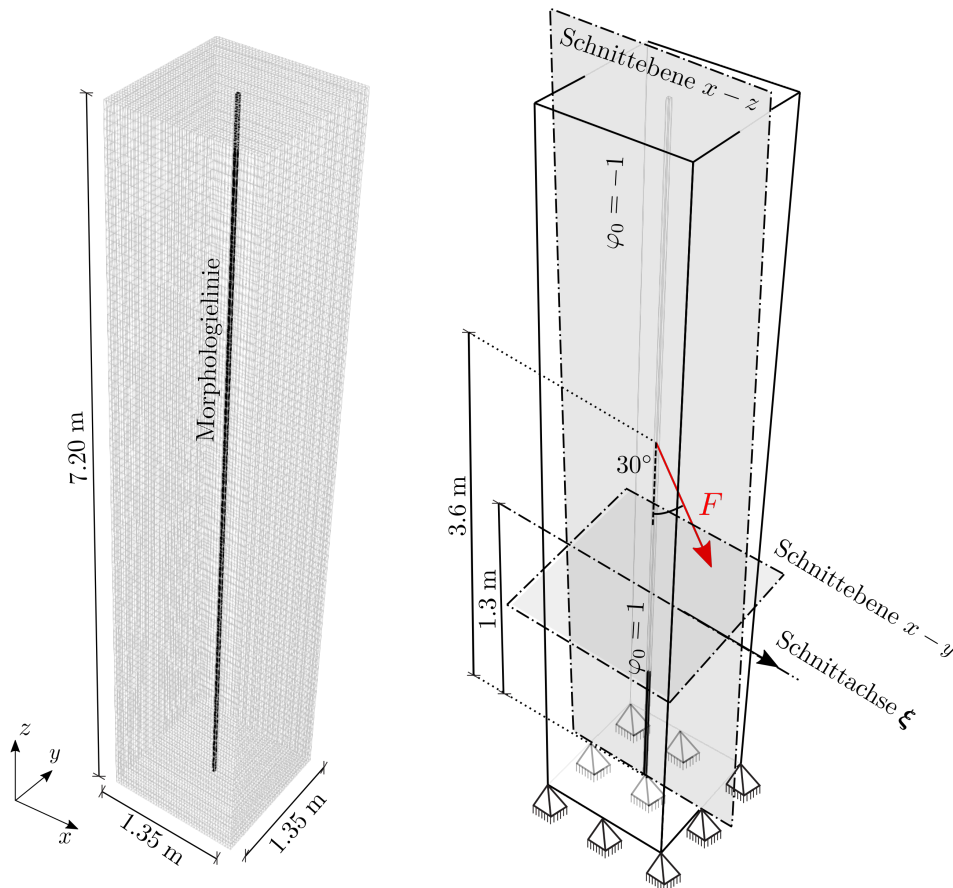


Abbildung 6.41: Links: Abmessungen und Diskretisierung des 3D-Simulationsraums sowie Darstellung der Morphologielinie. Rechts: Anfangs- und Randvorgaben sowie die Schnittachse ξ (in $x - z$ -Ebene) zur Darstellung der Spannungsverläufe und der $x - y$ -Ebene zur Visualisierung der Querschnittszuwächse.

Die Entwicklung des Phasenfeldparameters $\varphi > 0.5$ zu charakteristischen Zeitpunkten der Variante B mit aktivem thigmomorphen Wachstum ist in Abb. 6.42 dargestellt.

Mit den gewählten Parametern ergeben sich unmittelbar nach der Lastaufbringung zum Zeitpunkt $t = 300$ thigmomorphe Wachstumsgeschwindigkeiten von 0.3–0.5 cm/Wachstumsperiode (6 Wachstumsmonate) auf Brusthöhe, siehe Abb. 6.43.

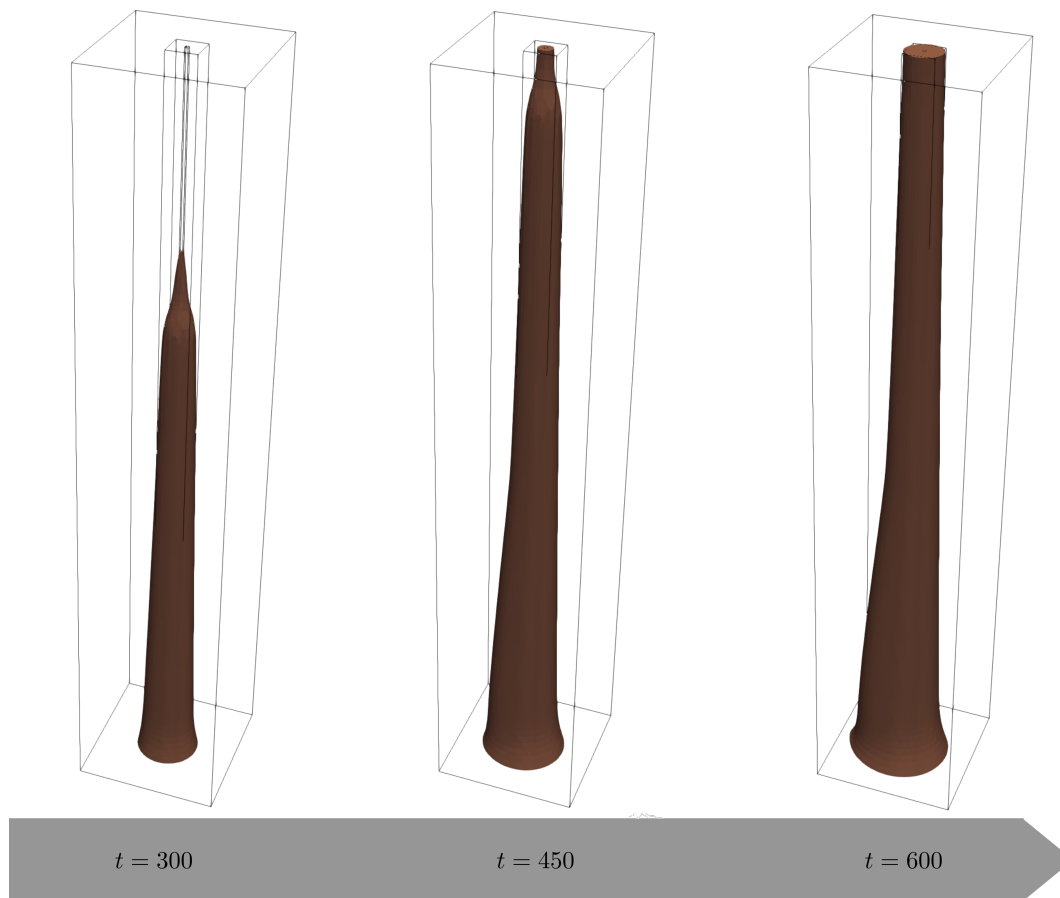


Abbildung 6.42: Phasenfeldparameterentwicklung für $\varphi > 0.5$ im zeitlichen Verlauf der Wachstumsmonate t für Variante B.

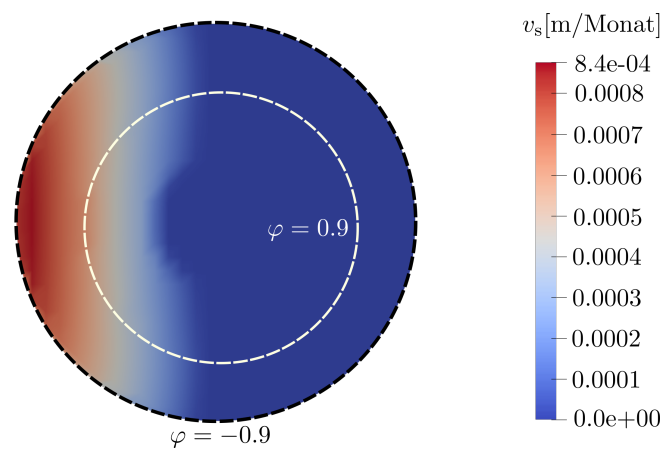


Abbildung 6.43: Zielgeschwindigkeit des thigmomorphen Wachstums und Darstellung der Grenzflächenbreite $\varphi = \pm 0.9$ zum Zeitpunkt $t = 300$.

Der Querschnitt zum Zeitpunkt der Lastaufbringung auf Brusthöhe $t = 300$ sowie die resultierenden Querschnittszuwächse beider Varianten zum Zeitpunkt $t = 600$ sind in Abb. 6.44 dargestellt. Im Querschnitt der Variante B ist neben den thigmomorphen Zuwächsen auch das reguläre sekundäre Wachstum sichtbar, das denselben kreisförmigen Bereich wie in Variante A bildet. Durch die thigmomorphe Wachstumsgeschwindigkeit ergibt sich in Variante B ein Querschnitt mit elliptischem Charakter.

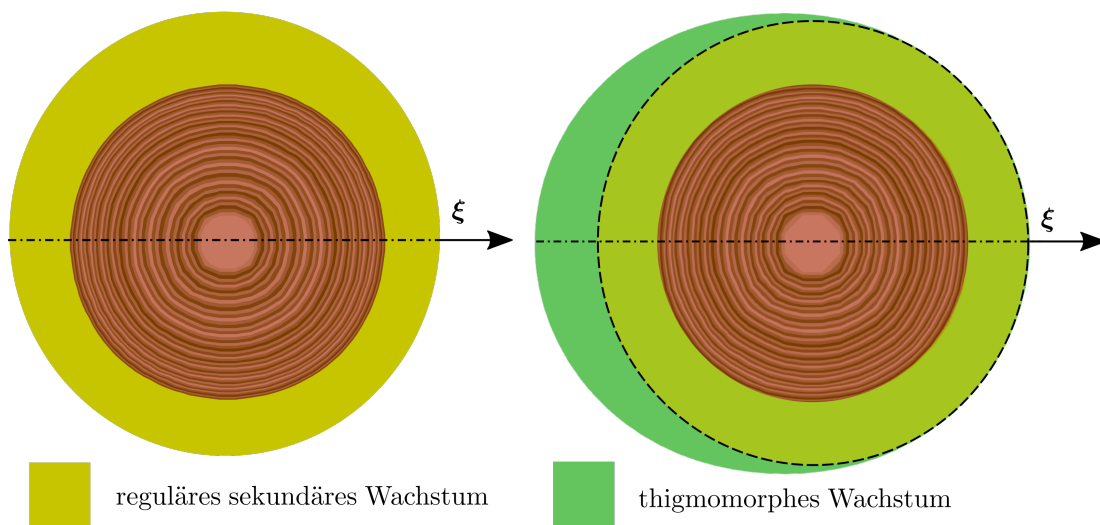


Abbildung 6.44: Vergleich der Querschnittszuwächse der beiden Szenarien zum Zeitpunkt $t = 600$ in der Schnittebene $x - y$ mit einer Jahresringdarstellung des Ausgangsquerschnitts.

Der zeitliche Verlauf der axialen Spannungen $\sigma_{\theta\theta}$ auf Brusthöhe ist für Variante A in Abb. 6.45a-b und für Variante B in Abb. 6.45c-d dargestellt. Bei beiden Varianten nehmen, wie bereits in Kapitel 6.6 festgestellt, die Druckspannungen auf der Biegedruckseite kontinuierlich ab, bis infolge der fortschreitenden Wachstumsspannungsakkumulation erneut Zugspannungen erreicht werden. Allerdings ist dieser Vorgang durch das thigmomorphe Wachstum beschleunigt, vgl. Abb. 6.45a und Abb. 6.45c. Im späteren Verlauf lässt sich deutlich erkennen, dass der Querschnitt für Variante B schneller wächst. Dadurch verringert sich die zuvor beschriebene Zugspannungsanomalie im Stamminneren schneller als bei Variante A und braucht eine geringere Anzahl von Wachstumsperioden, um sich einem charakteristischen Verlauf der natürlichen Wachstumsspannungen zu nähern, vgl. Abb. 6.45d.

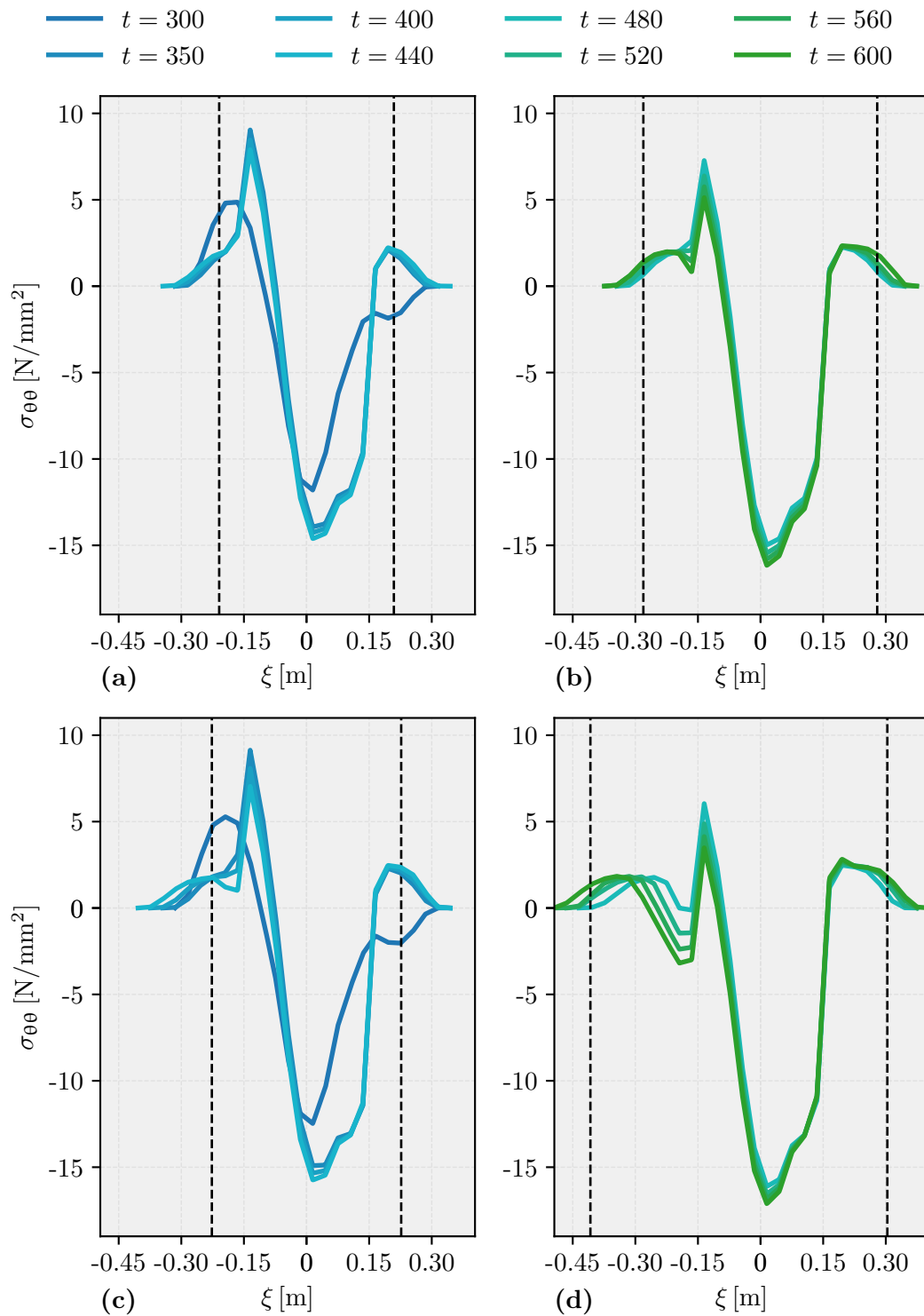


Abbildung 6.45: Zeitlicher Verlauf der Spannungsverteilung im Stammquerschnitt auf Brusthöhe für die beiden Varianten.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit erforscht ein Phasenfeldmodell zur Simulation von Wachstumsspannungen in der Holzmatrix. Es basiert auf einem linear-elastischen, transversal-isotropen Materialgesetz und nutzt eine Morphologielinie, mit der sich beliebige Stammverläufe vorgeben lassen. Diese Richtungsvorgabe bestimmt die primäre Wachstumsrichtung und zugleich die Faserrichtung des Stammes.

Der Phasenfeldansatz ermöglicht die schrittweise Addition neuer Holzschichten, die jeweils mit einer vorgegebenen genetisch veranlagten Axialkontraktion an der Oberfläche eingebracht werden. Die Werte der eingebrachten oberflächlichen Eigendehnung orientieren sich dabei an den aufbereiteten experimentellen Daten. Für einen gleichmäßigen und numerisch stabilen Simulationsverlauf ist eine geeignete Abstimmung von Zeitschrittweite, Vorgabegeschwindigkeit und Grenzflächenbreite des Phasenfeldmodells erforderlich. Auf diese Weise kann die Akkumulation von Wachstumsspannungen über den Lebenszyklus eines Baumes nachvollzogen werden. Die resultierenden Spannungsverteilungen stimmen mit etablierten 1D-Ansätzen überein, erweitern diese jedoch um die Möglichkeit, den vollständigen 3D-Spannungszustand einschließlich radialer und tangentialer Eigendehnungen abzubilden.

Unter äußerer mechanischer Belastung wird der natürliche Spannungszustand im Stammquerschnitt zunächst erheblich verändert. Bereits zu Beginn reduzieren sich die Biegedruckspannungen an der Oberfläche um den Betrag der oberflächlichen Wachstumsdehnung. Im weiteren Verlauf entstehen dort durch neue Schichten erneut Zugspannungen. Da das Ausknicken der Fasern maßgeblich den Versagensmechanismus bestimmt, zeigt sich, dass die Tragfähigkeit nicht nur durch den Querschnittszuwachs gesteigert wird. Vielmehr führt die Akkumulation von Wachstumsspannungen zu einem Spannungszustand, der der Belastung entgegenwirkt, was sich bei Entlastung in bleibenden Verschiebungen äußert und die Durchbiegung unter Last reduziert.

Dieser „Trainingseffekt“ wird durch thigmomorphes Wachstum verstärkt: Eine erhöhte sekundäre Wachstumsgeschwindigkeit verkürzt die Zeitspanne, die der Baum benötigt, um eine geeignete Antwort auf äußere Belastungen zu entwickeln.

Die Ergebnisse stützen die Hypothese, dass lebende Bäume als adaptive Tragstrukturen betrachtet werden können. Dieses Verhalten eröffnet neue Perspektiven für das Bauen mit tragenden Bäumen, da sich Wachstumsspannungsreserven gezielt nutzen lassen. So entsteht eine potenzielle Grundlage für verbesserte Sicherheitskonzepte. Belastungen durch Wind oder Baukörper werden langfristig durch gerichtetes Wachstum ausgegli-

chen, was die Resilienz gegenüber Extrembelastungen erhöht. Daraus ergeben sich neue Möglichkeiten im Kontext nachhaltigen Bauens. In Kombination mit klassischen Fundamenten in hybriden Tragwerkslösungen könnten Materialeinsparungen erzielt und Waldflächen ressourcenschonend in Baukonzepte integriert werden.

Für weiterführende Arbeiten ergeben sich mehrere Richtungen:

1. Experimentelle Validierung – Die Simulationsergebnisse sollten durch Langzeitmessungen an Bäumen überprüft werden. Geeignet wären Versuche in windarmen Bereichen, bei denen Bäume über mehrere Jahre definierten Biegekräften ausgesetzt werden, um den Einfluss der Wachstumsspannungen zu quantifizieren. Die Simulation sollte in der Lage sein, die beispielsweise mit der Holzstreifenmethode gemessenen Spannungsverläufe realistisch abzubilden. In Kapitel 6.6 wird für hohe Lasten nahe der Tragfähigkeitsgrenze eine innere Schädigung infolge erhöhter Druckspannungen durch Spannungsakkumulation prognostiziert. Das Auftreten dieser Schädigungen sollte experimentell überprüfbar sein.
2. Thigmomorphismus-Experimente – Mit einem ähnlichen Experiment ließe sich auch das thigmomorphe Wachstum messen. Wird dabei nur eine geringe Auslenkung aus der Vertikalen erzeugt, kann der Gravitropismus – und damit die Reaktionsholzbildung – vermieden werden. Vergleichende Messungen auf der Last- und Gegenseite würden helfen, den thigmomorphen Anteil vom regulären sekundären Wachstum zu trennen und so realistische Vorgabegeschwindigkeiten für das Modell zu bestimmen.
3. Modellerweiterungen – Wie zuvor beschrieben, entsteht bei der Reifung der Zellen unter normalen Bedingungen eine Kontraktion in Längsrichtung (longitudinal), aus der die axialen Eigendehnungen resultieren. Gleichzeitig tritt eine Ausdehnung in radialer und tangentialer Richtung auf. In der Radialrichtung muss der Wert der Oberflächendehnung an der Stammoberfläche auf null fallen. In Tangentialrichtung hingegen muss ein Randwert vorgegeben werden. Eine solche Randwertdefinition könnte die Verläufe der tangentialen Eigenspannungen und – über den Querkontraktionseffekt – auch die Spannungsverläufe in den anderen Richtungen verbessern.

Für die Berechnung wäre es dabei nicht nur erforderlich, die Faserrichtung zu kennen, sondern auch den kürzesten Abstand jeder Koordinate zur Morphogielinie zu bestimmen. Damit ließen sich Längs-, Radial- und Tangentialrichtung eindeutig festlegen. Diese könnten gleichzeitig als Hauptrichtungen einer erweiterten Anisotropie dienen, sodass das Materialverhalten von einem transversal-

isotropen zu einem orthotropen Modell erweitert werden könnte.

4. Reaktionsholzbildung – Eine gezielte Modellierung dieser Prozesse, insbesondere bei starker Auslenkung aus der Vertikalen, könnte sowohl den Einfluss auf die oberflächennahe Axialkontraktion als auch auf die Materialsteifigkeit erfassen. Damit ließen sich differenziertere Spannungsverteilungen simulieren.

Langfristig könnte das Modell in digitale Zwillinge lebender Bäume eingebunden werden, um deren Tragfähigkeit unter wechselnden Umweltbedingungen besser vorherzusagen, um so das Sicherheitskonzept verbessern zu können.

Literatur

- [1] S. M. Allen & J. W. Cahn. A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening. *Acta metallurgica*, 27(6): 1085–1095, 1979.
- [2] T. Alméras, D. Jullien, & J. Gril. Modelling, evaluation and biomechanical consequences of growth stress profiles inside tree stems. *Plant Biomechanics: From Structure to Function at Multiple Scales*, pages 21–48, 2018.
- [3] H. Altenbach, J. Altenbach, & R. B. Rikards. *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke: Modellierung und Berechnung von Balken und Platten aus Verbundwerkstoffen; 47 Tabellen*. Dt. Verlag für Grundstoffindustrie, 1996.
- [4] R. Archer & F. Byrnes. On the distribution of tree growth stresses - Part I: An anisotropic plane strain theory. *Wood Science and Technology*, 8(3):184–196, 1974.
- [5] R. R. Archer. *Growth stresses and strains in trees*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [6] P. W. Barlow. *Differential growth in plants*. Elsevier, 2013.
- [7] W. J. Boettinger, J. A. Warren, C. Beckermann, & A. Karma. Phase-field simulation of solidification. *Annual review of materials research*, 32(1):163–194, 2002.
- [8] B. Bourdin & A. Chambolle. Design-dependent loads in topology optimization. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 9:19–48, 2003.
- [9] J. Boyd. Growth stress evaluation. *Tree growth stresses*, 1, 1950.
- [10] W. Braune, A. Leman, & H. Taubert. *Pflanzenanatomisches Praktikum I: Zur Einführung in die Anatomie der Vegetationsorgane der Samenpflanzen*. Springer-Verlag, 2009.
- [11] J. E. Bresenham. Algorithm for computer control of a digital plotter. In *Seminal graphics: pioneering efforts that shaped the field*, pages 1–6. 1998.

- [12] M. Burger & R. Stainko. Phase-field relaxation of topology optimization with local stress constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(4):1447–1466, 2006.
- [13] J. Cahn & S. Allen. A microscopic theory for domain wall motion and its experimental verification in Fe-Al alloy domain growth kinetics. *Le Journal de Physique Colloques*, 38(C7):C7–51, 1977.
- [14] J. W. Cahn & J. E. Hilliard. Free energy of a nonuniform system. i. interfacial free energy. *The Journal of chemical physics*, 28(2):258–267, 1958.
- [15] B. Capon. *Botany for gardeners*. Timber Press, 2010.
- [16] H. Carrington. The elastic constants of spruce as influenced by moisture. *The Aeronautical Journal*, 26(144):462–471, 1922.
- [17] H. Carrington. The elastic constants of spruce. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 45(269):1055–1057, 1923.
- [18] J. M. Christie. Phototropin blue-light receptors. *Annual Review of Plant Biology*, 58(1):21–45, 2007.
- [19] C. Coutand & S. J. Mitchell. Mechanical signaling in plants: from perception to consequences for growth and morphogenesis (thigmomorphogenesis) and ecological significance, 2016.
- [20] D. Cown. Corewood (juvenile wood) in pinus radiata—should we be concerned. *New Zealand Journal of Forestry Science*, 22(1):87–95, 1992.
- [21] N. T. Davies, C. M. Altaner, & L. A. Apiolaza. Elastic constants of green pinus radiata wood. *New Zealand Journal of Forestry Science*, 46:1–6, 2016.
- [22] Deutscher Forstwirtschaftsrat e.V. & Deutscher Holzwirtschaftsrat e.V., editors. *Rahmenvereinbarung für den Rohholzhandel in Deutschland (RVR)*. Fachagentur für Nachwachsende Rohstoffe e.V., 2020.
- [23] J. Dinwoodie. Growth stresses in timber—a review of literature. *Forestry: An International Journal of Forest Research*, 39(2):162–170, 1966.
- [24] J. M. Dinwoodie. *Timber: its nature and behaviour*. CRC Press, 2000.

- [25] P. Duque & D. Szakonyi. *Environmental responses in plants: Methods and protocols*. Springer, 2016.
- [26] A. C. Eringen. *Mechanics of continua*. Huntington, 1980.
- [27] L. G. Esteban, P. de Palacios, P. Gasson, A. García-Iruela, F. García-Fernández, & L. García-Esteban. Hardwoods: Anatomy and functionality of their elements—a short review. *Forests*, 15(7):1162, 2024.
- [28] D. J. Eyre. Unconditionally gradient stable time marching the Cahn-Hilliard equation. *MRS online proceedings library (OPL)*, 529:39, 1998.
- [29] A. Fasano & M. Primicerio. *Free boundary problems: Theory and applications*. 1983.
- [30] J. Fromm. *Cellular aspects of wood formation*. Springer, 2013.
- [31] C. C. Gerhards. Effect of moisture content and temperature on the mechanical properties of wood: an analysis of immediate effects. *Wood and Fiber Science*, pages 4–36, 1982.
- [32] P. P. Gillis. *Theory of growth stresses*. 1973.
- [33] S. V. Glass & S. L. Zelinka. Moisture relations and physical properties of wood. In *Wood Handbook – Wood as an Engineering Material*, chapter 4. U.S. Department of Agriculture, Forest Products Laboratory, 2021.
- [34] R. Greve. *Kontinuumsmechanik: Ein Grundkurs für Ingenieure und Physiker*. Springer-Verlag, 2013.
- [35] M. Grimsel. *Mechanisches Verhalten von Holz: Struktur- und Parameteridentifikation eines anisotropen Werkstoffes*. web-Univ.-Verlag, 1999.
- [36] P. Haupt. *Continuum mechanics and theory of materials*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [37] R. Hearmon. *Theory of the vibration testing of wood*. 1966.
- [38] R. F. S. Hearmon. *The elasticity of wood and plywood*. 1948.
- [39] S. Hering. *Charakterisierung und Modellierung der Materialeigenschaften von Rotbuchenholz zur Simulation von Holzverklebungen*. PhD thesis, ETH Zurich, 2011.

- [40] S. Hering, D. Keunecke, & P. Niemz. Moisture-dependent orthotropic elasticity of beech wood. *Wood Science and Technology*, 46:927–938, 2012.
- [41] M. Hermann. *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen: Anfangs- und Randwertprobleme*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 2004.
- [42] G. A. Holzapfel. *Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering science*, 2002.
- [43] H. Hörig. Über die unmittelbare Messung der Gleitzahlen s_{44} , s_{55} , s_{66} bei Stoffen von rhombischer Symmetrie und geringer Starrheit. *Annalen der Physik*, 435(4): 285–295, 1943.
- [44] M. R. Jacobs. The fibre tension of woody stems, with special reference to the genus eucalyptus. 1938.
- [45] M. R. Jacobs. The growth stresses of woody stems. *Bull. For. Bur. Aust.*, 28:67 pp., 1945.
- [46] M. Jaffe & S. Forbes. Thigmomorphogenesis: the effect of mechanical perturbation on plants. *Plant growth regulation*, 12:313–324, 1993.
- [47] M. J. Jaffe. Thigmomorphogenesis: the response of plant growth and development to mechanical stimulation: with special reference to bryonia dioica. *Planta*, 114: 143–157, 1973.
- [48] G. Y. Jeong, D. P. Hindman, & A. Zink-Sharp. Orthotropic properties of loblolly pine (*pinus taeda*) strands. *Journal of Materials Science*, 45:5820–5830, 2010.
- [49] J. W. Kadereit, C. Körner, B. Kost, & U. Sonnewald. *Strasburger- Lehrbuch der Pflanzenwissenschaften*. Springer-Verlag, 2014.
- [50] A. Karma & W.-J. Rappel. Phase-field method for computationally efficient modeling of solidification with arbitrary interface kinetics. *Physical review E*, 53 (4):R3017, 1996.
- [51] Y. Kikata & K. Miwa. A modified hole-drilling technique for determining residual stresses (growth stresses) in tree trunks. *Journal of the Society of Materials Science Japan*, 26(284):429–432, 1977.
- [52] F. Kollmann. *Technologie des Holzes und der Holzwerkstoffe: 1. Band*. Springer-Verlag, 2013.

- [53] F. Kollmann & W. Côté. Physics of wood. *Principles of Wood Science and Technology: I Solid Wood*, pages 160–291, 1968.
- [54] F. Kollmann & H. Krech. Dynamische Messung der elastischen Holzeigenschaften und der Dämpfung ein Beitrag zur zerstörungsfreien Werkstoffprüfung. *European Journal of Wood and Wood Products*, 18(2):41–54, 1960.
- [55] H. Kramer & A. Akça. Leitfaden zur Waldmesslehre. 5., überarb. Aufl. Frankfurt am Main: JD Sauerländer's Verlag, 2008.
- [56] H. Kübler. Studien über Wachstumsspannungen des Holzes - Erste Mitteilung: Die Ursache der Wachstumsspannungen und die Spannungen quer zur Faserrichtung. *Holz als Roh-und Werkstoff*, 17(1):1–9, 1959.
- [57] H. Kübler. Studien über Wachstumsspannungen des Holzes - Zweite Mitteilung Die Spannungen in Faserrichtung. *Holz als Roh-und Werkstoff*, 17(2):44–54, 1959.
- [58] H. Kübler. Growth stresses in trees and related wood properties. 1987.
- [59] J. La Salle & S. Lefschetz. *Stability by Liapunov's direct method*. Academic Press, 1961.
- [60] J. Langer. Models of pattern formation in first-order phase transitions. In *Directions in condensed matter physics: Memorial volume in honor of shang-keng ma*, pages 165–186. World Scientific, 1986.
- [61] G. Lavers. *The Strength Properties of Timbers*. Bulletin (Forest Products Research Laboratory (Princes Risborough, England)). H.M. Stationery Office, 1969. ISBN 9780114701253.
- [62] O. Lenz & H. J. Strässler. *Contribution à l'étude de l'éclatement des billes de hêtre:(Fagus silvatica, L.)*. Schweizerische Anstalt für d. Forstl. Versuchswesen, 1959.
- [63] S. Loske. *Traglast und Verankerungstechnik für den Bau in und mit vitalen Bäumen*. TU Dortmund, 2025.
- [64] J. Lubliner. *Plasticity theory*. Courier Corporation, 2008.
- [65] L. J. Markwardt & T. R. C. Wilson. *Strength and related properties of woods grown in the United States*. Number 479. US Department of Agriculture, 1935.

- [66] R. Matyssek, J. Fromm, H. Rennenberg, & A. Roloff. *Biologie der Bäume: von der Zelle zur globalen Ebene*. UTB, 2010.
- [67] H. Mayer-Wegelin & E. Mammen. Spannungen und Spannungsrisse im Buchenstammholz. *Allgem. Forst-u. J.-Ztg*, 125:287–297, 1954.
- [68] M. T. Morita. Directional gravity sensing in gravitropism. *Annual review of plant biology*, 61(1):705–720, 2010.
- [69] K. Mosler & F. Schmid. *Wahrscheinlichkeitsrechnung und schließende Statistik*. Springer-Verlag, 2006.
- [70] I. Muench, C. Gierden, & W. Wagner. A phase field model for stress-based evolution of load-bearing structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 115(13):1580–1600, 2018.
- [71] R. Nagel & H. Spellmann. Wachstum, Behandlung und Ertrag von Reinbeständen der Rotbuche (*Fagus sylvatica* L.) in Nordwestdeutschland. *Ergebnisse angewandter Forschung zur Buche*, 3:221–265, 2008.
- [72] J. Nicholson. A rapid method for estimating longitudinal growth stresses in logs. *Wood science and technology*, 5(1):40–48, 1971.
- [73] P. Niemz & W. Sonderegger. Holzphysik. *Physik des Holzes und der Holzwerkstoffe*. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag München, 2017.
- [74] P. Niemz, A. Teischinger, & D. Sandberg. *Springer handbook of wood science and technology*. Springer, 2023.
- [75] K. J. Niklas & H.-C. Spatz. Worldwide correlations of mechanical properties and green wood density. *American Journal of Botany*, 97(10):1587–1594, 2010.
- [76] K. J. Niklas & H.-C. Spatz. *Plant Physics*. University of Chicago Press, 2012. ISBN 9780226586342.
- [77] L. Nover & E. W. Weiler. *Allgemeine und molekulare Botanik*. Georg Thieme Verlag, 2008.
- [78] T. Ozyhar. *Moisture and time-dependent orthotropic mechanical characterization of beech wood*. PhD thesis, ETH Zurich, 2013.
- [79] S. G. Pallardy. *Physiology of woody plants*. Academic press, 2010.

- [80] L. Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3: Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Fehler- und Ausgleichsrechnung*. Springer-Verlag, 2016.
- [81] M. Pietruszka & S. Lewicka. Anisotropic plant growth due to phototropism. *Journal of mathematical biology*, 54:45–55, 2007.
- [82] J. Platen, R. Fleischhauer, & M. Kaliske. On the continuum mechanics of growing plant-like structures. *Computational Mechanics*, 73(4):731–749, 2024.
- [83] C. Plomion, G. Leprovost, & A. Stokes. Wood formation in trees. *Plant physiology*, 127(4):1513–1523, 2001.
- [84] H. Pretzsch. *Grundlagen der Waldwachstumsforschung*. Springer-Verlag, 2019.
- [85] N. Provatas & K. Elder. *Phase-field methods in materials science and engineering*. John Wiley & Sons, 2011.
- [86] A. Rafsanjani, M. Stiefel, K. Jefimovs, R. Mokso, D. Derome, & J. Carmeliet. Hygroscopic swelling and shrinkage of latewood cell wall micropillars reveal ultrastructural anisotropy. *Journal of the Royal Society Interface*, 11(95):20140126, 2014.
- [87] A. Rais, E. Uhl, J.-W. G. van de Kuilen, & H. Pretzsch. Short-term reaction of european beech stem taper due to weather extremes. *Forest Ecology and Management*, 480:118653, 2021.
- [88] P. H. Raven, R. F. Evert, & H. Curtis. *Biologie der Pflanzen*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2020.
- [89] F. J. Richards. A flexible growth function for empirical use. *Journal of experimental Botany*, 10(2):290–301, 1959.
- [90] F. P. Riech & K. K. Ching. Influence of bending stress on wood formation of young douglas-fir. 1970.
- [91] N. Roidos & E. Schrohe. The Cahn-Hilliard equation and the Allen-Cahn equation on manifolds with conical singularities. *Communications in Partial Differential Equations*, 38(5):925–943, 2013.
- [92] J. Saurat & P. Gueneau. Growth stresses in beech. *Wood Science and Technology*, 10(2):111–123, 1976.

- [93] F. W. Schäfke. *Einführung in die Theorie der speziellen Funktionen der mathematischen Physik*. Springer-Verlag, 2013.
- [94] P. Schopfer & A. Brennicke. *Pflanzenphysiologie*. Springer-Verlag, 2016.
- [95] F. Schweingruber. Der Jahrring: Standort, Methodik, Zeit und Klima in der Dendrochronologie. 1983.
- [96] J. Shen & X. Yang. Numerical approximations of Allen-Cahn and Cahn-Hilliard equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst*, 28(4):1669–1691, 2010.
- [97] G. D. Smith. *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*. Oxford university press, 1985.
- [98] J. Stamer & H. Sieglerschmidt. Elastische Formänderung der Hölzer. *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, 77(19):503–505, 1933.
- [99] E. Stein & F.-J. Barthold. *Elastizitätstheorie*. Univ. Hannover, 1997.
- [100] I. Steinbach. Phase-field models in materials science. *Modelling and simulation in materials science and engineering*, 17(7):073001, 2009.
- [101] K. Sugiyama, T. Okuyama, H. Yamamoto, & M. Yoshida. Generation process of growth stresses in cell walls: relation between longitudinal released strain and chemical composition. *Wood Science and Technology*, 27:257–262, 1993.
- [102] A. Takezawa, S. Nishiwaki, & M. Kitamura. Shape and topology optimization based on the phase field method and sensitivity analysis. *Journal of Computational Physics*, 229(7):2697–2718, 2010.
- [103] F. W. Telewski. A unified hypothesis of mechanoperception in plants. *American journal of botany*, 93(10):1466–1476, 2006.
- [104] B. Thibaut, J. Gril, & M. Fournier. Mechanics of wood and trees: some new highlights for an old story. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics*, 329(9):701–716, 2001. ISSN 1620-7742.
- [105] Y. Trenard & P. Gueneau. Relation between longitudinal growth stresses and tension wood in *fagus sylvatica*. *Holzforschung*, 29(6):217–223, 1975.

- [106] H. Utschig. Entwicklung von Dimensionsgrößen der Buche unter dem Einfluss von Standort, Behandlung und Konkurrenz. *Tagungsbericht der Sektion Ertragskunde, Volpriehasune*, pages 173–185, 1999.
- [107] H. Utschig & E. Küsters. Wachstumsreaktionen der Buche (*Fagus sylvatica* (L.)) auf Durchforstungen—130-jährige Beobachtung des Durchforstungsversuches Elmstein 20. *Forstwissenschaftliches Centralblatt*, 122(6):389–409, 2003.
- [108] C. P. Vendhan & R. R. Archer. Relief of growth stresses in diametrical planks. 1977.
- [109] M. Y. Wang & S. Zhou. Phase field: a variational method for structural topology optimization. *CMES-Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 6(6):547–566, 2004.
- [110] H. Watanabe. A study of the origin of longitudinal growth stresses in tree stems. 1967.
- [111] B. F. Wilson & R. R. Archer. Reaction wood: induction and mechanical action. *Annual Review of Plant Physiology*, 28(1):23–43, 1977.
- [112] P. Wriggers. *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer-Verlag, 2013.
- [113] J. B. Wulf & I. Muench. Topology evolution of composite structures based on a phase field model. *PAMM*, 20(1):e202000163, 2021.
- [114] J. B. Wulf & I. Muench. Growth of green wood based on a phase field model. *PAMM*, 22(1):e202200067, 2023.
- [115] J. B. Wulf & I. Muench. Residual stresses in green wood based on a phase field model. In *International Conference on Bio-Based Building Materials*, pages 899–910. Springer, 2023.
- [116] H. Yamamoto. Generation mechanism of growth stresses in wood cell walls: roles of lignin deposition and cellulose microfibril during cell wall maturation. *Wood Science and Technology*, 32(3):171–182, 1998.
- [117] W. Yin et al. Impact resistance of oil-immersed lignum vitae. *Scientific Reports*, 6, 2016.
- [118] J. Zhang, A. F. Chadwick, D. L. Chopp, & P. W. Voorhees. Phase field modeling with large driving forces. *npj Computational Materials*, 9(1):166, 2023.

- [119] X. Zhuang, S. Zhou, G. Huynh, P. Areias, & T. Rabczuk. Phase field modeling and computer implementation: A review. *Engineering Fracture Mechanics*, 262: 108234, 2022.
- [120] O. C. Zienkiewicz & R. L. Taylor. *The finite element method: the basis*. Butterworth-heinemann, 2000.
- [121] O. C. Zienkiewicz & R. L. Taylor. *The finite element method: solid mechanics*. Butterworth-heinemann, 2000.
- [122] M. H. Zimmermann. *Xylem structure and the ascent of sap*. Springer Science & Business Media, 2013.