

WACHTER, Lukas
Saarbrücken

Über digitale Zeichnungen zum realen Modell: 3D-Modellierung und -Druck in der Raumgeometrie

Figur, Modell, Zeichnung? Eine Frage der Repräsentation

"Everything cannot be shown on a representation" stellt Parzysz (1988, S. 80) fest und bringt damit eine der grundlegenden Schwierigkeiten des Raumgeometrieunterrichts auf den Punkt: Sollen dreidimensionale Objekte dargestellt werden, so kann das auf zweidimensionalen Oberflächen – im Unterricht üblicherweise Tafel und Papier, aber natürlich auch auf digitalen Endgeräten – nur unter Verlust von Information stattfinden. Es fehlt schlichtweg eine Darstellungsdimension. Zur Darstellung von Figuren, wie sie von Parzysz (1988) genannt werden, unterscheidet er zwischen 3 Ebenen. Ebene 0 beschreibt das Konzept der Figur, die Gesamtheit all ihrer Eigenschaften. Diese Ebene kann i. d. R. nur mental dargestellt bzw. vorgestellt werden. Es ist meist unmöglich, alle Eigenschaften einer Figur gleichzeitig in einer Repräsentation abzubilden: Kantenmodelle zeigen andere Eigenschaften als Flächenmodelle. Von unendlich großen Figuren kann immer nur ein Ausschnitt dargestellt werden (Parzysz, 1988). Und: Ideale Objekte sind weder in der Natur zu finden noch können sie selbst mit dem besten Fertigungsverfahren hergestellt werden. Eine "Kugel" ist zum Schluss doch nur eine – wenn auch sehr gute – Annäherung an die geometrische Idee der Kugel.

Wird nun eine Repräsentation zur Darstellung von Figuren gewählt, so muss unterschieden werden zwischen *nahen* und *fernen* Repräsentationen (im Original: "close" bzw. "distant representations" (Parzysz, 1988, S. 80)). Nahe Repräsentationen, wie *Zeichnungen* von zwei- oder *Modelle* von dreidimensionalen Figuren (im Original: "drawing" bzw. "model" (Parzysz, 1988, S. 80)), sind in weitem Maße ähnlich zu ihren Konzepten, insbesondere in ihrer Dimension. Dennoch ist ein gewisses Maß an Interpretation durch den Leser erforderlich: Es ist dessen Aufgabe herauszufinden, welche Informationen die gewählte Darstellung übertragen soll. Eine gerade Linie kann, je nach Kontext, eine Gerade, einen Strahl oder eine Strecke darstellen. Bei fernen Repräsentationen, z. B. Zeichnungen von dreidimensionalen Figuren, ist das umso schwieriger. Parzysz stellt hierfür in seinen Ausführungen einige Beispiele dar. So kann beispielsweise die Zeichnung eines Parallelogramms auch als Zeichnung eines Ausschnitts einer Ebene oder eines im Raum liegenden Quadrats interpretiert werden. Das entscheidet sich durch den Kontext, den der Autor liefert oder der dem geschulten Leser durch Tradition geläufig ist (Parzysz, 1988). Die Problematik ist übrigens nicht nur auf die

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
<https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0>

Raumgeometrie und die Mathematik begrenzt: Die Übertragung von Informationen in Form von Daten, also systematischer Darstellungen eben dieser Informationen, gehört mit zum Kern der Aufgaben der Informatik und ist als Inhaltsbereich "Informationen und Daten" auch Teil der empfohlenen Bildungsstandards für das Schulfach Informatik (z. B. für die Sekundarstufe II: Röhner et al., 2016). Ein Beispiel: Die Ziffernfolge 1001101 wird erst dann zur Information, wenn klar ist, welche Codierung dem Datum – zu verstehen als Einzahl von Daten – zugrunde liegt. Als Zahl dargestellt im Binärsystem wird die Information "siebenundsiebzig", als Zeichen repräsentiert in binärem ASCII-Code "M" übertragen.

Zeichnung oder Modell? 3D-Modellierung mit 3D-DGS und CAD

Dynamische Geometriesysteme (DGS) haben sich über Jahrzehnte zu einem etablierten Werkzeug in der Geometriedidaktik entwickelt und werden im Mathematikunterricht rege verwendet. Neben der Möglichkeit Basisoperationen und Standardkonstruktionen – i. d. R. auf Basis algebraischer Angaben oder durch "Zusammenklicken" – zur Konstruktion geometrischer Zeichnungen in der Ebene durchzuführen, gibt es in dynamischen Raumgeometriesystemen (3D-DGS), beispielsweise in *GeoGebra3D*, seit geraumer Zeit entsprechende Möglichkeiten auch für Konstruktionen im Raum.

Die beispielhafte Konstruktion eines einem Würfel einbeschriebenen Tetraeders erfolgt nach Konstruktion des Würfels z. B. durch Angabe zweier Punkte im Raum direkt mit dem Befehl *Tetraeder(d)*, wobei *d* ein gleichseitiges Dreieck aufgespannt aus drei geeigneten Eckpunkten des Würfels bezeichnet (Sträßer et al., 2024). Der für Dynamische Geometriesysteme charakteristische Zugmodus ermöglicht es, an einem Eckpunkt des Würfels zu "ziehen", sodass sich der Rest der Zeichnung, so auch der Tetraeder, dynamisch mit verändert. Insbesondere für Lernende, denen funktionale statt prädikative Zugänge (Schwank, 2003) näher liegen, ergeben sich durch digitale Unterstützung Chancen für Zugänge zur Raumgeometrie. Im Gegensatz zur Zeichnung auf Papier operiert der Benutzer in 3D-DGS im virtuellen 3D-Raum, in dem er sich frei bewegen kann. Die Nähe zur betrachteten Figur erlaubt es damit trotz der Repräsentation auf dem zweidimensionalen Bildschirm von einem Modell zu sprechen (Elschenbroich & Sträßer, 2024).

Computer Aided Design (CAD) wurde für den professionellen, industriellen Kontext entwickelt und findet daher vor allem im berufsbildenden, technischen Unterricht Anwendung als eher statische Alternative zu 3D-DGS. Im allgemeinbildenden Unterricht in Deutschland – im Gegensatz z. B. zum Curriculum in Österreich – kann man CAD im Vergleich zu (3D-)DGS eher selten antreffen (Elschenbroich & Sträßer, 2024). Das Konstruieren in

AUTODESK Tinkercad (i. F. kurz Tinkercad) als Beispiel für CAD-Software zur direkten Modellierung basiert auf der Verbindung von Grundkörpern durch Boole'sche Funktionen (Komplement, Vereinigung, Schnitt) zum gewünschten Modell (Wachter et al., 2024). Im Fall des beispielhaften Tetraeders, der aus dem Würfel ausgeschnitten wird, führt das zu nicht-trivialen Konstruktionsschritten, um irrationale Kantenlängen und damit unerwünschte Artefakte durch sog. "Bohrungen" im Modell zu verhindern. Die Konstruktion wird en detail in Sträßer et al. (2024) beschrieben. Andere Modelle hingegen, insbesondere zusammengesetzte Volumenkörper, lassen sich dagegen mit Tinkercad, das explizit auch für den Einsatz im Unterricht entwickelt wurde, sehr einfach erstellen, sodass Lernende kreativ werden sowie an und mit den Modellen arbeiten können (Wachter, 2023).

AUTODESK Fusion 360 (i. F. kurz Fusion) gehört ebenfalls in die Kategorie der CAD-Software, ist jedoch im Vergleich zu Tinkercad wesentlich stärker am professionellen, industriellen Einsatz orientiert, was eine steile Lernkurve zum Einstieg in die Bedienung zur Folge hat. Zudem gehört die Software zu den parametrischen CAD-Programmen: Die Konstruktion von Modellen erfolgt i. d. R. durch Anfertigung einer zweidimensionalen Zeichnung, die im Anschluss zu einem dreidimensionalen Körper entlang einer Raumkurve *extrudiert* wird. Im Wesentlichen ist dies die direkte Umsetzung der Idee, durch Bewegung aus der Ebene in den Raum zu gelangen, wie sie Euklid schon beschreibt (Elschenbroich & Sträßer, 2024). Kantenlängen, Extrusionshöhen u. Ä. können durch Parameter variabel gehalten werden. Ähnlich dem Zugmodus in 3D-DGS wird das Modell automatisch bei Veränderung eines Parameters aktualisiert, jedoch können Punkte nicht direkt auf dem Bildschirm gezogen oder durch Schieberegler dynamisch verändert werden. Jede Änderung resultiert in einem Einzelbild. Außerdem bietet Fusion die Möglichkeit der Konstruktion von Punkten, Geraden und Ebenen im Raum, die beispielsweise im Fall der Konstruktion des Tetraeders dazu genutzt werden können, auf einfache Art und Weise vier "Ecken-Pyramiden" vom Würfel abzutrennen. Bei beiden dargestellten Programmen erzeugen wir im Sinne von Parzysz nicht nur Zeichnungen, sondern Modelle von Figuren: Der Benutzer kann sich auch hier, wie in 3D-DGS, frei im dreidimensionalen Raum bewegen und mit der repräsentierten Figur operieren.

Aus digital wird real: 3D-Druck von 3D-Modellen

Alle im vorigen Abschnitt benannten Softwarepakete bieten die Möglichkeit des Exports einer 3D-Datei. Üblich sind STL-Dateien (Standard Tessellation Language): Die Oberfläche des Modells wird durch Dreiecke angenähert. Solche Dateien können dann im Anschluss mit einem Slicer in Schichten unterteilt und anschließend mit einem 3D-Drucker aus Kunststoff in relativ

kurzer Zeit zum Anfassen hergestellt werden. Das ermöglicht, dass Schülerinnen und Schüler ihre digital erzeugten Konstruktionen in die Hand nehmen, betrachten und reflektieren können und schafft damit neue Möglichkeiten für Lernumgebungen im Rahmen der Raumgeometrie (Wachter et al., 2024). "Damit haben jetzt die digitalen 3D-Konstruktionen einen hybriden Charakter bekommen, in dem sowohl Aspekte von virtuellem 3D-Modell, ebener Zeichnung und realem 3D-Modell eine Rolle spielen." (Elschenbroich & Sträßer, 2024, S. 5).

Abschließende Worte

Die hier vorgestellten Programme stehen beispielhaft für Software aus den genannten Bereichen, jede ähnliche Umgebung bietet selbstverständlich ihre eigenen spezifischen Vor- und Nachteile. Die Verwendung von 3D-DGS oder 3D-CAD bietet im Gegensatz zum Zeichnen auf Papier eine Umgebung für die Arbeit mit Modellen statt nur einer Zeichnung. Für den Unterricht der Raumgeometrie ist das ein essentieller Bestandteil: "It is compulsory to pass through a phase of using a 3D representation (model), even at high school level" (Parzys, 1988, S. 79). Der 3D-Druck kann vermitteln: Digitale Modelle werden zu realen, (an-)fassbaren Modellen an und mit denen über die repräsentierten Figuren reflektiert werden kann. Als Gesamtpaket betrachtet ergeben sich so spannende Möglichkeiten, um mit Lernenden an digitalen und physischen Modellen in der Raumgeometrie zu arbeiten.

Literatur

- Elschenbroich, H.-J., & Sträßer, R. (2024). *RAUM-Geometrie mit digitalen Werkzeugen*. Der Mathematikunterricht, 70(2), 3–15.
- Parzys, B. (1988). „Knowing“ vs „seeing“. *Problems of the plane representation of space geometry figures*. Educational Studies in Mathematics, 19(1), 79–92. <https://doi.org/10.1007/BF00428386>
- Röhner, G., Brinda, T., Denke, V., Hellmig, L., Heußner, T., Pasternak, A., Schwill, A., & Seiffert, M. (2016). *Bildungsstandards Informatik für die Sekundarstufe II*. LOG IN: Vol. 36, No. 1. <https://dl.gi.de/handle/20.500.12116/17519>
- Schwank, I. (2003). *Einführung in prädikatives und funktionales Denken*. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 35(3), 70–78. <https://doi.org/10.1007/s11858-003-0002-5>
- Sträßer, R., Elschenbroich, H.-J., & Lürßen, P. (2024). *Raumgeometrisches Konstruieren von Polyedern – ein Besuch im Software-Zoo*. Der Mathematikunterricht, 70(2), 36–45.
- Wachter, L. (2023). *Körper erfinden, drucken, messen und berechnen*. *mathematik lehren*, 241, 38–41.
- Wachter, L., Dilling, F., & Platz, M. (2024). *Tetraeder und Würfel erkunden – Dualität digital und real*. Der Mathematikunterricht, 70(2), 46–55.