Zur Bewertungstheorie von Angebotsoptionen im Kreditgeschäft

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines
Doctor rerum politicarum
(Dr. rer. pol.)

an der
Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Dortmund

vorgelegt von
Dipl. Kfm. t. o. Thomas Keller
Singen/Htwl., 30. 05. 2001

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung und Problemstellung

Die von Black, Scholes und Merton entworfene Optionsbewertungsmethodik hat sich in der Bankenpraxis zur Bewertung von Finanztiteln mit asymmetrischem Risikoprofil weitgehend durchgesetzt. Insbesondere aus den Handelsräumen der Banken ist die Black-Scholes-Formel nicht mehr wegzudenken. Trotz der weiten Verbreitung und des großen Erfolges der Merton'schen Optionsbewertungstheorie existieren im Finanzgewerbe noch Bereiche, denen der Gedanke fremd ist, dass ein Finanzgeschäft optionale Elemente beinhalten kann. Ein großer Bereich, in dem sich das Gedankengut der Optionsbewertungsmethodik noch nicht etabliert hat, ist der Bereich des klassischen Kreditgeschäftes. Die Verantwortlichen ignorieren vielfach, dass der klassische Kredit viele, zum großen Teil implizite, optionale Elemente besitzt. Die optionalen Elemente im klassischen Bankprodukt, dem Kredit, entstehen durch Marktusancen und Wettbewerbsdruck einerseits und gesetzliche Vorschriften andererseits. Grundsätzlich gilt, dass alle einseitig eingeräumten Wahlrechte optionale Elemente im Sinne der Optionsbewertungstheorie darstellen. Bei den einseitig eingeräumten Wahlrechten eines Kredites handelt es sich vor allem um Sondertilgungsrechte und verbindliche Kreditangebote. Die verbindlichen Kreditangebote und die daraus resultierenden Preisrisiken sind im Folgenden Gegenstand der Untersuchung.

1.1 Preisrisiken der Kreditangebote

Bevor auf die Preisrisiken der Kreditangebote eingegangen werden kann, bedarf es einer Festlegung des Kreditbegriffs. Dabei erfolgt eine Abgrenzung zwischen der finanzwirtschaftlichen und juristischen Betrachtungsweise des Kreditbegriffs.

Der Kreditbegriff in der Bankenpraxis ist geprägt von der juristischen Sichtweise des Schuldverhältnisses. Ein Kredit beginnt im Verständnis vieler Banken in der Regel mit dem Abschluss des Kreditvertrages. Im klassischen Kreditgeschäft mit Nichtbanken (Privatkunden und kleine bis mittlere Unternehmen) ist es anders als im Wertpapier- und Devisengeschäft marktüblich, dass eine Bank dem potentiellen Kreditnehmer *verbindliche Konditionen* nennt, an die sich ein Kreditinstitut eine gewisse Zeit unabhängig von zwischenzeitlichen Marktpreisänderungen bindet. Die Bindung an abgegebene Kreditkonditionen erfolgt

1. bei Neuabschluss eines Kreditvertrages (Erstkonditionierung) oder
2. bei einer Anpassung der Kreditkondition (Folgekonditionierung)

Herkömmlicherweise werden mit Nichtbanken Kreditverträge abgeschlossen,

- die erst bei vollständiger Rückzahlung der ausbezahlten Kreditsumme enden, d. h. am Ende der Kreditlaufzeit, wobei
- sich die Kreditlaufzeit aus mehreren Zinsfestschreibungsperioden zusammensetzt.

Am Ende jeder Zinsfestschreibungsperiode verhandeln die Vertragspartner (die Bank und der Kunde) über eine Folgekonditionierung oder die Kündigung des Kreditvertrages. Zum Beispiel beträgt die Kreditlaufzeit eines typischen Hypothekenkredites ca. 21 Jahre, die maximale Zinsbindung in der Regel jedoch nur 10 Jahre, sodass in diesem Beispiel mindestens zwei Zinsanpassungen notwendig wären. Beträgt die Zinsbindung mehr als 10 Jahre, so hat der Kunde ab dem zehnten Jahr bis zum Zinsbindungsende jederzeit die Möglichkeit, ohne eine Vorfälligkeitsentschädigung entrichten zu müssen, den Kredit ganz oder teilweise zu tilgen[1]. Während bei der Erstkonditionierung die Banken dem Kunden aufgrund von Branchenusancen Angebote verbindlich unterbreiten, werden die Kreditinstitute bei Zinsanpassung von Krediten in Verbindung mit dem AGB-Gesetz durch höchstrichterliches Urteil[2] und der klassischen Auslegung der Rechtsprechung verpflichtet, mindestens ein verbindliches Angebot abzugeben. In der Regel geben Banken nicht nur verbindliche Angebote für eine einzige, bestimmte Kreditkondition, sondern für mehrere Kreditkonditionen ab, um dem Kunden eine breite Palette an Auswahlmöglichkeiten anzubieten. Die einzelnen Kreditkonditionen unterscheiden sich in der Regel in der Laufzeit, dem Auszahlungskurs (Disagio) oder der Tilgungsrate. Aus diesem Portfolio der angebotenen Kreditkonditionen kann der Kunde maximal eine annehmen. Der Kunde hat somit ein Wahlrecht zur Annahme einer Kreditkondition. Die verbindlichen Konditionen für einen Kredit werden dem Kunden kostenlos angeboten, d. h. er bezahlt keine Prämie dafür, dass eine Bank sich über einen definierten Zeitraum an die Konditionen bindet. Der Kunde ist Inhaber einer Kaufoption auf eine Kreditkondition, denn er besitzt das Recht, aber nicht die Verpflichtung, die Kreditkondition anzunehmen, d. h. zu kaufen.

Die finanzwirtschaftliche Sicht betrachtet den Kredit nicht im Rahmen von Schuldverhältnissen sondern aus dem Blickwinkel von Zahlungsströmen

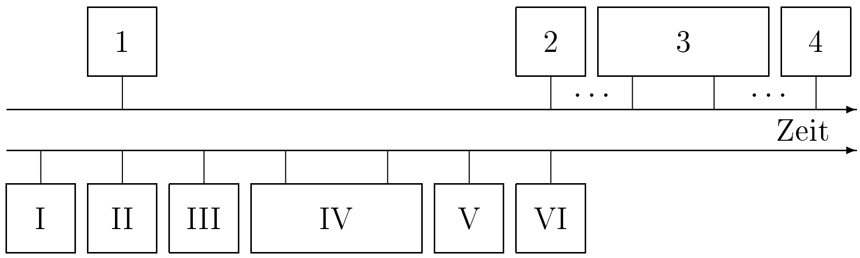
[1] Siehe BGB §609a.

[2] Vgl. NJW (1989): BGH Urteil vom 06. 04. 1989 – III ZR 281/87 (Hamm), NJW (1986): BGH Urteil vom 06. 03. 1986 – III ZR 195/84 (München).

bzw. als Wahlrecht auf Zahlungsströme. Die Zahlungsströme oder das Wahlrecht auf einen speziellen Zahlungsstrom in Form eines Kreditangebotes sind zeitlich dem Vertragsabschluss oder der Zinsanpassung vorgelagert. Finanzwirtschaftlich beginnt ein Kredit bereits zu dem Zeitpunkt, zu dem die Bank dem Kunden eine Kondition verbindlich nennt. Dabei ist es finanzwirtschaftlich unerheblich, ob es sich um die Erstkonditionierung oder die Folgekonditionierung handelt. Ein erstes Beratungsgespräch kann daher aus finanzwirtschaftlicher Sicht bereits der Beginn des Kredites sein.

Der Beginn des finanzwirtschaftlichen Kredites ist dem Beginn des juristischen Kredites vorgelagert. Andererseits endet der finanzwirtschaftliche Kredit meistens früher als der juristische mit dem Zinsbindungsende und nicht mit Ende des Kreditvertrages. Eine neue Zinsanpassung ist ein Neuabschluss eines Kredites zu den zum Zeitpunkt der Zinsanpassung geltenden Marktpreisen. Die einzelnen Phasen eines Kredites lassen sich in Abhängigkeit der juristischen und finanzwirtschaftlichen Betrachtungsweise wie in Abbildung 1.1 dargestellt unterscheiden.

Der Zeitraum zwischen Angebotsabgabe und Annahme/Vertragsabschluss wird als *Angebotsphase* bezeichnet. Während dieser Zeit hält sich die Bank an ein Kreditangebot gebunden. Nach Abschluss des Kreditvertrages beginnt die Auszahlungsphase. In der Regel werden Kredite an Nichtbanken nicht in einem Betrag ausbezahlt. Die Auszahlung ist vielmehr an gewisse Bedingungen geküpft, wie zum Beispiel an den Baufortschritt bei Hypothekenkrediten. Dies führt dazu, dass die Banken weder den Zeitpunkt, noch die Höhe der nächsten Auszahlung exakt kennen. Der Zeitraum zwischen erster und letzter Auszahlung wird *Auszahlungsphase* genannt. Die Prüfung der Bonität und andere formale Notwendigkeiten, die zu einer Verzögerung zwischen Annahme und Abschluss des Kreditvertrages führen, bleiben außer Acht. Der letzten Auszahlung schließt sich der Zeitraum der planmäßigen Zins- und Til-



Juristische Betrachtung		
1	=	Abschluss des Kreditvertrages
2	=	erstes Zinsbindungsende (Folgekonditionierung oder Kündigung)
3	=	n-tes Zinsbindungsende (Folgekonditionierung oder Kündigung)
4	=	Ende des Kreditvertrages

Finanzwirtschaftliche Betrachtung		
I	=	Angebotsabgabe
II	=	Annahme und Abschluss des Kreditvertrages
III	=	Auszahlung
IV	=	planmäßige Zins- und Tilgungszahlungen
V	=	Sondertilgung
VI	=	Rückzahlung am Zinsbindungsende

Abbildung 1.1: Abgrenzung des juristischen und finanzwirtschaftlichen Kreditbegriffes

gungsleistungen bis zur Rückzahlung an. Die Planmäßigkeit der Zahlungen dieses Zeitraums wird durch eventuelle Sondertilgungen gestört, die der Kunde während der Zinsbindungsperiode leistet. Im finanzwirtschaftlichen Sinne ist der Zeitpunkt des Zinsbindungsendes der Zeitpunkt der Rückzahlung. Störungen im Zahlungsablauf durch bonitätsbedingten Ausfall des Kunden werden in der vorliegenden Arbeit nicht berücksichtigt.

Die Angebotsphase ist ein außerbilanzielles Element eines Kredites, da dieser Zeitraum nicht im Rechenwerk eines Kreditinstitutes ausgewiesen wird.

Die Banken sind nicht verpflichtet, Aussagen über Art und Ausmaß bindender Angebote zu machen. Dies gilt nicht nur für das Handelsrecht, sondern auch für die aufsichtsrechtlichen Anforderungen des Bundesaufsichtsamtes für das Kreditwesen oder der Deutschen Bundesbank. Die Sondertilgungsmöglichkeit in Kreditverträgen wird ebenfalls nicht in der Rechnungslegung oder den Meldungen an die Aufsichtsbehörden aufgeführt und ist somit auch als außerbilanzielles Element zu bezeichnen. Daraus folgt, dass der juristische Kreditbegriff nicht alle finanzwirtschaftlichen (preisbildenden) Aspekte eines Kredites erfasst. Die finanzwirtschaftliche Betrachtung eines Kredites hat sich aus diesem Grund von dem schuldrechtlich geprägten Begriff zu lösen und alle, d. h. auch die außerbilanziellen Elemente in die Bewertung mit einzubeziehen.

1.2 Definition der Angebotsoption

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Problematik der Angebotsoptionen im Kreditgeschäft, die im Folgenden definiert werden. Der Schwerpunkt der Ausarbeitung liegt auf der Bewertung der verbindlichen Angebote und dem Einfluss der verbindlichen Angebote auf die Ertragssituation der Kreditinstitute.

Die verbindlichen Kreditangebote stellen für den Kunden ein *zeitlich begrenztes Wahlrecht zur Annahme oder Nichtannahme eines Kredites mit spezifizierten Konditionen* dar. Ein im wirtschaftlichen Sinne „rationaler“ Kunde wird das Kreditangebot annehmen, wenn er innerhalb der Angebotsfrist den Kredit nicht zu günstigeren Konditionen abschließen kann. Im anderen Fall wird er das Angebot verfallen lassen und keinen Kredit aufnehmen bzw. den Kredit zu anderen als im Angebot spezifizierten Konditionen abschließen.

Wirtschaftlich betrachtet ist eine Bank, die ein Kreditangebot unterbreitet, in der *Stillhalterposition einer Option auf bestimmte Kreditkonditionen.* Diese Option wird in dieser Arbeit ANGEBOTSOPTION genannt.

Definition 1 (ANGEBOTSOPTION) Eine Angebotsoption ist das zeitlich begrenzte Wahlrecht für den Kunden, eine hinsichtlich

- Nominalvolumen
- Auszahlungskurs
- Nominalzinssatz
- Zins- und Tilgungszahlungstermine
- Zinsbindungsende

genau spezifizierte Kreditkondition anzunehmen oder auf die Annahme zu verzichten. ⋆

Das Risiko, dem sich eine Bank bei verbindlichen Angeboten aussetzt, ist das Preisrisiko (Zinsänderungsrisiko) der Refinanzierung. Ein finanzwirtschaftliches Risiko bezeichnet die positive Wahrscheinlichkeit, einen monetären Verlust zu erleiden. Dieser monetäre Verlust konkretisiert sich im Wertverfall bzw. in einer unvorteilhaften Preisbewegung eines Finanztitels. Erfolgt die Preisbewegung aufgrund einer Änderung der Zeitpräferenz des Konsums, wird das Preisrisiko als Zinsänderungsrisiko bezeichnet[3]. Im Rahmen dieser Arbeit wird nur das Zinsänderungsrisiko betrachtet und kurz Preisrisiko genannt.

Nimmt der Kunde das Angebot an, d. h. er übt die Angebotsoption aus, so unterliegt die Bank dem Risiko, dass die Zinsen während der Laufzeit der Angebotsoption steigen. Die benötigten Mittel müssen am Kapitalmarkt im Verhältnis zum Kredit zu ungünstigeren Konditionen aufgenommen werden,

[3]Eine Preisbewegung, die durch eine veränderte Bonität des Schuldners verursacht ist, wird als Bonitätsrisiko oder Kreditrisiko bezeichnet.

und es sind Verluste zu erleiden. Diesem Risiko steht jedoch keine explizite Vergütung durch den Kunden gegenüber.

Banken sind sich vielfach dem Preisrisiko der verbindlichen Angebote bewusst. Dennoch kennen sie nicht Art und Ausmaß sowie die Tatsache, dass sie gezwungenermaßen Stillhalter in einer Option sind. Desweiteren negieren Banken diese Risiken in ihrem Risikomanagement entweder gänzlich oder spekulieren mehr oder weniger erfolgreich mit dieser Risikoposition. Sie ignorieren bislang die Angebotsoption in der Kalkulation ihrer Kredite vollständig. Ein wesentlicher Grund hierfür dürfte die Ausgestaltung des in der Bankenwelt derzeit dominierenden Konzeptes zur Kalkulation von Bankprodukten, des Marktzinskonzeptes[4], sein. Bei der Kalkulation nach dem Marktzinskonzept wird ein Kredit anhand eines zahlungsstromkongruenten, barwertneutralen Gegengeschäftes, der preisrisikofreien Refinanzierung, bewertet. Dabei werden ausschließlich *deterministische* Zahlungsströme unterstellt. Wahlrechte, wie die Angebotsoptionen bleiben unberücksichtigt. Folglich bewertet das Marktzinskonzept einen Kredit finanzwirtschaftlich nicht korrekt. Eine Vorkalkulation der Angebotsoption, beziehungsweise Sicherungsmaßnahmen zur Vermeidung von Verlusten erfolgten und erfolgen bislang nicht.

Die Banken versuchen, dem Preisrisiko der Angebotsoptionen mit einer Refinanzierungsstrategie zu begegnen, die von Erwartungen bezüglich der Zinsentwicklung innerhalb der Angebotsfrist abhängig ist. Diese Managementstrategien sind durch eine Risikoposition geprägt, die den Optionscharakter der verbindlichen Angebote nicht nachvollzieht, wie im Folgenden gezeigt wird:

- Erwartet eine Bank fallende Zinsen, refinanziert sie sich erst mit Annahme des Kreditangebotes.

[4]Vgl. Flesch, Piaskowski, Sièvi (1987) und die dort angegebene Literatur.

- Erwartet eine Bank steigende Zinsen, refinanziert sie sich bei Angebotsabgabe und hofft, dass der Kunde die Angebotsoption ausübt.

Diese Strategie und deren Auswirkung der Steuerung von Zinsänderungsrisiken wird anhand eines Beispiels erläutert.

Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit wird aus Vereinfachungsgründen von einem endfälligen Kredit mit einem Auszahlungskurs von 100,00% sowie jährlichen Zinszahlungen ausgegangen. Der Nominalzins ist somit die variable Größe der Kreditkondition. Diese ist bei Angebotsabgabe abhängig von der Laufzeit und der geltenden Zinsstrukturkurve. Die Bank verpflichtet sich in dem Angebot, den Nominalwert des Kredites auszuzahlen und den konditionierten Nominalzins zu empfangen, falls der Kunde das Angebot annimmt. Der Kunde darf in diesem Beispiel nur am Verfalltag der Angebotsoption den Kredit aufnehmen oder nicht aufnehmen. Ein rational handelnder Kunde wird die Angebotsoption immer dann annehmen, wenn ein neues Angebot nicht günstiger wäre und auf das Angebot nicht zurückgreifen, wenn ein neues Angebot vorteilhafter wäre[5].

Angenommen eine Bank unterbreitet einem Kunden ein Angebot über einen Kredit zu nominal 6,00% ($S(t_a)$) und Auszahlungskurs 100,00%. Der Kunde müsste sich nach 14 Tagen entscheiden, ob er das Angebot annimmt oder nicht. Er wird immer dann annehmen, falls ein alternativer Kredit zum Fälligkeitszeitpunkt mehr als 6,00% ($S(t_e)$) Nominalzins bei 100,00% Auszahlungskurs besäße bzw. bei einem Nominalzins von 6,00% weniger als 100,00% auszahlen würde. In diesem Einführungsbeispiel stellen $S(t_a)$ den Marktzinssatz der Bank zum Zeitpunkt der Angebotsabgabe und $S(t_e)$ den Marktzinssatz dar, der zu dem Zeitpunkt gilt, an dem das Angebot angenommen oder abgelehnt wird, oder die Angebotsfrist abgelaufen ist. Der Verfalltag

[5] Die Nullalternative ist im Rahmen der Arbeit, den Kredit zu aktuellen Konditionen aufzunehmen. Sie ist jedoch identisch mit der Nullalternative, keinen Kredit aufzunehmen, da in beiden Fällen der Kapitalwert null ist.

der Option wird mit t_e bezeichnet. Konditioniert eine Bank nach dem Marktzinskonzept, so sind diese Marktzinssätze zugleich die Opportunitäts- bzw. Refinanzierungszinssätze des Kreditangebotes[6]. Refinanziert die Bank zum Zeitpunkt der Angebotsabgabe, t_a, auf Termin für den Zeitpunkt t_e, ergibt sich in Abhängigkeit der Zinssituation zum Zeitpunkt t_e die in Tabelle 1.1 aufgeführte Situation bezüglich der Zahlungsströme der Bank.

	$S(t_e) \geq S(t_a)$ Kunde nimmt an	$S(t_e) < S(t_a)$ Kunde lehnt ab
Kredit	$S(t_a)$	0
Refinanzierung	$-S(t_a)$	$-S(t_a)$
Wiederanlage	0	$S(t_e)$
Nettoertrag	0	$S(t_e) - S(t_a) < 0$

Tabelle 1.1: Pay-Off Diagramm bei Refinanzierung zum Zeitpunkt der Angebotsabgabe t_a

Die Bank ist bei dieser Managementstrategie dem Risiko *fallender* Zinsen ausgesetzt. Ist $S(t_e) < S(t_a)$, lehnt der Kunde das Angebot ab, und die Bank kann nur noch zu geringeren Zinssätzen $S(t_e)$ die refinanzierte Liquidität anlegen. Der Zinsaufwand der Refinanzierung beträgt jedoch $S(t_a)$. Die Bank erleidet einen Verlust von $S(t_e) - S(t_a)$ pro Jahr und Geldeinheit, ohne im Falle der Annahme des Kreditangebotes durch den Kunden profitieren zu können.

Refinanziert die Bank zum Zeitpunkt t_e, dem Verfalltag der Angebotsoption, stellt sich der Ertrag wie in Tabelle 1.2 verdeutlicht dar. Die Bank ist bei dieser Managementstrategie dem Risiko *steigender* Zinsen ausgesetzt. Ist $S(t_e) < S(t_a)$, lehnt der Kunde das Angebot ab. Da die Bank nicht refinanziert hat, entstehen ihr weder Gewinne noch Verluste. Steigt der Zinssatz

[6] Diese Opportunitätszinsen beinhalten keine Marge.

	$S(t_e) \geq S(t_a)$ Kunde nimmt an	$S(t_e) < S(t_a)$ Kunde lehnt ab
Kredit	$S(t_a)$	0
Refinanzierung	$-S(t_e)$	0
Nettoertrag	$S(t_e) - S(t_a) < 0$	0

Tabelle 1.2: Pay-Off Diagramm bei Refinanzierung zum Zeitpunkt der Angebotsannahme t_e

$S(t_e)$ hingegen über den konditionierten Zinssatz $S(t_a)$, ist es vorteilhaft für den Kunden, das Angebot anzunehmen. Die Bank muss im Anschluss an die Annahme zu $S(t_e)$ refinanzieren und erleidet einen Verlust von wiederum $S(t_e) - S(t_a)$.

Der Bank ist es nicht möglich, mit der traditionellen Vorgehensweise Verluste aus Angebotsoptionen zu vermeiden. Auskömmliche Margen, institutstreue Kunden und ruhige Kapitalmärkte sind vermutlich ursächlich dafür, dass diese Strategie in der Vergangenheit keine gravierenden Folgen auf die Ertragssituation der Banken hatte. Die vorgestellten Strategien sind nicht in der Lage, das Preisrisiko zu eliminieren. Nur durch erfolgreiche Zinsspekulation werden Verluste vermieden. Zusätzliche Erträge können auf der anderen Seite nicht erwirtschaftet werden, da bei fallenden Zinsen ein rationaler Kunde die Angebotsoption verfallen lässt und neu über die Konditionen verhandelt. Die traditionelle Strategie ist nicht geeignet, das Risiko der verbindlichen Angebote zu steuern.

Einer Bank bleiben drei Möglichkeiten des spekulationsfreien Managements dieses Zinsänderungsrisikos:

1. Keine verbindlichen Angebote abgeben.
2. Die Stillhalterposition in der Angebotsoption verkaufen.

3. Die Angebotsoption duplizieren.

Mit der Entscheidung, keine verbindlichen Angebote abzugeben, bricht eine Bank Handelsusancen und riskiert, Kunden und Marktanteile zu verlieren. Zudem muss sie auf das lukrative Geschäft mit Zinsanpassungen verzichten, da hier die Abgabe verbindlicher Angebote zwingend ist.

Die Angebotsoption zu verkaufen bedeutet, dass ein anderes Kreditinstitut in das verbindliche Angebot eintritt. Aus dem Verkauf der Angebotsoption folgt auch der Verzicht auf das Kreditgeschäft, da die Angebotsoption alleine nicht handelbar ist. Die Prämie, die eine Bank für den Verkauf der Stillhalterposition zu leisten hat, bekommt diese vom potentiellen Kreditnehmer nicht ersetzt. In diesem Fall wäre es besser gewesen, dem Kunden kein verbindliches Angebot zu unterbreiten.

Die Angebotsoption duplizieren heißt, dass eine Bank versucht, mit den an den Finanzmärkten gehandelten Produkten den Zahlungsstrom einer Angebotsoption identisch derart abzubilden, dass ein möglicher Refinanzierungsschaden durch einen Ertrag aus diesem Duplikationsportfolio kompensiert wird. Die für diese Sicherungsgeschäfte anfallenden Prämien kann die Bank in bestimmten Fällen durch die Kreditmarge[7] abdecken. Voraussetzung für den Ausgleich ist, dass der Kunde einen Kredit abschließt, und die Sicherungskosten in die Marge einfließen.

Die Duplikation von Angebotsoptionen ist diejenige Alternative, die es einer Bank erlaubt, das in Angeboten implizite Refinanzierungsrisiko zu steuern, ohne auf das Kreditgeschäft ganz oder teilweise verzichten zu müssen. Sie ist auch der finanztheoretische Ansatz zur Bewertung und Analyse von Angebotsoptionen. Ausgehend von den Prinzipien einer arbitragefreien Bewertung von Finanztiteln wird der Zahlungsstrom einer Angebotsoption mittels eines anderen oder mehrerer anderer am Kapitalmarkt gehandelter Finanztitel,

[7] Vgl. Abschnitt 3.2.

deren Preise bekannt sind, nachgebildet. Bei dieser Strategie der Duplikation sind folgende Eigenschaften einer Angebotsoption zu beachten, die sie von anderen, klassischen Rentenoptionen unterscheiden, wie zum Beispiel die börsengehandelten Optionen auf Futureskontrakte und Anleihen oder die nicht börsengehandelten Optionen auf Swaps und Anleihen:

1. Der Stillhalter empfängt explizit keine Prämie.
2. Der der Option zugrunde liegende Basiswert besteht aus mehreren Kreditkonditionen, d. h. Zahlungsströmen, aus denen sich der Optionshalter einen oder keinen aussuchen kann.

Die erste Eigenheit betrifft die Zusammensetzung des Hedge-Portfolios. Das Hedge-Portfolio darf zum Zeitpunkt der Initiierung, d. h. der Angebotsabgabe keine Zahlung aufweisen. Nur im Falle der Ausübung durch den Kunden wird der Kredit vergeben, und eine Bank kann eventuell Sicherungskosten kompensieren.

Die zweite Eigenschaft beeinflusst den Ausübungswert der Angebotsoption. Abhängig von der Zinsstruktur bei der Ausübung wird der Kreditnehmer sich für eine Kondition entscheiden. Da er unter mehreren Konditionen eine aussuchen kann, wird er sich prinzipiell für die für ihn günstigste entscheiden.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Problematik der Angebotsoptionen im Kreditgeschäft. Der Schwerpunkt hierbei liegt auf der Bewertung der verbindlichen Angebote und dem Einfluss der verbindlichen Angebote auf die Ertragssituation der Kreditinstitute. Hierzu werden zu Beginn der Analyse die allgemeinen, von Verteilungsannahmen unabhängigen, d. h. modellunabhängigen Bewertungsprinzipien von Zahlungsströmen dargestellt. Anhand dieser Bewertungsprinzipien wird eine modellunabhängige und allgemeingültige Bewertungsgleichung für Angebotsoptionen formuliert.

Der Bewertung der Angebotsoptionen folgt ein Erklärungsmodell hinsichtlich einer zusätzlichen Ertragsquelle, aus der eine Bank die Aufwendungen aus Angebotsoptionen kompensieren kann.

Die Beschreibung eines mit den Prinzipien der Finanzierungstheorie konsistenten Modells von Zinsstrukturentwicklungen, das Modell von Ho und Lee (1986), bildet den Einstieg in die Entwicklung eines numerischen Optionspreismodells für Angebotsoptionen, das die quantitative Wertbestimmung in Geldeinheiten erlaubt.

Zur numerischen Wertermittlung werden die Parameter des Optionspreismodells mittels der in der Praxis gängigen Black-Scholes-Formel derart kalibriert, dass Schätzungen für Marktpreise von Angebotsoptionen ermöglicht werden.

Kapitel 2

Marktmodell und Bewertungsprinzipien

Das vorhergehende Kapitel stellt die Problematik von verbindlichen Angeboten für die Kreditwirtschaft vor. Dabei wird der Kreditbegriff juristisch und finanzwirtschaftlich abgegrenzt. Dieser Abgrenzung geht keine Definition des Kreditbegriffes voraus. Der Grund hierfür liegt in der uneinheitlichen Auffassung über den Kreditbegriff. Die juristische Auffassung sieht den Kredit als Gelddarlehen[1] und stellt auf den schuldrechtlichen Charakter ab. Die ökonomische Auffassung interpretiert den Kredit als eine Überlassung von Kapital bzw. Kaufkraft auf Zeit[2]. Der Zins für die temporäre Überlassung des Kapitals stellt ein Entgeld für den Nutzungs- bzw. Konsumverzicht des Kreditgebers dar. Unabhängig von der Betrachtungsweise beinhaltet der Begriff Kredit Ansprüche auf zukünftige Zahlungen seitens des Kreditgebers an den Kreditnehmer. Ansprüche auf Zahlungen werden auf den Finanzmärkten als Finanztitel bezeichnet. Ein Kredit ist demnach ein Finanztitel, der bestimm-

[1]Vgl. Kreditwesengesetz (KWG) §1 und §21; BGB §§607 ff.

[2]Vgl. verschiedene Wirtschafslexika wie Gablers Bank Lexikon (1997) oder Eichwald (1994).

te Spezifikationen aufweist. Die finanztheoretische Auffassung des Kredites stellt den Geldbetrag von Zahlungsansprüchen und nicht den Rechtsgrund in den Vordergrund. Bei der in dieser Arbeit verwendeten Definition handelt es sich um eine finanzwirtschaftlich oder zahlungsstromorientierte Auffassung des Kredites. Vor einer formalen Definition des Kredites werden das Marktmodell und die für die Arbeit relevanten Finanztitel beschrieben.

2.1 Das Marktmodell

Im Rahmen dieser Arbeit wird zunächst ein vollkommener, vollständiger und diskreter Markt unterstellt, auf dem Finanztitel gehandelt werden[3]. Die auf einem Finanzmarkt agierenden Individuen werden Finanzmarktteilnehmer oder *Investoren* genannt. Die Handelszeitpunkte t des Marktes sind diskret und endlich, d. h. es können nur zu den Zeitpunkten $t \in [0,T];\ t \in \mathbb{N};\ T < \infty$ Handelstransaktionen stattfinden. T bezeichnet den letzten Handelszeitpunkt des Finanzmarktes. Der Markt ist ein Markt unter Unsicherheit. Dies bedeutet, es herrscht Ungewissheit über einen Umweltzustand ω zum Zeitpunkt t, in dem sich der Markt befindet. Die Unsicherheit wird durch einen Ereignisraum Ω beschrieben, wobei $|\Omega| < \infty$ und genau ein Umweltzustand $\omega \in \Omega$ realisiert wird. Es wird ein fester, filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, W, (F(t)_{0 \leq t \leq T})$ mit $F_0 = \{\emptyset; \Omega\}; F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_T$ unterstellt. Dieser Wahrscheinlichkeitsraum gewährleistet, dass zu diskreten Zeitpunkten gehandelt wird und zu jedem Zeitpunkt $t \in [0,T]$ endlich viele Umweltzustände existieren.

[3] Diese Annahmen entsprechen den allgemeinen Annahmen zur Beschreibung diskreter Finanzmärkte. Vgl. Jarrow (1988), Lamberton, Lapeyre (1996).

2.1.1 Beschreibung des Finanzmarktes

Alle Finanztitel werden in einem organisierten Markt gehandelt. Es besteht Unsicherheit bezüglich des Zahlungsstromes für die Zukunft. Ein beliebiger Finanztitel x wird durch den Zahlungsanspruch $x(t, \omega)$ zum Zeitpunkt t und Umweltzustand ω beschrieben. Der Zahlungsanspruch $x(t, \omega) \in \mathbb{R}$ wird in Geldeinheiten ausgedrückt. Jeder Finanztitel x besitzt in $t = 0$ einen Wert, d. h. er hat einen Preis, da er in t in jedem Zustand $\omega \in \Omega$ einen Zahlungsstrom $x(t, \omega)$ in Geldeinheiten erzeugt. Ein Finanztitel kann als Funktion $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ charakterisiert werden, die jedem Umweltzustand $\omega \in \Omega$ eindeutig einen Zahlungsstrom $x(t, \omega)$ zuweist. Die Menge $\mathcal{M}$ aller handelbaren Finanztitel in $t = 0$ ist eine Teilmenge der Menge aller Funktionen, die den Zustandsraum Ω in $\mathbb{R}$ abbilden.

Zur Beschreibung des Marktes werden die Annahmen 2.1 – 2.6 getroffen[4]:

Annahme 2.1 (handelbare Finanztitel) *Falls $x,\ y \in \mathcal{M}$ und $\alpha_x,\ \alpha_y \in \mathbb{R}$, dann gilt $(\alpha_x x + \alpha_y y) \in \mathcal{M}$. Die Menge $\mathcal{M}$ ist lineare Teilmenge von $\mathbb{R}^{\Omega}$, d. h. aller Funktionen $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$; jede beliebige Kombination von handelbaren Finanztiteln ist wiederum ein handelbarer Finanztitel. Die Zahlungsströme der Finanztitel aller vergangenen Perioden erzeugen eine Informationsmenge $\sigma(\mathcal{M}_t)$. Diese Menge ist eine Teilmenge von Ω, die ausschließlich aus den Informationen über alle realisierten Zahlungsströme der Finanztitel gebildet wird.*

Annahme 2.2 (eingeschränkte Erwartungen) *Für jeden einzelnen Investor i aus der endlichen Anzahl von Investoren stellt $x(t, \omega)$ in $t = 1$ den Zahlungsstrom des beliebigen Finanztitels x in Geldeinheiten für den Zustand $\omega \in \Omega$ dar. Umgekehrt gibt die Kenntnis des Zahlungsstromes zum Zeitpunkt $t = 1$, sowie die Kenntnis, welches Ereignis zu welchem Zahlungsstrom*

[4]Die folgenden Ausführungen sind Jarrow (1988) entnommen.

führt, Aufschluss über den möglichen Umweltzustand aus Ω*, der zu diesem Zahlungsstrom führte. Die Menge* $\sigma(\Omega)$ *ist die kleinste* σ*-Algebra über* Ω*, die von den Funktionen* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$ *erzeugt wird und ist die formale Beschreibung der Menge an Zuständen, die einen bestimmten Zahlungsstrom generieren. Die Beschreibung eines Finanzmarktes wird umso genauer, je mehr Informationen über die Zahlungsströme der Finanztitel im Zeitablauf vorliegen. Die Erwartungen der Investoren bezüglich des Zahlungsstromes in der jeweils folgenden Periode sind durch die Informationen der vergangenen Zahlungsströme eingeschränkt. Es gilt* $\sigma(\mathcal{M}_t) \subseteq \sigma(\mathcal{M}_s)\ \forall\ 0 \leq t \leq s \leq T$ *und* $\sigma(\mathcal{M}_0) = \{\emptyset, \Omega\}$.

Annahme 2.3 (homogene Erwartungen) *Alle Investoren sind sich über den Zahlungsstrom* $x(t,\omega)$ *eines Finanztitels* $x \in \mathcal{M}$ *zum Zeitpunkt* t *einig, falls der Zustand* ω *eingetreten ist. Für ein Ereignis* $\mathcal{H} \in \sigma(\mathcal{M}_T)$ *gilt* $\mathrm{Prob}_i[\mathcal{H}] = 0$ *genau dann, wenn* $\mathrm{Prob}_j[\mathcal{H}] = 0$ *für jeden Investor* i *und* j.

Annahme 2.4 (friktionslose Märkte) *Es existieren zu jedem Zeitpunkt* $t \in \{0, T-1\}$ *keine Transaktionskosten, Steuern und keine Restriktionen bezüglich Leerverkäufen. Jeder Finanztitel ist beliebig teilbar und in beliebigen Stücken zu jedem Handelszeitpunkt handelbar.*

Annahme 2.5 (vollkommene Konkurrenz) *Jeder Investor ist Preisnehmer. Ein einzelner Investor hat keinen Einfluss auf die Preisbildung bei Abschluss des Geschäftes.*

Annahme 2.6 (Nichtsättigung) *Jeder Investor* i *ist bezüglich seines Vermögens unersättlich. Er nutzt jede Gelegenheit, sein Vermögen zu vermehren.*

Die Annahmen beschreiben einen allgemeinen Finanzmarkt, auf dem alle Finanztitel $x \in \mathcal{M}$ gehandelt werden. Inhalt der Finanzierungstheorie ist das Verständnis über die Preisbildung von Finanztiteln am Geld- und Kapitalmarkt[5]. Der Kapitalmarkt ist die Summe der auf ihm agierenden Individuen, den *Investoren*[6], mit ihren individuellen Entscheidungen, Finanztitel zu kaufen oder zu verkaufen. Das Verständnis des Nachfrage- und Angebotverhaltens von Investoren ist der Ausgangspunkt, um das Zustandekommen von Preisen für Finanztitel erklären zu können. ROBERT JARROW (1988) fasst ausgehend von der axiomatischen Struktur der Ordinalen Nutzentheorie die Bewertungsprinzipien von Zahlungsströmen zusammen. Auf diese formale Beschreibung wird im Folgenden Bezug genommen[7].

2.1.2 Bewertungsprinzipien von Finanztiteln

Grundlage einer allgemeinen, formalen Beschreibung von Bewertungsregeln für zustandsabhängige Zahlungsströme unter Sicherheit ist die Axiomatik einer Ordinalen Nutzentheorie. Anhand der Axiome der Ordinalen Nutzentheorie lassen sich Sätze ableiten, die zu einer allgemeinen Arbitragetheorie innerhalb der Entscheidungstheorie unter Unsicherheit führen.

Die Ordinale Nutzentheorie betrachtet Investitionsentscheidungen unter Sicherheit und führt mit den ihr zugrunde liegenden Axiomen und dem Kriterium der Maximierung einer Nutzenfunktion zu optimalen Entscheidungen, solange ein Element x aus der Menge aller Finanztitel $\mathcal{M}$ nicht eine Lotterie darstellt, deren Ereignisraum eine Teilmenge von $\mathcal{M}$ ist. Eine Lotterie ist ein Finanztitel, dessen Eintrittswahrscheinlichkeiten einzelner Ansprüche aus dem Finanztitel bekannt sind. Da die Höhe des einzelnen Anspruchs aus dem Finanztitel im voraus unsicher ist, spricht man von einem riskan-

[5] Grundlegende Inhalte der modernen Finanzierungstheorie finden sich in Fama, Miller (1972), Hirshleifer (1970), Sharpe (1970) sowie Duffie (1988) und (1992).

[6] Unabhängig vom Standpunkt des Käufers oder Verkäufers werden die Marktteilnehmer des Kapitalmarktes als Investoren bezeichnet.

[7] Vgl. Jarrow (1988), Kapitel 2 und 3, sowie 7 und 8.

ten Finanztitel. Unsicherheit bedeutet, dass der Ausgang einer Lotterie nicht bekannt ist, d. h. der Eintritt von zukünftigen Ereignissen ist zum heutigen Zeitpunkt nicht bekannt. Investitionsentscheidungen unter Unsicherheit können mit den Axiomen der Kardinalen Nutzentheorie beschrieben werden. Das Ergebnis der Kardinalen Nutzentheorie besagt, dass der Nutzen einer Lotterie gleich dem erwarteten Nutzen der Ereignisse (Erwartungsnutzen) ist[8]. Der Bestimmung des Nutzens einer Lotterie geht die Bestimmung der Nutzen der einzelnen Ereignisse voraus, aus denen im zweiten Schritt der Erwartungswert gebildet wird.

Aus der Kardinalen Nutzentheorie heraus entwickelt sich eine allgemeine Arbitragetheorie[9]. Ziel dieser allgemeinen Arbitragetheorie ist die Bewertung von Finanztiteln relativ zu anderen Finanztiteln, deren Preise exogen gegeben sind[10].

Die Methodik der arbitragefreien Bewertung von Finanztiteln wird im Folgenden kurz erläutert, da sie Grundlage eines allgemeinen Bewertungsprinzips für Finanztitel ist.

Jeder Finanztitel $x \in \mathcal{M}$ hat einen in Geldeinheiten ausgedrückten Preis in $t = 0$. Dieser Preis spiegelt den möglichen, unsicheren Zahlungsstrom $x(t, \omega)$ zum Zeitpunkt t wieder. Gemäß Annahme 2.1 hat auch jedes Portfolio einen Preis in $t = 0$. Ein Preisfunktional $p : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ bildet Finanztitel aus $\mathcal{M}$ in einen Preis zum Zeitpunkt $t = 0$ ab. Das Portfolio $(\alpha_x x + \alpha_y y)$ hat den Preis $p[(\alpha_x x + \alpha_y y)]$. Der Investor kann gemäß Annahme 2.4 das Portfolio $(\alpha_x x + \alpha_y y)$ zum Preis $p[(\alpha_x x + \alpha_y y)]$ erwerben. Es besteht auch die Möglichkeit, die Finanztitel x und y einzeln zu erwerben. Der Preis würde

[8]Die Theorie des Erwartungsnutzens wurde bereits 1738 von Bernoulli (1738) formuliert.

[9]Aus der Ordinalen Nutzentheorie kann für Entscheidungen unter Sicherheit eine entsprechende, aber weniger allgemeine Arbitragetheorie abgeleitet werden.

[10]Dieses Prinzip verwandten bereits Modigliani, Miller 1958 und 1961 zur Herleitung des Irrelevanztheorems der Kapitalstruktur.

in diesem Fall $(\alpha_x p[x] + \alpha_y p[y])$ betragen. Die Arbitragetheorie untersucht das Verhältnis der beiden Preise $p[(\alpha_x x + \alpha_y y)]$ oder $(\alpha_x p[x] + \alpha_y p[y])$ in $t = 0$ für Portfolios, die denselben Zahlungsstrom zu jedem Zeitpunkt t erzeugen. Auf Basis der in den Annahmen 2.1 – 2.6 erzeugten Struktur eines Finanzmarktes werden in der Finanzierungstheorie Arbitragemöglichkeiten formal definiert[11]. Generell stellt eine Arbitragemöglichkeit die Gelegenheit für einen Investor dar, mit positiver Wahrscheinlichkeit reicher und mit Sicherheit nicht ärmer zu werden. Da dies für jeden Investor am Kapitalmarkt gilt, werden alle Marktteilnehmer versuchen, in unbegrenztem Umfang gleichzeitig bestimmte Finanztitel zu kaufen und andere zu verkaufen. Da dieses Verhalten nicht in einen stabilen Zustand des Finanzmarktes führt, sollten sich die Preise derart ändern, dass keine Arbitragemöglichkeit auf dem Finanzmarkt existiert[12]. Die obigen Überlegungen bezüglich eines arbitragebehafteten und arbitragefreien Finanzmarktes führen zu einer Bewertungsregel, die Preise von Finanztiteln derart festlegt, dass Arbitragemöglichkeiten auf einem Finanzmarkt ausgeschlossen sind. Diese Annahme gibt dem Preisfunktional $p[\bullet]$ spezielle Eigenschaften.

Zur Formulierung der speziellen Eigenschaften wäre es wünschenswert, eine einfache Beschreibung der Elemente der Menge $\mathcal{M}$ zu besitzen. Diese Beschreibung wird erreicht, falls endlich viele, elementare Finanztitel existieren, die als Portfolio, d. h. linear kombiniert, alle anderen Finanztitel erzeugen. Formal ausgedrückt wird die kleinste Menge an Finanztitel $\{x_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ mit g Element der Indexmenge $\mathcal{G}$ gesucht, sodass ein beliebiger Finanztitel $x \in \mathcal{M}$ als Linearkombination von Elementen aus $\{x_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ interpretiert werden kann. $\{x_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ ist die **Basis** von $\mathcal{M}$, d. h. aus $\{x_g\}_{g\in\mathcal{G}} \in \mathcal{M}$ folgt

[11] Siehe Jarrow (1988).

[12] Diese Situation der Arbitragefreiheit impliziert jedoch nicht finanzwirtschaftliches Gleichgewicht, da durchaus auf einem arbitragefreien Finanzmarkt Angebot und Nachfrage unterschiedlich sein können.

$\mathcal{M} = L(\{x_g\}_{g\in\ \mathcal{G}})$. $L(\{x_g\}_{g\in\ \mathcal{G}})$ sei die Menge aller Linearkombinationen über $\{x_g\}_{g\in\ \mathcal{G}}$[13]. Die Anzahl Γ der Basisvektoren in $\{x_g\}_{g\in\ \mathcal{G}}$ ist die *Dimension* des von $\{x_g\}_{g\in\ \mathcal{G}}$ aufgespannten Vektorraumes.

Es existiert für jede Menge $\mathcal{M}$, welche die Bedingung 2.1 erfüllt, eine Basis $\{x_g\}_{g\in\ \mathcal{G}} \in\ \mathcal{M}$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in\ \mathcal{M}$

$$x = \underbrace{\sum_{g\in\ \mathcal{G}} \alpha_{x_g} x_g,}_{\text{Duplikationsportfolio}} \qquad \text{mit } \alpha_{x_g} \neq 0 \quad \text{für endlich viele } g \tag{2.1}$$

gilt. Die Koeffizienten α_{x_g} sind bezüglich der Basis $\{x_g\}_{g\in\ \mathcal{G}}$ eindeutig[14]. Auf dem multiperiodischen Finanzmarkt muss das Preisfunktional $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ derart definiert werden, dass das für die jeweilige Periode geltende Preisfunktional die Preise aller Finanztitel für die Zeitpunkte $t = 0$ bis $t = T - 1$ abbildet. Da die Preise für $t \in\ \{1, T-1\}$ zufällig sind, wird ein stochastisches Preisfunktional $p_t[x, \omega]$ für den Zeitpunkt $t \in\ \{1, T-1\}$ und den Finanztitel $x \in\ \mathcal{M}$ definiert. Die Menge der Finanztitel in $\mathcal{M}$ wird durch die Basis $\{x_g\}_{g\in\ \mathcal{G}}$ erzeugt. $p_t[x, \omega]$ ist der Preis des Finanztitels x zum Zeitpunkt t, falls Zustand ω eingetreten ist. Folglich ist $p_t[x, \omega]$ eine Funktion $p_t : \mathcal{M} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Der Preis $p_t[x, \omega]$ wird gebildet, *nachdem* der Zahlungsstrom $x(t, \omega)$ floss. Die Menge $\sigma(\mathcal{M}_t)$ kann um die Informationen der Preise $p_t[x, \omega]\ \forall\ x \in\ \mathcal{M}$ erweitert werden.

Die Formulierung einer allgemeinen Arbitragetheorie für T Perioden setzt die Definition des Begriffs der *dynamischen, selbstfinanzierenden Handelsstrategie* voraus. Eine *dynamische, selbstfinanzierende Handelsstrategie* ist ein *Portfolio* aus n Finanztiteln $\{x_1, \ldots, x_n\} \in\ \mathcal{M}$. Das Portfolio wird zum Zeitpunkt $t = 0$ aufgebaut und zum Zeitpunkt $t = T$ liquidiert. Das Portfolio heißt *selbstfinanzierend*, da es zu den Zeitpunkten $t = 1$ bis $t = T - 1$ weder Ein- noch Auszahlungen aufweist. Dies wird erreicht, indem die Struktur des

[13]Vgl. Endl (1985) S. 37 und 47.

[14]Die Basis $\{x_g\}_{g\in\ \mathcal{G}}$ ist nicht notwendigerweise eindeutig in $\mathcal{M}$.

Portfolios geändert wird, d. h. die Anteile $\theta_i(t,\omega)$ eines Finanztitels x_i werden *dynamisch* angepasst. Die Umschichtung des Portfolios von $\theta_i(t-1,\omega)$ nach $\theta_i(t,\omega)$ erfolgt nach der Realisierung der Zahlungsströme $x_i(t,\omega)$ und der Preise $p_t[x_i,\omega]$.

Formal ist die *dynamische, selbstfinanzierende Handelsstrategie* Θ ein n-dimensionaler Vektor $\{\theta_1(t,\omega),\ldots,\theta_n(t,\omega)\}_{t=0}^{t=T-1}$, für den die zwei Bedingungen

$$\theta_i(t,\omega) \text{ ist nur von } \sigma(\mathcal{M}_t) \text{ abhängig und} \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\theta_j(t+1,\omega)\ p_t[x_j,\omega] = \sum_{j=1}^{n}\theta_j(t,\omega)\ \ (p_t[x_j,\omega]+x_j(t,\omega)) \tag{2.3}$$

erfüllt sind. Gleichung 2.2 besagt, dass ausschließlich Informationen über vergangene Perioden für die Struktur des Portfolios herangezogen werden. Informationen über zukünftige Zahlungsströme, die nicht in $\sigma(\mathcal{M}_t)$ enthalten sind, beeinflussen den Portfolioaufbau nicht. Arbitragemöglichkeiten, die durch *Insiderinformationen* initiiert werden können, sind nicht Gegenstand dieser Betrachtungen. Die zweite Bedingung in Gleichung 2.3 garantiert die Selbstfinanzierung. Der Wert des Portfolio ist vor und nach der Umstrukturierung identisch. Der erste Term der Gleichung drückt den Wert des Portfolios *nach* der Umstrukturierung aus. Es wurden jeweils $\theta_j(t+1,\omega)$ Anteile des Finanztitels x_j zum Preis von $p_t[x_j,\omega]$ gekauft. Der zweite Term ist der Verkaufserlös des Portfolios *vor* der Umstrukturierung. Zum Verkaufspreis von $p_t[x_j,\omega]$ wird noch der Zahlungsstrom $x_j(t,\omega)$ addiert, um den Wert des Finanztitels x_j in t zu ermitteln, d. h. Zahlungsströme werden in das Portfolio investiert und nicht entnommen. Eine *dynamische, selbstfinanzierende Handelsstrategie*, bei der – außer der Reinvestition der Zahlungsströme $x_j(t,\omega)$ – keine weitere Umstrukturierung erfolgt, heißt *Buy-and-Hold-Strategie*. Formal wird eine *Buy-and-Hold-Strategie* durch die Beziehung

$$\theta_j(t+1,\omega) = \theta_j(t,\omega)\ \left(1 + \frac{x_j(t,\omega)}{p_t[x_j,\omega]}\right)$$

charakterisiert. Die generelle Arbitragetheorie für T Perioden formuliert die Bedingungen, um eine Arbitragemöglichkeit mittels einer dynamischen, selbstfinanzierenden Handelsstrategie auszuschließen. Der Finanzmarkt ist arbitragefrei, wenn für einen beliebigen Finanztitel y die Wertadditivität und die Dominanz in der nachfolgenden Definition erfüllt sind.

Annahme 2.7 (Arbitragefreiheit) *Für jeden Investor i und eine dynamische, selbstfinanzierende Handelsstrategie $\{\theta_1(t,\omega), \ldots \theta_n(t,\omega)\}_{t=0}^{t=T-1}$ mit*

$$\begin{aligned} \mathrm{Prob}_i\left[\omega \in\ \Omega : \sum_{j=1}^{n} \theta_j(T,\omega) x_j(T,\omega) = y(T,\omega)\right] &= 1, \\ \mathrm{Prob}_i\left[\omega \in\ \Omega : y(t,\omega) = 0\right] &= 1\ \forall\ T > t \geq s \end{aligned} \tag{2.4}$$

gilt die Wertadditivität

$$p_s(y,\omega) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j(s,\omega)\ p_s[x_j,\omega]\ \forall\ s \in\ \{0, T-1\}. \tag{2.5}$$

Diese Form der Wertadditivität formalisiert die Bedingung für den Fall, dass für einen Investor die Investitionsalternative y zur Verfügung steht, die bis zum Zeitpunkt $t = T$ mit Sicherheit keinen Zahlungsstrom aufweist, ihr Wert dem Wert der dynamischen, selbstfinanzierenden Handelsstrategie zu jedem Zeitpunkt s entspricht.

Für jeden Investor i und eine dynamische, selbstfinanzierende Handelsstrategie $\{\theta_1(t,\omega), \ldots \theta_n(t,\omega)\}_{t=0}^{t=T-1}$ mit

$$\mathrm{Prob}_i\left[\omega \in\ \Omega : \sum_{j=1}^{n} \theta_j(T,\omega) x_j(T,\omega) \geq 0\right] = 1 \tag{2.6}$$

$$\mathrm{Prob}_i\left[\omega \in\ \Omega : \sum_{j=1}^{n} \theta_j(T,\omega) x_j(T,\omega) > 0\right] > 0, \tag{2.7}$$

gilt die Dominanz

$$\sum_{j=1}^{n} \theta_j(s,\omega)\; p_s[x_j,\omega] \; > 0 \;\forall\; s \in \; \{0, T-1\}. \tag{2.8}$$

Diese Fassung der Dominanz drückt aus, dass ein Portfolio, das für $t < T$ keinen Zahlungsstrom aufweist und mit Sicherheit keinen negativen und mit positiver Wahrscheinlichkeit einen positiven Zahlungsstrom in $t = T$ erzeugt, zu jedem vorangegangenen Zeitpunkt einen positiven Wert besitzt.

Die Menge der Preise $\{p[x_g]\}_{g\in\; \mathcal{G}}$ der Elemente der Basis $\{x_g\}_{g\in\; \mathcal{G}}$ sind exogen gegeben. Aus diesem Preisfunktional lassen sich durch Linearkombination die Preise aller anderen Finanztitel relativ zu den Preisen der Basis bestimmen. Aus Gleichung 2.1 in Verbindung mit der Addidivität 2.5 folgt, dass

$$p[x] = \sum_{g\in\; \mathcal{G}} \alpha_{x_g}\; p[x_g] \quad \forall\; x \in\; \mathcal{M}.$$

Diese Eigenschaften sind in der Theorie der Optionsbewertung und somit der Bewertung von Angebotsoptionen grundlegend. Ein Finanztitel, der die Bedingungen in Gleichung 2.6 und 2.7 erfüllt, hat *beschränkte Haftung*, da der Finanztitel in $t = 1$ unter keinen Umständen negative Zahlungsströme aufweist. Derartige Finanztitel sind das zentrale Thema der Finanztheorie. Die Arbitragetheorie ist die auf den Finanzmärkten dominierende Theorie zur Wertermittlung von Finanztiteln. Sie ist die Grundlage aller Bewertungsmodelle, insbesondere auch der Optionsbewertungstheorie. Ausgehend von der Axiomatik[15] der Ordinalen und Kardinalen Nutzentheorie wurden Wertbeziehungen zwischen Finanztiteln auf einem arbitragefreien Finanzmarkt entwickelt.

Die Wertbeziehungen in Verbindung mit der Definition der Diskontierungsfunktion sind der Ausgangspunkt zur Wertermittlung von zinsabhän-

[15] Die vorgestellte Axiomatik kann grundlegend Jarrow (1988) entnommen werden.

gigen Finanztiteln und insbesondere Optionen auf die Diskontierungsfunktion (Zinsoptionen in ihrer allgemeinsten Form). Ein weiterer, wichtiger Meilenstein in der Arbitragetheorie und der ganzen Finanztheorie sind die Arbeiten von HARRISON, KREPS (1979) und HARRISON, PLISKA (1981) und (1983), die die Existenz eines äquivalenten Martingalwahrscheinlichkeitsmaßes nachweisen und somit das Preisfunktional als Erwartungswertoperator ausdrücken. Die Verallgemeinerung des Preistheorems findet sich in DELBEAN, SCHACHERMAYER (1994).

Die allgemeine Arbitragetheorie und speziell die Wertadditivität stellen eine Beziehung zwischen einem Finanztitel x und einer dynamischen, selbstfinanzierenden Handelsstrategie Θ her. Sie machen keine Aussage darüber, wie das Portfolio Θ zum Zeitpunkt $t = 0$ ermittelt werden kann. Hierzu ist die Kenntnis über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zahlungsströme $x(t, \omega) \in \Omega$ und deren Preise $p_t[x, \omega]$, dem stochastischen Preisprozess, erforderlich.

In der Literatur der Finanztheorie werden viele stochastische Preisprozesse untersucht und benutzt, um Finanztitel und insbesondere Optionen zu bewerten. Optionsrechte und deren Bewertung stehen im Blickpunkt der Finanztheorie, da Optionen elementare Finanztitel im Sinne der Bewertung aller Finanztitel darstellen[16]. Die Optionsbewertungstheorie mit Hilfe stochastischer Prozesse geht bis ins Jahr 1900 zurück. Der Beitrag von BACHELIER (1900) hatte die Zielsetzung, Optionsrechte mathematisch zu bestimmen und diese mit den gehandelten Preisen zu vergleichen. Er bediente sich der Brownschen Bewegung, eines Diffusionsprozesses zur Beschreibung von Preisschwankungen. SAMUELSON (1965) und SPRENKLE (1962) griffen diesen Gedanken auf und ersetzten die von BACHELIER verwendete arithmetische Brownsche Bewegung durch die geometrische Brownsche Bewegung. Die Un-

[16]Vgl. Jarrow (1988) S. 161.

tersuchungen beruhen aber vielfach auf ad-hoc Elementen, sodass erst ab dem Jahre 1973 mit den Arbeiten von MERTON sowie BLACK und SCHOLES[17] ein Optionsbewertungsmodell für Aktien auf Basis des Duplikationsgedankens der Arbitragetheorie entwickelt wurde. Die zur Aktienoption gehörende dynamische, selbstfinanzierende Handelsstrategie besteht aus der der Option zugrunde liegenden Aktie und einem risikolosen Discount-Bond[18]. Viele, insbesondere kontinuierliche Modelle zur Bewertung von Optionen wurden seitdem entwickelt[19].

HARRISON und PLISKA (1981) untersuchen aufbauend auf den Gedanken von HARRISON und KREPS, welche Eigenschaften erfüllt werden müssen, um einen Finanzmarkt als *vollständig* zu bezeichnen. In ihren Überlegungen steht nicht die explizite Wertermittlung von Finanztiteln, sondern die generelle Anforderung an ein vollständiges Bewertungsmodell im Vordergrund.

Annahme 2.8 (Vollständigkeit) *Ein Markt ist* vollständig*, wenn alle* zustandsabhängigen Zahlungsströme duplizierbar *sind.*

Ein *zustandsabhängiger Zahlungsstrom* ist eine nichtnegative Zufallsvariable C über einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \sigma(\mathcal{M}), W)$. Der zustandsabhängige Zahlungsstrom charakterisiert einen Finanztitel c, der zum Zeitpunkt $t = T$ einen Zahlungsstrom $c(\omega)$ aufweist, dessen Betrag von den eingetretenen Zuständen, d. h. der historischen Preisbewegung abhängig ist. c ist *duplizierbar*, wenn zu jedem Zeitpunkt t der Wert dem einer dynamischen, selbstfinanzierenden Handelsstrategie Θ entspricht:

$$p_s[c, \omega] \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} \theta_j(s, \omega)\ p_s[x_j, \omega]\ \forall\ s \in\ \{0, T-1\}$$

[17] Vgl. Black, Scholes (1973) S. 635 – 659, Merton (1973) S. 141 – 183.

[18] Unter risikolosem Discount-Bond ist zu verstehen, dass der risikolose Zinssatz über die Laufzeit der Option konstant ist.

[19] Zur Geschichte der Optionsbewertungstheorie vgl. Smith (1976) und Black (1997).

$$c(\omega) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \theta_j(T-1,\omega)\ \left(p_T[x_j,\omega] + x_j(\omega)\right).$$

Harrison, Pliska stellen die Frage nach der Vollständigkeit in den Vordergrund ihrer Überlegungen, die sie zu der allgemeinen Bewertungsgleichung von zustandsabhängigen Zahlungsströmen führen[20]. Für die Vollständigkeit eines Modells

- ist es weder notwendig noch hinreichend, dass der stochastische Prozess kontinuierlich ist. Darüber hinaus
- ist die Markoveigenschaft eines stochastischen Prozesses völlig irrelevant.

Die Vollständigkeit wird bestimmt durch die Existenz äquivalenter Martingalwahrscheinlichkeitsmaße zu einem speziellen Preisprozess. Die Besonderheit, dass der Preisprozess in einer konsistenten Theorie ein Semimartingal darstellt, vereinfacht die weitergehenden Betrachtungen, da auf eine weit entwickelte Mathematik[21] zurückgegriffen werden kann, die von dem Mathematiker Doob (1953) entwickelt wurde. Die allgemeine Bewertungsgleichung für Finanztitel wird auf Grundlage der Arbeiten von Harrison, Pliska (1981) entwickelt.

Die Formulierung des Preismodells

Zur Herleitung einer allgemeinen Bewertungsformel wird ein Γ-dimensionaler Preisprozess $X = \{X_t, t = 1, \ldots, T\}$ mit den Komponenten $X^0, \ldots, X^\Gamma$ definiert. Jede Komponente X^g ist positiv und adaptiert, d. h. die Funktion $\omega \to X_t^g(\omega)$ ist messbar auf $\sigma(\mathcal{M}_t)$, $X_t^g \in \ \sigma(\mathcal{M}_t)$. X_t^g ist der Preis $p_t[x_g, \omega]$

[20]Harrison, Kreps (1979) haben bereits die Vollständigkeit des Black-Scholes Modells nachgewiesen.

[21]Vgl. Artzner, Delbean (1989), Bauer (1978); Dacunha-Castelle, Duflo (1986), Karlin, Taylor (1975), Meyer (1972), Morton (1989), Neveu (1965) und (1972), Revuz, Yor (1999), Williams (1991) u. v. a.

des Finanztitels x_g zum Zeitpunkt t unter der Annahme 2.7. Ein Investor kennt (adaptiert) in t alle vergangenen und aktuellen Preise $p_\tau[x,\omega] \quad \forall\, 0 \leq \tau \leq t$. Aus der Menge der Finanztitel besitzt der *Spot-Bond* eine besondere Bedeutung. Der Spot-Bond ist ein risikoloser Finanztitel χ_s, der in $t = s+1$ in allen Zuständen $\omega \in \Omega$ eine Geldeinheit zahlt. Der Spot-Bond ist durch die Beziehung

$$\chi_s((s+1),\omega) = 1$$

gekennzeichnet. Der *Spot-Bond-Prozess* oder *Discount-Prozess* beschreibt den Kehrwert der Wertentwicklung einer Investition, bei der zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Geldeinheit in $p[\chi_1]^{-1}$ Einheiten Spot-Bonds investiert wurde. Der Spot-Bond stellt das Numéraire dar[22]. Bei Fälligkeit des Spot-Bonds werden in jeder Periode die Liquidationserlöse wieder in Spot-Bonds investiert. Diese Investition wird im Folgenden mit $X^0 = B$ bezeichnet. Der Preisprozess des Kehrwertes der Wertentwicklung der reinvestierten Spot-Bonds, β_t, ist als

$$\begin{aligned} \beta_t &= \left\{ B_t^{-1} \;\forall\, t = 0,\ldots,T \right\}, \\ B_t &= \Pi_{\tau=0}^{t-1}\, p_\tau[\chi_{\tau+1},\omega] > 0 \end{aligned}$$

definiert. $p_t[\Theta]$ sei der Wert der selbstfinanzierenden, dynamischen Handelsstrategie zum Zeitpunkt t. Harrison, Pliska[23] fordern, dass der Preisprozess von Θ nicht negativ $p_t[\Theta] \geq 0 \;\forall\, t \in [0,T]$ ist. Diese Forderung schließt Insolvenz des Investors aus. In Verbindung mit der Forderung, dass das Anfangsvermögen des Investors größer als $p_0[\Theta]$ ist, wird der Fall einer Zahlungsunfähigkeit ausgeschlossen. Für duplizierbare, zustandsabhängige Zahlungsströme c gilt zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$p_0[C] = p_0[\Theta].$$

[22]Zum Problem der Definition des Numéraires vergleiche Baxter, Rennie (1997) S. 189 – 192.

[23]Vgl. Harrison, Pliska (1981) S. 226.

Der Preis $p_t[C]$ muss eindeutig sein. Ein Finanzmarkt, in der zwei verschiedene, dynamische, selbstfinanzierende Handelsstrategien Θ^1 und Θ^2 aus der Menge $\mathcal{T}$ aller dynamischen, selbstfinanzierenden Handelsstrategien den zustandsabhängigen Zahlungsstrom C derart duplizieren, dass $p_t[\Theta^1] \neq p_t[\Theta^2]$, ist nicht arbitragefrei. Die Bedingung der Arbitragefreiheit fordert, sollten mehr als eine dynamische, selbstfinanzierende Handelsstrategie existieren, dass diese zu allen Zeitpunkten denselben Wert besitzen. Die Bedingungen, die zur Arbitragefreiheit und zu einem vollständigen Marktmodell führen, werden im Folgenden diskutiert.

Arbitragefreies Preismodell

Harrison, Pliska formulieren zwei Bedingungen, die äquivalent zur Bedingung der Arbitragefreiheit sind. Erfüllt ein Marktmodell diese Bedingungen, impliziert dies Arbitragefreiheit. Das Marktmodell wird charakterisiert durch das Preisfunktional, bzw. das Preissystem $p : X \rightarrow]-\infty, \infty[$. Ist ein Preissystem arbitragefrei, erfüllt es bezüglich der zustandsabhängigen Zahlungsströme $C \in \mathcal{C}$ die Annahme 2.3 in der Form

$$\begin{aligned} p[C] &= 0 \text{ genau dann, wenn } C = 0, \\ p[aC + bC'] &= ap[C] + bp[C'] \ \forall\ C, C' \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Ein derartiges Preissystem ist mit dem oben beschriebenen Marktmodell *konsistent*, wenn

$$p_0[C] = p_0[\Theta], \text{ mit } p_T[C] = p_T[\Theta]. \tag{2.9}$$

Der Wert des zustandsabhängigen Zahlungsstromes muss mit dem Wert der dynamischen, selbstfinanzierenden Handelstrategie identisch sein. Π ist die Menge aller Preissysteme, die mit dem Marktmodell konsistent sind. $\mathcal{W}$ symbolisiert die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße Q, die mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß W äquivalent sind, d. h. $w(\omega) = 0$ gilt genau dann, wenn

$q(\omega) = 0$. Der Prozess $\beta\, p[X]$ ist ein Martingal für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \in \mathcal{P}$. E^Q bezeichnet den Erwartungswertoperator unter $Q \in \mathcal{P}$. Auf Basis dieser Definitionen lassen sich die beiden zur Arbitragefreiheit äquivalenten Bedingungen, die eine eindeutige Beziehung zwischen dem Preissystem $p \in \Pi$ und den Wahrscheinlichkeitsmaßen $Q \in \mathcal{P}$ herstellen, formulieren.

Äquivalenzbedingung 1

$$p_0[C] = E^Q[\beta_T C]. \tag{2.10}$$

Der Preis $p_0[C]$ eines zustandsabhängigen Zahlungsstromes C zum Zeitpunkt $t = 0$ ist gleich dem in $t = 0$ gebildeten Erwartungswert des Preisprozesses $\beta\ C$ zum Zeitpunkt $t = T$ bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes Q. Der Beweis wird in Harrison, Pliska *(1981) S. 229 geführt.*

Äquivalenzbedingung 2

$$Q(\mathcal{H}) = p \cdot \left[B_T^{-1}\ 1_{\mathcal{H}}\right]\ \forall\, \mathcal{H} \in\ \sigma(\mathcal{M}_T).$$

Die Wahrscheinlichkeit $Q(\mathcal{H})$, dass die Ereignisse $\mathcal{H}$ eintreten, ist gleich dem Preis $p \cdot \left[B_T^{-1}\ 1_{\mathcal{H}}\right]$. Die Beweisführung findet sich ebenfalls in Harrison, Pliska *(1981) S. 229.*

Die Äquivalenzbedingungen stellen sicher, dass auf einem arbitragefreien Finanzmarkt das Preisfunktional mittels eines Erwartungswertoperators beschrieben werden kann. Dabei ist die Kenntnis der „wahren" Wahrscheinlichkeitsverteilung W der Zustände auf dem Finanzmarkt nicht notwendig. Diese kann ersetzt werden durch ein äquivalentes Martingalwahrscheinlichkeitsmaß $Q \in \mathcal{P}$[24]. Es gilt aber auch der Umkehrschluss, das Theorem der Äquivalenz.

[24]Vgl. Cox, Rubinstein (1985) S. 173 ff. Dort werden bei der Herleitung des Binomialmodells die Wahrscheinlichkeiten q des Aktienpreisprozesses ersetzt durch die *risikoadjustierten* Wahrscheinlichkeiten (Martingalwahrscheinlichkeiten) p.

Theorem 1 (Theorem der Äquivalenz) *Ein Marktmodell beschreibt einen arbitragefreien Finanzmarkt, wenn die Mengen* Π *und* $\mathcal{P}$ *nicht leer sind. Die Wertadditivität und die Dominanz in Annahme 2.7 sind erfüllt, wenn* $\Pi \neq \{\emptyset\}$ *und* $\mathcal{P} \neq \{\emptyset\}$[25].

Äquivalenzbedingung 1 gilt für den Preis $p_0[C]$ eines zustandsabhängigen Zahlungsstromes zum Zeitpunkt $t = 0$. Allgemein ist der Preis $p_s[C]$ durch die Gleichung[26]

$$\beta_s p_s[C] = E^Q\left[\beta_T\ C|\sigma(\mathcal{M}_s)\right] \tag{2.11}$$

gegeben. Diese Bewertungsgleichung gilt für alle auf dem Kapitalmarkt gehandelten Finanztitel. Im Rahmen der Untersuchung von Angebotsoptionen genügt es, sich auf eine Teilmenge der Finanztitel zu konzentrieren. Mithilfe dieser Teilmenge kann der Begriff Kredit und der Begriff Kreditkondition formal definiert werden. Diese Definition ermöglicht eine Bewertung von Angebotsoptionen.

2.1.3 Diskontierungsfunktion und Zinstitel

Zur Beschreibung von Krediten bzw. Kreditkonditionen wird eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ von Finanztiteln benötigt. Diese Menge ist die Menge aller Zinstitel. Als Ausgangspunkt der Überlegungen steht der *Discount-Bond*.

Definition 2 (Discount-Bond) Ein Finanztitel χ_s, der zum Fälligkeitszeitpunkt $t = s$ in allen Zuständen $\omega \in \Omega$ eine Geldeinheit zahlt und für $1 \leq t < s$ keinen Zahlungsstrom besitzt, heißt *Discount-Bond*. $\star$

Formal werden Discount-Bonds durch die Gleichung

$$\chi_s(t,\omega) \quad = \quad \begin{cases} 1; & \forall\, \omega \in \Omega \text{ und } s = t \\ 0; & sonst \end{cases} \qquad \text{bzw.}$$

[25]Zum Beweis siehe Harrison, Pliska (1981) S. 228 – 229.

[26]Der Beweis findet sich in Harrison, Pliska (1981) S. 230 in Verbindung mit Gleichung 2.4.

$$= \quad 1_{s=t}$$

beschrieben. Der Discount-Bond χ_s hat den Verfalltag s, die Restlaufzeit $(s-t)$ und zum Zeitpunkt $t < s$, abhängig vom eingetretenen Zustand ω, den Preis $p_t[\chi_s, \omega]$. Da $p_t[\chi_t, \Omega] = 1$, ist bei Arbitragefreiheit gemäß Gleichungen 2.6 – 2.8 der Preis der Discount-Bonds immer positiv und kleiner 1, $1 > p_t[\chi_s, \Omega] > 0 \; \forall \; t \leq s \leq T$.

Die Funktion $P_t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ordnet jeder Restlaufzeit den Preis eines Discount-Bonds zu. $p_t[\chi_s, \omega] = P_t(s, \omega)$ ist der *Diskontierungsfaktor* zum Zeitpunkt t für die Restlaufzeit $(s-t)$ im Zustand ω. Der Diskontierungsfaktor ist der Wert, den ein Investor heute bezahlen würde, um zu einem zukünftigen Zeitpunkt s mit Sicherheit eine Geldeinheit zu erhalten. Der Diskontierungsfaktor transformiert sichere Zahlungen in der Zukunft in sichere Zahlungen zum heutigen Zeitpunkt. Insofern stellen die Diskontierungfaktoren ein Maß zur Beurteilung des Zeitwertes von Geldeinheiten dar. Diese Eigenschaft der Diskontierungsfaktoren bestimmt ihre Bedeutung in der Finanzierungstheorie. Unabhängig vom betrachteten Finanztitel sind sie bei der Bestimmung von Preisen zukünftiger Zahlungsströme notwendig. Die Menge aller Diskontierungsfaktoren ist elementar für die Bewertung von zinsabhängigen Finanztiteln. Sie enthält alle aktuellen Preise, d. h. Spotpreise für Discount-Bonds.

Definition 3 (Diskontierungsfunktion) Die Menge aller Diskontierungsfaktoren zum Zeitpunkt t und Umweltzustand ω wird Diskontierungsfunktion zum Zeitpunkt t und Zustand ω genannt:

$$P_t(\omega) = \{p : p_t[\chi_s, \omega]; \; s \in \; [t+1; T]; \; \omega \in \; \Omega\}.$$

$\star$

Die *Zerorendite* $y_t(s, \omega)$ eines Discount-Bonds ist eine Funktion $y_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Jede eindeutige Zuordnung $y_t(s) \rightarrow f(p_t[\chi_s])$ kann als Zins- oder Renditekurve interpretiert werden[27]. Üblicherweise ist die Zerorendite definiert als konstante Wachstumsrate pro Periode des Discount-Bonds bis zum Verfalltag:

$$\begin{aligned} y_t(s,\omega) &:= p_t[\chi_s,\omega]^{-\frac{1}{s-t}} - 1, \\ p_t[\chi_s,\omega] &:= (1 + y_t(s,\omega))^{-(s-t)}. \end{aligned}$$

Die Zerorendite $y_t(t+1,\omega)$ für einen Discount-Bond χ_{t+1} mit einer Restlaufzeit von einer Periode, den Spot-Bond, wird als Spot-Rate oder risikoloser Zinssatz bezeichnet. Da der Discount-Bond nur noch eine Restlaufzeit von einer Periode $t \to t+1$ besitzt, existiert auch kein Preisänderungsrisiko, d. h. er ist risikolos. Die Funktion $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird als Zerorenditekurve bezeichnet. Sie stellt eine Relation zwischen der Restlaufzeit $(s-t)$ und der Zerorendite $y_t(s,\omega)$ her.

Obwohl der Zahlungstrom eines Discount-Bonds zum Fälligkeitszeitpunkt mit Sicherheit eintritt, ist der heutige Wert und die Entwicklung des Wertes des Discount-Bonds bis zur Fälligkeit unsicher. Daher bedeutet Unsicherheit nicht Ungewissheit über die Zahlungsströme $\chi_t(t,\omega)$ am Fälligkeitstag t, sondern Ungewissheit über die Preise $p[\chi_s(t,\omega)]$ während der Laufzeit des Discount-Bonds. Vor der Beschreibung des Preismodells unter Unsicherheit wird der Fall unter Sicherheit untersucht, d. h. es werden die Preise $p[\chi_s(t,\omega)] \; \forall \; t < s \leq T$ arbitragefrei bestimmt.

Sei P_t die Diskontierungsfunktion zum Zeitpunkt t und P_{t+1} die Diskontierungsfunktion zum Zeitpunkt $t+1$, Y_t die Zerorenditekurve zum Zeitpunkt t und Y_{t+1} die Zerorenditekurve zum Zeitpunkt $t+1$. Gemäß Gleichung 2.11 gilt für $C = 1 = p_s[\chi_s]$

$$\beta_t \; p_t[\chi_s] = E^W \left[\beta_{t+1} \; p_{t+1}[\chi_s]\right].$$

[27] Renditen sind immer willkürlich definiert und daher nicht eindeutig! Insbesondere in der Realität wird dieser Tatsache nicht Rechnung getragen, da häufig versucht wird, unterschiedliche Definitionen von Renditen auszuarbitrieren.

Unter Sicherheit gilt, dass die zum Zeitpunkt t bezüglich des Zeitpunktes $t+1$ gebildeten Erwartungswerte $\beta_t X_t = E^W[\beta_{t+1} X_{t+1}]$ eintreten. Falls die Preise der Zukunft schon heute mit Gewissheit bekannt sind, werden die Erwartungen der Investoren bezüglich der zukünftigen Preise nicht von den bekannten, sicheren Preisen abweichen. Dies bedeutet, dass

$$\begin{aligned}
\beta_t \; p_t[\chi_s] &= \beta_{t+1} \; p_{t+1}[\chi_s], \\
\frac{\beta_t \; p_t[\chi_s]}{\beta_{t+1}} &= p_{t+1}[\chi_s], \\
\frac{p_t[\chi_s]}{p_t[\chi_{t+1}]} &= p_{t+1}[\chi_s], \\
\\
\frac{p_t[\chi_s]}{p_t[\chi_{t+n}]} &= p_{t+n}[\chi_s] \quad \forall \; n \leq (s-t). \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Die arbitragefreie Preisbewegung eines Discount-Bonds bzw. der Diskontierungsfunktion unter Sicherheit wird durch Gleichung 2.12 beschrieben. Die Entwicklung der Preise der Discount-Bonds bis zur Fälligkeit wird ausschließlich von der Diskontierungsfunktion $P_t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bestimmt und eindeutig definiert. Die relative Preisänderung von Discount-Bonds unter Sicherheit $\frac{1}{p_t[\chi_{t+1}]}$ ist von der Restlaufzeit $(s-t)$ des Discount-Bonds unabhängig.

Für die Zerorendite $y_{t+1}(s)$ gilt:

$$y_{t+1}(s) = p_{t+1}[\chi_s]^{-\frac{1}{s-(t+1)}} - 1. \qquad (2.13)$$

Die der Zerorendite unterstellte Preisänderung eines Discount-Bonds pro Periode $(1 + y_t(s))$ ist nur für $y_t(s) = y_t \; \forall \; s \leq T$ (flache Zerorenditekurve) arbitragefrei. Die Zerorendite sagt somit im Falle nicht flacher Zerorenditekurven nichts über den „sicheren Wertzuwachs“ des Discount-Bonds aus. Sie stellt lediglich ein mathematisches Konstrukt dar, Preise in konstanten Wachstumsraten auszudrücken. Die Annahme konstanter Wachstumsraten hat, mit einer Ausnahme, arbitragebehaftete Preisbewegungen zur Folge.

Dies bedeutet, dass eine sich ändernde Zerorenditekurve nicht immer Unsicherheit impliziert, sondern auf einem Finanzmarkt unter Sicherheit notwendig ist, um Arbitragefreiheit zu gewährleisten.

Gleichung 2.12 definiert die für einen Finanzmarkt zentralen Größen zur Beschreibung von arbitragefreien Bewegungen der Diskontierungsfunktion unter Sicherheit und Unsicherheit. Sie werden als implizite Terminpreise oder Forward Price bezeichnet. $F(t,(t+n),s)$ sei der zum Zeitpunkt t arbitragefreie, implizite Terminpreis eines Discount-Bonds, der in $t+n$ bezahlt und in s fällig wird.

$$F(t,(t+n),s) := \frac{p_t[\chi_s]}{p_t[\chi_{t+n}]} \quad \forall\, n \leq (s-t). \tag{2.14}$$

Im Falle eines Finanzmarktes unter Sicherheit entspricht der zum Zeitpunkt t vereinbarte Preis des Discount-Bonds für den Zeitraum $t+n$ bis s $F(t,(t+n),s)$ den zum Zeitpunkt $t+n$ beobachteten Preis $p_{t+n}[\chi_s]$.

$$F(t,(t+n),s) = p_{t+n}[\chi_s].$$

Die implizite Forward Rendite $f(t,(t+n),s)$ ist definiert als die Zerorendite des impliziten Forward Preises. Die implizite Forward Rendite gibt die in t geltende Zerorendite für den Zeitraum $(t+n)$ bis s an.

$$f(t,(t+1),s) := F(t,(t+n),s)^{\frac{1}{s-(t+n)}} - 1 \quad \forall\, n \leq (s-t).$$

Zinsabhängige Finanztitel

Die Menge $\{D\} = \mathcal{D}$ sei die Menge aller Discount-Bonds auf einem Finanzmarkt, die Bedingung 2.1 erfüllt. Ist die Menge $\mathcal{D}$ *vollständig*, d. h. zu einem Zeitpunkt t existieren Discount-Bonds für jede Restlaufzeit $(s-t)\ \forall\, t < s \leq T$, ist $\mathcal{D}$ Basis der Menge $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} = L(\mathcal{D})$. Im Folgenden wird definiert:

Definition 4 (Zinstitel) Ein Finanztitel, r, ist *zinsabhängig* oder ist ein *Zinstitel* genau dann, wenn $r \in L(\mathcal{D})$. $\mathcal{R}$ ist die Menge aller Zinstitel eines Finanzmarktes. ⋆

Jeder Zinstitel kann als Linearkombination, d. h. als ein Portfolio von Discount-Bonds interpretiert werden. Gemäß dem Prinzip der Additivität 2.7 drückt sich der Wert eines Finanztitels als Summe der gewichteten Preise von Discount-Bonds aus:

$$p_t[r] = \sum_{i=t+1}^{T} \alpha_i \; p_t[\chi_i].$$

Der Preis eines Finanztitels hängt somit ausschließlich von der aktuellen Diskontierungsfunktion ab. Neben den Finanztiteln, die sich als Linearkombination von Discount-Bonds beschreiben lassen, existieren in der Realität Finanztitel, deren Zahlungsströme weder in Betrag noch Zeitpunkt zum heutigen Zeitpunkt exakt definiert sind. Die Realisierung der Zahlungsströme ist an bestimmte Bedingungen geknüpft, die zwischen den Investoren bei Vertragsabschluss genau spezifiziert werden. Aus diesem Grunde werden diese Arten von Finanztiteln mit den Begriffen bedingte Ansprüche oder contingent claims umschrieben. Für die Untersuchung der Angebotsoptionen ist eine Klasse von bedingten Ansprüchen von Bedeutung. Es handelt sich hierbei um die Klasse derjenigen Finanztitel, deren Zahlungsstrom ein Zinstitel ist und in der Zukunft ausschließlich von der zum zukünftigen Zeitpunkt existierenden Diskontierungsfunktion abhängt. Diese Klasse von Finanztiteln wird als *Derivative Zinstitel* definiert.

Definition 5 (Derivativer Zinstitel) Ein Finanztitel, ρ, dessen Zahlungsstrom $\rho(\omega)$ zu einem Zeitpunkt t und in einem Zustand ω ein Zinstitel und eine Funktion der Diskontierungsfunktion zum Zeitpunkt $\tau > t$ und Zustand ω ist, $\rho(\omega) = f(P_t(\omega))$ mit $\{(i,j) : \rho(\omega^i) \neq \rho(\omega^j)\} \neq \emptyset$ heißt *Derivativer Zinstitel.* $\star$

Die Zinstitel und die Derivativen Zinstitel zusammen bilden die Klasse der zinsabhängigen Finanztitel. Der Begriff des Derivativen Zinstitels ist zentral zur formalen Beschreibung eines Kredites bzw. einer Kreditkondition.

2.2 Die Kreditkondition

Die juristische Betrachtung des Kreditbegriffes stellt auf das schuldrechtliche Verhältnis zweier Investoren ab, die ökonomische auf die Bedeutung von zeitlicher Konsumtransformation. Die finanztheoretische Auffassung des Begriffes Kredit stellt die elementaren Eigenschaften von Zahlungsansprüchen in den Mittelpunkt ihrer Betrachtung. Für die Finanzierungstheorie ist daher vielmehr die Ausgestaltung der Definition der Zahlungsansprüche von Bedeutung als der Kreditvertrag als solcher. Insofern sind die Bedingungen, zu denen die Zahlungsströme eines Kredites generiert werden, die wichtigen Eigenschaften. Daher wird in dieser Arbeit der Kredit ausschließlich vom Blickwinkel der *Kreditkondition* betrachtet. Die Kreditkondition legt alle Bedingungen für den Anspruch auf Zahlungen fest. Fast alle Konditionen sind im Kreditvertrag festgehalten. Die Ausnahme herbei stellt die Angebotsoption dar, deren Bedingungen in der Regel nicht in einem schriftlichen Vertrag festgehalten wird. Aus Gründen der einfacheren Schreibweise wird, anders als im ersten Kapitel, nicht davon ausgegangen, dass bereits die Angebotsoption Bestandteil eines Kredites bzw. einer Kreditkondition ist. Im Folgenden wird die Angebotsoption als eigener Finanztitel, d. h. als Wahlrecht eine Kreditkondition anzunehmen, betrachtet. Die Kreditkondition ist somit das Underlying oder der Basiswert der Angebotsoption.

Wie aus dem ersten Kapitel ersichtlich wird, sind bei Abschluss eines Kredites nicht alle Zahlungsströme bekannt. Stellvertretend für die in Zeitpunkt und Höhe unbekannten Zahlungsströme stehen die Sondertilgungen, die ein Kunde leisten kann, ohne eine Vorfälligkeitsentschädigung entrichten zu müssen. Daher können Kreditkonditionen nicht ausschließlich Zinstitel sein. *Einige Varianten von Kreditkonditionen sind vielmehr Derivative Zinstitel*[28].

[28] In der Realtät fallen der Großteil aller Kreditkonditionen in diese Klasse.

Daher werden Kreditkonditionen ganz allgemein definiert. Die Kreditkondition wird als eine Folge von Zahlungsströmen definiert. Dabei wird jedem Zeitpunkt t genau ein Zahlungsstrom $k_t = x(t)$ zugeordnet.

Definition 6 (Kreditkondition) Eine Kreditkondition ist ein zinsabhängiger Finanztitel. Die Kreditkondition legt Bedingungen fest, zu denen Zahlungsströme unter einem Kreditvertrag zu leisten sind. Die Zahlungsströme werden unterschieden in Auszahlungen a, Zinszahlungen z und Tilgungszahlungen u.

Eine Kreditkondition ist eine Funktion $K : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, die jedem Zeitpunkt $t \in [t_a; T]$ eine Zahlung k_t zuordnet:

$$K_t = \{k_t : k;\ t \in [t_a; T];\ k \in \mathbb{R};\ T < \infty\}.$$

Der Zahlungsstrom k_t ist die Summe aus Auszahlung, Zinszahlung und Tilgungszahlung zum Zeitpunkt t:

$$k_t = a_t + z_t + u_t \quad a,\ z,\ u \in \mathbb{R},\ t < \infty.$$

⋆

Diese Arbeit konzentriert sich auf die Bewertung von Angebotsoptionen, deren zugrunde liegende Kreditkondition zum Zeitpunkt der Angebotsannahme ein *Zinstitel* darstellt. Die Zahlungsströme $k(\omega) = k\ \forall\ \omega \in \Omega$ einer Kreditkondition sind zum Zeitpunkt der Angebotsabgabe bezüglich des Betrages und des Zeitpunktes der Zahlung bekannt, falls das Angebot angenommen wird.

Die Kreditkondition kann in drei Teile zerlegt werden. Der erste Teil ist der Zahlungsstrom der Auszahlungen A_t. Dieser Zahlungsstrom hat für den Kreditgeber nur Zahlungen mit negativem Vorzeichen. Der zweite Zahlungsstrom stellt den Zinszahlungsstrom Z_t und der dritte den Tilgungszahlungsstrom U_t dar. Diese beiden Zahlungsströme haben aus Sicht der Kredit gebenden Bank ein positives Vorzeichen. Die Summe dieser drei Zahlungsstromreihen ergibt die Kreditkondition:

$$\begin{aligned}
A_t &= \{a_t : a;\ t \in\ [t_a;T];\ a \in\ \mathbb{R};\ T <\in\ fty\},\\
Z_t &= \{z_t : z;\ t \in\ [t_a;T];\ z \in\ \mathbb{R};\ T <\in\ fty\},\\
U_t &= \{u_t : u;\ t \in\ [t_a;T];\ y \in\ \mathbb{R};\ T <\in\ fty\},\\
K_t &= A_t + Z_t + U_t.
\end{aligned}$$

Auf einem Finanzmarkt, der den Annahmen 2.1 - 2.6 entspricht, ist der Marktwert eines Kredites κ_t zum Zeitpunkt t gegeben durch die Wertadditivität 2.5 in Abhängigkeit des Zustandes ω der Diskontierungsfunktion $P = P_t(\omega)$ zum Zeitpunkt t,

$$\kappa_t(\omega) = K.P_t(\omega).$$

Die Folge K definiert eine Kreditkondition im Allgemeinen. Der Wert der Kreditkondition ist das Vektorprodukt $K.P_t(\omega)$. Die Spezifikation der Zahlungsströme k_t der Folge K definieren die Kreditkondition im Speziellen. Die Zahlungsströme k_t beschreiben bestimmte Bedingungen, zu denen der Kredit gewährt wird, die Kreditkondition K. Die Kreditkondition beinhaltet alle zahlungsstromrelevanten Bestandteile eines Kredites. Die Zahlungsströme k_t der Folge beinhalten grundsätzlich eine gewisse Struktur, die durch betriebswirtschaftliche Begriffe wie Nominalvolumen, Auszahlungskurs (Disagio), Nominalzinssatz, Zins- und Tilgungszahlungstermine, Tilgungsatz, Zinsbindungsende, etc. bestimmt werden. Diese Arbeit verzichtet auf eine formale Beschreibung der Strukturen, die ganz bestimmte Kreditformen (Ratenkredit, Kontokorrentkredit, annuitätischer Kredit usw.) beschreibt, da hierdurch die Allgemeingültigkeit nicht beeinträchtigt wird. Die in t_a einem Kunden angebotene Kreditkondition K ist der für die Bewertung der Option zugrunde liegende Finanztitel (Underlying). Im Weiteren werden die Begriffe Kreditkondition und Kredit synonym verwendet.

Im Falle der Angebotsoption haben die Beträge k_t gewisse Bedingungen zu erfüllen. Da der Markt eine endliche Laufzeit, $[0, T]$, besitzt, ist formal zu gewährleisten, dass in Bezug auf den Zeitpunkt t_e der Zeitpunkt der letzten Kreditzahlung nicht nach dem letzten Handelszeitpunkt T liegt, d. h. $t_{k_t \geq 0} \leq T$. Daraus folgt, dass zum Zeitpunkt t_a nur eine Kreditkondition angeboten werden kann, deren letzte Zahlung im Falle der Angebotsannahme zum Zeitpunkt $T - (t_e - t_a)$ geleistet werden würde. Sei t_e der letzte Zeitpunkt, zu dem die Kreditkondition angenommen werden kann, dann gilt für eine Kreditkondition:

$$K_{t \geq t_a} = \{\underbrace{k_t; k_{t+1}; \cdots; k_{T-(t_e-t_a)}}_{k \geq 0};\ \underbrace{k_{T-(t_e-t_a+1)}; \cdots; k_T}_{k=0}\}.$$

Die zweite Bedingung, die eine Kreditkondition als Basiswert einer Angebotsoption erfüllen muss, ist die der relativen Konstanz der Zahlungen. Dies bedeutet, dass die Beträge der Zahlungsströme relativ zum aktuellen Zeitpunkt t konstant bleiben. Die Folge K_t verliert daher im Zeitablauf nicht nur Elemente aufgrund der sich verkürzenden Restlaufzeit, sondern die Beträge der Elemente verschieben sich mit jedem Zeitschritt um einen Zeitpunkt nach „vorne“:

$$K_{t \geq t_a} = \{\underbrace{k_t; k_{t+1}; \cdots; k_{T-(t_e-t_a)}}_{k \geq 0};\ \underbrace{k_{T-(t_e-t_a+1)}; \cdots; k_T}_{k=0}\} \quad \rightarrow$$

$$K_{t+\tau} = \{\underbrace{k_t + \tau; k_{t+1+\tau}; \cdots; k_{T-(t_e-t_a)+\tau}}_{k_{t+\tau}=k_t};\ \underbrace{k_{T-(t_e-t_a+1)+\tau}; \cdots; k_T}_{k=0}\}.$$

Kapitel 3

Die Angebotsoption im Kreditgeschäft

Eine Angebotsoption ist ein zeitlich begrenztes Recht, einen Kredit mit zum Zeitpunkt der Angebotsabgabe spezifizierten Konditionen anzunehmen oder abzulehnen (siehe Kapitel 1). Der Zahlungsstrom, der sich aus der Angebotsoption ergibt, ist zum Abgabezeitpunkt t_a grundsätzlich nicht bekannt, sondern eine Funktion der Diskontierungsfunktion zum Zeitpunkt $\tau \geq t_a$. Gemäß Definition 5 ist eine Angebotsoption folglich ein Derivativer Zinstitel, dessen zukünftiger Zahlungsstrom vom Marktwert einer Kreditkondition bestimmt wird.

Das einzige Entscheidungskriterium eines Kunden, das Angebot anzunehmen oder abzulehnen ist der Marktwert κ_t der Kreditkondition K im Zustand ω, d. h. es wird unterstellt, dass ein Kunde die Option rational ausübt. Diese Annahme gilt sowohl für eine frühzeitige Ausübung als auch für die Ausübung am Tag der Fälligkeit der Angebotsoption. Der Marktwert κ ist die Summe aller diskontierten Zahlungen der Kreditkondition:

$$\kappa_t(\omega) = \sum_{i=t}^{T} k_i \; p_t[\chi_i, \omega] \quad \forall \; t \leq i \leq T < \infty.$$

Die Entscheidung, das Angebot auszuüben hängt mit anderen Worten davon ab, ob ein Kredit mit der angebotenen Kreditkondition die für ihn günstigste Alternative darstellt. Die Alternativen, die ein Kunde während der Laufzeit der Angebotsoption besitzt, sind im Einzelnen:

1. identische oder andere Angebote von Konkurrenzbanken einzuholen, anzunehmen oder abzulehnen,
2. mit der Bank oder mit Konkurrenzbanken über neue Konditionen zu verhandeln,
3. das Angebot oder Angebote von Konkurrenzbanken gegen oder ohne Entgelt abzutreten.

Ein rationaler Kunde (Vgl. Annahme 2.6) wird keine anderen als monetäre Größen in seine Ausübungsentscheidung einfließen lassen, sondern versuchen, den Ausübungswert zu maximieren. Jedoch handelt ein Kunde in der Realität nicht immer „rational". Er wird vielmehr abhängig von seiner Erwartung bezüglich der Zinsentwicklung oder seiner persönlichen Präferenzen Alternativen wählen, die finanzwirtschaftlich nicht zu rechtfertigen sind. Zum Beispiel üben Kunden die Angebotsoption nicht optimal aus, weil sie den optimalen Ausübungszeitpunkt der Option nicht kennen oder weil sie nicht wissen, dass die Zinsen gefallen sind und die Option im Geld ist.

In den folgenden Überlegungen zur Bewertung der Angebotsoptionen werden vereinfachende Annahmen bezüglich des Kundenverhaltens getroffen.

Annahme 3.1 (Rationalität) *Ein Kunde maximiert stets den Ausübungswert der Angebotsoption bei seiner Entscheidung, das Angebot anzunehmen oder nicht anzunehmen.*

Diese Annahme gewährleistet, dass ein Kunde finanzwirtschaftlich rational handelt. Werden einem Kunden mehrere Konditionen angeboten, aus denen er maximal eine auswählen kann, wird er diejenige wählen, die den höchsten Ausübungswert besitzt. Diese Annahme ist gleichbedeutend mit der Annahme, dass jeder Investor unersättlich bezüglich seines Vermögens ist und daher versucht, seinem Portfolio jede sich ihm bietende Arbitragemöglichkeit hinzuzufügen.

Annahme 3.2 (Exklusivität) *Ein Kunde holt bei genau einer Bank Angebote ein.*

Da ein Kunde genau einen Kredit abschließen will, verhindert diese Annahme, dass er bei mehreren Banken Angebote einholt und alle Angebotsoptionen bis auf maximal eine verfallen. Würde ein Kunde bei mehreren Banken gleichzeitig identische Angebote einholen, werden einige Optionen nicht ausgeübt, obwohl ihre Ausübung sinnvoll gewesen wäre.

Die Annahme 3.2 könnte auch gelockert werden, ohne die Ergebnisse der folgenden Betrachtungen grundlegend zu beeinträchtigen. Die Annahme der Exklusivität könnte dahingehend verallgemeinert werden, dass ein Kunde, der bei mehreren Banken gleichzeitig Angebote einholt, bei jeder Bank einen Kredit in Anspruch nimmt und zwar entweder zu den im Angebot genannten Konditionen oder zu Marktbedingungen.

Die Angebotsoption stellt unter den getroffenen Rahmenbedingungen finanztheoretisch eine Arbitragemöglichkeit dar, da sie für den Inhaber

1. mit Sicherheit keinen negativen Zahlungsstrom besitzt; der Kunde bezahlt nichts für den Erhalt der Angebotsoption und
2. mit positiver Wahrscheinlichkeit einen positiven Zahlungsstrom generiert; der Kunde übt nur dann aus, wenn der Ausübungswert positiv ist.

Soll diese Arbitragemöglichkeit beseitigt werden, dürften die Banken keine Angebotsoptionen vergeben, bzw. sie müssten bei Vergabe einen „fairen“

Preis verlangen. Insofern stellen sich bei der finanztheoretischen Untersuchung von Angebotsoptionen die Fragen: „Was ist die Angebotsoption wert? Ist es möglich, die Angebotsoptionen zu duplizieren, d. h. zu hedgen?“ Im Folgenden werden diese Fragestellungen untersucht und beantwortet.

3.1 Die Bewertung in unsegmentierten Märkten

Da ein seitens einer Bank abgegebenes verbindliches Angebot dem Kunden das Recht gibt, innerhalb der Angebotsfrist den Kredit mit den zum Zeitpunkt der Angebotsabgabe spezifizierten Konditionen anzunehmen oder abzulehnen, handelt es sich bei den Angebotsoptionen um Optionen *amerikanischen Typs*, die während ihrer Laufzeit jederzeit ausgeübt werden können. Die Angebotsoptionen werden in Abhängigkeit der Anzahl der zugrunde liegenden Kreditkonditionen in die einfachen und mehrfachen Angebotsoptionen unterschieden.

3.1.1 Die einfache Angebotsoption

Wird dem Angebot genau eine Kreditkondition K zugrunde gelegt, wird diese Art der Option im Folgenden als **einfache Angebotsoption** definiert. Ein rationaler Kunde wird am Verfalltag t_e das Angebot immer annehmen, wenn der Ausübungswert positiv ist; $\kappa_{t_e} > 0$. Ansonsten wird er das Angebot verfallen lassen bzw. neu über die Konditionen verhandeln. Für $\kappa_{t_e} > 0$ kann ein Kunde den für ihn positiven Betrag κ_{t_e} realisieren, da er einen Kredit abschließt, der für ihn einen positiven Marktwert besitzt. Der Kunde könnte zu diesem Zeitpunkt auf Basis der geltenden Marktkonditionen eine dem Zahlungsstrom des Kredites K_{t_e} entsprechende Kapitalanlage abschließen oder den Kredit verkaufen. In beiden Fällen wird er einen Vermögenszuwachs in Höhe des Betrages κ_{t_e} realisieren. Für den Ausübungswert $X[\omega]$ am Verfalltag der einfachen Angebotsoption gilt:

$$X[\omega] = p_{t_e}[C(\omega)] = [\kappa_{t_e}(\omega)]^+ = \max\left[\kappa_{t_e}(\omega), 0\right].$$

Der Wert der Angebotsoption $C(\omega)$ am Verfalltag t_e im Zustand ω ist identisch mit dem Ausübungswert $X[\omega]$. Im Folgenden steht $\hat{\kappa}_t := [\kappa_t]^+$ für den Ausübungswert der Angebotsoption zum Zeitpunkt $t \leq t_e$. Während der Laufzeit der Option wird der Kunde immer dann frühzeitig ausüben, wenn der Wert des Angebots geringer ist als der Marktwert des angebotenen Kredites. Daraus folgt, dass der Wert der Option $p_\tau[C(\omega)]$ während der Laufzeit nicht unter den Ausübungswert $\hat{\kappa}_t$ fallen darf:

$$p_\tau[C(\omega)] \geq \hat{\kappa}_\tau(\omega) \; \forall \; \tau \in \; [t; t_e]; \; \forall \; \omega \in \; \Omega.$$

Der Kredit, welcher dem Angebot zugrunde liegt, wird zum Zeitpunkt der Angebotsabgabe t_a konditioniert, d. h. der Zahlungsstrom K wird zum Zeitpunkt t_a festgelegt. Nimmt der Kunde das Angebot an, wird der Zahlungsstrom K realisiert. Der angebotene Kredit hat in der Regel einen vereinbarten Zahlungsstrom ab Annahme durch den Kunden. Die Zahlungsströme des Kredites sind relativ zum Annahmezeitpunkt konditioniert. Dies bedeutet, dass die Zahlungszeitpunkte des Kredites vom Verhalten der Optionsausübung abhängen und folglich sich die Zahlungszeitpunkte des Kredites $K_{(t+n)}$ mit Ablauf einer Periode um eine Periode nach vorne verschieben. Der Zahlungsstrom ändert sich derart, dass die Zahlungszeitpunkte des Kredites *relativ* zum Annahmezeitpunkt konstant bleiben. Der Marktwert $\kappa_{t+n}(\omega)$ des Kredites während der Laufzeit des Angebotes ist gegeben durch:

$$\kappa_{t+n}(\omega) = \sum_{i=t+n}^{T} k_i \; p_{t+n}[\chi_i, \omega] \quad \forall \; t+n \leq i \leq T.$$

Nach diesen vorbereitenden Definitionen und Notationen kann der Wert einer Angebotsoption in einer allgemeinen, d. h. von einem speziellen Zinsstrukturmodell unabhängingen Schreibweise angegeben werden.

Proposition 1 (Wert der Angebotsoption) *Der arbitragefreie Wert der Angebotsoption ergibt sich durch die Gleichungen*

$$p_{t_a}[C] = \sup_{\mathcal{T}_{t_a,t_e}} E^Q[\hat{\kappa}_{t_f}\beta_{t_f}|\mathcal{F}] \tag{3.1}$$

$$p_{t+n}[C] = \begin{cases} \max\left[\kappa_{t+n}; E^Q\left[p_{t+n+1}[C]\right]\ p_{t+n}[\chi_{t+n+1}]\right]; & t_a \leq t+n < t_e \\ \\ [\kappa_{t+n}]^+; & t+n = t_e \end{cases}.$$

Das Supremum in Gleichung 3.1 wird aus allen Markovschen Momenten der Stoppzeiten $t_f = t_f(\omega) \in \mathcal{T}$ mit $0 \leq t_f \leq T$ sowie $\omega \in \Omega$ gebildet und für irgendein $t_f^o \in \mathcal{T}$ erzeugt. $\mathcal{T}$ sei die Menge aller Ausübungszeitpunkte (Stoppzeiten) der Sequenz C. Der Zeitpunkt t_f^o ist genau dann der optimale Ausübungszeitpunkt, falls

$$p_{t_a}[C] = E^Q[\hat{\kappa}_{t_f^o}\beta_{t_f^o}|\mathcal{F}_0] = \sup_{\mathcal{T}_{t_a,t_e}} E^Q[\hat{\kappa}_{t_f}\beta_{t_f}|\mathcal{F}].$$

Die Optionsprämie lässt sich mathematisch als die kleinste, obere Schranke der diskontierten Erwartungswerte der Ausübungsgewinne über alle Stoppzeiten beschreiben. Der finanzwirtschaftliche Gehalt von verbindlichen Angeboten wird in Definition 1 erläutert. Die Angebotsoption erlaubt dem Inhaber während der Laufzeit einen Zahlungsstrom $K_t\ \forall\ t \in [t_a; t_e]$ zu einer in t_a spezifizierten Kondition aufzunehmen oder auf die Annahme des Zahlungsstroms zu verzichten. Die zentrale Frage (aus finanztheoretischer Sicht) ist die nach dem Wert eines derartigen Rechtes bzw. eines derartigen Finanztitels. Vor der Beweisführung von Proposition 1 wird auf die Duplikationsstrategie näher eingegangen. Gemäß Gleichungen 2.2 und 2.9 ist die Bewertungsfrage gleichwertig mit der Frage nach der entsprechenden selbstfinanzierenden, dynamischen Handelsstrategie Θ, d. h. die den gleichen Zahlungsstrom erzeugenden Handelsstrategie. Die selbstfinanzierende, dynamische Handelsstrategie ist der Hedgingmechanismus mithilfe dessen sowohl die Bank als auch der Kunde die Angebotsoption duplizieren können. Aus den Gleichungen 3.1 und 2.10 ist ersichtlich, dass die Ermittlung des Wertes der Angebotsoption und die Bestimmung des optimalen Ausübungszeitpunktes demselben Problem der arbitragefreien Bewertung entspringen[1].

Zum besseren Verständnis über die Preisbildung der Angebotsoption dient die unten stehende Definition. Sie definiert die Ansprüche C des Inhabers aus der Angebotsoption gegenüber dem Stillhalter als Familie von Forderungen in Abhängigkeit der Diskontierungsfunktion P_t.

Definition 7 (Zahlungsforderung)

$$\begin{aligned} C &= \{c = c(K;t;P_t);\ t \in\ [t_a;t_e];\ c \in\ \mathbb{R}\} \\ c(K;t_e;P_{t_e}) &= [\kappa_{t_e}]^+ \end{aligned}$$

⋆

Mithilfe dieser Definition kann das Ausübungsverhalten des Kunden bezüglich einer Angebotsoption beschrieben werden. Basierend auf der Information $\mathcal{F}_t$ über die am Markt gehandelten Preise kann ein Kunde die Option zu einem beliebigen Zeitpunkt $t_f = t_f(\omega)\ \forall\ t_f \in\ [t_a;t_e];\ \omega \in\ \Omega$ ausüben, wobei t_f nicht von Informationen der Zukunft abhängt, d. h. für alle Zeitpunkte t ist $\{\omega; t_f(\omega) \leq t\} \in\ \mathcal{F}_t$. Im Ausübungszeitpunkt $t_f(\omega)$ hat die Bank dem Inhaber der Angebotsoption den Ausübungswert κ_{t_f} zu entrichten, dessen Betrag von der Diskontierungsfunktion $P_{t_f}(\omega)$ abhängt. Da die Entscheidung des Optionsinhabers, die Angebotsoption auszuüben oder nicht ausschließlich von der Informationsmenge bis zum Zeitpunkt t_f abhängt, kann t_f als Stoppzeit

[1] Vgl. Pliska (1997) S. 124 ff.

bzw. ein Markovsches Moment der Folge C_t interpretiert werden. Der Ausübungszeitpunkt t_f ist mit anderen Worten eine Zufallsvariable aus $[t_a; t_e]$ mit der Eigenschaft, dass für alle zulässigen t die Beziehung $\{t_f \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ gilt, wobei die σ-Algebra durch $\mathcal{F}_t = \sigma(P_{t_a}; \ldots; P_t) \; \forall \; t \in \; [t_e; t_a]$ gebildet wird.

Beweis: Sei Θ eine dynamische, selbstfinanzierende Handelsstrategie mit dem Wert $p_t[\Theta] = \theta_t.p_t$. Die Forderung der Selbstfinanzierung bedeutet, dass bei Umschichtungen des Portfolios weder Zahlungsüberschüsse noch Zahlungsunterdeckungen entstehen:

$$\theta_t.p_t = \theta_{t-1}.p_t.$$

Aus obiger Gleichung folgt, dass der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt t durch die Beziehung

$$p_t[\Theta] = p_0[\Theta] + \sum_{j=1}^{t} \theta_{j-1}.(p_j - p_{j-1})$$

gegeben ist. Die Folge $(M_t; \mathcal{F}_t, Q)$

$$\begin{aligned} \beta_t p_t[\Theta] &= M_t \\ \beta_t p_t[\Theta] &= p_0[\Theta] + \sum_{j=1}^{t} \theta_{j-1}.(\beta_j p_j - \beta_{j-1} p_{j-1}) \end{aligned}$$

ist ein Martingal und für $t < \infty$

$$p_0[\Theta] = E^Q \left[\beta_{t_f} p_{t_f}[\Theta] \right].$$

Aus obiger Beziehung und der Wahl des Ausübungszeitpunktes t_f folgt:

$$p_0[\Theta] \geq \sup_{\mathcal{T}_{t_a,t_e}} E^Q[\beta_{t_f} \kappa_{t_f}].$$

Im Folgenden ist zu zeigen, dass Θ die Handelsstrategie mit dem minimalen Wert ist. Für den minimalen Wert gilt, dass eine Stoppzeit t_f^o derart existiert, dass für alle Zustände $\{\omega \in \Omega : \kappa_{t_f^o} = M_{t_f^o}\}$. Folglich ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
p_0[\Theta] &= E^Q\left[\beta_{t_f^o} p_{t_f^o}[\Theta]\right] \\
&= E^Q\left[\beta_{t_f^o} \hat{\kappa}_{t_f^o}\right] \\
&= \sup_{\mathcal{T}_{ta,te}} E^Q[\beta_{t_f} \hat{\kappa}_{t_f} | \mathcal{F}].
\end{aligned}
$$

Damit ist der erste Teil der Proposition, Gleichung 3.1, bewiesen. Es ist im Folgenden noch zu zeigen, dass t_f^o der optimale Ausübungszeitpunkt bzw. die optimale Stoppzeit ist. Das Problem der optimalen Stoppzeit wurde von SHIRYAYEV[2] in einem anderen Zusammenhang diskutiert. Angenommen, t_f^o sei die optimale Stoppzeit, folgt daraus, dass $p[\Theta_{t_f^o}] = \kappa_{t_f^o}$ und aufgrund der Martingaleigenschaft $p_0[C] = p[\Theta_0] = E^Q[\beta_{t_f^o} p_{t_f^o}[\Theta]]$.

Sei irgendein t_f eine Stoppzeit mit der Eigenschaft

$$E^Q[\beta_{t_f} p_{t_f}[\Theta]] = \sup_{\mathcal{T}_{ta,te}} E^Q[\hat{\kappa}_{t_f} \beta_{t_f}].$$

Θ^+ sei eine selbstfinanzierende Handelsstrategie mit dem Anfangswert $p_{t_a}[\Theta^+]$ und der Eigenschaft $p_{t_f}[\Theta^+] \geq \hat{\kappa}_{t_f}$. Aus der obigen Beziehung und der Martingaleigenschaft ergibt sich, dass

$$
\begin{aligned}
p_{t_a}[\Theta^+] &= E^Q[\beta_{t_f} p_{t_f}[\Theta^+]] \\
&\geq E^Q[\beta_{t_f} \hat{\kappa}_{t_f}] \\
E^Q[\beta_{t_f} \hat{\kappa}_{t_f}] &= \sup_{\mathcal{T}_{ta,te}} E^Q[\hat{\kappa}_{t_f} \beta_{t_f}] \\
&= p_{t_a}[C].
\end{aligned}
$$

Aus $p_{t_a}[C] = p_{t_a}[\Theta^+]$ und $\text{Prob}[p_{t_f}[\Theta^+] > \hat{\kappa}_{t_f}] = 0$ folgt, dass die Stoppzeit $t_f = t_f^o$ die optimale Stoppzeit, d. h. der optimale Ausübungszeitpunkt der Angebotsoption darstellt. Der optimale Ausübungszeitpunkt einer amerikanischen Option entspringt daher dem Problem der Bestimmung von optimalen Stoppzeiten. □

[2] Vgl. Shiryayev (1978), (1983) und (1986).

Da der Basiswert der Angebotsoption ein Zinstitel ist und die Menge aller Discount-Bonds $\mathcal{D}$ Basis aller Zinstitel, sowie die diskontierten Preise der Discount-Bonds ein Martingal sind, wird die entsprechende duplizierende Handelsstrategie ein Portfolio sein, das aus den Elementen der Menge $\mathcal{D}$ besteht. Die Koeffizienten $\theta_j(t,\omega)$ geben die Anzahl der jeweils zum jeweiligen Zeitpunkt gehaltenen Discount-Bonds χ_j an:

$$\begin{aligned} p_{t\geq t_a}[C,\omega] &= \sum_{j=t\geq t_a}^{T} \theta_j(t,\omega)\; p_t[\chi_j,\omega] \\ &= \sum_{j=t\geq t_a}^{T} \theta_j(t+1,\omega)\; p_t[\chi_j,\omega]. \end{aligned}$$

Die Folge $D(t,\omega)$ definiert das Portfolio von Discount-Bonds $\chi(t,\omega)$ zum Zeitpunkt t und Umweltzustand ω:

$$D(t,\omega) = \{\theta_j : \theta_j(t,\omega);\; j \in\; [t;T];\; \theta \in\; \mathbb{R};\; T < \infty\}\,.$$

3.1.2 Die mehrfache Angebotsoption

Beinhaltet das Angebot nicht nur eine Kreditkondition, sondern mehrere, d. h. m Kreditkonditionen, aus denen der Kunde bei Annahme genau eine auswählen kann, stellt das Angebot eine **mehrfache Angebotsoption** dar. Der Ausübungswert der mehrfachen Angebotsoption $X[\omega]$ ist das Maximum der Marktwerte $\kappa_{t_e}^{max}$ aller dem Angebot zugrunde liegenden Kreditkonditionen $K^i(t_e)\ \forall\ i \in\ \{1,m\}$ am Verfalltag oder null, denn der rationale Kunde wird immer diejenige Kondition wählen, die für ihn am vorteilhaftesten ist.

$$\begin{aligned} X[\omega] &= \max[\kappa_{t_e}^1(\omega); \kappa_{t_e}^2(\omega); \cdots; \kappa_{t_e}^{m-1}(\omega); \kappa_{t_e}^m(\omega); 0] \\ &= \left[\kappa_{t_e}^{max}(\omega)\right]^+. \end{aligned}$$

Der Wert $p_t[C]$ der mehrfachen Angebotsoption wird analog zum Wert der einfachen Angebotsoption ermittelt:

$$p_t[C] = \begin{cases} \max[\kappa_t^{max}; E^Q[p_{t+1}[C]]\ p_t[\chi_{t+1}]; & t_a \leq t < t_e \\ \\ [\kappa_t^{max}]^+; & t = t_e. \end{cases} \tag{3.2}$$

Die Beweisführung erfolgt analog zum Beweis des Wertes der einfachen Angebotsoption. Es ist lediglich κ durch κ^{max} zu ersetzen.

Vergleicht man die mehrfache Angebotsoption mit einem Portfolio, das aus m einfachen Angebotsoptionen besteht, denen die Kredite $K^1, \cdots, K^m$ zugrunde liegen, ist die mehrfache Angebotsoption

- nie weniger wert als der größte Wert einer einfachen Angebotsoption aus dem Portfolio, da diese Angebotsoption ein Bestandteil der mehrfachen Angebotsoption ist:

$$p_{t_a}^{\kappa^{max}}[C] \geq \ \max[p_{t_a}^{\kappa^1}[C]; p_{t_a}^{\kappa^2}[C]; \ldots; p_{t_a}^{\kappa^m}[C]] \text{ und}$$

- nie mehr wert als der Wert des Portfolios, d. h. die Summe der Werte der einfachen Angebotsoptionen, da nicht alle vorteilhaften Konditionen, sondern nur eine einzige, die vorteilhafteste Kondition gewählt werden darf:

$$p_{t_a}^{\kappa^{max}}[C] \leq \sum_{i=1}^{m} p_t^{\kappa^i}[C].$$

Die Differenz aus dem Wert einer mehrfachen Angebotsoption und dem maximalen Wert einer einfachen Angebotsoption aus dem Portfolio ist der Wert eines Rechtes, aus mehreren Alternativen die beste auszuwählen.

Definition 8 (Die Mehrfachprämie) Der Wert des Rechtes ϱ, eine Kondition aus einem Portfolio von Kreditkonditionen aussuchen zu dürfen, wird als Mehrfachprämie bezeichnet. Die Mehrfachprämie ist die Differenz zwischen dem Wert einer mehrfachen Angebotsoption und dem maximalen Wert einer einfachen Angebotsoption aus dem Portfolio von Kreditoptionen, aus dem sich die mehrfache Angebotsoption zusammensetzt:

$$\varrho := p_{t_a}^{\kappa^{max}}[C] - \max[p_{t_a}^{\kappa^1}[C]; p_{t_a}^{\kappa^2}[C]; \ldots; p_{t_a}^{\kappa^m}[C]].$$

$\star$

Der Wert $p_{t_a}[C]$ ist der Preis, den der Kunde zum Zeitpunkt der Angebotsabgabe zu begleichen hätte, wenn die Bank sich die Übernahme des durch die Angebotsoption entstandenen Preisänderungsrisikos bezahlen lassen würde. Da die *verbindlichen* Angebote seitens der Bank dem Kunden jedoch unentgeltlich unterbreitet werden, hat die Bank keine explizite Kompensation für das Risiko der verbindlichen Kreditkondition. Die Bank hat nun die Wahl, entweder das Risiko zu tragen, oder das Sicherungsgeschäft am Finanzmarkt zu tätigen. Das der Angebotsoption entsprechende Sicherungsgeschäft ist ein Finanztitel, der für $\kappa_{t_f}^{max} > 0$ zum Zeitpunkt t_f den Zahlungsstrom $\kappa_{t_f}^{max}$ an den Inhaber (die Bank) ausbezahlt. Im Fall der Absicherung hat eine Bank den Preis $p_{t_a}[C]$ zu bezahlen, unabhängig davon, ob der Kredit zustande kommt oder nicht. Das Pay-Off Tableau in Tabelle 3.1 zeigt die Situation, in der sich eine Bank mit der Abgabe verbindlicher Angebote befindet.

	$t = t_a$	$t = t_f$	
		$\kappa_{t_f}^{max} > 0$	$\kappa_{t_f}^{max} \leq 0$
ohne Sicherungsgeschäft	0	-$\kappa_{t_f}^{max}$	0
mit Sicherungsgeschäft	$-p_{t_a}[C]$	$\kappa_{t_f}^{max}$ - $\kappa_{t_f}^{max} = 0$	0

Tabelle 3.1: Pay-Off Tableau einer Angebotsoption

Eine Bank wird in jeder der beiden Alternativen (Sicherungsgeschäft oder kein Sicherungsgeschäft) mit positiver Wahrscheinlichkeit einen Verlust erleiden, ohne dass ein mit positiver Wahrscheinlichkeit eintretender Gewinn

$t = t_a$	$t = t_f$	
	$\kappa_{t_f}^{max} > 0$	$\kappa_{t_f}^{max} \leq 0$
0	$\kappa_{t_f}^{max}$	0

Tabelle 3.2: Arbitragemöglichkeit der Angebotsoptionen

entgegensteht. Sichert die Bank die Angebotsoption durch den Kauf eines entsprechenden Sicherungsportfolios, erwirtschaftet sie sogar einen sicheren Verlust von $p_{t_a}[C]$. $p_{t_a}[C]$ ist der bezüglich eines äquivalenten Martingalwahrscheinlichkeitsmaßes diskontierte Erwartungswert des zukünftigen Marktwertes κ^{max} der verbindlich angebotenen Kreditkonditionen unter Berücksichtigung der optimalen Stoppzeiten. Die individuelle oder tatsächliche Wahrscheinlichkeitsverteilung ist für die Bewertung der Angebotsoption (unter den getroffenen Annahmen) unerheblich. Aus diesem Grunde ist der Wert der Angebotsoption unabhänging von der Risikopräferenz des Investors. Jeder, d. h. auch ein risikoneutraler Investor wird die Angebotsoption mit demselben Betrag bewerten. Gleichung 2.11 kann dahingehend interpretiert werden, dass der Wert der Angebotsoption dem für einen risikoneutralen[3] Investor auf den Zeitpunkt t_a diskontierten, erwarteten Verlust aus dem Angebot entspricht[4]. Das äquivalente Martingalwahrscheinlichkeitsmaß wird aus diesem Grund auch als das risikoneutralisierende Wahrscheinlichkeitsmaß bezeichnet.

Gemäß Arbitragebedingung 2.8 hat ein Kunde im Falle der Angebotsoptionen eine Arbitragemöglichkeit. Ein Kunde realisiert zum Zeitpunkt t_a der Angebotsabgabe mit Sicherheit keinen negativen Zahlungsstrom und zum Zeitpunkt t_f mit positiver Wahrscheinlichkeit einen positiven Zahlungsstrom. Die Arbitragemöglichkeit des Kunden ist in Tabelle 3.2 aufgeführt.

[3]Vgl. Cox, Rubinstein (1985); S. 174.

[4]Diese Interpretation des Optionspreises findet sich erstmals in Cox, Ross (1976), S. 145 ff.

Die Banken werden das Sicherungsgeschäft nur dann tätigen, wenn deren subjektiver Erwartungswert E^W des diskontierten Verlustes größer ist als die für das Sicherungsgeschäft zu leistende Prämie:

$$\begin{aligned} E^W[\kappa^{max}] &> p_{t_a}[C] \quad \rightarrow \text{ Sicherungsgeschäft} \\ E^W[\kappa^{max}] &\leq p_{t_a}[C] \quad \rightarrow \text{ Zinsspekulation} \end{aligned}$$

Die Bank kann in dieser Situation nur das „kleinere Übel" wählen. Sie kann nicht einen drohenden Verlust ohne Prämie und umgekehrt ohne Prämie einen drohenden Verlust vermeiden. Sie ist daher je nach ihrer Einschätzung des drohenden Verlustes im Rahmen der Arbitragetheorie gezwungen, Zinsspekulation zu betreiben. Gemäß den Annahmen 2.1 bis 2.8 und der Annahme des positiven Grenznutzens von Geld existiert am Finanzmarkt für alle Investoren genau eine Diskontierungfunktion P_t. Sind für alle Investoren die Preise für Finanztitel (somit auch für Kredite) identisch, werden die Banken mit positiver Wahrscheinlichkeit Verluste und mit Sicherheit keine Gewinne aus dem Kreditgeschäft machen. Die Analyse der Angebotsoption innerhalb des beschriebenen Marktmodells zeigt das „offensichtliche" Ergebnis, dass die verbindlichen Angebote im Kreditgeschäft dem Kunden eine Arbitragemöglichkeit eröffnen.

3.2 Die Bewertung in segmentierten Märkten

Ein Kapitalmarkt, auf dem Angebotsoptionen existieren, bietet unter den getroffenen Annahmen solange für den Kunden risikolose Gewinnmöglichkeiten, solange die Banken die Angebotsoptionen ohne Prämienzahlung vergeben. Unter Zugrundelegung der formulierten Annahmen dürften Banken oder Kreditinstitute im Allgemeinen keine Erträge aus dem reinen Kreditgeschäft erzielen, wenn davon ausgegangen wird, dass

- keine Bonitätsrisiken mit dem Kreditengagement verbunden sind, d. h. der Nominalzinssatz des Kredites ist identisch mit dem Nominalzinssatz der Refinanzierung, und
- die Bank keine Zinsänderungsrisiken durch inkongruente Refinanzierung der Kredite eingeht.

Insbesondere im Hypothekenkreditgeschäft bzw. Realkreditgeschäft mit Privatkunden kann aufgrund der strengen Besicherungsvorschriften des Hypothekenbankgesetzes davon ausgegangen werden, dass mit einem Hypothekenkredit faktisch keine Bonitätsrisiken für eine Bank verbunden sind. Desweiteren wird eine Bank nicht unbegrenzt Zinsänderungsrisiken eingehen, um eventuelle Verluste durch Vergabe von Angebotsoptionen kompensieren zu können.

Kapitel 1 beschreibt die derzeitige Situation, wie die Banken üblicherweise versuchen, das mit der Vergabe verbindlicher Angebote verbundene Zinsänderungs- bzw. Marktpreisrisiko zu steuern. Es wurde anhand eines Beispieles gezeigt, dass keine der in der Realität praktizierten Verfahren in der Lage sind, Verluste aus der Vergabe von Angebotsoptionen zu vermeiden. Daher muss versucht werden, über Zinsspekulation die aus den Angebotsoptionen entstehenden Verluste zu kompensieren. Will eine Bank über die Verlustkompensation hinaus Erträge erwirtschaften, muss sie weitere Zinsänderungsrisiken hinnehmen. Diese Zinsänderungsrisiken könnte eine Bank jedoch unabhängig von dem Kreditgeschäft eingehen. Die modernen Finanzprodukte (z. B. Zinsswaps und Zinsoptionsgeschäfte) erlauben den Banken, jedes beliebige Risikoprofil bezüglich Zinsänderungsrisiken ohne den Abschluss von Kreditgeschäften aufzubauen. Daher kann davon ausgegangen werden, dass Banken mit Ausnahme der Angebotsoptionen und Sondertilungsmöglichkeiten keine Zinsänderungsrisiken eingehen, die originär mit dem Kreditgeschäft verbunden sind. Veröffentlichte Statistiken[5] und Pressemeldungen über die Betriebsergebnisse von Banken deuten darauf hin, dass Kreditinstitute aus dem Kreditgeschäft Erträge erwirtschaften. Auch der Sachverhalt, dass für die jeweiligen Laufzeiten die so genannten Interbankenzinssätze deutlich unter den Hypothekenzinssätzen liegen, zeigt, dass Banken Erträge erwirtschaften, die aus anderen Quellen als der Übernahme von Bonitäts- und Zinsänderungsrisiko stammen[6], da mit einem Hypothekenkredit de facto keine Bonitätrisiken oder Zinsänderungsrisiken verbunden sind.

Der Grund für die Zinsdifferenz zwischen Interbankenzinssätzen und Hypothekenkreditzinssätzen könnte an der besonderen Stellung einer Bank liegen, die sie am Kapitalmarkt hat. Banken haben in der Regel einen sehr guten Zugang zu den Kapitalmärkten, wohingegen es für einen Privatkunden äußerst schwierig ist, sich über die Kapitalmärkte, sozusagen an den Banken vorbei, Fremdkapital zu beschaffen. Der unterschiedliche Zugang zu Kapital von Banken und Privatkunden schließt einen nichtsegmentierten, d. h. homogenen Markt aus, auf dem für jeden Marktteilnehmer dieselben Bedingungen herrschen. Vielmehr ist von einem segmentierten Kapitalmarkt auszugehen, der eine unterschiedliche Stellung der Marktteilnehmer beinhaltet. Im Folgenden wird ein segmentierter Kapitalmarkt betrachtet und definiert. Der segmentierte Kapitalmarkt klassifiziert die Menge aller Marktteilnehmer in zwei Gruppen[7].

Wird die Annahme einer Segmentierung des Kapitalmarktes um die Annahme 3.3 ergänzt, kann unter Berücksichtigung der Annahmen 2.1 bis 2.6 erklärt werden, warum das Kreditgeschäft ertragreich sein kann, obwohl der Kunde für die Vergabe verbindlicher Angebote keine Prämie zu leisten hat.

---

[5]Monatsberichte der Bundesbank.

[6]Vgl. z. B. veröffentlichte Renditeindikationen in den Tageszeitungen Handelsblatt, Frankfurte Allgemeine Zeitung usw.

[7]Es wird unterstellt, dass die beiden Gruppen exogen vorgegeben sind.

Annahme 3.3 (Eindeutigkeit) *Ein Kunde, der sich ein verbindliches Angebot unterbreiten lässt, nimmt genau einen Kredit in Anspruch. Er hat die Wahl, entweder die (oder eine) Kreditkondition aus der Angebotsoption anzunehmen oder einen Kredit zu Marktkonditionen abzuschließen.*

Ein Kunde hat einen echten Kreditwunsch, d. h. er wird auf jeden Fall einen Kredit aufnehmen. Er übt entweder die Angebotsoption aus oder schließt mit der Bank, die ihm das Angebot unterbreitet hat, einen Kredit zu Marktkonditionen ab. Es wird ausgeschlossen, dass der Kunde versucht, mittels Kreditangeboten Arbitragegewinne zu erzielen. Diese Annahme ist notwendig, um die Existenz von Angebotsoptionen im Falle einer Marktsegmentierung zu begründen. Die Arbitragemöglichkeit des Kunden wird in der Regel von den Banken dadurch vereitelt, dass bei Kreditantrag der Verwendungszweck des Kredites angegeben werden muss. Der Verwendungszweck *Arbitrage mit Kreditangeboten* würde vermutlich von den Banken nicht akzeptiert werden. Daher würden in diesem Fall auch keine Angebotsoptionen vergeben werden. Unabhängig von der Geschäftspolitik einer Bank sind Kreditinstitute im Hypothekenkreditgeschäft verpflichtet, einen Verwendungsnachweis zu erbringen[8].

3.2.1 Investor-Broker Markt

Kapitel 2 geht von einem nichtsegmentierten oder friktionslosen Kapitalmarkt aus. Annahme 2.4 schließt neben Steuern, und Leerverkaufsrestriktionen insbesondere Transaktionskosten aus. Neben den Kosten für die Kreditabwicklung und Informationsbeschaffung subsummieren sich unter dem Begriff der Transaktionskosten auch Gebühren für Broker bzw. Makler. Transaktionskosten sind mitunter Kosten für eine Kapitalmarkttransaktion zwi-

[8] Vgl. §12 Hypothekenbankgesetz.

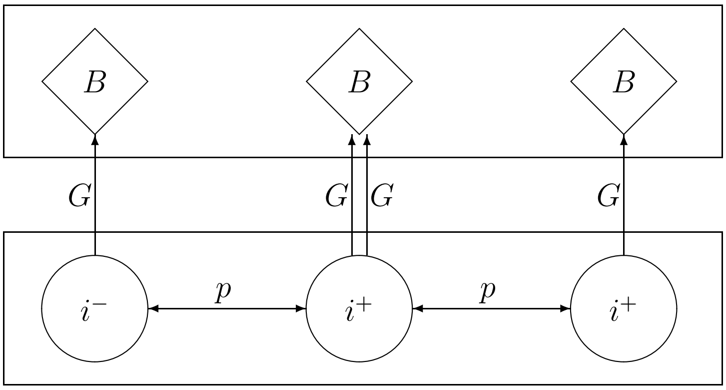


Abbildung 3.1: Grundlegende Struktur eines Investor-Broker Marktes

schen zwei Investoren. Geht man davon aus, dass Transaktionskosten existieren, und diese sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf die Gebühren für Finanzmaklerdienste beschränken, ergibt sich die in Abbildung 3.1 aufgeführte Marktstruktur. Die Grafik bezeichnet die Investoren mit i^+ oder i^-. Der Makler wird durch das Kürzel B symbolisiert. Wird eine Finanztransaktion durchgeführt, haben die beiden Geschäftspartner an den Broker B jeweils eine Gebühr in Höhe von G zu bezahlen. G muss nicht notwendigerweise für beide Investoren gleich sein. Zwischen den Investoren wird der Finanztitel zum Preis p gehandelt. Der Markt ist durch die Einführung von Transaktionskosten nicht mehr friktionslos[9]. Es existieren verschiedene Segmente, das der Investoren und das der Makler. Diese Struktur des Kapitalmarktes wird als *Investor-Broker Markt* bezeichnet. Der Makler hat hierbei eine herausragende Stellung, da er bei jeder Finanztransaktion einen positiven Zahlungsstrom in Höhe von G verzeichnet. In der Realität existiert ein derartiger Markt an den Börsen bzw. Terminbörsen. Kauft oder verkauft ein Investor an einer Terminbörse oder Aktienbörse einen Finanztitel zum

[9]Zur Theorie über Optionsbewertung unter Berücksichtigung von Transaktionskosten siehe Leland (1985), Safarian (1995), Kabanov, Safarian (1996), Duffie, Sun (1990), Boyle, Verst (1990) und Davis, Panas (1993) und die dort angegebene Literatur.

Preis p, hat er eine Transaktionsgebühr G an den so genannten „Clearer" zu entrichten. Die gesamten Aufwendungen für einen Kauf betragen daher $p+G$, bzw. die gesamten Erlöse für einen Verkauf $p-G$ aus Sicht der Investoren. Die Marktsegmentierung spiegelt sich in den Preisen von Derivativen Finanztiteln wider, die nicht notwendigerweise über eine Börse, sondern zwischen zwei Investoren gehandelt werden. Insbesondere bei Finanztitel, deren Duplikationsportfolio keine buy-and-hold Strategie ist, werden die Transaktionskosten in einer dynamischen, selbstfinanzierenden Handelsstrategie zu berücksichtigen sein. Geht man davon aus, dass zum Zeitpunkt t auf einen gehandelten Finanztitel der Betrag G_t als Maklergebühr zu entrichten ist, ist die dynamische, selbstfinanzierende Handelsstrategie aus Gleichung 2.3 unter Berücksichtigung, dass es sich bei der Angebotsoption um einen zinsabhängigen Finanztitel handelt, wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \sum_{j=t_a}^{T} \theta_j(t,\omega)\ p_t[\chi_j,\omega] &= \sum_{j=t_a}^{T} \theta_j(t-1,\omega)\ p_t[\chi_j,\omega] - G_t \text{ bzw.} \\ \theta_t . p_t &= \theta_{t-1}.p_t - G_t \quad \forall\ G_t \geq 0. \end{aligned}$$

Die zu jedem Zeitpunkt anfallenden Transaktionskosten G_t verändern den Wert eines Finanztitels im Allgemeinen und eines Derivativen Zinstitels im Speziellen. Die Transaktionskosten sind in der Regel proportionale Beträge auf den Umsatz oder die gehandelte Anzahl von Kontrakten bzw. das gehandelte Nominalvolumen. Für den Fall einer Terminbörse, bei der die Transaktionskosten proportional zum gehandelten Nominalvolumen stehen, wären die Transaktionskosten wie folgt definiert, falls k die Transaktionskosten pro Kontrakt in Geldeinheiten symbolisieren:

$$G_t := kg_t, \quad t \ \in \{1,\cdots,n\}.$$

In der Praxis treten die Transaktionskosten, d. h. die Aufwendungen, die bei der Durchführung von Finanzgeschäften anfallen, nicht nur explizit als einmalige Gebühren

$$G_t := g_t$$

auf, sondern werden durch den Umsatz der Transaktion erzeugt. Eine allgemein übliche Annahme ist, dass die Transaktionskosten proportional zum Umsatz der Transaktion sind. Diese Definition liegt auch einer Vielzahl von Arbeiten zugrunde, die sich mit der Bewertung von Finanztiteln unter Berücksichtigung von Transaktionskosten beschäftigen[10]. Mit Einführung von Transaktionskosten existieren zwei verschiedene Arten von Handelsstrategien, die *duplizierende* und die *spiegelnde* bzw. *replizierende* Handelsstrategie. Die *duplizierende* Handelsstrategie Θ bildet exakt den Zahlungsstrom eines Derivativen Zinstitels ab. Sie ersetzt gewissermaßen den Zahlungsstrom des Derivativen Zinstitels. Die spiegelnde Handelsstrategie $(-\Theta)$ hingegen bildet den Zahlungsstrom mit umgekehrtem Vorzeichen exakt ab. Sie ersetzt nicht den Zahlungsstrom des Derivativen Zinstitels, sondern erzeugt den komplementären Zahlungsstrom, sodass die kumulierten Zahlungsströme der Handelsstrategie und des Derivativen Zinstitels zu jedem Zeitpunkt in jedem Umweltzustand null betragen. Ohne Transaktionskosten haben diese beiden Strategien denselben Wert mit umgekehrtem Vorzeichen.

In einem Markt mit positiven Transaktionskosten unterscheiden sich die Werte der Handelsstrategien in Betrag und Vorzeichen. Ein Investor, der einen Derivativen Zinstitel mittels einer spiegelnden Handelsstrategie sichert, wird im Folgenden Versicherer oder Hedger, ein Investor, der den Derivativen Zinstitel bzw. die duplizierende Handelsstrategie erwirbt, Spekulant genannt. Da ein Hedger, der eine spiegelnde Handelsstrategie aufbaut, die Transaktionskosten der Handelsstrategie zu tragen hat, wird er versuchen, die Transaktionskosten auf den Handelspartner abzuwälzen. Gelingt dies nicht, kommt kein Handel zustande. Kann der Investor die Transaktionskosten dem

[10]Vgl. Lamberton, Schweizer (1998) und die dort angegebene Literatur.

Kontrahenten aufbürden, wird aus Sicht des Hedgers der faire Verkaufspreis $p^s[C] = p[C, G]$ höher, der faire Kaufpreis $p^b[-C] = |p[-C, G]|$ niedriger liegen als der faire Preis im friktionslosen Markt $p[C]$. Tabelle 3.3 stellt die Preisgrenzen in einem segmentierten Investor-Broker Markt dar:

$$p^b[-C] \leq p[C] \leq p^s[C].$$

	Spekulant	Hedger
Kauf	$\min[\text{Preis}; p[\Theta, G]]$	$-\text{Preis} + p[\Theta, G] \geq 0$
Verkauf	$\max[\text{Preis}; \|p[-\Theta, G]\|]$	$-\text{Preis} + \|p[-\Theta, G]\| \geq 0$

Tabelle 3.3: Preisgrenzen für einen segmentierten Investor-Broker Markt

Proposition 2 (Wert der Angebotsoption mit Transaktionskosten) *Sei (Θ, G) eine Handelsstrategie unter Berücksichtigung von Transaktionskosten und $p_t[\Theta, G]$ der Wert von (Θ, G) zum Zeitpunkt t und Θ eine Handelsstrategie ohne Berücksichtigung von Transaktionskosten mit Wert zum Zeitpunkt t von $p_t[\Theta]$. Die Transaktionskosten G seien eine stochastische Reihe von Funktionen $G_t = G_t(\omega)$ mit der Eigenschaft, dass $G_t \in \mathcal{F}_{t-1}$-messbar und $G_0 = 0$ ist. Für den Wert der Angebotsoption gilt folgende Beziehung:*

$$p_{t_a}[C, G] = \sup_{\mathcal{T}_{t_a,t_e}} E^Q[\hat{\kappa}_{t_f^o} \beta_{t_f^o} + \sum_{j=t_a}^{t_f^o} \beta_{j-1} G_j]. \tag{3.3}$$

Beweis: Die selbstfinanzierende Handelsstrategie (Θ, G) habe zum Zeitpunkt t_a den Wert $p_t[\Theta, G] = \theta_t.p_t$. Da die Funktionen G_t vorhersagbar sind, ist der Wert der Handelsstrategie nach einer Umschichtung:

$$\begin{aligned} \theta_t.p_t &= \theta_{t-1}.p_t - G_t \quad \forall\, t \in\ ]t_a; t_e] \\ \beta_t\ \theta_t.p_t &= \beta_t\ \theta_{t-1}.p_t - \beta_t\ G_t. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass der Wert der Handelsstrategie $p_t[\Theta, G]$ zum Zeitpunkt t gegeben ist durch die Gleichung:

$$p_t[\Theta; G] = \frac{\beta_{t-1}}{\beta_t} p_{t-1}[\Theta, G] + \theta_{t-1}.(p_j - \frac{\beta_{t-1}}{\beta_t} p_{t-1}\ p_j) - G_t.$$

Analog gilt für den Barwert der selbstfinanzierenden Handelsstrategie:

$$\beta_t p_t[\Theta, G] = p_{t_a}[\Theta, G] + \sum_{j=t_a}^{t} \theta_{j-1}.(\beta_j p_j - \beta_{j-1} p_{j-1}) - \sum_{j=t_a}^{t} \beta_j G_j \quad \forall\ t \in\ ]t_a; t_e].$$

Die Veränderung der Barwerte $\beta_t p_t[\Theta, G] - \beta_{t-1} p_{t-1}[\Theta, G]$ lässt sich in zwei Bestandteile $\hat{M}$ und $\hat{G}$ zerlegen:

$$\beta_t p_t[\Theta, G] - \beta_{t-1} p_{t-1}[\Theta, G] \;=\; \hat{M}_t - \hat{M}_{t-1} - (\hat{G}_t - \hat{G}_{t-1})$$

$$\begin{aligned} \hat{M}_t &= p_{t_a}[\Theta, G] + \sum_{j=t_a}^{t} \theta_{j-1}.(\beta_j p_j - \beta_{j-1} p_{j-1}) \\ \hat{G}_t &= \sum_{j=t_a}^{t} \beta_j G_j \quad \forall\ t \in\ ]t_a; t_e]. \end{aligned}$$

Die Sequenz $\hat{M} = (\hat{M}_t, \mathcal{F}_t, Q)$ ist ein Martingal und folglich ist $p_t[\Theta, G]$ ein Martingal, falls $G_t = 0$, oder ein Supermartingal, falls $G_t \geq 0$.

Es gilt für die Sequenz $\beta_t p_t[\Theta, G]$ aufgrund der Martingaleigenschaft von $\hat{M}$ die Beziehung:

$$E^Q[\beta_t p_t[\Theta, G]] = p_{t_a}[\Theta, G] - \sum_{j=t_a}^{t} E^Q[\beta_j G_j].$$

Stellt die selbstfinanzierende Handelsstategie (Θ, G) die duplizierende Handelsstrategie einer Angebotsoption dar, folgt daraus, dass $p_{t_f^o}[\Theta, G] := \kappa_{t_f^o}$ und

$$p_{t_a}[\Theta, G] \geq E^Q[\hat{\kappa}_{t_f^o} \beta_{t_f^o} + \hat{G}_{t_f^o} | \mathcal{F}].$$

Für die minimale Hedgingstrategie gilt die Gleichheit von:

$$p_{t_a}[\Theta, G] = E^Q[\hat{\kappa}_{t_f^o} \beta_{t_f^o} + \hat{G}_{t_f^o} | \mathcal{F}].$$

Im Folgenden ist zu beweisen, dass eine minimale Hedgingstrategie für eine gegebene Sequenz von Funktionen $G = G(\omega)$ exisitiert. Die Hedgingstrategie sei eine gestoppte Sequenz mit der optimalen Stoppzeit t_f^o. Hierzu wird das Martingal $\tilde{M} = (\tilde{M})$ definiert:

$$\tilde{M} = E^Q[\hat{\kappa}_{t_f^o}\beta_{t_f^o} + \hat{G}_{t_f^o}|\mathcal{F}].$$

Aus der Martingaldarstellung lässt sich ableiten, dass

$$\tilde{M}_t = \tilde{M}_{t_a} + \sum_{j=t_a}^{t} \tilde{\theta}_{j-1}.(\beta_j p_j - \beta_{j-1}p_{j-1}).$$

Es kann im folgenden Schritt eine selbstfinanzierende Hedgingstrategie konstruiert werden. Dabei sind das Anfangskapital $p_{t_a}[C]$, $\hat{\theta}_{t_a+1}$ sowie G_{t_a+1} gegeben. Für die Angebotsoption gilt, dass $p_{t_f^o}[\Theta] = \kappa_{t_f^o}$. Es sei im Folgenden:

$$\begin{aligned} \theta_t &= \hat{\theta}_t - \hat{\gamma}_t \\ \hat{\gamma}_t.p_t &:= G_t. \end{aligned}$$

$\hat{\gamma}_t$ ist eine Reihe von Zahlungen, die zum Zeitpunkt t den Betrag G_t und zu allen anderen Zeitpunkten den Betrag null enthält. $\hat{\gamma}_t$ wird derart konstruiert, dass $\hat{\gamma}_t.p_t = G_t$. Aus der obigen Beziehung und Definition folgt:

$$\begin{aligned} \hat{M}_t &= p_t[\Theta] + G_t \quad \forall\ t \in\ [t_a, t_f^o[\\ &= \beta_t\theta_t.p_t + \beta_t G_t \\ &= \beta_t\left(\hat{\theta}_t - \hat{\gamma}_t\right).p_t + \beta_t G_t \\ &= \hat{\theta}_t.\beta_t p_t - \underbrace{\beta_t\hat{\gamma}_t.p_t + \beta_t G_t}_{=0} \\ \hat{M}_t &= \tilde{M}_t. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} \beta_t p_t[\Theta, G] &= E^Q[\hat{\kappa}_{t_f^o}\beta_{t_f^o} + \sum_{j=t}^{t_f^o} \beta_j G_j|\mathcal{F}] \\ \beta_{t_a} p_{t_a}[\Theta, G] &= E^Q[\hat{\kappa}_{t_f^o}\beta_{t_f^o} + \sum_{j=t_a}^{t_f^o} \beta_j G_j|\mathcal{F}]. \end{aligned}$$

Aufgrund der Definition von $p_{t_f}[\Theta, G] := \kappa_{t_f} = p_{t_f}[C]$ folgt Beziehung 3.3. □

Proposition 3 (Wertbeziehung bei Transaktionskosten) *Der Wert der Angebotsoption* $p_{t_a}[C, G]$ *unter Berücksichtigung von Transaktionskosten ist gegeben durch die Beziehung*

$$|p_t[-C, G]| \leq p_t[C] \leq p_t[C, G].$$

Beweis: Aus den Beziehungen

$$\begin{aligned} E^Q[\beta_t p_t[C, G]] &= p_{t_a}[C, G] - E^Q\left[\sum_{j=t_a}^{t_f^o} \beta_j G_j\right] \\ E^Q[\beta_t p_t[C]] &= p_{t_a}[C] \end{aligned}$$

und der Tatsache, dass für die Ausübungswerte

$$E^Q[\beta_{t_f^o} p_{t_f^o}[C, G]|\mathcal{F}] = E^Q[\beta_{t_f^o} p_{t_f^o}[C]|\mathcal{F}] = E^Q[\beta_{t_f^o} \hat{\kappa}_{t_f^o}|\mathcal{F}],$$

sowie dass die Handelsstrategie Θ selbstfinanzierend ist, folgt

$$\begin{aligned} p_{t_a}[C] &= p_{t_a}[C, G] - E^Q\left[\sum_{j=t_a}^{t_f^o} \beta_j G_j|\mathcal{F}\right] \\ p_{t_a}[C] &\leq p_{t_a}[C, G] \\ p_{t_a}[C] &\geq p_{t_a}[-C, G]. \end{aligned}$$

□

Mithilfe dieser Ergebnisse lassen sich Preisgrenzen für den Wert eines Finanztitels bestimmen, falls für den Handel Transaktionskosten anfallen.

Ein Spekulant, der einen Contingent Claim erwerben möchte, ist bereit, diesen für den Betrag $p^b \leq p[\Theta, G]$ zu erwerben, da sowohl der Finanztitel C als auch die Handelsstrategie (Θ, G) dieselben Zahlungsströme für den Investor erzeugen. Analog gilt für den Verkauf $p^s \geq |p[-\Theta, G]|$.

Der Versicherer wird den Contingent Claim durch eine entsprechende Handelsstrategie absichern. Daher wird er den Contingent Claim nur dann verkaufen, falls $p^s \geq p[\Theta, G]$. Analog wird er den Contingent Claim nur dann kaufen, falls $p^b \leq |p[-\Theta, G]|$. Es ergeben sich folglich drei Situationen am segmentierten Kapitalmarkt. Im Folgenden gilt $p[\Theta, G] = p^s[C]$ und $|p[-\Theta, G]| = p^b[-C]$.

1. Ein Hedger trifft auf einen Hedger.
   Es wird kein Handel stattfinden, da der eine Hedger zu $p^b[-C]$ kaufen, der andere Hedger zu $p^s[C]$ verkaufen möchte.

2. Ein Spekulant trifft auf einen Hedger.
   Will der Spekulant den Derivativen Zinstitel kaufen, wird er $p^s[C]$ bezahlen, da die Alternative der Aufbau einer duplizierenden Handelsstrategie mit identischem Wert ist. Will der Spekulant den Derivativen Finanztitel verkaufen, wird er analog zur vorigen Begründung $p^b[-C]$ erhalten. Dieselbe Aussage gilt für einen Hedger, der zu $p^b[-C]$ kauft und zum Preis $p^s[C]$ verkauft.

3. Ein Spekulant trifft auf einen Spekulanten.
   Abhängig vom Ergebnis einer Verhandlung wird der Preis im Intervall $\left[p^b[-C]; p^s[C]\right]$ liegen. $p^b[-C]$ ist die größte untere Schranke, bei der ein Spekulant bereit ist, den Derivativen Zinstitel zu verkaufen und $p^s[C]$ die kleinste obere Schranke beim Kauf. Innerhalb dieses Intervalls wird keinem der beiden Spekulanten eine Arbitragemöglichkeit eröffnet.

Bemerkung: Mit Einführung eines Investor-Broker Marktes ist es nicht mehr möglich, einen einzigen, fairen Preis für einen Finanztitel zu ermitteln. Es kann lediglich ein Intervall von arbitragefreien Preisen angegeben werden, innerhalb dessen ein Handel stattfindet. Das Intervall $\left[p_t^b[C];\ p_t^s[C]\right]$ wird in der Realität *Geld-Brief Spanne* oder *Bid-Ask Spread* genannt. Der gehandel-

	Kauf	
Verkauf	Spekulant (S)	Hedger (H)
Spekulant (S)	$\left[p^b[-C]; p^s[C]\right]$	$p^b[-C]$
Hedger (H)	$p^s[C]$	kein Handel

Tabelle 3.4: Preisintervalle eines Investor-Broker Marktes

te bzw. arbitragefreie Preis ist nicht mehr eindeutig im Voraus bestimmbar. Er hängt unter anderem von der Absicht des Investors ab, Spekulation oder Hedging zu betreiben. Der Wert der Angebotsoption ist mit der Einführung eines segmentierten Kapitalmarktes nicht mehr präferenzunabhängig. Es gilt für den gehandelten, arbitragefreien Preis p:

$$p \in \left[p_t^b[C];\ p_t^s[C]\right].$$

Trotz der Einführung der Transaktionskosten und der damit verbundenen Marktsegmentierung bleibt der Markt vollständig; die Vollständigkeit des Marktes ist gleichbedeutend mit der Eindeutigkeit des Martingalmaßes. Nach wie vor ist es möglich, jeden Derivativen Zinstitel und insbesondere die Angebotsoptionen vollständig durch eine selbstfinanzierende, dynamische Handelsstrategie zu duplizieren. Daher existiert gemäß den Ergebnissen von Harrison und Pliska ein eindeutiges, äquivalentes Martingalmaß, mithilfe dessen ein Intervall von Werten eines Derivativen Finanztitels bestimmt werden kann. $\ast$

3.2.2 Investor-Market-Maker Markt

Es existiert neben der vorgestellten Marktsegmentierung, die zum *Investor-Market-Maker* Markt führt, eine andere Art der Segmentierung, die die Menge aller Investoren in zwei Klassen unterteilt. In der folgenden Art der Marktsegmentierung wird unterstellt, dass zwei verschiedene Arten von Investoren, i^+ und i^-, existieren. Die Klasse I^+ vereint die Funktion eines Investors und eines Maklers. Diese Eigenschaft hat zur Folge, dass diese Klasse von Investoren keine Transaktionskosten bei Finanztransaktionen zu bezahlen haben, bzw. sie erhalten sie über ihre implizite Maklerfunktion wieder zurück. Diese Maklereigenschaft bevorzugt sie vor der Investorenklasse I^-, wie aus der Abbildung 3.2 grafisch ersichtlich ist. Der Investor i^- hat bei jeder Finanztransaktion Gebühren in Höhe von G zu bezahlen. Handelt ein Investor i^- mit einem anderen Investor i^-, d. h. einem Investor derselben Investorenklasse, erhält ein dritter Broker B von jedem Investor die Gebühren G. Die Situation ändert sich, falls ein Investor i^- mit einem Investor i^+ handelt. In diesem Fall bezahlt der Investor i^- die Gebühr G nicht an einen dritten Broker B, sondern an den Investor i^+, bzw. an dessen „Brokereinheit“ B^{i^+}. Der Investor i^+ bezahlt implizit die Gebühr G^{i^+} an seine eigene „Brokereinheit“ B^{i^+}, bzw. er bezahlt keine Gebühr. Treten abschließend zwei Investoren i^+ miteinander in eine Transaktion ein, bezahlt jeder seine Gebühr G^{i^+} an seine „Brokereinheit“, d. h. keiner der beiden Investoren hat eine Gebühr zu entrichten.

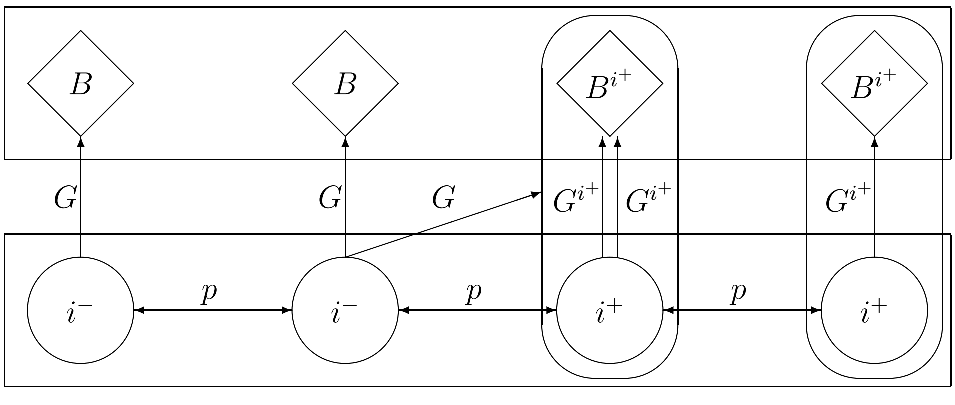


Abbildung 3.2: Grundlegende Struktur eines Investor-Market-Maker Marktes

Durch die Einführung einer neuen, privilegierten Investorenklasse verändert sich die Preisbildung auf einem derartig segmentierten Kapitalmarkt. Die Preise bilden sich nicht mehr nur nach der Absicht des Handels (Spekulation oder Hedging), sondern sie sind auch von der Investorenklasse abhängig. In der Realität können die Investoren i^+ als professionelle Marktteilnehmer interpretiert werden. Sie erfüllen die Funktion eines Investors, dessen Aufgabe es ist, jederzeit handelsbereit zu sein. Diese Funktion übernehmen in der Regel Banken als so genannte Market Maker. Aus diesem Grund wird diese Art von Marktsegmentierung als *Investor-Market-Maker* Markt bezeichnet. Während die *Investor-Broker* Marktsegmentierung sehr gut die Situation im standardisierten Börsenhandel beschreibt, dient die Marktsegmentierung des *Investor-Market-Maker* der Darstellung des so genannten *OTC-Marktes*. Der *OTC-Markt*, bzw. Over-The-Counter-Markt, ist der nicht standardisierte Markt, auf dem die Investoren direkt, ohne Einschaltung einer Börse und eines Clearers, Geschäfte miteinander abschließen. Der Abschluss eines Hypothekenkredites fällt in die Kategorie *OTC-Markt*. Auf dem *OTC-Markt* haben einige Investoren die Rolle des Market-Maker übernommen, um die Transaktionskosten abschöpfen zu können. Der Untersuchung der Preisbildung auf einem derart segmentierten Markt geht die Definition der Kapitalmarktfähigkeit voraus, die einen Market-Maker von einem „normalen“ Investor unterscheidet.

Definition 9 (Kapitalmarktfähigkeit) Ein Investor i ist entweder kapitalmarktfähig oder nicht kapitalmarktfähig. Jeder kapitalmarktfähige Investor i^+ erhält bei jeder Finanztransaktion mit einem nicht kapitalmarktfähigen Investor i^- von diesem eine Prämie. Die Menge $\mathcal{I}^+$ bezeichnet die Klasse der kapitalmarktfähigen Investoren, die Menge $\mathcal{I}^-$ die der nicht kapitalmarktfähigen Investoren. Die Prämie, die ein nicht kapitalmarktfähiger Investor i^- an die Menge der kapitalmarktfähigen Investoren zu leisten hat, ist für alle kapitalmarktfähigen Investoren identisch. $\star$

Abhängig von der Investorenklasse und der Handelsabsicht ergeben sich die in der Tabelle 3.5 dargestellten, gehandelten Preise. (Der Übersicht wegen wird ein Spekulant mit S und ein Hedger mit H abgekürzt.

	Kauf					
Verkauf	i^+			i^-		
i^+		S	H		S	H
	S	$p[C]$	$p[C]$	S	$p^s[C]$	kein Handel
	H	$p[C]$	$p[C]$	H	$p^s[C]$	kein Handel
i^-		S	H		S	H
	S	$p^b[-C]$	$p^b[-C]$	S	$\boxed{p^b[-C]; p^s[C]}$	$p^b[-C]$
	H	kein Handel	kein Handel	H	$p^s[C]$	kein Handel

Tabelle 3.5: Preisintervalle eines Investor-Market-Maker Marktes

Da die kapitalmarktfähigen Investoren keine Transaktionskosten zu bezahlen haben, werden sie unter sich zu Preisen $p[C]$ handeln, die denen eines friktionslosen Marktes entsprechen. Handeln kapitalmarktfähige Investoren mit nicht kapitalmarktfähigen Investoren, können sie ihre bevorzugte Stellung ausnutzen und zu $p^b[-C]$ kaufen bzw. zum Preis $p^s[C]$ verkaufen. Der Handel zwischen nicht kapitalmarktfähigen Investoren entspricht dem Handel in einem *Investor-Broker Markt*. Friktionsloser Markt und *Investor-Broker Markt* sind sozusagen Teilmärkte des *Investor-Market-Maker Marktes*. Will ein nicht kapitalmarktfähiger Investor als Hedger auftreten, kommt *nur dann* ein Handel zustande, wenn der Kontrahent ebenfalls ein nicht kapitalmarktfähiger Investor ist. Die Rolle von Hedgern bleibt demgemäß grundsätzlich kapitalmarktfähigen Investoren vorbehalten. Der risikolose Gewinn, den kapitalmarktfähige Hedger von nicht kapitalmarktfähigen Spekulanten erwirtschaften, ist die Differenz zwischen $p^s[C]$ bzw. $p^b[-C]$ und $p[C]$.

Bezogen auf die Angebotsoption würde dies bedeuten, dass der Wert einer Angebotsoption auf einem segmentierten Markt $p^s[C]$ betragen würde, da dies der Preis für den Kauf eines Derivativen Zinstitels für einen nicht kapitalmarktfähigen Investor darstellt. Dieser Wert wäre der korrekte Preis, falls die Angebotsoptionen seitens eines Kunden zu erwerben wären. Die entsprechende duplizierende Handelsstrategie wäre ein Portfolio, das analog zur Handelsstrategie im friktionslosen Markt aus den Elementen der Menge $\mathcal{D}$ bestünde. Die Koeffizienten θ würden die Anzahl der jeweils zum jeweiligen Zeitpunkt gehaltenen Discount-Bonds angeben:

$$\begin{aligned} p^s_{t \geq t_a}[C, \omega] &= \sum_{j=t \geq t_a}^{T} \theta_j(t, \omega)\ p_t[\chi_j, \omega] \\ &= \sum_{j=t \geq t_a}^{T} (\theta_j(t-1, \omega) - \\ &\quad \underbrace{k|\theta_j(t, \omega) - \theta_j(t-1, \omega)|)p_t[\chi_j, \omega]}_{G_t^j} \\ &= p[\Theta_t]. \end{aligned}$$

Der Wert der Angebotsoption steigt um den Barwert der zu jedem Zeitpunkt zu leistenden Broker-Gebühren. Da eine Bank dem Kunden die Angebotsoption zur Verfügung stellt, ohne explizit eine Prämie zu erheben, gilt es bei der Analyse der Angebotsoption, nicht den Wert $p^s_t[C]$ dieses Finanztitels zu bestimmen, sondern vielmehr die finanzwirtschaftlichen Auswirkungen des verbindlichen Angebots auf die Ertragssituation einer Bank. Für den Kunden ist der Wert der Angebotsoption $p^s_t[C] < p_t[C]$. Tendenziell werden die Broker-Gebühren dazu führen, dass $p^s_t[C] = 0$. Daher wird ein Kunde nicht versuchen, die Angebotsoption zu duplizieren oder gar zu hedgen, da die korrespondierenden Portfolios einen für ihn negativen Wert besitzen würden. Im Falle der Angebotsoption wird der Kunde die Rolle des Spekulanten einnehmen, der lediglich an einer optimalen Ausübung der Angebotsoption interessiert ist. Die Bank übernimmt die Funktionen des Hedgers und des Market-Makers. Die Bank wird durch den Aufbau eines Hedge Portfolios die Marktpreisrisiken absichern und seitens des Spekulanten Transaktionskosten abschöpfen.

3.2.3 Die Markteintrittsprämie

Im Folgenden wird die Angebotsoption aus dem Blickwinkel einer Bank betrachtet. Ausgangspunkt der Analyse werden der Preis für ein entsprechendes Sicherungsgeschäft (als Option) sowie der Wert der abzuschöpfenden Transaktionskosten sein. Die für eine Bank entstehenden Sicherungkosten sind die Kosten für den Aufbau des Hedge-Portfolios. Da die Bank als Market-Maker agiert, ist der Wert des Hedge-Portfolios $p_t[H] = p_t[C]$. Im Gegenzug kann die Bank Transaktionskosten in Höhe von $p_t[G]$ erwirtschaften. Das Zusammenspiel zwischen diesen beiden Komponenten determiniert den Wert der Angebotsoption $p_t[C, G]$ aus Sicht einer Bank.

Die Segmentierung des Kapitalmarktes in zwei Investorenklassen führt zur teilweisen Aufhebung der Annahme 2.4, die des friktionslosen Kapitalmarktes. Die Prämie, die von einem nicht kapitalmarktfähigen Investor zu leisten ist, kann als eine Form von Transaktionskosten interpretiert werden. Die beim Kauf oder Verkauf von Finanztiteln seitens des nicht kapitalmarktfähigen Investors zu leistende Prämie wird im Folgenden als Markteintrittsprämie γ bezeichnet. Die Markteintrittsprämie kann als der Preis interpretiert werden, den ein nicht kapitalmarktfähiger Investor für das Recht bezahlen muss, eine einmalige Finanztransaktion mit einem kapitalmarktfähigen Investor durchzuführen.

Bei Kredittransaktionen wird diese Prämie als konstanter, d. h. vom Zustand der Diskontierungsfunktion unabhängiger Betrag g_t auf den Nominalzins seitens des Kunden geleistet[11]. g_t ist der Betrag, der sich aus einem konstanten Aufschlag auf den Nominalzinssatz ergibt. Im Falle der Ange-

[11]Der Aufschlag ist keine Prämie für die Übernahme von Bonitätsrisiken durch die Bank. Bonitätsrisiken aus Krediten bleiben in dieser Arbeit unberücksichtigt.

botsoption wird die Markteintrittsprämie einmalig, d. h. ausschließlich bei Annahme der Kreditkondition bzw. des Kredites fällig. Sei g^p der prozentuale Aufschlag auf das ausstehende Kapital N_t zum Zinszahlungszeitpunkt t, ist

$$g_t := g^p \; N_t.$$

Nimmt der Kunde ein Kreditangebot an, oder schließt der Kunde zu Marktkonditionen ab, wird eine Kredittransaktion ausgeführt, die bezüglich der Markteintrittsprämie den folgenden Zahlungsstrom generiert:

$$\begin{aligned}
\hat{G}_t &= \{g_t : g;\; t \in \; [t_a; T];\; g \in \; \mathbb{R}; T < \infty\} \\
N_t &= \left\{n_t : n;\; t \in \; [t_a; T];\; n \in \; \mathbb{R}^+; T < \infty\right\} \\
\hat{G}_t &= g^p \tilde{N}_t.
\end{aligned}$$

Die Beträge von g bzw. N richten sich nach der Kreditkondition K. g und n nehmen immer dann von null verschiedene Werte an, falls t ein Zinszahlungszeitpunkt der Kondition K darstellt.

Definition 10 (Zinszahlungsstrom) Die Folge Z von Zeitpunkten des Kapitalmarktes, zu denen die Kreditkondition K eine Zinszahlung erzeugt, wird Zinszahlungsstrom genannt:

$$T^Z(K) = \{t^z : t \;\forall\; z(t) \geq 0;\; t \in \; [t_a, T];\; T < \infty\}.$$

$\star$

Mithilfe der Definition eines Zinszahlungsstromes können g_t und n_t näher spezifiziert werden:

$$g_t \quad \begin{cases} \geq 0; & \forall\; t \in \; T^Z(K) \\ = 0; & \forall\; t \notin \; T^Z(K) \end{cases}$$

$$n_t \quad \begin{cases} \geq 0; & \forall\; t \in \; T^Z(K) \\ = 0; & \forall\; t \notin \; T^Z(K). \end{cases}$$

Die Zahlungszeitpunkte der Markteintrittsprämie sind mit den Zinszahlungszeitpunkten identisch, d. h. die Zahlungszeitpunkte der Markteintrittsprämie bleiben relativ zum Annahmezeitpunkt konstant. Der Marktwert $\gamma_t(\omega)$ des Zahlungsstromes $\hat{G}_t$ ist durch die Gleichung

$$\gamma_t(\omega) = \sum_{i=t+n}^{T} g_i \; p_t[\chi_i, \omega] \geq 0$$

beschrieben. Diesen Marktwert erhält eine Bank vom Kunden, wenn eine Kapitalmarkttransaktion ausgeführt wird, d. h. bei der Kredittransaktion wird γ_t realisiert. Insofern bezeichnet γ_t die Transaktionskosten bei Abschluss einer Kredittransaktion:

$$G_t := \gamma_t.$$

Diese Markteintrittsprämie wird bei Abgabe des Kreditangebotes berücksichtigt. Dem Kunden wird folglich die Kondition $K - G$ offeriert. Der Marktwert der angebotenen Kondition zum Zeitpunkt t für den Kunden ist somit $\kappa_t^{max} - \gamma_t$. Am Ende der Angebotsfrist, t_e, wird der Kunde das Angebot annehmen, wenn ein Abschluss zu Marktkonditionen zum Zeitpunkt t_e nicht billiger wäre. Schließt der Kunde zu Marktkonditionen ab, muss er γ_{t_e} bezahlen. Übt er die Option aus, erhält er $\kappa_{t_f}^{max} - \gamma_{t_f}$. Die Ausübungsbedingung unter Berücksichtigung einer Markteintrittsprämie

$$\begin{aligned} \kappa_{t_e}^{max} - \gamma_{t_e} &> -\gamma_{t_e}, \\ \kappa_{t_e}^{max} &> 0 \end{aligned}$$

ist identisch mit der Ausübungsbedingung ohne Existenz einer Marktsegmentierung,

$$\kappa_{t_e}^{max} > 0.$$

Analog zu Gleichung 3.2 ergibt sich für den Wert der Angebotsoption $p_t[C]$[12], falls der Kunde eine Markteintrittsprämie unabhängig von der Ausübung der

[12]Zur Vereinfachung der Notation wird für $p_t[C, G]$ die Schreibweise $p_t[C]$ verwendet.

Angebotsoption zu leisten hat:

$$p_{t_a}[C] \;=\; \sup_{\mathcal{T}_{t_a,t_e}} E^Q[\hat{\kappa}_{t_f^\circ}\beta_{t_f^\circ} - \gamma_{t_f^\circ}\beta_{t_f^\circ}].$$

Für den Wert der Angebotsoption ergibt sich hieraus die nachstehende Formulierung:

$$p_t[C] \;=\; \begin{cases} \max[\kappa_t^{max} - \gamma_t; E^Q[p_{t+1}[C]]\; p_t[\chi_{t+1}]; & t_a \leq t < t_e \\ \\ [\kappa_t^{max}]^+ - \gamma_t; & t = t_e \end{cases} \tag{3.4}$$

$$s(t) \;:=\; (\kappa_t^{max} - \gamma_t) - E^Q[p_{t+1}[C]]\; p_t[\chi_{t+1}]. \tag{3.5}$$

Aus Gleichung 3.4 wird ersichtlich, dass die Markteintrittspämie nur dann bezahlt wird, falls das Angebot angenommen wird. In allen anderen Fällen wird keine Finanztransaktion ausgeführt und folglich wird auch keine Broker-Gebühr fällig. Bei einer frühzeitigen Ablösung des Kredites hat die Bank gemäß der geltenden Rechtsprechung die anteilige Markteintrittspämie zurückzuerstatten[13]. Dieser Tatbestand wird in der Darstellung des Erwartungswertoperators berücksichtigt. Da die anteiligen Markteintrittsprämien erstattet werden müssen, vermindert sich der Wert der Kreditkondition vor und nach Umschichtung um diese anteiligen Markteintrittsprämien, und die Schreibweise des Erwartungswertoperators im Duplikationsportfolio bzw. Replikationsportfolio gilt weiterhin. Wären die Markteintrittsprämien bei Umschichtung nicht zu erstatten, müsste der Kunde zu jedem Zeitpunkt die vollen Gebühren für die neuen Transaktionen bezahlen; die erste Transaktion wäre die Ablösung des alten Darlehens, die zweite Transaktion die Aufnahme des neuen Darlehens gemäß dem Anteil am Portfolio. Da eine Bank als kapitalmarktfähiger Investor das Sicherungsgeschäft abschließen kann, ohne Markteintrittsprämie bezahlen zu müssen, wird der Wert

[13]Vgl. Wimmer (2000) 862 – 867 und die dort angegebene Literatur.

der Sicherungsoption $p_t[H]$ nicht mit dem Wert der Angebotsoption $p_t[C]$ übereinstimmen. Das Underlying der Sicherungsoption ist die Kreditkondition ohne Markteintrittsprämie, da die Bank als kapitalmarktfähiger Investor keine Transaktionskosten zu entrichten hat. Soll die Sicherungsoption die Angebotsoption mit Ausnahme der Markteintrittsprämie duplizieren, wird sich das Ausübungsverhalten der Bank an das des Kunden anlehnen. Die Ausübung am Fälligkeitstag wird in der Angebotsoption und dem Sicherungsgeschäft stets dann erfolgen, wenn $\kappa_t^{max} > 0$. Die frühzeitige Ausübung richtet sich bei der perfekten Sicherungsoption am rationalen Verhalten des Kunden aus. Abhängig davon, ob der Kunde frühzeitig ausübt $s(t) > 0$ oder nicht $s(t) \leq 0$, wird das Sicherungsgeschäft frühzeitig ausgeübt oder nicht. Dies bedeutet, dass

1. zur Bestimmung von $p_t[H]$ immer erst $p_t[C]$ ermittelt werden muss, und
2. die Bank in der Sicherungsoption nicht das Wahlrecht, sondern die Pflicht einer frühzeitigen Ausübung hat. Die Ausübungsbedingungen ergeben sich durch die Angebotsoption.

Gleichung 3.6 beschreibt den Wert $p_t[H]$ der Sicherungsoption, den die Bank zu leisten hat, falls sie das Zinsänderungsrisiko aus der Angebotsoption absichern will:

$$p_t[H] = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{ll} \kappa_t^{max}; & s(t) > 0 \\ E^Q[p_{t+1}[H]]\ p_t[\chi_{t+1}]; & s(t) \leq 0 \end{array} \right\}; & t_a \leq t < t_e \\ & \\ \left\{ \begin{array}{ll} \kappa_t^{max}; & \kappa_t^{max} > 0 \\ 0; & \kappa_t^{max} \leq 0 \end{array} \right\}; & t = t_e. \end{cases} \tag{3.6}$$

Der Unterschied zwischen dem Wert des Sicherungsgeschäftes $p_t[H]$ und dem Wert der Angebotsoption $p_t[C]$ symbolisiert den Wert $p_t[G]$ der Verpflichtung des nicht kapitalmarktfähigen Investors, bei Kreditannahme die Markteintrittsprämie zu bezahlen. Aus den Gleichungen 3.4 und 3.6 folgt, dass

$$p_t[G] := p_t[H] - p_t[C]. \tag{3.7}$$

Die Differenz definiert den Wert der Markteintrittsprämie zum Zeitpunkt t und ist aufgrund der Additivität von Erwartungswerten und den identischen Bedingungen der frühzeitigen Ausübung wie folgt charakterisiert:

$$\begin{aligned}
p_t[G] &= \begin{cases} \left.\begin{cases} \kappa_t^{max} - (\kappa_t^{max} - \gamma_t); & s(t) > 0 \\ E^Q[(p_{t+1}[H] - p_{t+1}[C])\ p_t[\chi_{t+1}]]; & s(t) \leq 0 \end{cases}\right\}; & t_a \leq t < t_e \\ \\ \left.\begin{cases} \kappa_t^{max} - (\kappa_t^{max} - \gamma_t); & \kappa_t^{max} > 0 \\ 0 - (-\gamma_t); & \kappa_t^{max} \leq 0 \end{cases}\right\}; & t = t_e \end{cases} \\
\\
&= \begin{cases} \left.\begin{cases} \gamma_t; & s(t) > 0 \\ E^Q[\gamma_{t+1}\ p_t[\chi_{t+1}]]; & s(t) \leq 0 \end{cases}\right\}; & t_a \leq t < t_e \\ \\ \left.\begin{cases} \gamma_t; & \kappa_t^{max} > 0 \\ \gamma_t; & \kappa_t^{max} \leq 0 \end{cases}\right\}; & t = t_e. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$p_t[G]$ ist der Wert der Markteintrittsprämie zum Zeitpunkt t, den die Bank erhält unabhängig davon, ob der Kunde die Angebotsoption ausübt, oder den Kredit am Verfalltag zu Marktkonditionen annimmt. Der Marktwert $p_t[G]$ ist nicht notwendigerweise identisch mit γ_t, da sich die Zahlungszeitpunkte der Beträge g_{t+n} von G_{t+n} relativ mit dem potentiellen Annahmezeitpunkt verschieben. Im Folgenden wird gezeigt, dass die Unsicherheit bezüglich des Zeitpunktes der Realisation der Markteintrittsprämie durch eine Bank einen positiven Wert für den Kunden besitzt.

Gilt Annahme 3.3, ist für eine Bank die Realisation der Markteintrittsprämie γ_t sicher. Der Zeitpunkt t_f der Realisation des Zahlungsstromes G_{t_f} ist zum Zeitpunkt der Angebotsabgabe t_a nicht determiniert, sondern vom Zustand der Diskontierungsfunktion am Ausübungstag t_f abhängig. Die Bedingungen der Realisation der Markteintrittsprämie vor dem Verfalltag des Angebotes sind identisch mit den Ausübungsbedingungen der Angebotsoption. Am Verfalltag t_e wird unabhängig von der Diskontierungsfunktion der Wert γ_{t_e} seitens der Bank erzielt.

Da $p_t[G] \geq 0 \; \forall \; g^p \geq 0$, erwirtschaftet eine Bank diesen Betrag als sicheren Ertrag aus der Vergabe verbindlicher Angebote. Demgegenüber steht der Marktwert der Sicherungsoption $p_{t_a}[H]$, den die Bank bezahlen muss, will sie das Risiko der Angebotsoption sichern. Das Kreditgeschäft ist solange ertragreich wie $p_{t_a}[G] > p_{t_a}[H]$.

Die Zahlungsweise des Sicherungsgeschäftes und der Markteintrittsprämie fallen in der Regel auseinander. Für das der Angebotsoption äquivalente Sicherungsgeschäft fällt die Prämie in der Regel sofort an, die Markteintrittsprämie wird jedoch in Form des Zahlungsstromes G_{t_f} bei Ausübung der Option fällig. Auf der Seite des Sicherungsgeschäftes existiert eine sichere Auszahlung, auf der Seite der Markteintrittsprämie eine hinsichtlich der Zahlungszeitpunkte unsichere Einzahlung. Dieses Risiko kann auf zweierlei Arten beseitigt werden:

1. Die Bank verkauft den risikobehafteten Zahlungsstrom G_{t_f} und erhält $p_{t_a}[G]$.
2. Die Bank gleicht die Zahlungsweise des Sicherungsgeschäftes an die der Markteintrittsprämie an.

Im zweiten Fall der Anpassung der Zahlungsweise muss gewährleistet sein, dass die Bank einen Zahlungsstrom $V(t_f)$ nur dann bezahlt, wenn der Zahlungsstrom aus der Markteintrittsprämie realisiert wird, d. h. bei einer frühzeitigen Ausübung oder am Verfalltag. Der Zahlungsstrom $V(t_f)$ beinhaltet

Zahlungen v_t zu den Zinszahlungszeitpunkten t^z der Kreditkondition K. Da analog zu g_t der Betrag v_t als Aufschlag auf den Nominalzinssatz berechnet wird ($v_t := v^p\ N_t$), ist der Zahlungsstrom V_t somit eine Linearkombination des Zahlungsstromes G_t mit $V_t = \mu\ G_t$:

$$\begin{aligned} V_t &= \{v_t : v;\ t \in\ [t_a; T];\ v \in\ \mathbb{R};\ T < \infty\} \\ &= v^p\ N_t \\ v_t &:= \begin{cases} \geq 0; & t \in\ T^Z(K) \\ = 0; & t \notin\ T^Z(K). \end{cases} \end{aligned}$$

Der Marktwert ν_{t_f} des Zahlungsstromes $V(t_f)$ ist die Summe der auf den Zeitpunkt t_f diskontierten Zahlungen v_i:

$$\nu_{t_f}(\omega) = \sum_{i=t_f}^{T} v_i\ p_{t_f}[\chi_i, \omega] \geq 0.$$

Der Wert $p_t[V]$ des Zahlungsstromes $V(t)$ zum Zeitpunkt t ist analog zur Berechnung des Wertes der Markteintrittsprämie:

$$p_t[V] = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{ll} \nu_t; & s(t) > 0 \\ E^Q[\nu_{t+1}\ p_t[\chi_{t+1}]]; & s(t) \leq 0 \end{array} \right\}; & t_a \leq t < t_e \\ & \\ \nu_t; & t = t_e. \end{cases}$$

Aufgrund der linearen Abhängigkeit von G und V ist für die Werte g_t und v_t die Beziehung $v_t = \mu\ g_t$ und $v_t^p = \mu\ g_t^p$ erfüllt. Daher ist der Wert $p_{t_a}[V]$ proportional zur Markteintrittsprämie $p_{t_a}[G]$:

$$p_{t_a}[V] = \mu\ p_{t_a}[G].$$

Der Betrag v^p ist derart zu wählen, dass der Marktwert des Zahlungsstromes V zum Zeitpunkt der Angebotsabgabe $p_{t_a}[V]$ dem Wert der Angebotsoption $p_{t_a}[H]$ entspricht, d. h.

$$p_{t_a}[V] = p_{t_a}[H].$$

Der auf diese Weise bestimmte Betrag v_t ist der Betrag, der für das Sicherungsgeschäft zu jedem Zinszahlungszeitpunkt des konditionierten Kredites als Prämie zu leisten ist. Der Zahlungsstrom V ist eine Möglichkeit, wie die Prämie für das Sicherungsgeschäft geleistet werden kann. V kann als derivativer Zinstitel interpretiert werden, der bei Abschluss den Wert $p_{t_a}[V] = p_{t_a}[H]$ besitzt und den Zahlungsstrom $V(t_f)$ nur dann generiert, wenn der Kredit abgeschlossen wird. Die Prämie v^p schmälert die erhaltene Markteintrittsprämie g^p. Der sichere „Ertrag“ pro Zinszahlungstermin aus dem Kredit beläuft sich demnach auf $g^p - v^p$.

Eine Bank gibt einen Teil ihrer Markteintrittsprämie in Form von verbindlichen Angeboten an den Kunden zurück. Da einerseits der Wert der Angebotsoption, d. h. der Betrag v_t bzw. v^p, von den Parametern des Angebotes und der Diskontierungsfunktion abhängt, andererseits der Betrag der Markteintrittsprämie g^p in der Regel konstant ist, wird die Bank aus dem Kreditgeschäft schwankende Erträge erwirtschaften. Ohne die unentgeltliche Vergabe der verbindlichen Angebote oder sonstiger unentgeltlicher Wahlrechte[14] könnte eine Bank die volle Markteintrittsprämie γ_t abschöpfen. Die verbindlichen Angebote werden daher in jedem Fall zu Opportunitätsverlusten[15] von Banken führen.

Solange jedoch $g^p > v^p$, werden sich diese Opportunitätsverluste nicht in den Jahresabschlüssen der Banken wiederfinden, sondern das Kreditgeschäft wird im Gegenteil als ertragreich[16] ausgewiesen. Das Pay-Off Diagramm in Tabelle 3.6 gibt die Situationen, in denen sich eine Bank befindet, wieder, falls ein Sicherungsgeschäft (Hedge) bzw. kein Sicherungsgeschäft (kein Hedge)

[14]Die analoge Aussage gilt für das Recht vorfälligkeitsentschädigungsloser Sondertilgungen.

[15]Dieser Begriff bezeichnet betriebswirtschaftliche Verluste im Sinne der Finanzierungstheorie, die jedoch keine handelsrechtlichen Verluste darstellen; entgangene Gewinne sind typische Opportunitätsverluste.

[16]Es wird hier von Erträgen aus Zinsspekulation abgesehen.

getätigt wurde.

	Abgabe $t = t_a$	frühzeitige Ausübung $t = t_f$		Verfalltag $t = t_e$	
		$s(t_f) > 0$	$s(t_f) \leq 0$	$\kappa_{t_e}^{max} > 0$	$\kappa_{t_e}^{max} \leq 0$
kein Hedge	0	$-\kappa_{t_f}^{max} + \gamma_{t_f}$	0	$-\kappa_{t_e}^{max} + \gamma_{t_e}$	γ_{t_e}
Hedge	$\underbrace{p_{t_a}[V] - p_{t_a}[H]}_{:=0}$	$\gamma_{t_f} - \nu_{t_f}$	0	$\gamma_{t_e} - \nu_{t_e}$	$\gamma_{t_e} - \nu_{t_e}$

Tabelle 3.6: Pay-Off Diagramm einer Bank, die Angebotsoptionen vergibt

Das Sicherungsgeschäft in Verbindung mit der Markteintrittsprämie führt im Falle der Annahme des Abgebotes durch den Kunden an jedem Zinszahlungszeitpunkt zu einer Zahlung von $g_t - v_t$. Die Höhe dieser Zahlungen ist in t_a bereits bekannt. Abhängig von der Höhe von g^p und v^p erwirtschaftet eine Bank einen handelsrechtlichen Ertrag oder erleidet einen handelsrechtlichen Verlust. Der Wert v^p gibt die minimale Markteintrittsprämie g^p_{min} an, den ein Kunde für eine Kredittransaktion zu leisten hat, sofern eine Bank keinen handelsrechtlichen Verlust aus der Vergabe verbindlicher Angebote erleiden möchte.

Ohne Sicherungsgeschäft erhält eine Bank bei Annahme einen Marktwert von $\gamma_{t_f} - \kappa_{t_f}^{max}(t_f)$. Je nach Situation der Diskontierungsfunktion zum Zeitpunkt t_f ist der Marktwert positiv oder negativ. Zum Zeitpunkt t_a ist nicht bekannt, ob zum Zeitpunkt t_f der Marktwert positiv oder negativ sein wird. Der Verzicht auf das Sicherungsgeschäft bedeutet Unsicherheit über die Höhe des Marktwertes.

Bemerkung: Die Markteintrittsprämie, d. h. die besondere Stellung der Banken am Kapitalmarkt, ist dafür verantwortlich, dass Banken aus ihrem Kreditgeschäft nachhaltige Erträge erwirtschaften können. Gelingt es einer Bank (wie in den vorstehenden Überlegungen vorausgesetzt) durch Abgabe eines verbindlichen Angebotes eine Kapitalmarkttransaktion auszuführen, so sichert die realisierte Prämie $p_{t_a}[G]$ der Bank in der Regel schon bei Angebotsabgabe einen sicheren Ertrag von $p_{t_a}[G] - p_{t_a}[H]$. $*$

Diese Ergebnisse legen die Vermutung nahe, dass ein Großteil des Bankenertrages nicht durch Übernahme und Diversifizierung von Risiken, sondern durch Ausführen von Kapitalmarkttransaktionen entsteht[17].

Der Vollständigkeit wegen soll der Fall betrachtet werden, dass Annahme 3.3 fallen gelassen wird. Dies bedeutet, dass ein Kunde versucht, mittels Angebotsoptionen die Banken auszuarbitrieren. In dieser Situation kann gezeigt werden, dass selbst im Fall der Marktsegmentierung die Sicherungskosten immer größer sind als die abgeschöpfte Markteintrittsprämie.

Ein Kunde, der mit Angebotsoptionen arbitrieren möchte, wird das Angebot nur dann annehmen, wenn er eine alternative Anlagemöglichkeit besitzt, sodass aus dem Kredit und der Anlage einschließlich der zu entrichtenden Markteintrittsprämien $\gamma^A = \gamma + \tilde{\gamma}$ ein positiver Marktwert verbleibt. Da die alternative Anlagemöglichkeit zu Marktkonditionen abgeschlossen wird, besitzt sie einen Marktwert von null. Die Anlage stellt eine Kapitalmarkttransaktion dar, für die eine Markteintrittsprämie $\tilde{\gamma}$ zu entrichten ist. Der Arbitrageur wird eine Angebotsoption somit immer dann ausüben, wenn

$$\kappa_{t_e}^{max} > \gamma_{t_e}^A = \gamma_{t_e} + \tilde{\gamma}_{t_e}.$$

Gilt Annahme 3.3 nicht, hat die Angebotsoption für einen Arbitrageur den Wert:

$$p_t^A[C] = \begin{cases} [\kappa_t^{max} - \gamma_t^A; E^Q[p_{t+1}[C, \tilde{\gamma}]]\ p_t[\chi_{t+1}]^+; & t_a \leq t < t_e \\ \\ \left[\kappa_t^{max} - \gamma_t^A\right]^+; & t = t_e \end{cases} \tag{3.9}$$

[17]Dies erklärt, weshalb derzeit viele Banken das Investmentbanking-Geschäft suchen.

$$z^A(t) \quad := \quad (\kappa_t^{max} - \gamma_t^A) - E^Q[p_{t+1}[C, \tilde{\gamma}]]\ p_t[\chi_{t+1}].$$

Das entsprechende Sicherungsgeschäft ist folgendermaßen definiert:

$$p_t^A[H] = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{ll} \kappa_t^{max}; & z^A(t) > 0 \\ E^Q[p_{t+1}[H]]\ p_t[\chi_{t+1}]; & z^A(t) \leq 0 \end{array} \right\}; & t_a \leq t < t_e \\ \\ \left\{ \begin{array}{ll} \kappa_t^{max}; & \kappa_t^{max} > \gamma_t^A \\ 0; & \kappa_t^{max} \leq \gamma_T^A \end{array} \right\}; & t = t_e. \end{cases}$$

Der Wert der abgeschöpften Markteintrittsprämie ist analog zu Gleichung 3.8:

$$p_t^A[G] \quad = \quad \begin{cases} \left\{ \begin{array}{ll} \gamma_t^A; & z^A(t) > 0 \\ E^Q[\gamma_{t+1}\ p_t[\chi_{t+1}]]; & z^A(t) \leq 0 \end{array} \right\}; & t_a \leq t < t_e \\ \\ \left\{ \begin{array}{ll} \gamma_t^A; & \kappa_t^{max} > \gamma_t^A \\ 0; & \kappa_t^{max} \leq \gamma_t^A \end{array} \right\}; & t = t_e. \end{cases} \tag{3.10}$$

Aus Gleichung 3.9 ergibt sich $p_t^A[C] \geq 0$ und aus Gleichung 3.10 $p_t^A[G] \geq 0$. Da $p_t^A[G] = p_t^A[H] - p_t^A[C]$, folgt $p_t^A[H] \geq p_t^A[G]$. Eine Bank hat demnach immer höhere Sicherungskosten als sie über die Markteintrittsprämie abschöpfen kann. Lassen die Banken Arbitragegeschäfte im Kreditbereich zu, werden sie trotz ihrer besonderen Stellung am Kapitalmarkt Verluste aus den Kreditgeschäften erleiden. Insofern unterscheidet sich die Situation bei Marktsegmentierung nicht von der ohne Marktsegmentierung. Obwohl in beiden Fällen die Vergabe der Angebotsoptionen für die Bank mit positiver Wahrscheinlichkeit einen Verlust und mit Sicherheit keinen Gewinn bedeutet, ist der potentielle Verlust für die Banken auf einem *Investor-Market-Maker* Markt niemals höher als auf einem friktionslosen Kapitalmarkt:

$$p_t^A[C|g^p \geq 0] \leq p_t[C|g^p = 0].$$

3.3 Die Margenfaktoren

Die Markteintrittsprämie g^p wird als Zahlungsstrom bei Abgabe der Angebotsoption realisiert. Dennoch sind der Zeitpunkt t_f und der Ausübungswert γ_{t_f} unsicher. Schließt eine Bank ein Sicherungsgeschäft ab, gilt dies analog auch für v^p bzw. ν_{t_f}. Dennoch kann der Wert $p_{t_a}[G]$ bzw. $p_{t_a}[H]$ derart auf Zinszahlungszeitpunkte äquivalent verteilt werden, dass $p_{t_a}[G]$ bzw. $p_{t_a}[H]$ als prozentualer Anteil am ausstehenden Kapital ausgedrückt wird, unter der Voraussetzung, dass der Kredit bei Angebotsabgabe, d. h. in t_a, zustande gekommen ist. In der Realität des Kreditgeschäftes werden Preise weniger mit Barwerten, sondern in den meisten Fällen mit prozentualen Größen (auf ein Nominalvolumen bezogen) beschrieben. Aus diesem Grund sollen mithilfe von so genannten Margenfaktoren die Barwerte der Angebotsoption, Sicherungsoption und Markteintrittsprämie in prozentuale Größen bzw. Margen überführt werden. Der risikolose Margenfaktor $\hat{\psi}$ mit $\hat{N}$ Nominalvolumen des Kredites bzw. Kreditangebotes ist wie folgt definiert:

Definition 11 (Risikoloser Margenfaktor) Der risikolose Margenfaktor $\hat{\psi}$ einer Kondition ist die Summe der Barwerte einer zu jedem Zinszahlungstag fälligen und mit dem Anteil des ausstehenden Kapitals am Nominalvolumen gewichteten Geldeinheit:

$$\hat{\psi} := \sum_{i=t_a}^{T} \frac{N_i}{\hat{N}} p_t[\chi_i] > 0.$$

⋆

Der risikolose Margenfaktor erlaubt die Transformation von Barwerten in prozentuale Aufschläge bzw. Abschläge auf das Nominalvolumen eines Kredites, der zum Zeitpunkt t_a angenommen wird.

Es herrscht keine Unsicherheit bezüglich des Zeitpunktes der Annahme des Kredites. Mithilfe dieses Numéraires kann im Folgenden ein der Ange-

$$\boxed{\text{Barwert} \xrightarrow{\text{risikoloser Margenfaktor}} \text{risikolose Marge}}$$

Abbildung 3.3: Beziehung zwischen risikolosem Margenfaktor, Marge und Wert einer Angebotsoption

botsoption äquivalenter Kredit konstruiert werden, der sich von der Kondition der Angebotsoption lediglich im Nominalzins unterscheidet. Diese Konstruktion eines sofort angenommenen Vergleichskredites gibt auf eine anschaulichere Weise den Wert der Angebotsoption, des Sicherungsgeschäftes oder der Markteintrittsprämie wieder als die reinen Werte. Insbesondere für den Fall der Marktsegmentierung ist der Vergleichskredit ein anschaulicher Maßstab. Eine Angebotsoption wird mit einem sofort ausbezahlten Kredit verglichen, um den Wert der Angebotsoption zu relativieren[18].

Der Quotient aus dem Wert der Markteintrittsprämie $p_{t_a}[G]$ und dem risikolosen Margenfaktor gibt den prozentualen Anteil $\hat{g}^p$ auf das ausstehende Nominalvolumen an, der mit Sicherheit zum Zeitpunkt t_a seitens einer Bank vom Kunden als einem nicht kapitalmarktfähigen Investor abgeschöpft werden kann. Analog stellen die Quotienten aus $p_{t_a}[H]$ und $\hat{\psi}$ bzw. $p_{t_a}[C]$ und $\hat{\psi}$ den Aufschlag, d. h. die Marge für das Sicherungsgeschäft bzw. die Angebotsoption dar. Diese Margen werden *risikolose Margen* genannt:

$$\hat{g}^p \quad := \quad \frac{p_{t_a}[G]}{\hat{\psi}}, \; \hat{v}^p := \frac{p_{t_a}[H]}{\hat{\psi}}, \; \hat{c}^p := \frac{p_{t_a}[C]}{\hat{\psi}}.$$

Die risikolosen Margen $\hat{g}^p$, $\hat{v}^p$ und $\hat{c}^p$ können realisiert werden, indem eine Bank die Werte $p_{t_a}[G]$, $p_{t_a}[H]$ und $p_{t_a}[C]$ verkauft bzw. kauft und diese als Zahlungsmodalität durch die entsprechenden Zahlungsströme $\hat{G}(0)$, $\hat{V}(0)$ und $\hat{C}(0)$ ersetzt. $\hat{G}(0)$, $\hat{V}(0)$ und $\hat{C}(0)$ werden zum Zeitpunkt t_a festgelegt und realisiert.

[18]Im Falle der mehrfachen Angebotsoption kann eine der Kreditkonditionen als Maßstab herangezogen werden, um den Vergleichskredit zu bestimmen.

Definition 12 (Risikogewichteter Margenfaktor) Der risikogewichtete Margenfaktor einer Kondition $\tilde{\psi}$ ist der erwartete Barwert einer zu jedem Zinszahlungstag in Abhängigkeit der Ausübung einer Angebotsoption (Annahme eines Kredites) fälligen und mit dem Anteil des ausstehenden Kapitals am Nominalvolumen gewichteten Geldeinheit. $\tilde{\psi}$ ist der Wert $p_{t_a}[V]$ des Zahlungsstromes $V(t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} &= \begin{cases} \left.\begin{cases} \nu_t; & s(t) > 0 \\ E^Q[\nu_{t+1}\ p_t[\chi_{t+1}]]; & s(t) \le 0 \end{cases}\right\}; & t_a \le t < t_e \\ \\ \nu_t; & t = t_e \end{cases} \qquad (3.11) \\ \nu_{t_f}(\omega) &= \sum_{i=t_f}^{T} \frac{N_i}{\hat{N}}\ p_{t_f}[\chi_i, \omega] \ge 0. \end{aligned}$$

⋆

Der risikogewichtete Margenfaktor transformiert Barwerte in prozentuale Aufschläge bzw. Abschläge auf das Nominalvolumen eines Kredites, dessen Annahmezeitpunkt noch unsicher ist. Es herrscht Unsicherheit bezüglich des Zeitpunktes der Annahme des Kredites. Unter Annahme 3.3 wird der Kredit spätestens am Verfalltag der Angebotsoption angenommen.

$$\boxed{\text{Barwert} \xrightarrow{\text{risikogewichteter Margenfaktor}} \text{risikogewichtete Marge}}$$

Abbildung 3.4: Beziehung zwischen risikogewichtetem Margenfaktor, Marge und Wert einer Angebotsoption

Die jeweiligen Quotienten aus den Werten $p_{t_a}[G]$, $p_{t_a}[H]$ und $p_{t_a}[C]$ und dem risikogewichteten Margenfaktor $\tilde{\psi}$ bezeichnen die *risikogewichteten Margen*, d. h. den prozentualen Anteil $\tilde{g}^p$, $\tilde{v}^p$ bzw. $\tilde{c}^p$ auf das ausstehende Nominalvolumen, der mit Sicherheit zum Zeitpunkt der Annahme t_f realisiert wird:

$$\tilde{g}^p \ := \ \frac{p_{t_a}[G]}{\tilde{\psi}}, \ \tilde{v}^p := \frac{p_{t_a}[H]}{\tilde{\psi}}, \ \tilde{c}^p := \frac{p_{t_a}[C]}{\tilde{\psi}}. \tag{3.12}$$

Die risikogewichteten Margen $\tilde{g}^p$, $\tilde{v}^p$ und $\tilde{c}^p$ werden fällig, wenn eine Bank die Werte $p_{t_a}[G]$, $p_{t_a}[H]$ und $p_{t_a}[C]$ verkauft bzw. kauft und diese als Zahlungsmodalität durch die entsprechenden Zahlungsströme $\tilde{G}(0)$, $\tilde{V}(0)$ und $\tilde{C}(0)$ ersetzt. Die Zahlungsströme $\tilde{G}(0)$, $\tilde{V}(0)$ und $\tilde{C}(0)$ werden analog zu den Zahlungsströmen $\hat{G}(0)$, $\hat{V}(0)$ und $\hat{C}(0)$ zum Zeitpunkt t_a festgelegt, jedoch nur zum Ausübungszeitpunkt t_f realisiert. Die Tabelle 3.7 gibt einen Überblick über das Zusammenspiel von risikoloser und risikogewichteter Marge.

Wert	$\hat{\psi}$		$\tilde{\psi}$	
	Marge	Zahlungsstrom	Marge	Zahlungsstrom
$p_{t_a}[G]$	$\hat{g}^p$	$\hat{G}(0)$	$\tilde{g}^p$	$\tilde{G}(0)$
$p_{t_a}[H]$	$\hat{v}^p$	$\hat{V}(0)$	$\tilde{v}^p$	$\tilde{V}(0)$
$p_{t_a}[C]$	$\hat{c}^p$	$\hat{C}(0)$	$\tilde{c}^p$	$\tilde{C}(0)$

Tabelle 3.7: Risikolose und risikogewichtete Margen

Der risikogewichtete Margenfaktor bei Nichtmarktsegmentierung bzw. Arbitragemöglichkeiten hat zu berücksichtigen, dass nicht in jedem Fall der Kredit angenommen wird. Daraus folgt, dass nicht zwangsläufig eine Kredittransaktion zustande kommt, bei der eine Markteintrittsprämie fällig wird. Daher stellt er sich anders dar als der risikogewichtete Margenfaktor bei Marktsegmentierung bzw. ohne Zulassung von Arbitragemöglichkeiten bei

Angebotsoptionen:

$$\tilde{\psi}^A = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{ll} \nu_t; & z^A(t) > 0 \\ E^Q[\nu_{t+1}\ p_t[\chi_{t+1}]]; & z^A(t) \leq 0 \end{array} \right\}; & t_a \leq t < t_e \\ \\ \left\{ \begin{array}{ll} \nu_t; & \kappa_t^{max} > \gamma_t^A \\ 0; & \kappa_t^{max} \leq \gamma_t^A \end{array} \right\}; & t = t_e. \end{cases} \tag{3.13}$$

Für den Fall der Nichtsegmentierung bzw. Arbitrage werden die risikogewichteten Margen in Abhängigkeit von $\tilde{\psi}^A$ bestimmt:

$$\tilde{g}^{p^A} := \frac{p_{t_a}^A[G]}{\tilde{\psi}^A},\ \tilde{v}^{p^A} := \frac{p_{t_a}^A[H]}{\tilde{\psi}^A},\ \tilde{c}^{p^A} := \frac{p_{t_a}^A[C]}{\tilde{\psi}^A}.$$

Aus den Gleichungen 3.11 und 3.13 ist ersichtlich, dass

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} &\geq \tilde{\psi}^A \\ \Longleftrightarrow \tilde{g}^p &\leq \tilde{g}^{p^A}, \tilde{v}^p \leq \tilde{v}^{p^A}, \tilde{c}^p \leq \tilde{c}^{p^A}. \end{aligned}$$

Entsprechend für den Fall der Arbitragemöglichkeiten werden die risikolosen und risikogewichteten Margen bezeichnet:

Wert	$\hat{\psi}$		$\tilde{\psi}$	
	Marge	Zahlungsstrom	Marge	Zahlungsstrom
$p_{t_a}^A[G]$	$\hat{g}^{p^A}$	$\hat{G}^A(0)$	$\tilde{g}^{p^A}$	$\tilde{G}^A(0)$
$p_{t_a}^A[H]$	$\hat{v}^{p^A}$	$\hat{V}^A(0)$	$\tilde{v}^{p^A}$	$\tilde{V}^A(0)$
$p_{t_a}^A[C]$	$\hat{c}^{p^A}$	$\hat{C}^A(0)$	$\tilde{c}^{p^A}$	$\tilde{C}^A(0)$

Tabelle 3.8: Risikolose und risikogewichtete Margen mit Arbitragemöglichkeit

Bietet eine Bank einem Kunden eine Angebotsoption an, erhält die Bank zum Zeitpunkt der Angebotsabgabe mit Sicherheit den Wert der Markteintrittsprämie vermindert um die Sicherungskosten; $p_{t_a}[G] - p_{t_a}[H] = -p_{t_a}[C]$ bzw. $p_{t_a}^A[G] - p_{t_a}^A[H] = -p_{t_a}^A[C]$. Vergibt eine Bank kein Angebot und nimmt ein Kunde einen Kredit in t_a an, führt die Bank eine Kapitalmarkttransaktion aus und realisiert die Markteintrittspämie zum Zeitpunkt t_a γ_0. Der Vergleich der Nettoerträge einer Bank zwischen Vergabe einer Angebotsoption und sofortiger Annahme durch einen Kunden zeigen die Tabellen 3.9 und 3.10 getrennt nach der Möglichkeit des Kunden arbitrieren zu können oder nicht arbitrieren zu können.

Annahme 3.3 gilt			
Nettoertrag	Wert	risikolose Marge	risikogewichtete Marge
ohne Angebotsoption mit Angebotsoption	γ_0 $-p_{t_a}[C]$	$g^p\ \hat{\psi}$ $-\hat{c}^p\ \hat{\psi}$	$g^p\ \hat{\psi}$ $-\tilde{c}^p\ \tilde{\psi}$
Differenz	$\gamma_0 + p_{t_a}[C]$	$(g^p + \hat{c}^p)\ \hat{\psi}$	$g^p\ \hat{\psi} + \tilde{c}^p\ \tilde{\psi}$

Tabelle 3.9: Nettoertrag einer Bank ohne Arbitragemöglichkeit des Kunden

Annahme 3.3 gilt nicht			
Nettoertrag	Wert	risikolose Marge	risikogewichtete Marge
ohne Angebotsoption mit Angebotsoption	γ_0 $-p^A_{t_a}[C]$	$g^p\ \hat{\psi}$ $-\hat{c}^{p^A}\ \hat{\psi}$	$g^p\ \hat{\psi}$ $-\tilde{c}^{p^A}\ \tilde{\psi}^A$
Differenz	$\gamma_0 + p^A_{t_a}[C]$	$(g^p + \hat{c}^{p^A})\ \hat{\psi}$	$g^p\ \hat{\psi} + \tilde{c}^{p^A}\ \tilde{\psi}^A$

Tabelle 3.10: Nettoertrag einer Bank mit Arbitragemöglichkeit des Kunden

Im Folgenden wird der Fall, dass bei Marktsegmentierung Annahme 3.3 nicht gilt, nicht weiter betrachtet. Die Ergebnisse, die sich hieraus ableiten lassen, entsprechen qualitativ denen der Angebotsoption ohne Marktsegmentierung.

Die Differenz ϑ aus den Nettoerträgen gibt den Verzicht an prozentualer Markteintrittsprämie an, bei dem ein Kunde indifferent ist zwischen der sofortigen Annahme des Kredites oder der optimalen Ausübung der Angebotsoption:

$$\vartheta \ := \ (g^p + \hat{c}^p).$$

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
K_0 - G_0 + V^{\vartheta}(0) &\sim C(0) \\
\kappa_0^{\vartheta} := \kappa_0 - \gamma_0 + \vartheta\hat{\psi} &= p_0[C]; \quad \kappa_0 := 0.
\end{aligned}
$$

Die Marge ϑ kann interpretiert werden als Transformator zwischen einem (segmentierten) Kapitalmarkt mit Existenz der Angebotsoptionen und einem (segmentierten) Kapitalmarkt ohne Existenz der Angebotsoptionen, ohne dass ein Investor einen Vorteil daraus zieht oder einen Nachteil erleidet.

$$\boxed{\; p_{t_a}[C] \xrightarrow{\quad\vartheta\quad} \kappa_0^{\vartheta} \;}$$

Abbildung 3.5: Der Transformator ϑ

$\vartheta\hat{\psi}$ repräsentiert die Transaktionskosten der Banken für die Beseitigung der Angebotsoptionen. Die risikolosen Margen $\hat{c}^p$ stellen folglich den sofortigen und risikolosen Margenertrag oder Margenverlust aus der Vergabe der Angebotsoptionen dar.

Der Zeitpunkt der Realisation der Markteintrittsprämie ist ungewiss, da dieser von der optimalen Ausübung der Angebotsoption abhängt. Insofern besitzt ein Kunde neben dem Recht, eine Kreditkondition anzunehmen, das Recht, den Zeitpunkt zu bestimmen, zu dem er die Markteintrittsprämie leistet. Ausgehend von diesen Überlegungen wird eine Prämie definiert, die das Risiko der Realisation der Markteintrittsprämie wertmäßig beschreibt.

Definition 13 (Realisationsprämie) *Die Realisationsprämie $\wp\hat{\psi}$ ist der Wert des Wahlrechtes, den Zeitpunkt zu bestimmen, zu dem die Markteintrittsprämie fällig wird. $\wp$ ist die Realisationsmarge:*

$$
\begin{aligned}
\wp &:= (g^p - \hat{g}^p) \\
&= \frac{\gamma_{t_a} - p_{t_a}[G]}{\hat{\psi}}.
\end{aligned}
$$

$\star$

Die Realisationsprämie ist definiert als die Differenz zwischen der erzielbaren Markteintrittsprämie $g^p\hat{\psi}$ ohne Vergabe einer Angebotsoption und dem Wert der erzielbaren Markteintrittsprämie $p_{t_a}[G]$, die über die Angebotsoption abgeschöpft werden kann. Zwischen der Realisationsmarge $\wp$ und dem Verzicht an erzielbarer Markteintrittsprämie ϑ, bei dem der Kunde bereit ist, auf die Angebotsoption zu verzichten, besteht der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \wp &= g^p - \hat{g}^p \\ &= (g^p + \hat{c}^p) - (\hat{g}^p + \hat{c}^p) \\ &= \vartheta - \hat{v}^p. \end{aligned}$$

Die Markteintrittsprämie kommt bei Vergabe von Angebotsoptionen nur „gefiltert“ bei einer Bank an. Der Weg von γ_0 durch die Filter $\wp\hat{\psi}$ und $p_{t_a}[H]$ bis zu -$p_{t_a}[C]$ ist in Abbildung 3.6 schematisch aufgeführt.

Markteintrittsprämie
$\rightarrow$ -Realisationsprämie
$\rightarrow$ -Sicherungsprämie
$\Rightarrow$ Nettoertrag der Bank

Abbildung 3.6: Weg der Markteintrittsprämie zum Nettoertrag

In Gleichungsform stellt sich der Weg von der maximal erzielbaren Markteintrittsprämie zum Nettoertrag der Bank wie folgt dar:

$$\begin{aligned} \gamma_0 \underbrace{-\wp\hat{\psi} - p_{t_a}[H]}_{-\vartheta\hat{\psi}} &= -p_{t_a}[C] \quad \text{bzw.} \\ \underbrace{\gamma_0 - \wp\hat{\psi}}_{p_{t_a}[G]} - p_{t_a}[H] &= -p_{t_a}[C] \end{aligned}$$

Wert	$\hat{\psi}$	$\tilde{\psi}$
γ_0	g^p	
$p_{t_a}[G]$	$\hat{g}^p$	$\tilde{g}^p$
$p_{t_a}[H]$	$\hat{v}^p$	$\tilde{v}^p$
$p_{t_a}[C]$	$\hat{c}^p$	$\tilde{c}^p$

Tabelle 3.11: Wert, Margenfaktoren und Margen der Angebotsoption

Für die Margen gilt analog:

$$\begin{aligned} g^p \underbrace{-\wp - \hat{v}^p}_{-\vartheta} &= -\hat{c}^p \quad \text{bzw.} \\ \underbrace{\hat{g}^p - \wp}_{\hat{g}^p} - \hat{v}^p &= -\hat{c}^p. \end{aligned}$$

Margen sind lediglich eine Art der Darstellung der Werte einzelner Zahlungsströme (Angebotsoption, Sicherungsgeschäft etc.). Durch Einführung von Margen gelingt es, eine in t_a fällige Zahlung mittels eines Zahlungsstromes $V(t)$ auf verschiedene Zahlungszeitpunkte in der Zukunft zu verschieben. Abhängig von den Regeln des Zahlungsstromes (deterministisch oder stochastisch bzw. derivativ) wird sich der Betrag der Marge bemessen, da sich der zugrunde liegende Margenfakor ψ ändert. Der Wert des beschriebenen Zahlungsstromes ist jedoch immer unabhängig von der Beschreibung dieses Wertes durch eine Marge[19], d. h.

$$p_{t_a}[G] = \hat{\psi}\ \hat{g}^p = \tilde{\psi}\ \tilde{g}^p.$$

[19]Ein numerisches Beispiel findet sich in Tabelle 3.33.

3.4 Die Angebotsoption bei unsicherem Markteintritt

Nach der finanztheoretischen Analyse der verbindlichen Angebote im Kreditgeschäft im Rahmen eines Marktmodells stellen sich (unter anderem) die für die Realität wichtigen Fragen:

- Ist es eine sinnvolle Geschäftspolitik der Banken, weiterhin verbindliche Angebote zu vergeben, selbst wenn sie hierzu nicht verpflichtet sind?
- Wie sollen die Banken verbindliche Angebote in ihrer Kalkulation berücksichtigen?

Die Frage nach der Vergabepolitik von verbindlichen Angeboten hängt mit der am Markt erzielbaren Markteintrittsprämie zusammen. Im Grunde ist es für eine Bank immer vorteilhafter, den Kunden sofort zu einem Kreditabschluss zu bewegen, da unmittelbar die volle Markteintrittsprämie abgeschöpft werden kann. Ist dies nicht möglich, kann auch unter gewissen Bedingungen das Angebot einer verbindlichen Kreditkondition sinnvoll sein. Gelingt es einer Bank, durch die Vergabe von verbindlichen Angeboten eine sichere Markteintrittsprämie zu generieren, deren Wert höher ist als die Summe aus dem Wert des Sicherungsgeschäftes zur Beseitigung von Marktpreisrisiken und dem Wert der Realisationsprämie, dann ist es vorteilhaft, Angebotsoptionen zu vergeben. Eine sichere Markteintrittsprämie hat eine Bank aber erst dann, wenn bei Angebotsvergabe bereits sicher ist, dass ein Kunde den Kredit bei dieser Bank annimmt, d. h. eine Finanztransaktion mit der Bank ausführt. Herrscht hierüber Unklarheit, kann auf Basis der Erkenntnisse der vorangegangenen Ausführungen nichts über die Vorteilhaftigkeit von verbindlichen Angeboten gesagt werden. Das vorgestellte Instrumentarium ist nicht in der Lage, exakte Werte für Angebotsoptionen zu generieren, falls die Annahme des Angebotes von einem anderen Faktor bzw. anderen Faktoren als dem Zinsniveau abhängt. In diesem Fall ist der Kapitalmarkt für Zinstitel nicht mehr vollständig. Dies bedeutet, dass durch die Arbitragetheorie nicht mehr ein genauer Wert der Angebotsoption, sondern lediglich ein Intervall an arbitragefreien Werten ermittelt werden kann.

Ist der Kunde im Besitz identischer, verbindlicher Angebote verschiedener Banken bezüglich einer Kreditkondition, kann nicht eindeutig ermittelt werden, welchen Wert die Angebotsoption hat, bzw. welche Struktur das die Angebotsoption duplizierende Sicherungsgeschäft hat. Ist die Realisation einer Markteintrittsprämie bei Abgabe des verbindlichen Angebotes unsicher, hängt die Vorteilhaftigkeit der verbindlichen Angebote in der Realität im Allgemeinen davon ab, ob im „Durchschnitt" eine positive, abschöpfbare Markteintrittsprämie erwirtschaftet werden kann. In der Realität gestaltet sich die Beantwortung der Frage, ob im „Durchschnitt" die abschöpfbaren Markteintrittsprämien positiv sind, äußerst schwierig. Es kann zum Beispiel nicht allgemein gültig definiert werden, auf welchen Zeitraum sich der „Durchschnitt" zu beziehen hat. Grundsätzlich kann immer erst ex post entschieden werden, ob die Vergabe verbindlicher Angebote für **die betrachtete** Bank vorteilhaft war oder nicht. Ex ante kann die Frage der Vorteilhaftigkeit von Angebotsoptionen vor dem Hintergrund unsicherer Markteintrittsprämien nicht entschieden werden. Der Kundenberater einer Bank, der darüber zu entscheiden hat, ob er eine Angebotsoption vergeben soll oder nicht (sofern er weiß, dass er mit Abgabe eines verbindlichen Angebotes eine Stillhalterposition in einer Angebotsoption eingeht), befindet sich in der gleichen Situation wie ein Spekulant, der erst nach Schließen seiner Risikoposition weiß, ob er einen Ertrag oder einen Verlust erwirtschaftet hat.

Finanztheoretisch gesehen kann das Risiko der unsicheren Markteintrittsprämie nicht abgesichert werden, falls auf Annahme 3.2 (Exklusivität, Seite

44) verzichtet wird. Es existiert keine duplizierende Handelsstrategie, die den Zahlungsstrom der Angebotsoption abbildet, falls der Kunde im optimalen Ausübungszeitpunkt eines von mehreren verbindlichen Angeboten annehmen kann. Der Markt wird in diesem Fall *unvollständig*[20]. Mit anderen Worten existiert nicht ein einziges Martingalmaß, sondern eine Menge von Martingalmaßen mit mehr als einem Element. Die Angebotsoption ist kein Derivativer Zinstitel mehr, da deren Wert nicht ausschließlich vom Zustand der Diskontierungsfunktion abhängt. Der Wert der Angebotsoption ist sowohl vom Zustand der Diskontierungsfunktion als auch von der Entscheidung des Kunden abhängig, die Option bei der betreffenden Bank auszuüben. Das Wahlrecht des Kunden, eine unter mehreren Banken auszuwählen, ist zudem kein handelbarer Finanztitel, mit dessen Hilfe eine Duplikation der Angebotsoption möglich wäre. Trotz des unsicheren Markteintritts bei der betreffenden Bank, übt der Kunde zu jedem optimalen Zeitpunkt die Angebotsoption aus. Unter Berücksichtigung der Markteintrittsprämie und dem Zustand der Diskontierungsfunktion zum Zeitpunkt t_f^o beläuft sich der Ausübungswert auf

$$\kappa_{t_f^o} - \gamma_{t_f^o}.$$

Hat ein Kunde von mehreren Banken gleichzeitig eine Angebotsoption erhalten, ist aus Sicht einer Bank selbst im optimalen Ausübungzeitpunkt nicht sicher, ob der Kunde bei ihr das Angebot annimmt. Daher existieren für den Ausübungswert $X_{t_f^o}(\omega)$ mehrere Alternativen:

$$X_{t_f^o}(\omega) = \begin{cases} \kappa_{t_f^o}(\omega) - \gamma_{t_f^o}(\omega), & \text{falls Annahme bei dieser Bank} \\ 0, & \text{falls keine Annahme bei dieser Bank.} \end{cases}$$

Da in jedem Zustand der Diskontierungsfunktion zu einem optimalen Ausübungszeitpunkt zweierlei Alternativen des Ausübungswertes bei einer Bank

[20]Vgl. unter anderem zur Bewertung bzw. zum Hedging von Finanztiteln in unvollständigen Märkten: Lamberton, Schweizer (1998), Delbean u. a. (1997), Schäl (1994), Schweizer (1995).

existieren, kann keine selbstfinanzierende Handelsstrategie aufgebaut werden, die die Angebotsoption exakt dupliziert. Dennoch kann versucht werden, das Risiko aus der Angebotsoption mit einer Handelsstrategie „so gut wie möglich“ abzusichern. Die entsprechende Handelsstrategie zur Sicherung der Angebotsoption bildet die Unvollkommenheit des Marktes ab:

$$\begin{aligned} X_{t_f^o} &= \theta_{t_f^o-1}.p_{t_f^o} + J_{t_f^o} \\ X_{t_f^o}\beta_{t_f^o} &= \theta_0.p_0 + \sum_{j=t_a}^{t_f^o} \left(\theta_{j-1}.(\beta_i p_j - \beta_{i-1}p_{j-1}) + \beta_i J_j\right). \end{aligned}$$

J_t symbolisiert den Betrag, der in einem Zustand der Diskontierungsfunktion dem Portfolio nachgeschossen werden muss, um den Ausübungswert zu erhalten. Es wird davon ausgegangen, dass zum Zeitpunkt t_a der Wert der Angebotsoption mit dem Wert der Handelsstrategie identisch ist, d. h.

$$X_{t_a} = \theta_{t_a}.p_{t_a}.$$

Der Betrag J wird in der Literatur als (Hedge-) Kosten bezeichnet[21]. Da nicht sicher ist, ob der Kunde die Option bei der Bank ausübt, oder ob er das Angebot bei einer anderen Bank annimmt, ist für mindestens eine Ausübungsalternative $J_{t_f^o} \neq 0$, falls $\kappa_{t_f^o} > \gamma_{t_f^o}$:

$$J_{t_f^o} = \begin{cases} \kappa_{t_f^o} - \gamma_{t_f^o} - \theta_{t_f^o-1}.p_{t_f^o}, & \text{falls Annahme bei dieser Bank} \\ 0 - \theta_{t_f^0-1}.p_{t_f^o}, & \text{falls keine Annahme bei dieser Bank.} \end{cases}$$

Der Prozess $\tilde{J}_t = \sum_{i=t_a}^{t} J_i\beta_i$ wird diskontierter, kumulierter Kostenprozess genannt, wobei $\tilde{J}_t - \tilde{J}_{t-1} = \beta_t J_t$.

Zur Ermittlung der arbitragefreien Handelsstrategie wird der so genannte *mean-variance*-Ansatz angewendet. Der Ansatz basiert auf der Arbeit

[21] In der Literatur über unvollständige Märkte werden die Kosten üblicherweise mit dem Symbol C notiert. C ist im Rahmen dieser Arbeit jedoch für einen Contingent Claim belegt.

von FÖLLMER, SCHWEIZER und SONDERMANN[22]. Innerhalb dieses Ansatzes wird eine lokal risikominimierende Handelsstrategie konstruiert. Die Handelsstrategie wird genau dann *im Erwartungswert selbstfinanzierend (mean-self-financing)* genannt, wenn der diskontierte, kumulative Kostenprozess ein quadratisch integrierbares Martingal beschreibt:

$$\begin{aligned} E^W[\tilde{J}_t|F_{t-1}] &= \tilde{J}_{t-1}, \text{ bzw. für das Inkrement} \\ E^W[J_t|F_{t-1}] &= 0 \quad W \in \mathcal{W}. \end{aligned}$$

Das Kriterium, dass die Handelsstrategie im Erwartungswert selbstfinanzierend ist, erlaubt einen (von vielen) arbitragefreien Werten der Angebotsoption zu finden:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{t_f^o} &= \beta_{t_f^o} X_{t_f^o} - \theta_{t_a}.p_{t_a} - \sum_{j=t_a}^{t_f^o} \theta_{j-1}.(\beta_i p_j - \beta_{i-1} p_{j-1}) \\ 0 &= E^W[\tilde{J}_{t_f^o}|F_{t_a}] \\ &= E^W\left[\beta_{t_f o} X_{t_f^o} - \underbrace{\theta_{t_a}.p_{t_a}}_{X_{t_a}} - \sum_{i=t_a}^{t_f^o} \theta_{i-1}.\left(\beta_{t_i} p_{t_i} - \beta_{i-1}.p_{i-1}\right)|F_{t_a}\right] \\ \Longleftrightarrow X_{t_a} &= E^W\left[\beta_{t_f o} X_{t_f^o}|F_{t_a}\right]. \end{aligned}$$

Das Intervall der arbitragefreien Werte der Angebotsoption bildet sich aus dem Infinum $X_{t_a}^-$ und Supremum $X_{t_a}^+$ der Erwartungswerte $E^W\left[\beta_{t_f o} X_{t_f^o}|F_{t_a}\right]$ bezüglich aller Martingalmaße $W \in \mathcal{W} \neq \emptyset$:

$$\begin{aligned} X_{t_a}^- &= \inf\{E^W\left[\beta_{t_f^o} X_{t_f^o}|F_{t_a}\right] : W \in \mathcal{W}\} \\ X_{t_a}^+ &= \sup\{E^W\left[\beta_{t_f o} X_{t_f^o}|F_{t_a}\right] : W \in \mathcal{W}\} \\ \Longleftrightarrow X_{t_a} &\in \left]X_{t_a}^-; X_{t_a}^+\right[. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Das *mean-self-financing*-Kriterium garantiert, dass die Werte der Angebotsoption bei unsicherem Markteintritt arbitragefrei sind. Da ein ganzes Intervall an arbitragefreien Werten existiert, ist das *mean-self-financing*-Kriterium

[22]Vgl. Föllmer, Sondermann (1986), Föllmer, Schweizer (1991).

nicht hinreichend, um diejenige Handelsstrategie zu bestimmen, die das Risiko „so gut wie möglich" eliminiert. Eine hinreichende Bedingung zur Ermittlung einer Handelsstrategie ist die Minimierung der Varianz des Kostenprozesses $\mathrm{Var}^W[\tilde{J}_{t_f^o}|F_{t_f^o-1}]$ unter einem Martingalmaß W:

$$\min_\theta \mathrm{Var}^W[\tilde{J}_{t_f^o}|F_{t_f^o-1}] \quad = \quad E^W[\tilde{J}^2_{t_f^o}|F_{t_f^o-1}] - \underbrace{E^W[\tilde{J}_{t_f^o}|F_{t_f^o-1}]^2}_{=0}.$$

Der Prozess $\hat{J}_t(\theta) = E^W[\tilde{J}(\theta)^2_t|F_{t-1}]$ wird *Risikoprozess* genannt. Für die Handelsstrategie ist dasjenige θ zu bestimmen, das $\hat{J}_t(\theta)$ lokal, d. h. von einem Handelszeitpunkt, $t-1$, auf den späteren Handelszeitpunkt, t, minimiert: $\min_\theta \Delta\hat{J}_t(\theta)$, mit

$$\begin{aligned}
\Delta\hat{J}_t(\theta) &= \hat{J}_t(\theta) - \hat{J}_{t-1}(\theta) \\
&= E^W[\tilde{J}_t^2|F_{t-1}] \\
&= E^W\left[\left(\beta_{tfo}X_{t_f^o} - X_{t_a} - \sum_{i=t_a}^{t_f^o}\theta_{i-1}.\,(\beta_{t_i}p_{t_i} - \beta_{i-1}p_{i-1})\right)^2 |F_{t-1}\right].
\end{aligned}$$

Das Martingalmaß W ist im Gegensatz zum Maß Q nicht mehr eindeutig bestimmbar. Daher kann auch kein eindeutiger, arbitragefreier Wert der Handelsstrategie und damit auch der Angebotsoption zum Zeitpunkt t_a angegeben werden.

Aufgrund der Mehrdeutigkeit des Maßes W liegt der Wert der Angebotsoption innerhalb des Intervalles $[0; p_{t_a}[C]]$, wobei $p_{t_a}[C]$ sich aus Gleichung 3.5 ergibt. Die Angebotsoption im Falle unsicherer Markteintrittsprämie besitzt den Wert null, falls $\mathrm{Prob}[X_{t_f^o} = \kappa_{t_f^o} - \gamma_{t_f^o}] = 0$, bzw. besitzt den Wert $p_{t_a}[C]$, falls $\mathrm{Prob}[X_{t_f^o} = \kappa_{t_f^o} - \gamma_{t_f^o}] = 1$. Sei

$$0 \leq \mathrm{Prob}[X_{t_f^o}(\omega) = \kappa_{t_f^o}(\omega) - \gamma_{t_f^o}(\omega)] = \lambda(t_f^o, \omega) \leq 1,$$

dann gilt für den Wert der Angebotsoption $p_t[C,\lambda]$:

$$\begin{aligned}
p_t[C,\lambda] &= \begin{cases} \left.\begin{cases} \lambda(t,\omega)(\kappa_t^{max}-\gamma_t); & s(t)>0 \\ E^Q[p_{t+1}[C,\lambda]]\ p_t[\chi_{t+1}]; & s(t)\leq 0 \end{cases}\right\}; & t_a \leq t < t_e \\ \\ \left.\begin{cases} \lambda(t,\omega)(\kappa_t^{max}-\gamma_t); & \kappa_t^{max}>0 \\ 0; & \kappa_t^{max}\leq 0 \end{cases}\right\}; & t = t_e \end{cases} \\
s(t) &:= (\kappa_t^{max}-\gamma_t) - E^Q[p_{t+1}[C,\lambda]]\ p_t[\chi_{t+1}].
\end{aligned}$$

Für ein konstantes $\lambda(t,\omega) = \lambda = const.$ ist

$$p_{t_a}[C,\lambda] = \lambda\ p_{t_a}[C,G].$$

Analog ist $p_{t_a}[H,\lambda] = \lambda\, p_{t_a}[H]$ bzw. $p_{t_a}[G,\lambda] = \lambda\, p_{t_a}[G]$. Für alle $\lambda \in]0,1[$ bleibt der Markt gemäß Gleichung 3.14 arbitragefrei. Die zur Angebotsoption gehörende Handelsstrategie wird durch den *mean-variance*-Ansatz beschrieben. Hierzu ist der Risikoprozess lokal zu minimieren.

Bemerkung: Die Wahrscheinlichkeit, dass zum Zeitpunkt einer optimalen Ausübung das Angebot durch den Kunden bei einer speziellen Bank angenommen wird, ist immer abhängig von der betreffenden Bank, die die Angebotsoption bereitstellt. Anders als bei der Markteintrittsprämie, die (annahmegemäß) für alle Investoren identisch ist, wird sich das λ einer einzelnen Bank je nach „Marktmacht oder Kundenfreundlichkeit" vom λ einer anderen Bank unterscheiden, zumal die Preise der Kreditkonditionen annahmegemäß über alle anbietenden Banken hinweg identisch sind (ansonsten würde der Kunde zu der Bank gehen, die das günstigste Angebot unterbreitet). Da der Kunde annahmegemäß auf jeden Fall einen Kredit wünscht, wird er bei irgendeiner Bank die Markteintrittsprämie bezahlen. Hat er sich beispielsweise bei einer Anzahl von n Banken für identische Kreditkonditionen identische, verbindliche Angebote geben lassen, ist die Summe aller bankindividuellen Wahrscheinlichkeiten gleich eins: $\sum_{i\in\ b}\lambda_i = 1$. Folglich ist

$\sum_{i\in\ b} p_{t_a}[C(\lambda_i)] = p_{t_a}[C]$; die Summe aller mit dem entsprechenden λ_i gewichteten Wert der Angebotsoptionen entspricht dem Wert einer Angebotsoption mit sicherer Markteintrittsprämie. Die Existenz bankenindividueller λ erschwert die Ermittlung der Vorteilhaftigkeit von Angebotsoptionen[23]. $*$

Steht eine Bank unmittelbar vor der Vergabe einer Angebotsoption, ist seitens des Kundenberaters zu kalkulieren, ob es für die Bank vorteilhaft ist, dem Kunden ein verbindliches Angebot zu unterbreiten oder nicht. Analog zu dem Problem, ob Angebotsoptionen auf freiwilliger Basis angeboten werden sollten, ist bei der Beantwortung der Frage nach einer „richtigen“ Kalkulation entscheidend, wie sicher die Markteintrittsprämie abgeschöpft werden kann. In der Regel ist die Höhe der Markteintrittsprämie vom Markt vorgegeben und kann von einer einzelnen Bank nicht beeinflußt werden. Daher sollte bei einer Kalkulation einer Kreditkondition aufgrund der Konkurrenzsituation die mit der Abgabe eines verbindlichen Angebotes verbundene Angebotsoption außer Acht gelassen werden, d. h. die Angebotsoption erhöht nicht den Nominalzinssatz des Angebotes über das am Markt gehandelte Zinsniveau einschließlich der Markteintrittsprämie. Würde eine Bank die Nominalzinsen im Kreditangebot über die aktuell geltenden Sätze erhöhen, würde der Basispreis erhöht und die Option wäre aus dem Geld. Dies wiederum bedeutet, dass die Angebotsoption weniger wert wäre und der potentielle Verlust aus der Ausübung der Angebotsoption ebenfalls geringer ausfallen würde[24]. Diesem Vorteil stünde der Nachteil gegenüber, dass ein Konkurrent zu niedrigen Sätzen anbietet und der Kunde das Angebot der Konkurrenz annimmt,

[23]Eventuell bietet der Marktanteil einer Bank eine Hilfe zur Schätzung von λ.

[24]Falls die Basispreise relativ hoch sind, wären die Angebotsoptionen (fast) wertlos und die Situation eines Marktes ohne Angebotsoptionen wäre gegeben. Eine konsequente Bepreisung der Angebotsoption in die angebotene Kreditkondition hätte einen beliebig (unendlich) hohen Nominalzins im Kreditangebot zur Folge. Bei einem beliebig hohen Nominalzins wäre die Wahrscheinlichkeit der Annahme des Angebotes gleich Null.

d. h. der Wettbewerber schöpft die Markteintrittsprämie ab. Daher stellen lediglich die zum Zeitpunkt der Konditionierung geltenden Zinssätze (bzw. Diskontierungsfunktion) und die Höhe der Markteintrittsprämie die Parameter dar, die zur Kalkulation der Kreditkondition herangezogen werden. Ist die Markteintrittsprämie eine sichere Größe, kann ex ante der Nettoertrag einer Angebotsoption exakt bestimmt werden. Der Nettoertrag berechnet sich aus der Differenz zwischen dem Marktwert der Markteintrittsprämie $p_{t_a}[G]$ und dem Marktwert des Sicherungsgeschäftes $p_{t_a}[H]$. Der Kundenberater wird immer dann dem Kunden das verbindliche Angebot unterbreiten, wenn $p_{t_a}[G] \geq p_{t_a}[H]$.

Die Situation wird wesentlich schwieriger, wenn die Markteintrittsprämie nicht mit Sicherheit abgeschöpft werden kann. Zur Kalkulation der Vorteilhaftigkeit ist abzuwägen, ob die abschöpfbare Markteintrittsprämie höher ist als die Sicherungskosten. Die Problematik liegt bei unsicherer Markteintrittsprämie in der Gestaltung der Sicherungsoption. Die Sicherungsoption zahlt zu jedem Zeitpunkt einer optimalen Ausübung den Betrag $\kappa_{t_f^o}$ und eliminiert das mit der Angebotsoption verbundene Marktpreisrisiko. Für diese Absicherung muss die Bank eine Prämie leisten. Schließt eine Bank eine Sicherungsoption zur Abdeckung des vollen Marktpreisrisikos ab, hat sie $p_{t_a}[H]$ bzw. $\tilde{v}^p\tilde{\psi}$ als Prämie zu leisten. Nimmt der Kunde zu einem optimalen Ausübungszeitpunkt das Angebot an, erwirtschaftet die Bank den Nettoertrag von $(\tilde{g}^p - \tilde{v}^p)\tilde{\psi}_{t_f^o}$. Nimmt der Kunde hingegen nicht an, dann kann die Bank keine Markteintrittsprämie abschöpfen, erhält den Ausübungswert $\kappa_{t_f^o}$ aus der Sicherungsoption und muss $\tilde{v}^p\tilde{\psi}_{t_f^o}$ Prämie bezahlen. Die Frage, ob der Nettoertrag $\kappa_{t_f^o} - \tilde{v}^p\tilde{\psi}_{t_f^o}$ bei Nichtannahme positiv oder negativ ist, hängt von der Situation der Diskontierungsfunktion ab und unterliegt daher stochastischen Einflüssen. Selbst die Kenntnis der Wahrscheinlichkeit λ ändert an dieser unbefriedigenden Situation wenig. Auf Basis der Kenntnis der

Wahrscheinlichkeit λ könnte die Bank eine Sicherungsoption abschließen, die lediglich λ-Anteile des Marktpreisrisikos absichert. Dennoch kann mit dieser Transaktion das Risiko der Nichtannahme des Kunden nicht beseitigt werden. Im Gegenteil, nimmt der Kunde das Angebot an, erhält die Bank aus der Sicherungsoption nicht den gesamten Verlust aus der Marktpreisveränderung erstattet, sondern nur den Anteil λ. Der Nettoertrag bei Annahme wäre $(\tilde{g}^p - \lambda\tilde{v}^p)\tilde{\psi}_{t_f^\circ} + \lambda\kappa_{t_f^\circ} - \kappa_{t_f^\circ}$, bei Nichtannahme $\lambda\kappa_{t_f^\circ} - \lambda\tilde{v}^p\tilde{\psi}_{t_f^\circ}$. Für das Einzelgeschäft ist eine Absicherung des Annahmerisikos ausgeschlossen. Würde eine Bank jedoch zum selben Zeitpunkt eine sehr große Anzahl identischer Angebotsoptionen an sehr viele Kunden vergeben, würde die Strategie der Absicherung von λ Anteilen des Marktpreisrisikos im Mittel zum Erfolg führen.

Der Erwartungswert der Nettoprämien der Angebotsoption beläuft sich auf

$$\begin{aligned} E^\lambda[\tilde{g}^p - \tilde{v}^p] &= \lambda\left((\tilde{g}^p - \lambda\tilde{v}^p) + \frac{\lambda\kappa_{t_f^\circ} - \kappa_{t_f^\circ}}{\tilde{\psi}_{t_f^\circ}}\right) + (1-\lambda)\left(\frac{\lambda\kappa_{t_f^\circ}}{\tilde{\psi}_{t_f^\circ}} - \lambda\tilde{v}^p\right), \\ &= \lambda(\tilde{g}^p - \tilde{v}^p). \end{aligned}$$

Da in der Realität die gleichzeitige Vergabe identischer verbindlicher Angebote an eine Vielzahl verschiedener Kunden eher unwahrscheinlich ist, verbleibt immer ein Risiko, das nicht abgesichert werden kann.

Bevor eine numerische Analyse die finanztheoretische Beschreibung der Angebotsoption im Kreditgeschäft abschließt, soll für ein spezielles Preismodell der Diskontierungsfunktion die *mean-variance*-optimale Handelsstrategie bestimmt werden.

Bemerkung: Für einen speziellen Preisprozess der Diskontierungsfunktion soll beispielsweise die *mean-variance*-optimale Handelsstrategie für die Angebotsoption beschrieben werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Kunde zu einem optimalen Ausübungszeitpunkt das verbindliche Angebot annimmt, sei konstant und von dem Zustand der Diskontierungsfunktion unabhängig $\text{Prob}[X_{t_f^o}(\omega) = \kappa_{t_f^o} - \gamma_{t_f^o}] := \lambda$. Sei $(P_t)_{t \geq t_a}$ der Preisprozess der Diskontierungsfunktion und ein **binomiales** Modell mit folgenden Eigenschaften:

- $P_{t_a} = const.$
- $\Delta P_t := P_t - P_{t-1}\frac{\beta_{t-1}}{\beta_t} = \eta_t . P_t$
- $(\eta_t)_{t \geq t_a}$ ist eine Folge identisch und unabhängig verteilter Zufallsvariablen mit
- $\text{Prob}[\eta_t = u] = q$ und $\text{Prob}[\eta_t = d] = (1-q)$, $q \in]0,1[$ und
- $-\frac{\beta_{t-1}}{\beta_t} \leq d < 0 < u$
- $E^Q[\eta_t] = 0$ und $E^Q[\eta_t^2] = \sigma^2$

Auf jeden Knoten zum Zeitpunkt t folgen exakt zwei Knoten; jeweils einer, für $\eta_{t+1} = u$ bzw. $\eta_{t+1} = d$:

$$P_t \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} P_{t+1}(\eta_{t+1} = u); & \text{Prob}[\eta_{t+1} = u] = q \\ P_{t+1}(\eta_{t+1} = d); & \text{Prob}[\eta_{t+1} = d] = 1 - q. \end{cases}$$

Eine konkrete Ausgestaltung des beschriebenen, binomialen Modells ist das für die numerische Analyse angewandte HO-LEE-Modell.

Da das Modell binomialer Art ist, genügen als Instrumente der Handelsstrategie zwei Finanztitel:

1. der Spot-Bond $p_{t-1}[\chi_t]$
2. die der Angebotsoption zugrunde liegende Kreditkondition $K_t(t-1)$ mit einem Forwardstart von einer Periode.

Die Handelsstrategie ist das Tupel $\Theta(\lambda) = (\phi(\lambda), \check{\nu}(\lambda))$, wobei $\phi(\lambda)$ die Anzahl der im Portfolio gehaltenen Kreditkonditionen und $\check{\nu}(\lambda)$ die Anzahl der gehaltenen Spot-Bonds beschreiben. Der Wert der Handelsstrategie zum Zeitpunkt t ist

$$\begin{aligned} p_t[\Theta(\lambda)] &= \phi_t(\lambda) \sum_{i=t}^{T} k_i p_t[\chi_i] + \check{\nu}_t(\lambda) p_t[\chi_{t+1}] \\ &= \phi_t(\lambda)\kappa_t + \check{\nu}_t(\lambda) p_t[\chi_{t+1}]. \end{aligned}$$

Es lassen sich zur Bestimmung von $(\phi_t(\lambda), \check{\nu}_t(\lambda))$ zwei Fälle unterscheiden:

1. Die Option wird in keinem der Folgeknoten zum Zeitpunkt $(t+1)$ ausgeübt.
2. Die Option wird in mindestens einem der Folgeknoten zum Zeitpunkt $(t+1)$ optimal frühzeitig ausgeübt oder der Zeitpunkt $(t+1)$ ist der Verfallzeitpunkt der Angebotsoption.

Wird die Option in keinem der Folgeknoten ausgeübt, bestimmt sich die Handelsstrategie wie folgt:

$$\begin{aligned} p_{t+1}[C](\eta_{t+1} = u) &= \phi_t(\lambda)\kappa_{t+1}(\eta_{t+1} = u) + \check{\nu}_t(\lambda) \\ p_{t+1}[C](\eta_{t+1} = d) &= \phi_t(\lambda)\kappa_{t+1}(\eta_{t+1} = d) + \check{\nu}_t(\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_t(\lambda) &= \frac{p_{t+1}[C](\eta_{t+1} = u) - p_{t+1}[C](\eta_{t+1} = d)}{\kappa_{t+1}(\eta_{t+1} = u) - \kappa_{t+1}(\eta_{t+1} = d)} \\ \check{\nu}_t(\lambda) &= p_{t+1}[C](\eta_{t+1} = u) - \phi_t(\lambda)\ \kappa_{t+1}(\eta_{t+1} = u) \\ \hat{J}(\phi_t(\lambda), \check{\nu}_t(\lambda)) &= 0 \quad \forall\ \lambda \in\ [0,1]. \end{aligned}$$

Könnte seitens des Kunden die Option in mindestens einem der Knoten optimal ausgeübt werden, dann ist nicht sicher, ob der Kunde bei dieser Bank auch ausübt, oder vielmehr das verbindliche Angebot einer anderen Bank annimmt. Daher muss neben der Bewegung der Diskontierungsfunktion auch die unsichere Annahme durch den Kunden berücksichtigt werden. Die Angebotsoption in einem Knoten kann immer dann frühzeitig optimal ausgeübt werden, falls $s(t) = (\kappa_t^{max} - \gamma_t) - E^Q[p_{t+1}[C,\lambda]]\, p_t[\chi_{t+1}] \geq 0$. Zur Berechnung des Portfolios $(\phi_t(\lambda), \check{\nu}_t(\lambda))$ sind vier Fälle zu untersuchen[25]:

1. Fall

$$\begin{aligned} X_{t+1}^{u\lambda} &= \begin{cases} \kappa_{t+1}^u - \gamma_{t+1}^u; & \eta_{t+1} = u \wedge (s^u(t+1) \geq 0 \vee t+1 = t_e) \\ p_{t+1}[C]^u; & \eta_{t+1} = u \wedge (s^u(t+1) < 0 \wedge t+1 < t_e) \end{cases} \\ \mathrm{Prob}[X_{t+1}^{u\lambda}] &= q\lambda, \end{aligned}$$

2. Fall

$$\begin{aligned} X_{t+1}^{u(1-\lambda)} &= \begin{cases} 0; & \eta_{t+1} = u \wedge (s^u(t+1) \geq 0 \vee t+1 = t_e) \\ p_{t+1}[C]^u; & \eta_{t+1} = u \wedge (s^u(t+1) < 0 \wedge t+1 < t_e) \end{cases} \\ \mathrm{Prob}[X_{t+1}^{u(1-\lambda)}] &= q(1-\lambda), \end{aligned}$$

3. Fall

$$\begin{aligned} X_{t+1}^{d\lambda} &= \begin{cases} \kappa_{t+1}^d - \gamma_{t+1}^d; & \eta_{t+1} = d \wedge (s^d(t+1) \geq 0 \vee t+1 = t_e) \\ p_{t+1}[C]^d; & \eta_{t+1} = d \wedge (s^d(t+1) < 0 \wedge t+1 < t_e) \end{cases} \\ \mathrm{Prob}[X_{t+1}^{d\lambda}] &= (1-q)\lambda, \end{aligned}$$

4. Fall

$$\begin{aligned} X_{t+1}^{d(1-\lambda)} &= \begin{cases} 0; & \eta_{t+1} = d \wedge (s^d(t+1) \geq 0 \vee t+1 = t_e) \\ p_{t+1}[C]^d; & \eta_{t+1} = d \wedge (s^d(t+1) < 0 \wedge t+1 < t_e) \end{cases} \\ \mathrm{Prob}[X_{t+1}^{d(1-\lambda)}] &= (1-q)(1-\lambda). \end{aligned}$$

Der Risikoprozess $\hat{J}(\phi_t(\lambda), \check{\nu}_t(\lambda))$ wird minimiert für

$$\begin{aligned} \hat{J}(\phi_t(\lambda), \check{\nu}_t(\lambda)) &= E^{q,\lambda}\Bigg[\Bigg(\underbrace{X_{t+1} - E^{q,\lambda}[X_{t+1}]}_{(EX)} - \\ &\qquad \underbrace{\phi_t(\kappa_{t+1} - E^{q,\lambda}[\kappa_{t+1}])}_{(\kappa P)}\Bigg)^2\Bigg] \to minimal \end{aligned}$$

[25] Der Übersichtlichkeit wegen steht x^u für $x(\eta = u)$ bzw. x^d für $x(\eta = d)$.

$$
\begin{aligned}
\phi_t(\lambda) &= \frac{E^{q,\lambda}[(EX)(\kappa P)]}{E^{q,\lambda}[(\kappa P)^2]} \\
\check{\nu}_t(\lambda) &= E^{q,\lambda}[X_{t+1}] - \phi_t(\lambda)\ E^{q,\lambda}[\kappa_{t+1}] \\
\hat{J}(\phi_t(\lambda), \check{\nu}_t(\lambda)) &> 0 \quad \forall\ \lambda \in\ ]0,1[
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E^{q,\lambda}[X_{t+1}] &= q(\lambda X_{t+1}^{u\lambda} + (1-\lambda)X_{t+1}^{u(1-\lambda)}) + \\
&\quad (1-q)(\lambda X_{t+1}^{d\lambda} + (1-\lambda)X_{t+1}^{d(1-\lambda)}) \\
E^{q,\lambda}[\kappa_{t+1}] &= q\kappa_{t+1}^{u} + (1-q)\kappa_{t+1}^{d}
\end{aligned}
$$

Die Schreibweise für $\phi_t(\lambda)$ kann noch vereinfacht werden, falls die Eigenschaften des binomialen Modells genutzt werden:

$$
\begin{aligned}
E^{q,\lambda}[(\kappa P)^2] &= q(1-q)(\kappa_{t+1}^{u} - \kappa_{t+1}^{d})^2 \\
E^{q,\lambda}[(EX)(\kappa P)] &= q(1-q)(\kappa_{t+1}^{u} - \kappa_{t+1}^{d}) \\
&\quad \Bigg(\underbrace{(\lambda X^{u\lambda} + (1-\lambda)X^{u(1-\lambda)})}_{E^{\lambda}[X^u]} - \\
&\quad \underbrace{(\lambda X^{d\lambda} + (1-\lambda)X^{d(1-\lambda)})}_{E^{\lambda}[X^d]} \Bigg) \\
E^{\lambda}[X^u] &= \begin{cases} \lambda\kappa_{t+1}^{u} - \gamma_{t+1}^{u}; & \eta_{t+1} = u \wedge (s^u(t+1) \geq 0 \vee t+1 = t_e) \\ p_{t+1}[C]^u; & \eta_{t+1} = u \wedge (s^u(t+1) < 0 \wedge t+1 < t_e) \end{cases} \\
E^{\lambda}[X^d] &= \begin{cases} \lambda\kappa_{t+1}^{d} - \gamma_{t+1}^{d}; & \eta_{t+1} = u \wedge (s^d(t+1) \geq 0 \vee t+1 = t_e) \\ p_{t+1}[C]^d; & \eta_{t+1} = u \wedge (s^d(t+1) < 0 \wedge t+1 < t_e) \end{cases} \\
\phi_t(\lambda) &= \frac{E^{\lambda}[X^u] - E^{\lambda}[X^d]}{\kappa_{t+1}^{u} - \kappa_{t+1}^{d}}.
\end{aligned}
$$

Mithilfe dieser Ergebnisse kann der einfache Zusammenhang zwischen der Handelsstrategie $(\phi_t, \check{\nu}_t)$ mit sicherer Markteintrittsprämie, bzw. für $\lambda = 1$ und der Handelsstrategie $(\phi_t(\lambda), \check{\nu}_t(\lambda))$ mit unsicherer Markteintrittspräme abgeleitet werden:

$$
\begin{aligned}
\phi_t(\lambda) &= \lambda\phi_t \\
\check{\nu}_t(\lambda) &= \lambda\check{\nu}_t \\
\hat{J}_t(\phi(\lambda), \check{\nu}_t(\lambda)) &= \lambda(1-\lambda)(q(X^{u\lambda} - X^{u(1-\lambda)})^2 + \\
&\quad (1-q)(X^{d\lambda} - X^{d(1-\lambda)})^2).
\end{aligned}
$$

*

3.5 Numerische Analyse der Angebotsoption

Zinstitel lassen sich durch eine Linearkombination von Discount-Bonds erzeugen. Zur numerischen Analyse von zustandsbedingten Zahlungsströmen auf Zinstitel ist ein *dynamisches Modell der Diskontierungsfunktion* notwendig. Es existieren viele stochastische Modelle zur Beschreibung von Zinsentwicklungen bzw. Entwicklungen von Discount-Bond Preisen[26]. Ein einfaches, arbitragefreies Modell entwickelten Ho und Lee 1986[27]. Dieses Modell dient im Folgenden auch zur Bewertung und numerischen Analyse von Angebotsoptionen im klassischen Bankgeschäft.

3.5.1 Das Modell von Ho und Lee

Das Modell von Ho und Lee ist ein Spezialfall des diskreten Modells von Heath, Jarrow und Morton[28]. Ausgehend von der aktuellen Diskontierungsfunktion beschreiben Ho und Lee stochastische, arbitragefreie Änderungen in der Diskontierungsfunktion im Zeitablauf unter Unsicherheit.

[26]Vgl. Black, Derman, Toy(1990), Cox, Ingersoll, Ross (1985), Heath, Jarrow, Morton (1990b) und (1992), Hull, White (1990), Vasicek (1977).

[27]Vgl. Ho, Lee (1986).

[28]Vgl. Heath, Jarrow, Morton (1990a).

Unsicherheit hinsichtlich der Bewegung der Diskontierungsfunktion besteht, wenn die Preise $p[\chi_s(t,\omega)]$ vom Umweltzustand ω eines Finanzmarktes in t abhängen. Die Preisentwicklung eines Discount-Bonds wird nicht durch die impliziten Forward Preise erklärt, sondern ist zufällig. Die Unsicherheit hinsichtlich der Diskontierungsfunktion im Zeitablauf kann durch die mögliche Abweichung der beobachteten Preise zu den impliziten Forward Preisen ausgedrückt werden:

$$0 \leq \text{Prob}\left(F(t,(t+n),s) = p_{t+n}[\chi_s]\right) < 1.$$

Analog zu den Preisen drückt sich Unsicherheit durch eine mögliche Differenz zwischen impliziten Forward Renditen und den zum jeweiligen Zeitpunkt realisierten Zerorenditen aus. Aufgrund der Definition der Zerorenditen, die eine exponentielle Verzinsung unterstellt, können die multiplikativen Zusammenhänge hinsichtlich der Forward Preise mathematisch einfacher durch additive Zusammenhänge bezüglich der Forward Renditen erklärt werden. Insofern besteht kein finanzwirtschaftlicher Unterschied zwischen Preismodellen auf Basis der Forward Preise und der Forward Renditen.

Das Ho-Lee-Modell ist ein zeitdiskretes, preisorientiertes Modell, das eine arbitragefreie Bewegung der Diskontierungsfunktion unter Unsicherheit beschreibt. Ausgangspunkt des Modells ist die aktuelle Diskontierungsfunktion P_t. Die Diskontierungsfunktion der jeweiligen Folgeperiode P_{t+1} kann zwei mögliche Zustände annehmen. Die Diskontierungsfunktion beschreibt zwischen zwei Zeitpunkten t und $t+1$ entweder eine „Aufwärtsbewegung“ oder eine „Abwärtsbewegung“. Dabei wird Pfadunabhängigkeit unterstellt, d. h. die Reihenfolge der Aufwärtsbewegungen bzw. Abwärtsbewegungen ist zur Beschreibung einer zukünftigen Diskontierungsfunktion unerheblich. Die Wahrscheinlichkeit einer Abwärtsbewegung respektive Aufwärtsbewegung ist konstant.

Die Unsicherheit hinsichtlich der zukünftigen Diskontierungsfunktion wird mittels einer *Störfunktion* eingeführt. Diese Funktion stört die sichere, d. h. risikolose Preisentwicklung jedes Discount-Bonds gemäß den impliziten Forward Preisen. Der Preis eines Discount-Bond zum Zeitpunkt $t+1$ wird durch die stochastische Gleichung

$$\begin{aligned} p_{t+1}[\chi_s] &= F(t,(t+1),s)\ \epsilon(s-(t+1)) \\ &= \frac{p_t[\chi_s]}{p_t[\chi_{t+1}]}\ \epsilon(s-(t+1)) \end{aligned}$$

ausgedrückt. $\epsilon(s-(t+1))$ ist eine bernoulliverteilte Zufallsvariable, die mit der Wahrscheinlichkeit u den Wert $h(s-(t+1))$ und mit der Wahrscheinlichkeit $(1-u)$ den Wert $h^\star(s-(t+1))$ annimmt. Die Störterme $h(\cdot)$ für eine Aufwärtsbewegung und $h^\star(\cdot)$ für eine Abwärtsbewegung der Diskontierungsfunktion müssen arbitragefrei definiert werden. Dies bedeutet, dass für ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q die Beziehungen

$$\begin{aligned} \beta_t\ p_t[\chi_s] &= E^Q\left[\beta_{t+1}\ p_{t+1}[\chi_s]\right], \\ \beta_t\ p_t[\chi_s] &= \frac{\beta_{t+1}\ p_t[\chi_s]}{p_t[\chi_{t+1}]}\ (q\ h(s-(t+1)) + (1-q)\ h^\star(s-(t+1))) \quad \text{und} \\ 1 &= (q\ h(s-(t+1)) + (1-q)\ h^\star(s-(t+1))) \end{aligned}$$

gelten. Der Preis eines Discount-Bonds zum Zeitpunkt t $p_t[\chi_s]$ ist der bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes Q diskontierte Erwartungswert der Preise zum Zeitpunkt $t+1$. Neben der notwendigen Bedingung der Arbitragefreiheit ist die Einhaltung der Pfadunabhängigkeit gefordert. Sei p_{t+2}^{ud} der Preis nach einer Aufwärts- mit anschließender Abwärtsbewegung und p_{t+2}^{du} der Preis nach einer Abwärts- mit anschließender Aufwärtsbewegung, wird im Falle einer pfadunabhängigen Preisentwicklung die Beziehung

$$p_{t+2}^{ud}[\chi_s] = p_{t+2}^{du}[\chi_s] \tag{3.15}$$

gefordert. Die Gleichung 3.15 wird erfüllt, wenn für die Funktionen $h(\cdot)$ und $h^\star(\cdot)$ die Zusammenhänge

$$h^\star(z) \;=\; \delta^z\ h(z) \quad \forall\ \delta \in\ [0,1],$$

$$h^{\star}(z) \quad = \quad \underbrace{\exp\left[-\frac{z\ \sigma}{\sqrt{u\ (1-u)}}\right]}_{\delta^z} h(z)$$

gegeben sind. σ sei der Volatilitätsparameter, der ein Maß für die Unsicherheit bezüglich der zukünftigen Diskontierungsfunktion ist. Aus Gleichung 3.15 folgt:

$$\begin{aligned}\frac{h(s-(t+1))\ h^{\star}(s-(t+2))}{h(1)} &= \frac{h^{\star}(s-(t+1))\ h(s-(t+2))}{h^{\star}(1)} \\ \frac{h(s-(t+1))\ \delta^{s-(t+1)}}{h(s-t+2))\ \delta^{s-(t+2)}\ h(1)\ \delta^{1}} &= \frac{h(s-(t+1)}{h(s-(t+2))\ h(1)}.\end{aligned}$$

Die Störfunktion $h(\cdot)$ ist aufgrund der Forderungen Arbitragefreiheit und Pfadunabhängigkeit durch die Beziehung

$$h(z) = \frac{1}{q + (1-q)\ \delta^z}$$

charakterisiert. Die Störterme $h(\cdot)$ sind von der Restlaufzeit des Discount-Bonds abhängig. Die Preisbewegungen der Discount-Bonds sind durch die Definition der Störfunktionen vollkommen positiv korreliert. Jeder mögliche, zukünftige Preis eines Discount-Bonds kann relativ zu dem anfänglichen, impliziten Forward Preis bestimmt werden:

$$p_{t+n}[\chi_s] = F(t,(t+n),s) \prod_{j=1}^{n} \frac{\epsilon(s-(t+j))}{\epsilon(j-1)}.$$

Die Zufallsvariable ϵ wird durch eine neue, binäre Zufallsvariable $\breve{a}$ ersetzt. $\breve{a}$ ist wie die Zufallsvariable ϵ ebensfalls bernoulliverteilt und nimmt mit der Wahrscheinlichkeit u den Wert 0 und mit der Wahrscheinlichkeit $(1-u)$ den Wert 1 an. $\breve{a} = 0$ ($\breve{a} = 1$) bedeutet eine Aufwärtsbewegung (Abwärtsbewegung) der Diskontierungsfunktion. Der Zustand der Diskontierungsfunktion lässt sich im Modell von Ho und Lee wie folgt beschreiben:

$$p_{t+n}[\chi_s] = F(t,(t+n),s)\ \overbrace{\underbrace{\prod_{j=1}^{n} \frac{h(s-(t+j))}{h(j-1)}}_{\text{horizontale Störung}}\ \underbrace{\delta^{(s-(t+n))\ \sum_{i=1}^{n} \breve{a}_i}}_{\text{vertikale Störung}}}^{\text{Störfunktion}}.$$

Die Störfunktion setzt sich aus zwei Termen zusammen, dem horizontalen und dem vertikalen Störterm. Der horizontale Störterm ist für alle Zustände der Diskontierungsfunktion zu einem Zeitpunkt identisch und von der Anzahl der Aufwärts- bzw. Abwärtsbewegungen unabhängig. Der vertikale Störterm unterscheidet die möglichen zukünftigen Zustände der Diskontierungsfunktion eines Zeitpunktes voneinander.

Der Preis des Spot-Bonds zum Zeitpunkt $t+n$ ist durch die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} p_{t+n}[\chi_{t+(n+1)}] &= F(t,(t+n),(t+(n+1)))\ h(n)\ \delta^{\sum_{i=1}^{n} \breve{a}_i} \quad \text{bzw.} \\ F((t+n),s,(s+1)) &= F(t,s,(s+1))\ \frac{h(s-(t+n))}{h(s-t)}\ \delta^{\sum_{i=1}^{n} \breve{a}_i} \end{aligned}$$

gegeben. Dieses einfache, arbitragefreie Modell zur Beschreibung der Diskontierungsfunktion unter Unsicherheit ist im Folgenden Grundlage der numerischen Preisbestimmung von Angebotsoptionen. Die Preisbildung von Zinstiteln und derivativer Zinstiteln findet sozusagen in einer Ho-Lee-Welt statt. Mithilfe des Ho-Lee-Modells können die im vorigen Abschnitt qualitativ dargestellten Werte für Angebotsoptionen betragsmäßig ermittelt werden. Die Modellwerte geben einen Überblick über die Preise der Angebotsoptionen bzw. deren Sicherungsgeschäfte bei Marktsegmentierung[29]. Ausgehend von zwei unterschiedlichen Diskontierungsfunktionen werden für verschiedene Kreditkonditionen und Angebotslaufzeiten die Werte $p_{t_a}[C]$ und v^p bestimmt.

[29]Der Fall der Nichtsegmentierung ist gegeben, wenn $g^p = 0$.

Der Volatilitätsparameter σ wird anhand der impliziten Volatilitäten von am OTC-Markt[30] gehandelten at-the-money Swap-Optionen (Swaptions) kalibriert. Die Modellparameter und die Bestimmung von σ sind im Folgenden aufgeführt. Das in den Berechnungen eingesetzte HO-LEE-Modell besitzt die Form

$$\begin{aligned} p_t[\chi_{s+t}] &= \frac{p_0[\chi_{t+s}]}{p_0[\chi_t]} \prod_{j=1}^{\bar{t}} \frac{h(s-j)}{h(j-1)} \quad \delta^{s-t\ \sum_{i=1}^{\bar{t}} \check{a}_i}, \\ p_t[\chi_{t+\tau}] &= \frac{p_0[\chi_{t+\tau}]}{p_0[\chi_t]}\, h(t) \quad \delta^{\sum_{i=1}^{\bar{t}} \check{a}_i}, \\ h(\bar{t}) &= \frac{1}{\frac{1}{2}(1+\delta^{\bar{t}})} \quad \text{und} \\ \delta &= \exp\left[-\frac{\sigma}{2}\right]. \end{aligned}$$

Für die Wahrscheinlichkeitsparameter q und u wurde jeweils der Wert $\frac{1}{2}$ gewählt[31]. Die Zeitpunkte t werden in Jahren gemessen. $\bar{t}$ gibt die Anzahl der Schritte für den Zeitraum $0 \rightarrow t$ an. Die Schrittweite des Modells beträgt einen Tag oder 360^{-1} Jahre. Sie ist für alle untersuchten Angebotslaufzeiten konstant.

Hinsichtlich des speziellen Preismodells der Diskontierungsfunktion von HO-LEE gilt für den Erwartungswert $E\left[p_{t+(n+1)}[C]\right]$ die Beziehung

$$E^{\Pi}\left[p_{t+(n+1)}[C]\right] = \left(q\ p^u_{t+(n+1)}[C] + (1-q)\ p^d_{t+(n+1)}[C]\right).$$

Im binären Modell von HO-LEE besitzt jeder Zustand ω zwei mögliche Zustände ω^u und ω^d in der nächsten Periode. Mit u wird eine Aufwärtsbewegung, mit d eine Abwärtsbewegung der Diskontierungsfunktion bezeichnet. Der im Zustand ω^u (ω^d) gebildete arbitragefreie Preis des Derivativen Zinstitels wird mit $p^u[C]$ ($p^d[C]$) bezeichnet. Diese Gleichung gibt zugleich die

[30]Der Over-The-Counter Markt (OTC Markt) ist der nicht standardisierte Markt für Finanztitel der Banken und institutionelle Investoren.

[31]Siehe hierzu Heath, Jarrow, Morton (1990a) wegen Konvergenzkriterien.

Methodik der Preisbestimmung der Angebotsoption zum Zeitpunkt der Abgabe t_a an. Ausgehend von den möglichen Zuständen und Preisen $X[\omega]$ am Ausübungstag t_e werden alle Preise rekursiv bis zum Abgabezeitpunkt t_a ermittelt. In jedem Zustand wird zusätzlich geprüft, ob die frühzeitige Ausübung vorteilhaft ist.

Das Modell von HO-LEE ist vollständig. Somit sind alle zustandsabhängigen Zahlungsströme duplizierbar. Es existiert somit eine dynamische, selbstfinanzierende Handelsstrategie Θ, deren Wert zu jedem Zeitpunkt t und jedem Zustand ω dem Wert der Angebotsoption entspricht:

$$\begin{aligned} p_t[c,\omega] &= \sum_{j=1}^{n} \theta_j(t,\omega)\ p_t[x_j,\omega]\ \forall\ t \in\ \{t_a, t_e - 1\} \\ c(\omega) &= \sum_{j=1}^{n} \theta_j(t_e,\omega)\ p_{t_e}[x_j,\omega]. \end{aligned}$$

Da im HO-LEE Modell auf jeden Zustand ω nur zwei weitere Zustände ω^u und ω^d folgen, ist es zur Duplizierung hinreichend, wenn die dynamische, selbstfinanzierende Handelsstrategie aus zwei Finanztiteln besteht. Die Angebotsoption kann durch einen *Spot-Bond* und den in der jeweiligen Periode t zugrunde liegenden Kredit K_t dupliziert werden:

$$\begin{aligned} p_t[c,\omega] &= \theta_1(t,\omega)\ p_t[\chi_{t+1},\omega] + \theta_2(t,\omega)\ \kappa_t(\omega)\ \forall\ t \in\ \{t_a, t_e - 1\} \\ c(\omega) &= \max[\kappa_{t_e}(\omega); 0]. \end{aligned}$$

Die Anteile θ_1 des Spot-Bonds und θ_2 des zugrunde liegenden Kredites müssen derart angepasst werden, dass zu keinem Zeitpunkt ein Zahlungsüberschuss entsteht:

$$\theta_1(t,\omega)\ \underbrace{p_t[\chi_t]}_{=1} + \theta_2(t,\omega)\ \kappa_t(\omega) \;=\; \theta_1(t+1,\omega)\ p_t[\chi_{t+1}] + \theta_2(t+1,\omega)\ \kappa_t(\omega).$$

Wird die Angebotsoption frühzeitig in $t_f < t_e$ ausgeübt, besteht die dynamische, selbstfinanzierende Handelsstrategie nur noch aus dem zugrunde

02/01/1996				30/07/1992			
LIBORsätze		Swapsätze		LIBORsätze		Swapsätze	
1 Monat	3,81250	2 Jahre	3,95	1 Monat	9,81250	2 Jahre	9,61
2 Monate	3,81250	3 Jahre	4,45	2 Monate	9,81250	3 Jahre	9,29
3 Monate	3,75000	4 Jahre	4,95	3 Monate	9,81250	4 Jahre	9,09
4 Monate	3,81250	5 Jahre	5,36	4 Monate	9,87500	5 Jahre	8,92
5 Monate	3,77080	6 Jahre	5,68	5 Monate	9,87500	6 Jahre	8,81
6 Monate	3,72920	7 Jahre	5,99	6 Monate	9,87500	7 Jahre	8,69
7 Monate	3,72920	8 Jahre	6,12	7 Monate	9,87500	8 Jahre	8,62
8 Monate	3,72920	9 Jahre	6,27	8 Monate	9,87500	9 Jahre	8,56
9 Monate	3,75000	10 Jahre	6,39	9 Monate	9,87500	10 Jahre	8,49
10 Monate	3,75000			10 Monate	9,87500		
11 Monate	3,75000			11 Monate	9,87500		
12 Monate	3,68750			12 Monate	9,87500		

Tabelle 3.12: Parzinssätze

liegenden Kredit K_{t_f}, sodass formal die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$p_t[c,\omega] = 1 \ \kappa_{t_f}(\omega) \ \forall \ t \in \ \{t_f, t_e\}.$$

3.5.2 Kalibrierung des Ho-Lee-Modells

Den Diskontierungsfunktionen $\mathcal{P}$ liegen die DEM-Zinskurven des Swapmarktes vom 30/07/1992 und 02/01/1996 zugrunde[32]. Die quotierten Zinssätze sind Nominalzinssätze mit linearer Verzinsung für die jeweilige Laufzeit. Die Zinssätze über ein Jahr sind Nominalzinssätze in Prozent, die über die Laufzeit jährlich nachschüssig zu entrichten sind. Dabei wird ein Zahlungsstrom unterstellt, der in $t = 0$ einen Zahlungsausgang von 1, am Laufzeitende $t = s$ einen Zahlungseingang von 1 und jährliche Zinszahlungen enthält. Aus der LIBOR- und Swapzinskurve, der so genannten **Parkurve**, lassen sich Diskontierungfaktoren für die quotierten Laufzeiten ableiten. Sei $R(s)$ der **Par-**

[32]Die Zinskurven sind den Informationsdiensten Reuters und Bloomberg entnommen. Die Zinssätze in Prozent bis einschließlich ein Jahr sind die entsprechenden LIBOR-Fixings (London Interbank Offer Rate), die Zinssätze ab zwei Jahren sind die Swapsätze für entsprechende Laufzeiten.

zinssatz für die Laufzeit s, so gilt für die Diskontierungsfaktoren $p[\chi_s]$ in Abhängigkeit von s:

$$p[\chi_s] = \begin{cases} \frac{1}{1+R(s)\ s} & \forall\ s = \frac{i}{12};\quad 1 \leq i \leq 12 \in \mathbb{N} \\ \\ \frac{1-\sum_{i=1}^{s-1} R(s)\ p[\chi_i]}{1+R(s)} & \forall\ s > 1 \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Bei der Ermittlung der Diskontierungsfaktoren wurde die 30/360-Zinstagmethode auch für unterjährige Zinssätze unterstellt[33]. Ausgehend von den als Punkteraster vorliegenden Diskontierungsfaktoren wird die gesamte Diskontierungsfunktion interpoliert. Das in der Realität gängige Verfahren ist die lineare Interpolation der Zerorenditen. Dies bedeutet, dass aus den oben bestimmten Diskontierungsfaktoren mittels Gleichung 2.13 Zerorenditen berechnet werden. Diese Zerorenditen werden linear interpoliert und aus diesen interpolierten Zerorenditen wiederum Diskontierungsfaktoren bestimmt. Für die quotierten Laufzeiten ergeben sich die in der Tabelle 3.13 aufgeführten Diskontierungsfaktoren. Die Zerorenditen, gemäß Gleichung 2.13 errechnet, sind in Tabelle 3.14 aufgeführt. Die Renditen sind jährliche Renditen und unterstellen eine tägliche Verzinsung mit Reinvestition der täglich auflaufenden Zinsen bis zur Endfälligkeit. Die Zerorenditen sind lediglich erforderlich, um durch lineare Interpolation die Diskontierungsfaktoren für die nicht quotierten Laufzeiten (z. B. 2 Jahre und 5 Tage)[34] zu errechnen. Die auf diese Weise bestimmte Diskontierungsfunktion ist der Ausgangspunkt der Modellierung der Zinskurven nach Ho-Lee. Jeder beliebige Forward Preis $F(0, n, s)$ ist gemäß Gleichung 2.14 implizit in der Diskontierungsfunktion enthalten. Im Ho-Lee-Modell unterliegen diese Forward Preise Störungen, die die Unsicherheit

[33] Die 30/360-Zinstagmethode besagt, dass jeder Monat exakt 30 Zinstage, das Jahr demnach 360 Zinstage beinhaltet. Für LIBOR-Zinssätze wird in der Realität jedoch mit den aktuellen Kalendertagen als Zinstage (act/360) abgerechnet.

[34] Die Zerorendite für die Laufzeit von 2 Jahren und 5 Tagen $y(2+5/360)$ beträgt für die Zinskurve vom 02/01/1996 $3,9624\% = 3,9552\% + (4,4767\% - 3,9552\%)\ (5/360)$. Diese Zerorendite führt zu einem Diskontierungsfakor $p[\chi_{2+5/360}] = 0,9247 = (1,039624)^{-(725/360)}$.

02/01/1996 Diskontierungsfaktoren				30/07/1992 Diskontierungsfaktoren			
1 Monat	0,9986	2 Jahre	0,9254	1 Monat	0,9919	2 Jahre	0,8325
2 Monate	0,9937	3 Jahre	0,8769	2 Monate	0,9839	3 Jahre	0,7669
3 Monate	0,9907	4 Jahre	0,8223	3 Monate	0,9761	4 Jahre	0,7076
4 Monate	0,9875	5 Jahre	0,7665	4 Monate	0,9681	5 Jahre	0,6546
5 Monate	0,9845	6 Jahre	0,7124	5 Monate	0,9605	6 Jahre	0,6057
6 Monate	0,9817	7 Jahre	0,6571	6 Monate	0,9530	7 Jahre	0,5621
7 Monate	0,9787	8 Jahre	0,6120	7 Monate	0,9455	8 Jahre	0,5205
8 Monate	0,9757	9 Jahre	0,5680	8 Monate	0,9382	9 Jahre	0,4830
9 Monate	0,9726	10 Jahre	0,5252	9 Monate	0,9310	10 Jahre	0,4488
10 Monate	0,9697			10 Monate	0,9240		
11 Monate	0,9668			11 Monate	0,9170		
12 Monate	0,9644			12 Monate	0,9101		

Tabelle 3.13: Diskontierungsfaktoren

der Zinsentwicklung ausdrücken. Das Ausmaß der Störungen wird durch den Parameter σ charakterisiert. σ wird derart bestimmt, dass der Wert einer at-the-money Swaption nach dem BLACK-SCHOLES-Modell und der Wert der entsprechenden Swaption nach dem HO-LEE-Modell identisch sind. Das BLACK-SCHOLES-Modell ist das in der Realität am häufigsten verwendete Modell, um Marktpreise für Optionen zu ermitteln. Zur Wertermittlung nach dem BLACK-SCHOLES-Modell werden die veröffentlichten, impliziten Volatilitäten für at-the-money Swaptions vom 02/01/1996 herangezogen[35]. Die Volatilitäten werden in Abhängigkeit der Laufzeit der Swaption und der Laufzeit des der Swaption zugrunde liegenden Zinsswaps quotiert. Diese Volatilitätsmatrix vom 02/01/1996 beinhaltet folgende in Tabelle 3.15 dargestellten Werte in Prozent für die Briefseite der Volatilitäten: Diese Volatilitäten σ_{imp} werden in der Realität benutzt, um Marktpreise $M(s, S)$ für europäische at-the-money Swaptions mit Verfalltag s nach der BLACK-SCHOLES-Methode zu berechnen. $M(s, S)$ ist der Wert zum Zeitpunkt $t = 0$ für eine Payer-

[35]Veröffentlicht durch den Informationsdienst Reuters, eingestellt durch die Brokerfirma Intercapital.

02/01/1996 Zerorenditen				30/07/1992 Zerorenditen			
1 Monat	3,8798	2 Jahre	3,9552	1 Monat	10,2661	2 Jahre	9,5973
2 Monate	3,8736	3 Jahre	4,4767	2 Monate	10,2225	3 Jahre	9,2514
3 Monate	3,8031	4 Jahre	5,0115	3 Monate	10,1795	4 Jahre	9,0330
4 Monate	3,8612	5 Jahre	5,4612	4 Monate	10,2036	5 Jahre	8,8427
5 Monate	3,8124	6 Jahre	5,8149	5 Monate	10,1610	6 Jahre	8,7135
6 Monate	3,7640	7 Jahre	6,1831	6 Monate	10,1188	7 Jahre	8,5788
7 Monate	3,7581	8 Jahre	6,3308	7 Monate	10,0771	8 Jahre	8,5035
8 Monate	3,7523	9 Jahre	6,4870	8 Monate	10,0358	9 Jahre	8,4239
9 Monate	3,7675	10 Jahre	6,6514	9 Monate	9,9949	10 Jahre	8,2405
10 Monate	3,7616			10 Monate	9,9545		
11 Monate	3,7558			11 Monate	9,9146		
12 Monate	3,6875			12 Monate	9,8750		

Tabelle 3.14: Zerorenditen

	Laufzeit des Swaps					
Optionslaufzeit	2 Jahre	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre	7 Jahre	10 Jahre
3 Monate	23,0	21,0	**19,0**	17,5	15,0	13,0
6 Monate	22,0	20,0	18,0	17,0	14,5	13,0
1 Jahr	22,0	19,0	17,5	16,5	14,0	12,5
2 Jahre	19,5	18,0	15,0	14,0	12,0	11,5

Tabelle 3.15: Implizite Volatilitäten für Swaptions in %

Swaption, die zum Zeitpunkt s fällig ist und dem Inhaber der Option das Recht sichert, am Verfalltag in einen Swap einzutreten, in dem der Inhaber feste Nominalzinsen bis zum Endzeitpunkt S bezahlt und variable Nominalzinsen, den 6-Monats-LIBOR empfängt. Das Black-Scholes-Modell ist ein sehr einfach zu handhabendes Optionspreismodell. Aus diesem Grunde wird dieses Modell in der praktischen Anwendung zur Wertermittlung jeglicher Art von Optionen, unter anderem auch für Swaptions, herangezogen. Da der Kunde in der Angebotsoption das Recht hat, im Voraus vereinbarte Kreditkonditionen unabhängig von der Zinsentwicklung bis zum Verfalltag anzunehmen, d. h. einen festen Nominalzins zu bezahlen, wird zur Ermittlung von

σ der Preis einer entsprechenden Payer-Swaption angesetzt. Die Kalibrierung des HO-LEE-Modells kann über Swaptionpreise erfolgen, da der Wert einer europäischen Swaption sich nicht vom Wert einer sonst identischen Kreditoption[36] unterscheidet. In der Realität werden grundsätzlich nur Swaptions und keine Kreditoptionen gehandelt. Die Bestimmung von σ erfolgt aus diesem Grunde über die Bewertung von Swaptions. Für den Wert einer at-the-money Payer-Swaption nach BLACK-SCHOLES gilt $F(s,S) = K$ und die Gleichung:

$$\begin{aligned} M(s,S) &= (F(s,S)N[d_1] - KN[d_2]) \; \frac{1-(1+F(s,S))^{-\frac{1}{S}}}{F(s,S)} \\ &= F(s,S) \; (N[d_1] - N[d_2]) \; \frac{1-(1+F(s,S))^{-\frac{1}{S}}}{F(s,S)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 &:= \frac{\ln\left[\frac{F(s,S)}{F(s,S)}\right]}{\sigma_{imp}\sqrt{s}} + \frac{1}{2}\;\sigma_{imp}\;\sqrt{s} = \frac{1}{2}\;\sigma_{imp}\;\sqrt{s} \\ d_2 &:= d_1 - \sigma_{imp}\sqrt{s}. \end{aligned}$$

Das HO-LEE-Modell wird im Folgenden derart kalibriert, dass der Wert für eine europäische Swaption mit Laufzeit $s = 60$ Tage und zugrunde liegendem Zinsswap mit Laufzeit $S =$ vier Jahre dem des BLACK-SCHOLES-Modells entspricht. Der Basispreis K der Swaptions stimmt mit dem Forwardswapsatz $F(s,S)$ überein, d. h. es handelt sich um at-the-money Swaptions. Zur Bestimmung des Optionswertes im HO-LEE-Modell muss der Marktwert des zugrunde liegenden Zinsswaps am Verfalltag ermittelt werden. Allgemein gilt für den Marktwert M^{Swap} eines Zinsswaps am Zinszahlungstag der variablen Seite[37] und festen Nominalzinsen F:

$$M^{Swap}(s,S) = p_0[\chi_s] - \left(p_0[\chi_S] + F(t,S)\;\sum_{i=1}^{S} p_0[\chi_i]\right).$$

[36] Zum Beweis siehe Jarrow (1996) S. 165.

[37] Siehe Keller, Holler (1993).

Zinskurve	Laufzeit Option	Zinsswap	Forward	Basispreis	Volatilität	Preis
02/01/1996	60/360	4	5,0723	5,0723	0,19	0,5555
30/07/1992	60/360	4	9,0045	9,0045	0,19	0,9024

Tabelle 3.16: Wert einer Payer-Swaption

Der Wert der entsprechenden Payer-Swaption M lautet gemäß Äquivalenzbedingung 1:

$$M(s,S) = E^Q\left[\max\left[1-\left(p_t[\chi_S]+F(t,S)\ \sum_{i=1}^{S} p_t[\chi_i]\right);0\right]\ \beta_s\right].$$

Für die unterschiedlichen Zinskurven gelten die BLACK-SCHOLES-Preise in Prozent wie sie aus Tabelle 3.16 ersichtlich sind. Zur Wertermittlung der obigen Referenzswaption nach HO-LEE werden alle Preise der Swaption $p_t[C]$ ausgehend von den möglichen Ausübungswerten am Verfalltag rekursiv bis zum Zeitpunkt t_a ermittelt:

$$p_{t+n}[C] = \begin{cases} E^Q\left[p_{t+(n+1)}[C]\right]\ p_{t+n}[\chi_{t+(n+1)}]; & t_a \leq t+n < t_e \\ \\ \max\left[M(t_e,S);0\right]; & t+n = t_e. \end{cases}$$

In Abhängigkeit von σ werden die Swaptionwerte $p_{t_a}[C]$ solange bestimmt, bis der HO-LEE-WERT mit dem BLACK-SCHOLES-Preis übereinstimmt. Da die gewählte Schrittweite einen Tag beträgt, hat der binäre Baum bei einer Optionslaufzeit von 60 Tagen 60 Schritte. Die derart bestimmten Volatilitätsparameter σ sind in Tabelle 3.17 aufgeführt.

Zinskurve	Laufzeit Option	Swap	Forward	σ	Optionspreis
02/01/1996	60/360	4	5,0723	**0,0001029831995**	0,5555
30/07/1992	60/360	4	9,0045	**0,0001774946976**	0,9024

Tabelle 3.17: Wert des Volatilitätsparameters im HO-LEE-Modell

Laufzeit	Auszahlungskurs	Nominalzins		Tilgung
		02/01/1996	30/07/1992	
3 Jahre	98,00%	**3,71369%**	**8,48982%**	1,00%
4 Jahre	98,00%	**4,37112%**	**8,46624%**	1,00%
5 Jahre	98,00%	**4,87077%**	**8,40338%**	1,00%

Tabelle 3.18: Kreditkonditionen für Angebotsoptionen

Kredit	Zahlungszeitpunkte					
	0	1	2	3	4	5
Zinskurve vom 02/01/1996						
3 Jahre	98.000,00	-4.713,69	-4.713,69	-101.600,90		
4 Jahre	98.000,00	-5.371,12	-5.371,12	-5.371,12	-101.101,13	
5 Jahre	98.000,00	-5.870,77	-5.870,77	-5.870,77	-5.870,77	-100.359,39
Zinskurve vom 30/07/1992						
3 Jahre	98.000,00	-9.489,82	-9.489,82	-106.227,91		
4 Jahre	98.000,00	-9.466,24	-9.466,24	-9.466,24	-104.928,99	
5 Jahre	98.000,00	-9.403,38	-9.403,38	-9.403,38	-9.403,38	-103.489,41

Tabelle 3.19: Zahlungsströme der Kreditkonditionen

3.5.3 Die Optionsprämie auf unsegmentierten Märkten

Auf Basis des aufgestellten Ho-Lee-Modells lassen sich einfache und mehrfache Angebotsoptionen bei Nichtsegmentierung bewerten. Dem Kreditangebot werden die verschiedenen Laufzeiten drei, vier und fünf Jahre unterstellt. Es handelt sich jeweils um einen typischen, annuitätischen Kredit mit 1,00% anfänglicher Tilgung, jährliche Zahlungsweise, einem Auszahlungskurs von 98,00% und einem Nominalvolumen von 100.000 DEM. Der Nominalzinssatz der jeweiligen Kredite wird in Abhängigkeit der Diskontierungsfunktion derart bestimmt, dass der betrachtete Kredit zum Zeitpunkt der Angebotsabgabe einen Marktwert von null besitzt. Tabelle 3.18 gibt eine Übersicht über die einzelnen angebotenen Kreditkonditionen. Die Zahlungsströme der Kreditkonditionen sind in Tabelle 3.19 abgebildet. Für eine Angebotsdauer von 60 Tagen ergeben sich für die Angebotsoptionen die aus Tabelle 3.20

$p_{t_a}[H]$ in DEM				
Angebot	02/01/1996		30/07/1992	
60 Tage	Wert	Ausübungstag	Wert	Ausübungstag
3 Jahre	608,25	60	605,00	10
4 Jahre	779,52	60	781,72	10
5 Jahre	911,33	60	952,53	11
mehrfach	913,63	60	952,53	11

Tabelle 3.20: Wert der Angebotsoptionen

zu entnehmenden Werte in DEM, falls die Marktsegmentierung ausgeschlossen ist. Existiert keine Markteintrittsprämie, verhält sich ein Kunde, der die Angebotsoption rational ausübt, wie ein Arbitrageur. Dies bedeutet, dass die Werte der Optionen identisch sind, unabhängig davon, ob Annahme 3.3 gilt oder nicht. In diesem Falle gilt $p_{t_a}[C] = p_{t_a}[H] = p^A_{t_a}[C] = p^A_{t_a}[H]$. Der Wert $p_{t_a}[C]$ symbolisiert den Wert der Arbitragemöglichkeit, wenn Banken in einem nichtsegmentierten Markt einem Kunden verbindliche Angebote unterbreiten. Die mehrfache Angebotsoption beinhaltet das Recht, innerhalb von 60 Tagen genau eine der drei Konditionen anzunehmen. Der Wert des Rechtes, aus mehreren Konditionen eine auszusuchen, wurde in Definition 8 als Differenz zwischen dem Wert der mehrfachen Angebotsoption und dem Maximum der Werte der jeweiligen einfachen Angebotsoption festgelegt:

$$\varrho := p^{\kappa^{max}}_{t_a}[H] - \max[p^{\kappa^1}_{t_a}[H]; p^{\kappa^2}_{t_a}[H]; \ldots; p^{\kappa^m}_{t_a}[H]].$$

Dieses Recht hat in diesem Beispiel nur in der normalen Niederzinsphase einen positiven Wert $\varrho = 913,63 - \max[911,33; 779,52; 608,25] = 2,30$ DEM.

Die Spalte *Ausübungstag* gibt den frühstmöglichen Tag der Ausübung an. Entspricht der Wert in der Spalte *Ausübungstag* der Laufzeit des Angebotes, wird die Option nicht frühzeitig ausgeübt. Der Wert der Angebotsoption stimmt in diesem Fall mit dem Wert der sonst identischen europäischen Option überein. Der entsprechende Wert für eine europäische Option $p^{EURO}_{t_a}[H]$

wurde ermittelt, um den Wert des Rechtes einer frühzeitigen Ausübung ϖ bestimmen zu können. Dieser ist definiert als die Differenz zwischen dem Wert der Angebotsoption und dem Wert der sonst identischen europäischen Option:

$$\varpi = p_{t_a}[H] - p_{t_a}^{EURO}[H].$$

In dem Beispiel hat das Recht auf frühzeitige Ausübung in einer normalen

Werte in DEM				
Angebot	02/01/1996		30/07/1992	
60 Tage	$p_{t_a}^{EURO}[H]$	ϖ	$p_{t_a}^{EURO}[H]$	ϖ
3 Jahre	608,25	0,00	583,83	21,17
4 Jahre	779,52	0,00	757,33	24,40
5 Jahre	911,33	0,00	927,62	24,91
mehrfach	913,63	0,00	927,62	24,91

Tabelle 3.21: Wert der frühzeitigen Ausübung einer Angebotsoption

Niederzinsphase (Zinsstruktur vom 02/01/1996) einen Wert von null. Der Wert der europäischen Option ist identisch mit dem Wert der Angebotsoption. Das Recht auf frühzeitige Ausübung hat in der inversen Hochzinsphase vom 30/07/1992 einen positiven Wert, der zwischen 21,17 DEM und 24,91 DEM liegt. Für die drei- und vierjährigen Kreditkonditionen wird die Angebotsoption frühestens nach 10 Tagen, für die fünfjährige Kondition und das mehrfache Angebot frühestens nach 11 Tagen ausgeübt.

Die Werte $p_{t_a}[C] = p_{t_a}[H]$ schwanken für eine Angebotsdauer von 60 Tagen und einer impliziten Swaption-Volatilität von 19,0% in Abhängigkeit der angebotenen Kondition und des Zinsniveaus zwischen 608,25 DEM und 952,53 DEM. Werden die Prämien für die Sicherungsgeschäfte derart angepasst, dass in Abhängigkeit der Ausübung der Option ein konstanter Prozentsatz, d. h. eine Marge $\tilde{v}^{p^A}$ auf das Nominalvolumen N_t zu leisten ist, so belaufen sich die Verluste einer Bank auf mindestens $\tilde{v}^{p^A} = 33,33$ bp oder

annuisierte Prämien				
Angebot	02/01/1996		30/07/1992	
60 Tage	$\hat{v}^p$	v_t	$\hat{v}^p$	v_t
3 Jahre	34,56 bp	345,62 DEM	53,22 bp	532,15 DEM
4 Jahre	34,37 bp	343,74 DEM	54,23 bp	542,25 DEM
5 Jahre	33,33 bp	333,32 DEM	55,52 bp	555,22 DEM
mehrfach	34,32 bp	343,23 DEM	55,52 bp	555,22 DEM

Tabelle 3.22: Annuisierte Prämien

$\tilde{v}_t^A = 333,32$ DEM pro Jahr[38] ungewichtet auf das Nominalvolumen von 100.000,00 DEM[39]. Der höchste Wert ist in diesem Beispiel $\tilde{v}^{p^A} = 55,52$ bp oder $\tilde{v}_t^A = 555,22$ DEM pro Jahr für eine mehrfache Angebotsoption in einem inversen Hochzinsniveau. Die Beträge $\tilde{v}_t^A$ werden im Sicherungsgeschäft nur fällig, falls der Kunde die Angebotsoption ausübt. In diesem Falle sind sie an jedem Zinszahlungstag seitens der Bank zu leisten. Der Berechnung von $\tilde{v}^{p^A}$ liegt Gleichung 3.13, d. h. der risikogewichtete Margenfaktor $\tilde{\psi}^A$ zugrunde, da bei Nichtmarktsegmentierung unterstellt wird, dass der Kunde sich wie ein Arbitrageur verhält. Unabhängig von der Entscheidung seitens einer Bank, eine Sicherungstransaktion abzuschließen oder nicht, hat der Kunde durch die Angebotsoption einen Wert von 608,25 DEM bis zu 952,53 DEM erhalten.

Kann eine Bank keine Markteintrittsprämie durch Marktsegmentierung erzielen, wird sie aus dem Kreditgeschäft keine Erträge erwirtschaften, sondern ausschließlich Verluste, die nicht unbedeutend sind (ca. 0,6% – 1,0%). Wie obiges Rechenbeispiel zeigt, sind die Verluste in einer Hochzinsphase nicht wesentlich höher als in einer Niederzinsphase, wenn die Prämie $p_{t_a}[H]$ betrachtet wird. Die Differenz beträgt maximal 41,20 DEM (952,53 DEM - 911,33 DEM) oder 4,14 bp auf 100.000,00 DEM Nominalvolumen. Der

[38]Die Einheit Basispunkt bezeichnet 0,01% und wird mit bp abgekürzt.

[39]Falls Tilgungen erfolgen, reduziert sich der Betrag $\tilde{v}_t^A$ anteilsmäßig.

prozentuale Verlust $\hat{v}^p$ ist jedoch insbesondere in der Hochzinsphase erheblich höher (hier ca. 20 bp). Der maximale Unterschied zwischen den Prämien der Niederzinsphase und der Hochzinsphase beläuft sich auf anteilige 221,90 DEM (555,22 DEM - 333,32 DEM) pro Jahr oder 22,19 bp. Diese Ursache für die unterschiedliche Höhe der Verlustbeträge liegt im Wesentlichen in der Tatsache, dass die Realisation von $p_{t_a}[C]$ sicher und die Realisation von v^p unsicher ist, da diese von der Annahme des Kredites abhängt.

Die beiden Tabellen 3.23 und 3.24 zeigen eine Gegenüberstellung der risikolosen und risikogewichteten Margen bei Nichtmarktsegmentierung in Abhängigkeit der betrachteten Zinskurven.

Margen in bp 02/01/1996						
Angebot	$\hat{\psi}$			$\tilde{\psi}^A$		
60 Tage	$\hat{g}^p$	$\hat{v}^p$	$\hat{c}^p$	$\tilde{g}^{p^A}$	$\tilde{v}^{p^A}$	$\tilde{c}^{p^A}$
3 Jahre	0,00	22,20	22,20	0,00	34,56	34,56
4 Jahre	0,00	22,04	22,04	0,00	34,37	34,37
5 Jahre	0,00	21,35	21,35	0,00	33,33	33,33
mehrfach	0,00	21,40	21,40	0,00	34,32	34,32

Tabelle 3.23: Risikolose Margen

Margen in bp 30/07/1992						
Angebot	$\hat{\psi}$			$\tilde{\psi}^A$		
60 Tage	$\hat{g}^p$	$\hat{v}^p$	$\hat{c}^p$	$\tilde{g}^{p^A}$	$\tilde{v}^{p^A}$	$\tilde{c}^{p^A}$
3 Jahre	0,00	24,34	24,34	0,00	53,22	53,22
4 Jahre	0,00	24,66	24,66	0,00	54,23	54,23
5 Jahre	0,00	25,10	25,10	0,00	55,52	55,52
mehrfach	0,00	25,10	25,10	0,00	55,52	55,52

Tabelle 3.24: Risikogewichtete Margen

3.5.4 Die Optionsprämie auf segmentierten Märkten

Die Angebotsoption hat in dem betrachteten Beispiel einen Wert zwischen 605,00 DEM und 952,52 DEM. Diesen Wert bekommt ein Kunde kostenlos von der Bank angedient. Kann eine Bank aufgrund ihrer besonderen Stellung am Kapitalmarkt eine Markteintrittsprämie abschöpfen, vermindert sich dieser Verlust. Der Wert der Angebotsoption kann unter Umständen negativ werden. In diesem Fall ist es für eine Bank bei Abgabe von verbindlichen Angeboten möglich, Erträge zu erwirtschaften. Kann eine Bank eine Markteintrittsprämie von $g^p = 80,00\ bp$ pro Jahr auf das jeweils ausstehende Kapital erheben, wird das Kreditgeschäft (im Rahmen dieser Analyse) ertragreich. Die Markteintrittsprämie erhöht den Nominalzins der betrachteten Konditionen. Da der Kredit annuitätisch sein soll, ändern sich mit dem Nominalzins auch die Tilgungszahlungen. Die veränderten Zahlungsströme der Konditionen sind in Tabelle 3.25 aufgeführt.

Kredit	Zahlungszeitpunkte					
	0	1	2	3	4	5
Zinskurve vom 02/01/1996						
3 Jahre	98.000,00	-5.513,65	-5.515,65	-102.376,20		
4 Jahre	98.000,00	-6.170,97	-6.170,97	-6.170,97	-101.849,87	
5 Jahre	98.000,00	-6.670,46	-6.670,46	-6.670,46	-6.670,46	-101.070,34
Zinskurve vom 30/07/1992						
3 Jahre	98.000,00	-10.289,81	-10.289,81	-107.002,49		
4 Jahre	98.000,00	-10.226,25	-10.226,25	-10.266,25	-105.675,13	
5 Jahre	98.000,00	-10.203,41	-10.203,41	-10.203,41	-10.203,41	-104.194,40

Tabelle 3.25: Kreditkonditionen bei einer Markteintrittsprämie von 80 bp

Mit Einführung der Markteintrittsprämie von $g^p = 80,00\ bp$ ist der Kapitalwert der einzelnen Kreditkonditionen nicht mehr null, sondern aus Sicht eines Kunden negativ. Der negative Kapitalwert entspricht exakt der Summe der Barwerte der Markteintrittsprämie zum jeweiligen Zinszahlungszeitpunkt, falls der Kredit in t_a aufgenommen wird. Einen dieser (positiven) Ka-

Kredit	Zahlungszeitpunkte					
	Barwert	1	2	3	4	5
Zinskurve vom 02/01/1996						
3 Jahre	-2.191,59	800,00	792,00	783,64		
4 Jahre	-2.828,64	800,00	792,00	783,59	774,74	
5 Jahre	-3.415,04	800,00	792,00	783,55	774,61	765,17
Zinskurve vom 30/07/1992						
3 Jahre	-1.988,12	800,00	792,00	783,26		
4 Jahre	-2.535,57	800,00	792,00	783,26	773,71	
5 Jahre	-3.035,27	800,00	792,00	783,26	773,72	763,31

Tabelle 3.26: Zahlungsstrom der Markteintrittsprämie

pitalwerte könnte eine Bank erwirtschaften, wenn sie keine Angebotsoption vergeben würde, und der Kunde den angebotenen Kredit sofort annimmt. Mit Vergabe eines verbindlichen Angebotes für 60 Tage kann die vollständige Markteintrittsprämie von $g^p = 80,00\ bp$ nicht vereinnahmt werden. Ein Teil dieser Markteintrittsprämie wird an den Kunden in Form der Angebotsoption zurückgegeben. Der Teil, der an den Kunden gereicht wird, entspricht exakt den Kosten für das Sicherungsgeschäft $p_{t_a}[H]$ erhöht um die Differenz $(g^p - \hat{g}^p)\ \hat{\psi}$. Die Realisationsprämie $\wp\hat{\psi} = (g^p - \hat{g}^p)\ \hat{\psi}$ gibt den Unterschiedsbetrag bei der Abschöpfung der Markteintrittsprämie im Falle der sofortigen Annahme des Kredites durch einen Kunden (ohne Vergabe einer Angebotsoption) γ_0 und der Abschöpfung der Markteintrittsprämie bei optimaler Ausübung der Angebotsoption an, wie die Gleichungen

$$\begin{aligned} p_{t_a}[H] + (g^p - \hat{g}^p)\ \hat{\psi}) &= \\ g^p\hat{\psi} - (\hat{g}^p - \hat{v}^p)\,\hat{\psi} &= \\ g^p\hat{\psi} - (-\hat{c}^p)\,\hat{\psi} &= \\ \gamma_0 + p_{t_a}[C] &= \vartheta\hat{\psi} \end{aligned}$$

verdeutlichen. Der Teil der Markteintrittsprämie, der in Form von Angebots-

Margenfaktor				
Angebot	02/01/1996		30/07/1992	
60 Tage	$\hat{\psi}$	$\tilde{\psi}$	$\hat{\psi}$	$\tilde{\psi}$
3 Jahre	2,73949	2,71711	2,48515	2,45390
4 Jahre	3,53580	3,50462	3,16946	3,13019
5 Jahre	4,26880	4,22905	3,79409	3,74729
mehrfach		2,77032		2,61258

Tabelle 3.27: Margenfaktoren

optionen seitens einer Bank an den Kunden zurückgeben wird, entspricht dem Verzicht an Markteintrittsprämien, den die Bank üben muss, soll der Kunde indifferent sein zwischen der sofortigen Annahme des angebotenen Kredites oder der optimalen Ausübung der Angebotsoption.

Zur Bestimmung der Margen werden die Margenfaktoren benötigt. Bei der Berechnung der risikogewichteten Marge wird zunächst von der Gültigkeit der Annahme 3.3 ausgegangen. Demnach gelten für die risikogewichteten Margen die Gleichungen 3.12–3.12:

$$\begin{aligned} \tilde{g}^p &= \frac{p_{t_a}[G]}{\tilde{\psi}} \\ \tilde{v}^p &= \frac{p_{t_a}[H]}{\tilde{\psi}} \\ \tilde{c}^p &= \frac{p_{t_a}[C]}{\tilde{\psi}}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass der Kunde auf jeden Fall einen Kredit aufnimmt. Die Markteintrittsprämie von $g^p = 80,00\ bp$ wird somit mit Sicherheit realisiert. Lediglich der Zeitpunkt innerhalb der Angebotsdauer ist unbestimmt. Die Werte und Margen für die einzelnen Angebotsoptionen ergeben sich aus den beiden Tabellen 3.28 und 3.29[40]. Für die Bestimmung der risikolosen Marge der mehrfachen Angebotsoption wurde der risikolose Margenfaktor $\hat{\psi}$ der 5-jährigen Kondition zugrunde gelegt. Da für die risikolose Marge der Zins-

[40]Die Einheit sind für die Werte und die Margen jeweils Basispunkte [bp].

Werte und Margen [bp] 02/01/1996									
Angebot	Wert			risikolos			risikogewichtet		
60 Tage	$p_{t_a}[G]$	$p_{t_a}[H]$	$p_{t_a}[C]$	$\hat{g}^p$	$\hat{v}^p$	$\hat{c}^p$	$\tilde{g}^p$	$\tilde{v}^p$	$\tilde{c}^p$
3 Jahre	2.173,68	608,23	-1.565,45	79,35	22,20	-57,14	80,00	22,39	-57,61
4 Jahre	2.803,69	779,46	-2.024,24	79,29	22,04	-57,25	80,00	22,24	-57,76
5 Jahre	3.383,24	911,19	-2.472,05	79,26	21,35	-57,91	80,00	21,55	-58,45
mehrfach	2.216,26	658,25	-1.558,00	51,92	15,42	-36,50	80,00	23,76	-56,24

Tabelle 3.28: Werte und Margen 02/01/1996

Werte und Margen [bp] 30/07/1992									
Angebot	Wert			risikolos			risikogewichtet		
60 Tage	$p_{t_a}[G]$	$p_{t_a}[H]$	$p_{t_a}[C]$	$\hat{g}^p$	$\hat{v}^p$	$\hat{c}^p$	$\tilde{g}^p$	$\tilde{v}^p$	$\tilde{c}^p$
3 Jahre	1.963,12	604,88	-1.358,24	78,99	24,34	-54,65	80,00	24,65	-55,35
4 Jahre	2.504,15	781,53	-1.722,62	79,01	24,66	-54,35	80,00	24,97	-55,03
5 Jahre	2.997,83	952,17	-2.045,66	79,01	25,10	-53,92	80,00	25,41	-54,59
mehrfach	2.090,06	774,93	-1.315,14	55,09	20,42	-34,66	80,00	29,66	-50,34

Tabelle 3.29: Werte und Margen 30/07/1992

zahlungsstrom der entsprechenden Kreditkondition herangezogen wird und der mehrfachen Angebotsoption mehrere Konditionen zugrunde liegen, kann nicht eindeutig ermittelt werden, auf welche Kondition sich die Marge bezieht. Sie muss explizit angegeben werden. Das Recht ϱ, eine Kondition aus mehreren auswählen zu können, hat einen Wert von 0,76 bp (02/01/1996) bzw. 4,31 bp (30/07/1992) und liegt bei Marktsegmentierung höher als bei Nichtmarktsegmentierung.

Obwohl in alle Kreditkonditionen eine Markteintrittsprämie von $g^p = 80,00\ bp$ einbezogen wurde, liegen für alle Laufzeiten die risikolosen Margen $\hat{g}^p$ unter g^p. Entsprechend ist der Wert der Markteintrittsprämie bei sofortiger Valutierung γ_0 höher als der aus der optimalen Ausübung der Angebotsoption zufließenden barwertigen Markteintrittsprämie $p_{t_a}[G]$. Die Differenz aus $\wp\,\hat{\psi} = \gamma_0 - p_{t_a}[G]$ kann interpretiert werden als das Recht eines Kunden zu entscheiden, wann innerhalb der Angebotsdauer er die Markteintrittsprämie

Markteintrittsprämien [DEM]						
Angebot	02/01/1996			30/07/1992		
60 Tage	γ_0	$p_{t_a}[G]$	$\wp\,\hat{\psi}$	γ_0	$p_{t_a}[G]$	$\wp\,\hat{\psi}$
3 Jahre	2.191,59	2.173,68	17,90	1.988,12	1.963,12	24,99
4 Jahre	2.828,64	2.803,69	24,95	2.535,57	2.504,15	31,42
5 Jahre	3.415,04	3.383,24	31,80	3.035,27	2.997,83	37,45
mehrfach	3.415,04			3.035,27		

Tabelle 3.30: Markteintrittsprämien und Realisationsprämien

Kredit	02/01/1996		30/07/1992	
	ϑ [bp]	$\vartheta\hat{\psi}$ [DEM]	ϑ [bp]	$\vartheta\hat{\psi}$ [DEM]
3 Jahre	22,86	626,14	25,35	629,87
4 Jahre	22,75	804,41	25,65	812,95
5 Jahre	22,09	942,99	26,08	989,61
mehrfach	43,50	1.857,04	45,34	1.720,14

Tabelle 3.31: ϑ der mehrfachen Angebotsoption

leistet.

Die Summe ϑ aus risikoloser Marge der Angebotsoption $\hat{c}^p$ und prozentualer Markteintrittsprämie g^p bezeichnet den Teil der Markteintrittsprämie g^p, der in Form der Angebotsoption wieder an den Kunden zurückgegeben wird. Für eine Angebotsoption mit 60 Tagen Laufzeit und einer in die Kreditkonditionen einbezogenen Markteintrittsprämie von $g^p = 80,00\ bp$ besitzen die jeweiligen ϑ die in der Tabelle 3.31 angegebenen Werte. Zur Bestimmung von ϑ der mehrfachen Angebotsoption wurde unterstellt, dass ein Kunde die 5-jährige Kreditkondition sofort annimmt.

Für eine Angebotsoption mit 60 Tagen Laufzeit und einer Markteintrittsprämie von $g^p = 80,00\ bp$ beträgt $\vartheta = 26,08\ bp$ für einen 5-jährigen Kredit auf Basis der Zinsstruktur vom 30/07/1992. Die angebotene Kreditkondition $K_0 - G_0$ sowie der äquivalente Zahlungsstrom bei sofortiger Annahme K^ϑ sind aus Tabelle 3.32 ersichtlich: Der Kredit K^ϑ ist nicht mehr annuitätisch, da sich die ausstehenden Kapitalien gegenüber der angebotenen Kre-

Kredit	Zahlungszeitpunkte					
	0	1	2	3	4	5
Zinskurve vom 30/07/1992						
$K_0 - G_0$	98.000,00	-10.203,41	-10.203,41	-10.203,41	-10.203,41	-104.194,40
ϑ		260,83	258,22	255,37	252,26	248,87
K^{ϑ}	98.000,00	-9.942,58	-9.945,19	-9.948,04	-9.951,15	-103.945,53

Tabelle 3.32: Zahlungsstrom der Kreditkondition K^{ϑ}

ditkondition nicht ändern. Der Kapitalwert von K^{ϑ} beträgt -2.045,66 DEM. Dies entspricht der Differenz aus Kapitalwert der Kreditkondition $K_0 - G_0$ in Höhe von -3.035,27 DEM und dem Barwert $\vartheta\hat{\psi}$ in Höhe von 989,61 DEM.

Eine Bank könnte ohne Vergabe von Angebotsoptionen einen Kapitalwert für jeden vergebenen Kredit von γ_0 erwirtschaften. Der Zwang (Druck der Konkurrenz oder des Gesetzgebers) verbindliche Angebote einem Kunden unterbreiten zu müssen, schmälert diesen Kapitalwert γ_0 auf eine abschöpfbare Prämie von $p_{t_a}[C]$. Die Kosten der Banken für die Vergabe der Angebotsoptionen in Höhe von $\gamma_0 + p_{t_a}[C]$ lassen sich in zwei Teile zerlegen. Der erste Teil beschreibt das Risiko durch eine optimale Ausübung der Angebotsoption, Verluste durch höhere Refinanzierungsaufwendungen hinnehmen zu müssen. Dieses Risiko kann durch eine entsprechende Sicherungstransaktion eliminiert werden. Die Prämie zur Eliminierung dieses Zinsänderungsrisikos beläuft sich auf $p_{t_a}[H]$. Der zweite Teil bewertet das Risiko der Realisierung der Markteintrittsprämie. Für den Fall, dass die Markteintrittsprämie auf jeden Fall fällig wird, bezieht sich dieses Risiko auf den Zeitpunkt der Realisation. Dieses Risiko besitzt einen Wert von $\wp\ \hat{\psi}$. Der barwertige und ratierliche Ertrag einer Bank aus der Vergabe von Angebotsoptionen ergibt sich für die Zinskurve vom 30/07/1992 analog zum obigen Beispiel. Die Werte sind in Tabelle 3.33 aufgeführt. Die maximal erzielbare Markteintrittsprämie von 80,00 bp wird um 26,08 bp auf die abschöpfbare Markteintrittsprämie

Prämie	Wert [DEM]		$\hat{\psi}$ [bp]	
erzielbare Markteintrittsprämie	γ_0	3.035,27	g^p	80,00
Sicherungsprämie	$p_{t_a}[H]$	952,17	$\hat{v}^p$	25,10
Realisierungsprämie	$\wp\hat{\psi}$	37,45	$\wp$	0,98
abschöpfbare Markteintrittsprämie	$-p_{t_a}[C]$	2.045,66	$-\hat{c}^p$	53,92

Tabelle 3.33: Abschöpfbare Markteintrittsprämie

von 53,92 bp geschmälert. Dabei entfallen auf die Absicherung des Zinsänderungsrisikos 25,10 bp. Die restlichen 0,98 bp sind notwendig, um das Risiko der Realisation der Markteintrittsprämie abzusichern.

Die Banken bieten in der Realität nicht nur Angebotsoptionen für eine einzige, bestimmte Kreditkondition an, sondern verbindliche Angebote, denen ein Portfolio an Kreditkonditionen zugrunde liegt. Aus Gründen des Wettbewerbes möchten die Banken einem Kunden eine breite Palette an Wahlmöglichkeiten bieten, um ein Geschäft aquirieren zu können. Da die mehrfache Angebotsoption in der Finanzwelt am häufigsten vorkommt, werden in Abhängigkeit der Laufzeit der verbindlichen Angebote und angenommener, erzielbaren Markteintrittsprämien g^p die *risikolosen Margen*[41] für die mehrfache Angebotsoption diskutiert. Die Laufzeiten reichen von 5 Tagen bis 60 Tagen. Die angenommene Markteintrittsprämie schwankt zwischen 0,00 bp und 80,00 bp. Es wird unterschieden zwischen einer normalen Niederzinskurve (02/01/1996) und einer inversen Hochzinskurve (30/07/1992).

Abschöpfbare Markteintrittsprämie

Die Marge der Angebotsoption und damit ihr Wert steigt mit zunehmender Laufzeit, da es sich um amerikanische Optionen handelt. Eine amerikanische Option mit längerer Laufzeit beinhaltet immer die entsprechende Option mit

[41]Im Anhang dieser Arbeit finden sich die zugrunde liegenden risikolosen und risikogewichteten Margenfaktoren.

Risikolose Marge der Angebotsoption [bp] mehrfache Angebotsoption								
$\hat{c}^p$	02/01/1996							
t / g^p	5	10	15	20	30	40	50	60
0	5,12	7,25	9,16	10,88	13,86	16,50	18,95	21,40
10	-2,60	-0,64	1,17	2,83	5,72	8,30	10,71	13,13
20	-9,44	-7,76	-6,16	-4,64	-1,93	0,54	2,87	5,22
30	-15,92	-14,43	-13,01	-11,63	-9,13	-6,81	-4,60	-2,34
40	-22,33	-20,89	-19,58	-18,31	-16,00	-13,84	-11,74	-9,59
50	-28,74	-27,31	-26,03	-24,82	-22,65	-20,61	-18,63	-16,57
60	-35,16	-33,72	-32,45	-31,26	-29,16	-27,21	-25,32	-23,35
70	-41,57	-40,13	-38,85	-37,66	-35,60	-33,70	-31,87	-29,98
80	-47,98	-46,54	-45,26	-44,07	-42,01	-40,13	-38,34	-36,50

Tabelle 3.34: Abschöpfbare Markteintrittsprämie für mehrfache Angebotsoption 02/01/1996

Risikolose Marge der Angebotsoption [bp] mehrfache Angebotsoption								
$\hat{c}^p$	30/07/1992							
t / g^p	5	10	15	20	30	40	50	60
0	8,29	10,81	13,52	15,15	18,34	20,93	23,15	25,10
10	0,11	2,96	5,34	7,21	10,36	12,93	15,14	17,10
20	-7,09	-4,75	-2,26	-0,63	2,47	5,02	7,23	9,18
30	-14,11	-11,88	-9,68	-8,03	-5,06	-2,59	-0,43	1,49
40	-20,76	-18,85	-16,73	-15,26	-12,43	-10,04	-7,94	-6,06
50	-27,34	-25,57	-23,61	-22,23	-19,56	-17,28	-15,26	-13,43
60	-33,88	-32,19	-30,33	-29,05	-26,52	-24,35	-22,40	-20,64
70	-40,43	-38,75	-36,95	-35,75	-33,36	-31,29	-29,43	-27,73
80	-46,97	-45,29	-43,53	-42,36	-40,06	-38,08	-36,30	-34,66

Tabelle 3.35: Abschöpfbare Markteintrittsprämie für mehrfache Angebotsoption 30/07/1992

kürzerer Laufzeit. Aus diesem Grund darf eine länger laufende Option nie weniger wert sein als die kürzer laufende und ansonsten identische Option. Die Margen sinken mit zunehmender Markteintrittsprämie, da die Banken zunehmend von der Marktsegmentierung profitieren. Die Margen für den Kunden werden ab einem bestimmten Niveau negativ. In einer inversen Zinskurve und hohem Zinsniveau liegen die risikolosen Margen über den entsprechenden Margen in einer normalen Zinskurve und niedrigem Zinsniveau. Diese Marge (mit umgekehrtem Vorzeichen) kann eine Bank bei der Vergabe der mehrfachen Angebotsoption zum Zeitpunkt der Abgabe abschöpfen.

Mehrfachprämie

Wert der Auswahl von Kreditkonditionen [bp] mehrfache Angebotsoption								
$\frac{\varrho}{\psi}$	02/01/1996							
t / g^p	5	10	15	20	30	40	50	60
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,05
10	0,49	1,04	1,59	1,90	1,81	1,74	1,71	1,69
20	0,06	0,32	0,67	1,03	1,74	2,41	3,06	3,38
30	0,00	0,07	0,23	0,44	0,92	1,44	1,96	2,51
40	0,00	0,01	0,06	0,16	0,44	0,80	1,19	1,62
50	0,00	0,00	0,01	0,05	0,19	0,41	0,68	1,00
60	0,00	0,00	0,00	0,01	0,07	0,19	0,37	0,59
70	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,08	0,18	0,33
80	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,03	0,09	0,17

Tabelle 3.36: Mehrfachprämie 02/01/1996

Wert der Auswahl von Kreditkonditionen [bp] mehrfache Angebotsoption								
$\frac{\varrho}{\psi}$	30/07/1992							
t / g^p	5	10	15	20	30	40	50	60
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
10	1,28	2,13	1,79	2,01	1,96	1,92	1,89	1,87
20	0,63	1,32	2,10	2,65	3,72	3,93	3,87	3,83
30	0,15	0,73	1,21	1,77	2,70	3,52	4,27	4,95
40	0,04	0,29	0,69	1,06	1,84	2,56	3,24	3,87
50	0,00	0,11	0,34	0,62	1,22	1,82	2,40	2,96
60	0,00	0,03	0,14	0,32	0,76	1,25	1,74	2,22
70	0,00	0,00	0,05	0,14	0,43	0,80	1,19	1,60
80	0,00	0,00	0,01	0,06	0,24	0,50	0,81	1,14

Tabelle 3.37: Mehrfachprämie 30/07/1992

Das Recht, eine aus mehreren Konditionen auswählen zu können, ist in den meisten Fällen positiv (siehe Tabellen 3.36 und 3.37). Dies bedeutet, dass in Abhängigkeit der jeweiligen Zinssituation ein Kunde sich entweder für die 3-jährige, die 4-jährige oder die 5-jährige Kondition entscheidet. Ein Wert von $\frac{\varrho}{\psi} = 0$ bedeutet folglich, dass während der Laufzeit der Angebotsoption ein Kunde immer die gleiche Kreditkondition wählen würde. Die Margen für dieses Recht reichen von 0,00 bp bis ca. 4,95 bp auf eine zugrunde liegende 5-jährige Kondition. Das Maximum des Wertes von 4,95 bp wird bei einer Markteintrittsprämie von 30,00 bp und einer Laufzeit von 6 Tagen erreicht. In diesem Fall ist der Wert der mehrfachen Angebotsoption noch positiv, wohingegen die Werte der einfachen Angebotsoption für 3-, 4- und 5-jährige Laufzeiten schon negativ sind.

Sicherungskosten

Risikolose Marge des Sicherungsgeschäftes [bp] mehrfache Angebotsoption								
$\hat{v}^p$	02/01/1997							
t / g^p	5	10	15	20	30	40	50	60
0	5,12	7,25	9,16	10,88	13,86	16,50	18,95	21,40
10	4,48	7,11	8,65	10,68	13,61	16,22	18,64	21,25
20	3,60	6,27	7,71	9,94	12,91	15,53	17,96	20,75
30	3,32	5,38	6,83	8,96	11,94	14,58	17,02	19,95
40	3,32	4,89	6,28	8,10	10,96	13,56	15,98	18,96
50	3,32	4,75	6,05	7,54	10,17	12,64	14,99	17,91
60	3,32	4,73	5,99	7,27	9,63	11,92	14,15	16,92
70	3,32	4,73	5,98	7,17	9,34	11,44	13,52	16,08
80	3,32	4,73	5,98	7,14	9,20	11,15	13,09	15,42

Tabelle 3.38: Sicherungskosten für mehrfache Angebotsoption 02/01/1996

Die Prämie zur Absicherung des Zinsänderungsrisikos einer Angebotsoption nimmt ebenfalls mit der Laufzeit der Option zu und mit einer höheren erzielbaren Markteintrittsprämie ab. Die Sicherungsprämie ist daher abhängig von der Markteintrittsprämie, obgleich diese in der Sicherungstransaktion nicht vergütet wird, falls die Sicherungsoption ausgeübt wird. Der Grund für diese Abhängigkeit liegt in der Bedingung der Ausübung von der Markteintrittsprämie. Die negative Sicherungsprämie stellt für einen Kunden das reine Wahlrecht dar, einen Kredit zu einer verbindlichen Kondition annehmen zu können. Bei einer existierenden Marktsegmentierung vermindert sich der

Risikolose Marge des Sicherungsgeschäftes [bp] mehrfache Angebotsoption								
$\hat{v}^p$	30/07/1992							
t / g^p	5	10	15	20	30	40	50	60
0	8,29	10,81	13,52	15,15	18,34	20,93	23,15	25,10
10	7,39	10,78	13,04	15,14	18,33	20,92	23,14	25,09
20	7,27	9,67	12,86	14,22	17,60	20,30	22,60	24,60
30	5,83	9,47	11,51	14,10	17,46	20,18	22,46	24,49
40	5,83	8,04	11,41	12,69	16,20	19,03	21,45	23,56
50	5,37	8,02	10,05	12,58	16,03	18,85	21,25	23,34
60	5,37	7,24	9,71	11,24	14,58	17,42	19,87	22,05
70	5,37	7,09	9,15	10,96	14,23	17,02	19,46	21,63
80	5,37	7,00	8,87	10,28	13,22	15,85	18,22	20,42

Tabelle 3.39: Sicherungskosten für mehrfache Angebotsoption 30/07/1992

Wert dieses Wahlrechtes $\hat{v}^p$ um die Verpflichtung, eine Markteintrittsprämie $\hat{g}^p$ leisten zu müssen. Die Nettogröße $\hat{c}^p = \hat{v}^p - \hat{g}^p$ ergibt den Wert des verbindlichen Angebotes für einen Kunden.

Realisationsprämie

Realisationsprämie [bp] mehrfache Angebotsoption								
$\wp$	02/01/1996							
t / g^p	5	10	15	20	30	40	50	60
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
10	2,92	2,25	2,52	2,14	2,10	2,08	2,07	1,88
20	6,95	5,97	6,13	5,43	5,17	5,01	4,91	4,48
30	10,76	10,20	10,16	9,41	8,93	8,61	8,38	7,71
40	14,35	14,22	14,14	13,59	13,04	12,61	12,27	11,45
50	17,94	17,94	17,92	17,64	17,19	16,76	16,38	15,52
60	21,52	21,55	21,56	21,48	21,21	20,87	20,53	19,73
70	25,11	25,14	25,17	25,17	25,07	24,86	24,61	23,95
80	28,70	28,73	28,76	28,79	28,80	28,71	28,56	28,08

Tabelle 3.40: Realisationsprämie für mehrfache Angebotsoption 02/01/1996

Die Realisationsprämie der mehrfachen Angebotsoption nimmt mit zunehmender Laufzeit ab. Ein Kunde, d. h. ein nicht kapitalmarktfähiger Investor, muss in einem segmentierten Markt eine Prämie bezahlen, wenn er

Realisationsprämie [bp] mehrfache Angebotsoption								
$\wp$	30/07/1992							
t / g^p	5	10	15	20	30	40	50	60
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
10	2,71	2,18	2,30	2,07	2,03	2,01	2,01	2,01
20	5,64	5,58	4,87	5,15	4,87	4,72	4,62	4,57
30	10,06	8,65	8,81	7,87	7,47	7,23	7,11	7,00
40	13,41	13,11	11,86	12,05	11,36	10,93	10,61	10,38
50	17,29	16,41	16,34	15,19	14,41	13,88	13,49	13,23
60	20,74	20,57	19,95	19,72	18,90	18,24	17,73	17,31
70	24,20	24,16	23,90	23,29	22,41	21,69	21,11	20,64
80	27,66	27,71	27,60	27,36	26,72	26,07	25,48	24,91

Tabelle 3.41: Realisationsprämie für mehrfache Angebotsoption 30/07/1992

eine Finanztransaktion durchführen will. Unabhängig von einem verbindlichen Angebot beträgt die Höhe dieser Prämie γ_0. Erhält ein Kunde eine Angebotsoption, so ändert sich die zu leistende Prämie auf $\hat{g}^p$, da er den Zeitpunkt der Zahlung bestimmen kann. Die Differenz aus diesen beiden Größen, die Realisationsprämie, bedeutet neben der Stillhalterposition gegenüber Marktpreisveränderungen einen weiteren Verzicht der Banken auf die erzielbare Markteintrittsprämie. Dieser Verzicht kann im Falle der mehrfachen Angebotsoption bis zu $\wp = 28,80\ bp$ von erzielbaren $g^p = 80,00\ bp$ ausmachen.

Kosten der Angebotsoption

Der Transformator ϑ charakterisiert den gesamten Vorteil, den ein Kunde besitzt, wenn eine Bank ihm ein verbindliches Angebot unterbreitet. Statt die volle Markteintrittsprämie g^p leisten zu müssen, erhält ein Kunde von einer Bank die Sicherheit einer verbindlichen Kondition und das Wahlrecht, den Zeitpunkt der Kapitalmarkttransaktion bestimmen zu können. Da die Banken sich diesen Vorteil nicht vergüten lassen, reduziert sich ihr Ertrag, den sie aufgrund einer besonderen Stellung am Kapitalmarkt erhalten können.

Verzicht auf erzielbare Markteintrittsprämie [bp] mehrfache Angebotsoption								
ϑ	02/01/1996							
t g^p	5	10	15	20	30	40	50	60
0	5,12	7,25	9,16	10,88	13,86	16,50	18,95	21,40
10	7,40	9,36	11,17	12,83	15,72	18,30	20,71	23,13
20	10,56	12,24	13,84	15,36	18,07	20,54	22,87	25,22
30	14,08	15,57	16,99	18,37	20,87	23,19	25,40	27,66
40	17,67	19,11	20,42	21,69	24,00	26,16	28,26	30,41
50	21,26	22,69	23,97	25,18	27,35	29,39	31,37	33,43
60	24,84	26,28	27,55	28,74	30,84	32,79	34,68	36,65
70	28,43	29,87	31,15	32,34	34,40	36,30	38,13	40,02
80	32,02	33,46	34,74	35,93	37,99	39,87	41,66	43,50

Tabelle 3.42: Kosten der mehrfachen Angebotsoption 02/01/1996

Verzicht auf erzielbare Markteintrittsprämie [bp] mehrfache Angebotsoption								
ϑ	30/07/1992							
t g^p	5	10	15	20	30	40	50	60
0	8,29	10,81	13,52	15,15	18,34	20,93	23,15	25,10
10	10,11	12,96	15,34	17,21	20,36	22,93	25,14	27,10
20	12,91	15,25	17,74	19,37	22,47	25,02	27,23	29,18
30	15,89	18,12	20,32	21,97	24,94	27,41	29,57	31,49
40	19,24	21,15	23,27	24,74	27,57	29,96	32,06	33,94
50	22,66	24,43	26,39	27,77	30,44	32,72	34,74	36,57
60	26,12	27,81	29,67	30,95	33,48	35,65	37,60	39,36
70	29,57	31,25	33,05	34,25	36,64	38,71	40,57	42,27
80	33,03	34,71	36,47	37,64	39,94	41,92	43,70	45,34

Tabelle 3.43: Kosten der mehrfachen Angebotsoption 30/07/1992

Die Margen ϑ verdeutlichen, welchen Rückgang an kalkulierter Marge g^p bei Banken entsteht, wollen sie auf die Vergabe von Angebotsoptionen verzichten. Dieser Rückgang kann (inbesondere bei nicht exisitierender Marktsegmentierung) ein solches Ausmaß annehmen, dass die Banken keine Erträge aus dem Kreditgeschäft erwirtschaften können. Dementsprechend gibt es eine minimale, erzielbare Markteintrittsprämie g^p_{min}, bei der eine Bank weder Erträge erzielt noch Verluste erleidet, d. h. der Verzicht ϑ ist genauso hoch wie die Markteintrittsprämie g^p:

$$\vartheta \quad = \quad g^p_{min}$$

$$\begin{aligned} g^p_{min} + \hat{c}^p &= g^p \\ \hat{c}^p &= 0. \end{aligned}$$

Minimale Markteintrittsprämie

Dieser Break-Even g^p_{min} liegt im Falle der mehrfachen Angebotsoption zwischen 6,32 bp und 31,94 bp. Die minimale Markteintrittsprämie ist eine „Konstante“ des Kapitalmarktes und bleibt unberührt von der individuellen Annahmewahrscheinlichkeit λ.

Break-Even: $\hat{c}^p = 0$ [bp] mehrfache Angebotsoption								
t	5	10	15	20	30	40	50	60
30/07/1992	10,15	13,79	17,01	19,16	23,27	26,59	29,43	31,94
02/01/1996	6,32	9,18	11,56	13,65	17,40	20,72	23,80	26,85

Tabelle 3.44: Minimale Markteintrittsprämie

3.5.5 Bestimmung der Handelsstrategien

Der Werte für die Angebotsoption, die Sicherungsoption und für die Markteintrittsprämie wurden auf Basis des Duplikationsprinzipes bestimmt. Die Abbildungen 3.7 bis 3.21 zeigen die Handelsstrategie für eine Angebotsoption, der die 5-jährige Kreditkondition zugrunde liegt und eine Laufzeit von 5 Tagen besitzt. Die angenommene Markteintrittsprämie sei 80 bp und die angenommenen Kapitalmarktzinsen seien vom 02/01/1996.

Handelsstrategien bei sicherer Markteintrittsprämie

Das Handelsportfolio $(\phi^C_t(\lambda = 1), \check{\nu}^C_t(\lambda = 1))$ wird für jeden Knoten des binomialen Ho-Lee-Modells aufgeführt:

Der Wert der Handelsstrategie dupliziert exakt den Wert der Angebotsoption zu jedem Zeitpunkt und in jedem Knoten. Der Wert bestimmt sich

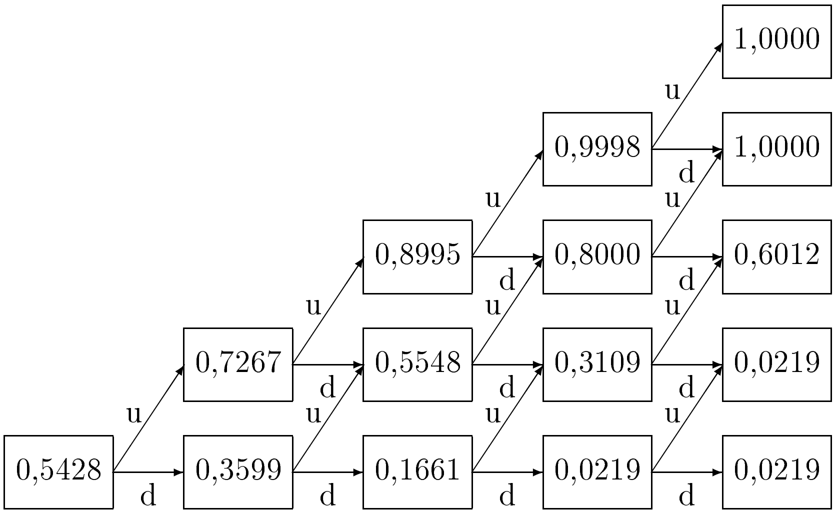


Abbildung 3.7: Anteil der Kreditkondition am Hedgeportfolio der Angebotsoption $\phi_t^C(\lambda = 1)$

durch die Beziehung $p_{t_a}[C] = (\phi_t^C(\lambda = 1)E^Q[\kappa_{t+1}] + \nu_t^C(\lambda = 1))\ p_t(\chi_{t+1})$. Der Preisprozess der Angebotsoption hat somit die in Abbildung 3.9 aufgeführte Struktur. Aufgrund der anfallenden, hohen Markteintrittsprämie von 80 bp ist der Wert der Angebotsoption negativ.

Analog zur Berechnung der Handelsstrategie, die eine Angebotsoption dupliziert, kann eine Handelsstrategie konstruiert werden, die die Sicherungsoption exakt nachbildet. In den Abbildungen 3.10 und 3.11 wird die Konstruktion der Handelsstrategie $(\phi_t^H(\lambda = 1), \nu_t^H(\lambda = 1))$ für die Sicherungsoption der oben beispielsweise angenommenen Angebotsoption gezeigt. Der Wert der Sicherungsoption zu einem Zeitpunkt für einen Knoten ist entsprechend zum Wert der zugrunde liegenden Angebotsoption $p_{t_a}[H] = (\phi_t^H(\lambda = 1)E^Q[\kappa_{t+1}] + \nu_t^H(\lambda = 1))\ p_t(\chi_{t+1})$ aus Abbildung 3.12 ersichtlich. Der Wert der Markteintrittsprämie bei Vergabe von Angebotsoptionen ist definiert durch Gleichung 3.7, $p_t[G] = p_t[H] - p_t[C]$. Für das Beispiel der Angebotsoption auf eine 5-jährige Kreditkondition ergibt sich für den Wert der Markteintrittsprä-

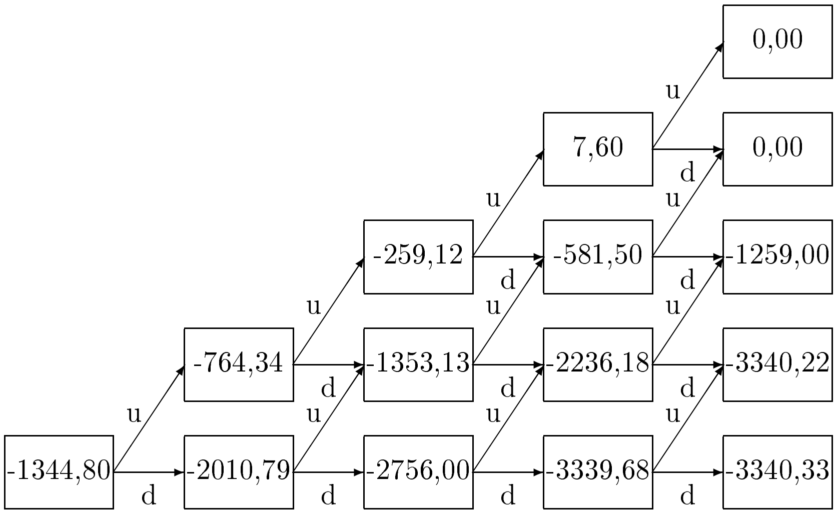


Abbildung 3.8: Anteil des Spot-Bonds am Hedgeportfolio der Angebotsoption $\nu_t^C(\lambda = 1)$

mie der im binomialen Baum aufgestellte Preisprozess (siehe Abbildung 3.13). Die Handelsstrategie $(\phi_t^G(\lambda = 1), \nu_t^G(\lambda = 1)$ für die Markteintrittsprämie kann auf zweierlei Arten bestimmt werden:

1. ausgehend vom Preisprozess der Markteintrittsprämie und den Beziehungen

$$
\begin{aligned}
p^u_{t_a}[G] &= (\phi_t^G(\lambda = 1)\kappa^u_{t+1} + \nu_t^G(\lambda = 1))\ p_t(\chi_{t+1}) \\
p^d_{t_a}[G] &= (\phi_t^G(\lambda = 1)\kappa^d_{t+1} + \nu_t^G(\lambda = 1))\ p_t(\chi_{t+1}) \quad \text{oder}
\end{aligned}
$$

2. ausgehend von der Gleichung 3.7

$$
\begin{aligned}
\phi_t^G &= \phi_t^H - \phi_t^C \\
\nu_t^G &= \nu_t^H - \nu_t^C.
\end{aligned}
$$

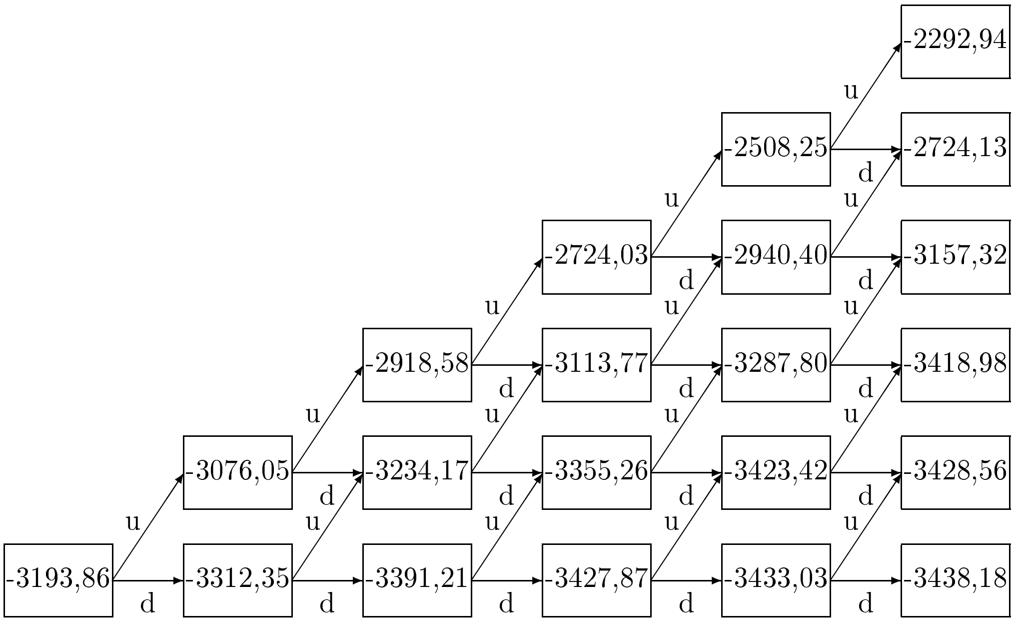


Abbildung 3.9: Preisprozess der Angebotsoption $p_t[C](\lambda = 1)$

Handelsstrategien bei unsicherer Markteintrittsprämie

In der Realität ist bei Vergabe der Angebotsoptionen in der Regel nicht sicher, ob der Kunde bei der die verbindliche Kondition vergebende Bank auch einen Kredit abschließt, d. h. ob die Bank eine Markteintrittsprämie abschöpfen kann. Der Markt wird aufgrund dieses Risikos unvollkommen, da keine duplizierende Handelsstrategie für die Angebotsoption mehr existiert. Zur Bestimmung einer „optimalen Handelsstrategie“ in unvollkommenen Märkten wurde der *mean-variance*-Ansatz gewählt. Die Handelsstrategie in einem unvollkommenen Markt wird beispielsweise für die 5-jährige Kondition bei einer Angebotsdauer von 5 Tagen und einer erzielbaren Markteintrittsprämie von 80 bp ermittelt. Es wird des Weiteren davon ausgegangen, dass die Kapitalmarktzinssätze vom 30/07/1992 gelten und die Wahrscheinlichkeit

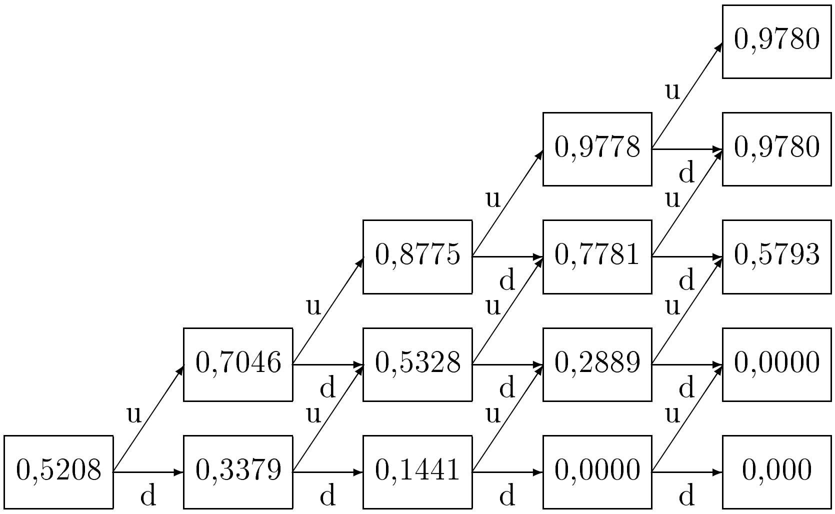


Abbildung 3.10: Anteil der Kreditkondition am Hedgeportfolio des Sicherungsgeschäftes $\phi_t^H(\lambda = 1)$

der Annahme der Angebotsoption zu einem optimalen Ausübungszeitpunkt bzw. zum Fälligkeitstag $\lambda = 0,40$ beträgt.

Die Handelsstrategie $(\phi_t(\lambda = 0,4), \nu_t(\lambda = 0,4))$ wurde mithilfe des *mean-variance*-Ansatzes konstruiert und besitzt für die beschriebene Angebotsoption die in Abbildung 3.16 angegebene Struktur. Auf Basis der Annahme, dass die Annahmewahrscheinlichkeit des Kunden zu einem Zeitpunkt einer optimalen Ausübung 0,40 beträgt, ergeben sich die Werte der Angebotsoption, wie sie in Abbildung 3.18 grafisch dargestellt sind. Innerhalb des *mean-variance*-Ansatzes ist der Risikoprozess zur Bestimmung der optimalen Handelsstrategie eine zentrale Größe. Die Handelsstrategie ist immer dann optimal, falls für jeden Knoten der Risikoprozess minimal ist. Der Risikoprozess der Angebotsoption ist in der Grafik 3.19 erläutert. Die Sicherungsoption soll den Zahlungsstrom der Abgebotsoption mit Ausnahme der Markteintrittsprämie duplizieren. Diese Forderung kann nur dann erfüllt werden, falls hinsichtlich der optimalen Ausübung der Angebotsoption durch

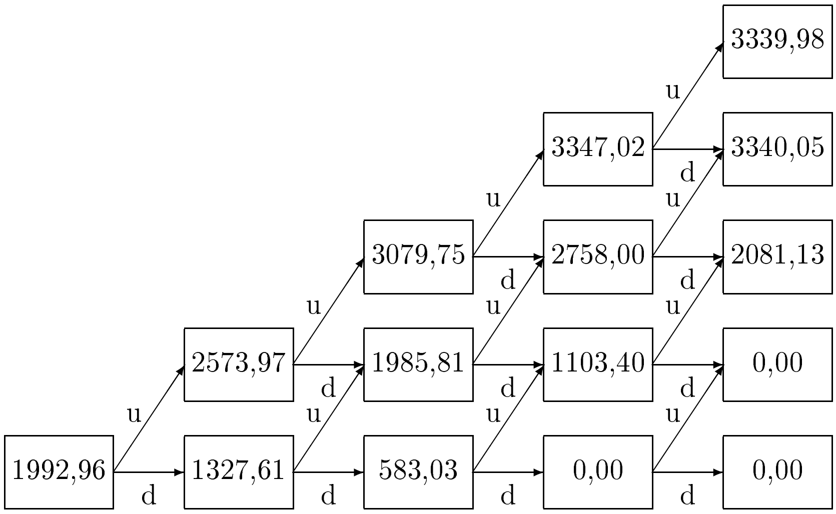


Abbildung 3.11: Anteil des Spot-Bonds am Hedgeportfolio des Sicherungsgeschäftes $\nu_t^H(\lambda = 1)$

den Kunden keine Zweifel bestehen. Ist die optimale Ausübung durch den Kunden jedoch fraglich, z. B. weil er das identische Angebot bei einer anderen Bank annimmt, wird der Markt unvollkommen und die Sicherungsoption kann die Angebotsoption nicht mehr nachbilden. Sichert die Bank lediglich einen Anteil von λ an der Angebotsoption ab, kann die Sicherungsoption im Erwartungswert die Angebotsoptionen duplizieren. Für den beschriebenen Fall von $\lambda = 0,4$ wird in den Abbildungen 3.20 und 3.21 die Handelsstrategie entwickelt. Der Preisprozess der Sicherungsoption, die lediglich einen Anteil von λ der Angebotsoption sichert, wird durch den binomialen Baum in Abbildung 3.22 dargestellt. Für die Sicherungsoption nimmt der Risikoprozess zu jedem Zeitpunkt in jedem Knoten den Wert null an, da zu jedem optimalen Ausübungszeitpunkt die Bank die Sicherungsoption ausüben wird. Daher ist der Markt vollkommen und die Sicherungsoption kann exakt durch die Handelsstrategie $(\phi_t^H(\lambda = 0,4), \nu_t^H(\lambda = 0,4))$ nachgebildet werden.

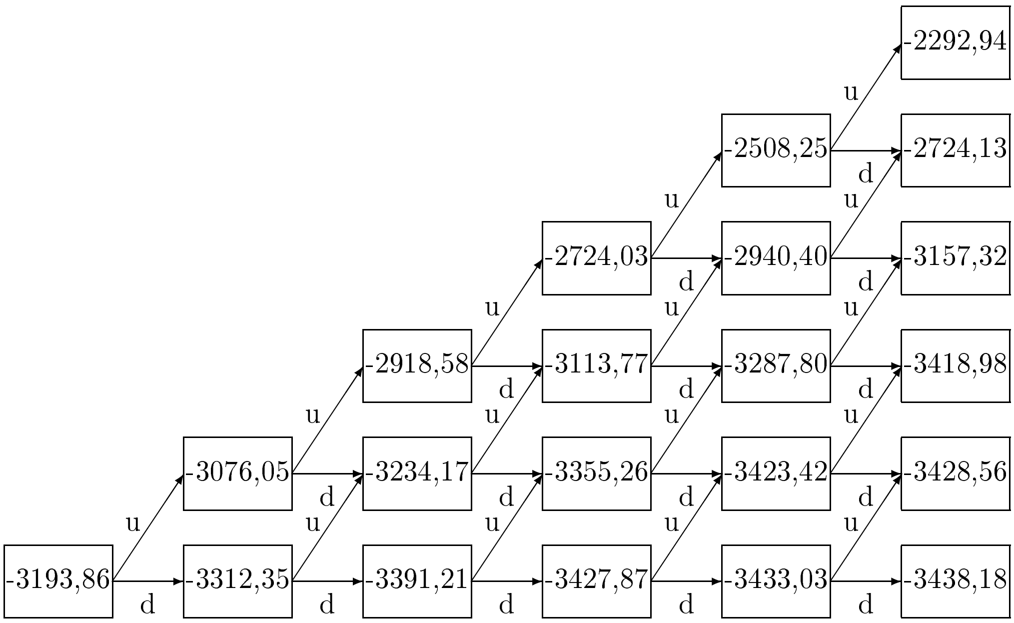


Abbildung 3.12: Preisprozess des Sicherungsgeschäftes $p_t[H](\lambda = 1)$

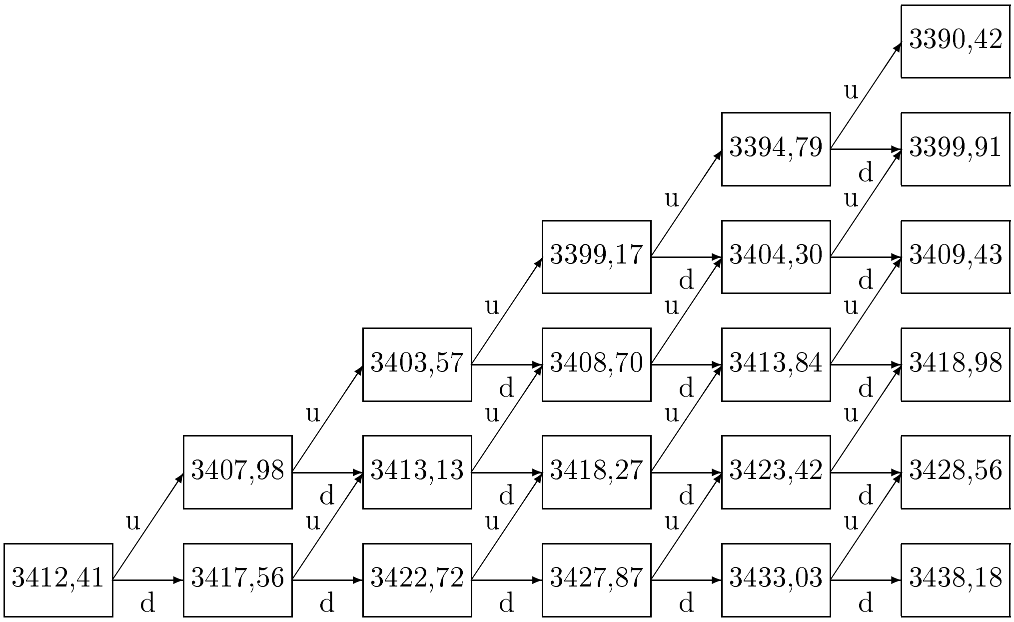


Abbildung 3.13: Preisprozess der Markteintrittsprämie $p_t[G](\lambda = 1)$

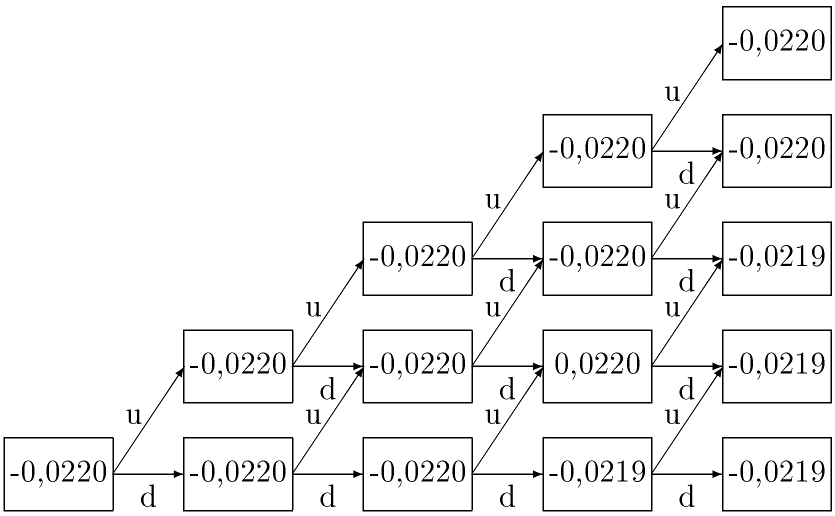


Abbildung 3.14: Anteil der Kreditkondition am Hedgeportfolio der Markteintrittsprämie $\phi_t^G(\lambda = 1)$

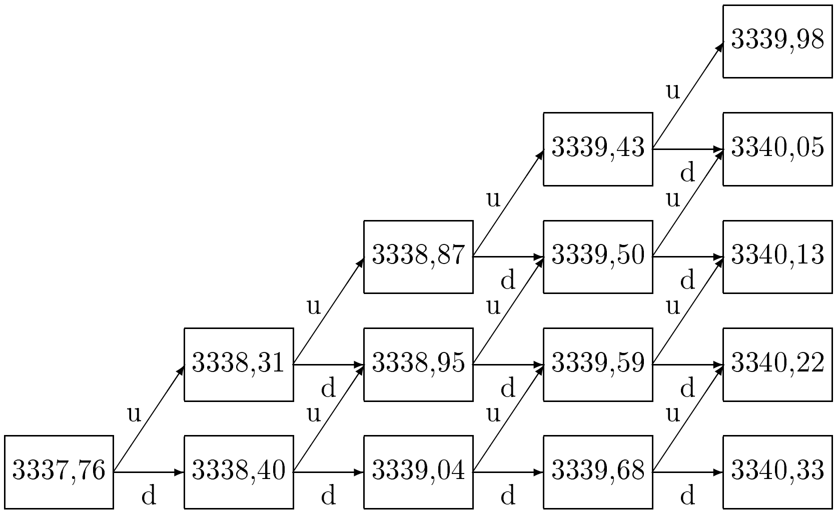


Abbildung 3.15: Anteil des Spot-Bonds am Hedgeportfolio der Markteintrittsprämie $\nu_t^G(\lambda = 1)$

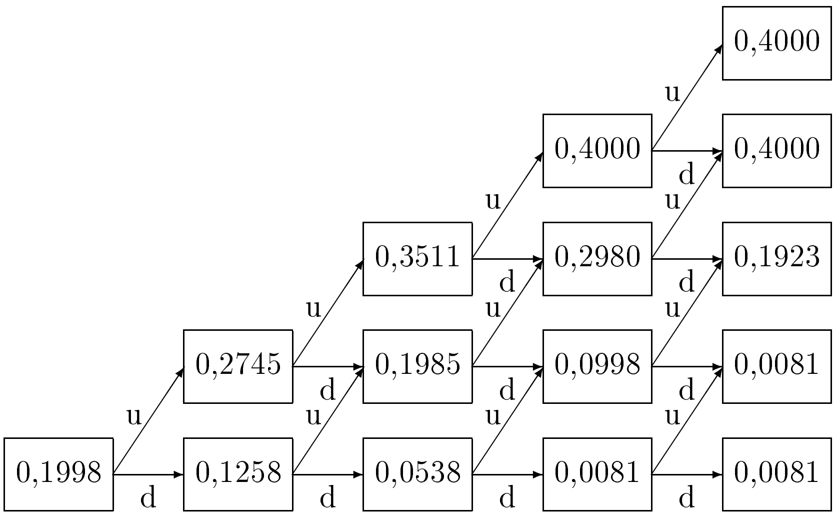


Abbildung 3.16: Anteil der Kreditkondition am Hedgeportfolio der Angebotsoption $\phi_t^C(\lambda = 0,4)$

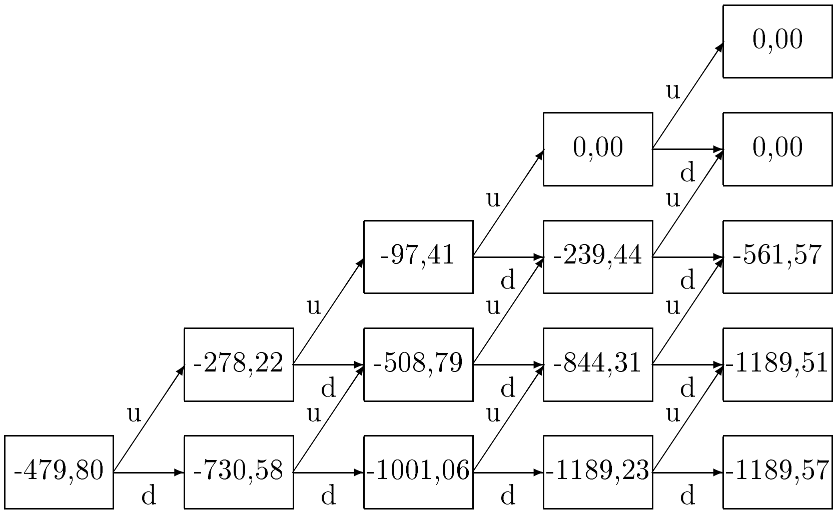


Abbildung 3.17: Anteil des Spot-Bonds am Hedgeportfolio der Angebotsoption $\nu_t^C(\lambda = 0,4)$

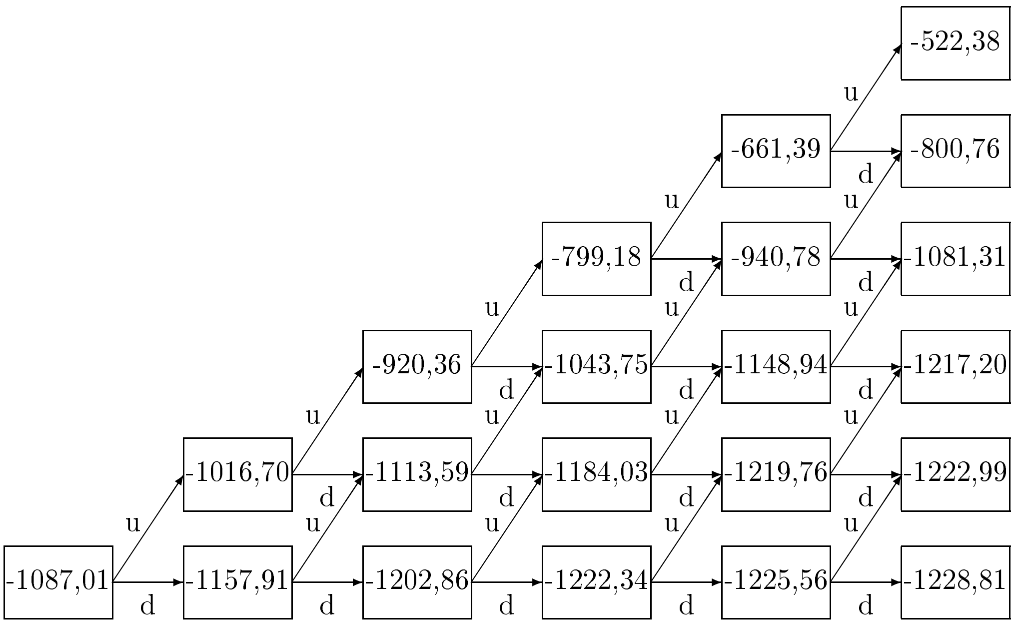


Abbildung 3.18: Preisprozess der Angebotsoption $p_t[C](\lambda = 0,4)$

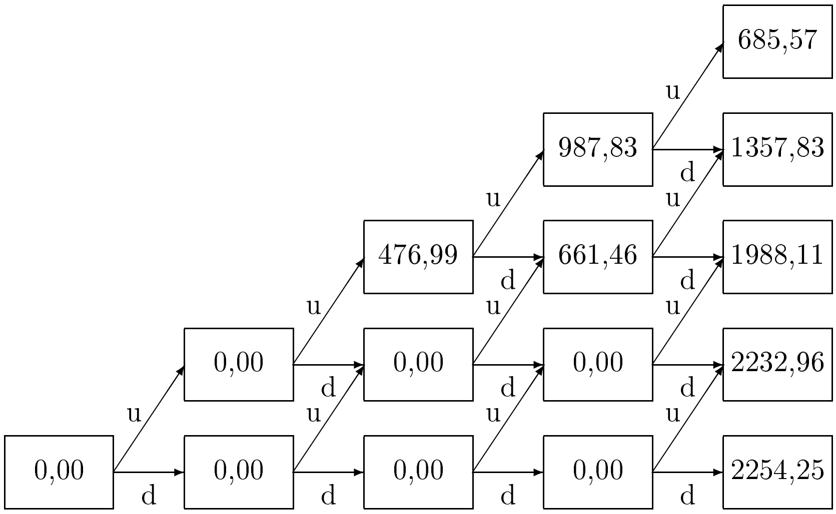


Abbildung 3.19: Risikoprozess der Angebotsoption $\hat{J}_t^C$ in Tausend (DEM^2)

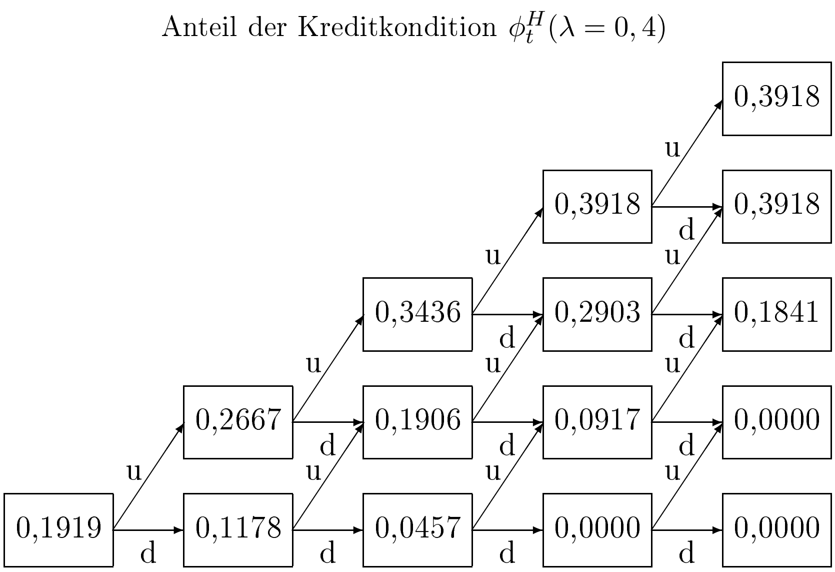


Abbildung 3.20: Anteil der Kreditkondition am Hedgeportfolio des Sicherungsgeschäftes $\phi_t^H(\lambda = 0,4)$

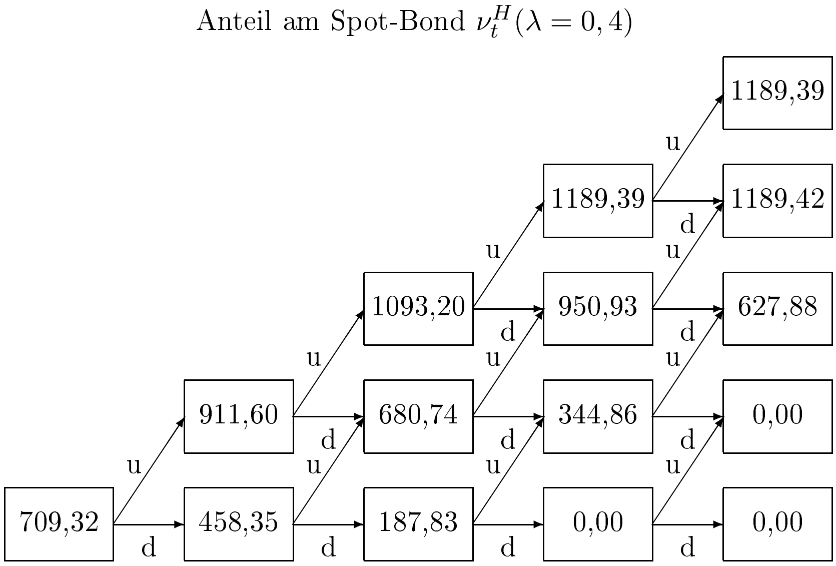


Abbildung 3.21: Anteil des Spot-Bonds am Hedgeportfolio des Sicherungsgeschäftes $\nu_t^H(\lambda = 0,4)$

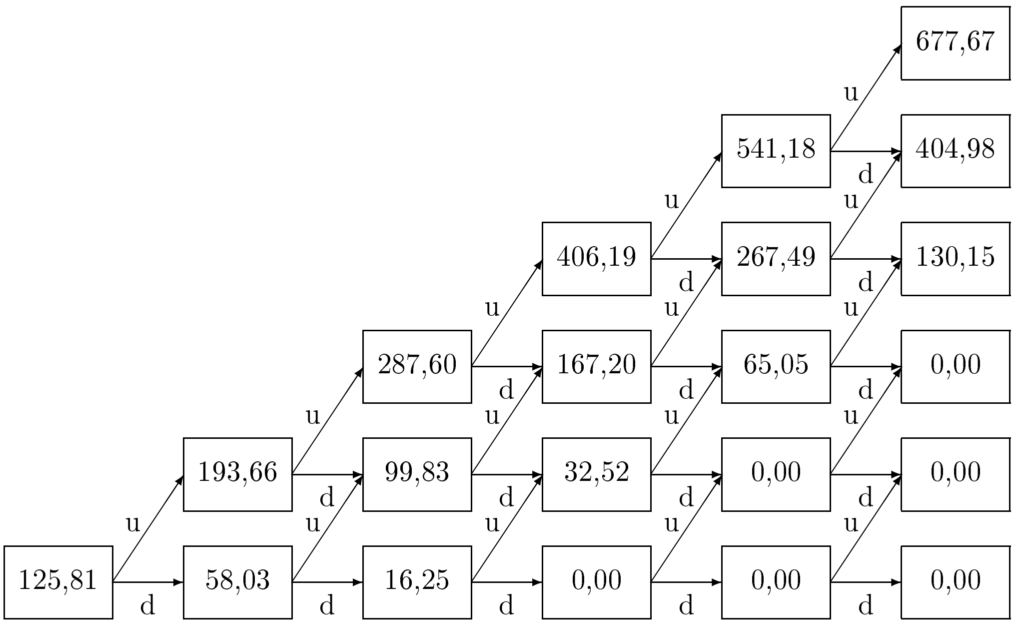


Abbildung 3.22: Preisprozess des Sicherungsgeschäftes $p_t[H](\lambda = 0,4)$

Kapitel 4

Zusammenfassung und Bewertung

Der finanzwirtschaftliche Kreditbegriff unterscheidet sich wesentlich von der juristischen Sichtweise des Schuldverhältnisses. Die Finanzierungstheorie sieht einen Kredit aus dem Blickwinkel von Zahlungsströmen und nicht von Vertragsbeziehungen. Diese Zahlungsströme können deterministisch oder Wahlrechte auf Zahlungsströme sein. Daher kann ein erstes Beratungsgespräch aus finanzwirtschaftlicher Sicht der Beginn eines Kredites sein. Immer dann, wenn eine Bank einem Kunden über einen gewissen Zeitraum ein verbindliches Kreditangebot unterbreitet, wurde finanztheoretisch ein Wahlrecht auf einen Zahlungsstrom erzeugt, das einen nicht negativen Wert besitzt. Dieses Wahlrecht, eine verbindliche Kreditkondition anzunehmen, wird *Angebotsoption* genannt.

Ausgangspunkt einer Analyse der Angebotsoptionen ist die Definition eines Finanzmarktes und entsprechender Finanztitel, die auf diesem Markt gehandelt werden. Zur Beurteilung der Angebotsoptionen genügt es, eine Teilmenge von Finanztiteln zu untersuchen. Diese Teilmenge wird Menge der zinsabhängigen Titel genannt. Diese sind Basis für alle Kreditkonditionen, die als Basiswert den Angebotsoptionen zugrunde liegen.

Angebotsoptionen als Derivative Zinstitel existieren in der Realität aufgrund von gesetzlichen Regelungen oder Usancen, die im Bankengewerbe herrschen. Insbesondere im Kreditgeschäft mit Nichtbanken, d. h. Privatkunden und kleinen bis mittleren Unternehmen erhält ein Kunde eine oder mehrere verbindliche Konditionen, an die sich eine Bank für einen bestimmten Zeitraum bindet. Das besondere an diesen Angebotsoptionen ist die Tatsache, dass Banken vom Kunden für diese verbindlichen Angebote keine Prämie verlangen.

Aus finanztheoretischer Sicht, die ausgehend von der Ordinalen und Kardinalen Nutzentheorie in die Arbitragetheorie mündet, bedeutet dieses Verhalten der Banken, dass sie unter der Annahme eines friktionslosen Marktes dem Kunden eine Arbitragemöglichkeit bieten, deren Wert mittels der Optionspreistheorie bestimmt werden kann. Diese Arbitragemöglichkeiten werden rationale Kunden nutzen, sodass eine Bank aus dem Kreditgeschäft finanztheoretisch keine Erträge erzielen dürfte. Die Ursache liegt im Ausübungsverhalten eines rationalen Kunden, der immer dann die Angebotsoption ausübt, wenn er einen finanziellen Vorteil hat. Ansonsten wird er die Option verfallen lassen oder einen Kredit zu Marktkonditionen aufnehmen.

Dieses offensichtliche und triviale Ergebnis hätte in einem friktionslosen Markt zur Folge, dass Banken verbindliche Angebote nicht mehr vergeben, oder sie aber vom Kunden eine Prämie erheben würden, oder dass Banken sich bewusst „ausarbitrieren“ lassen. Die Tatsache, dass verbindliche Angebote feste Bestandteile der Kreditwirtschaft in Deutschland sind und die Banken ertragreich Kreditgeschäfte vermelden, lässt den Verdacht zu, dass es andere Ertragsbestandteile im Kreditgeschäft gibt, die die Verluste aus Angebotsoptionen kompensieren können. Es wird folglich vermutet, dass die in der Realität segmentierten und nicht friktionslosen Märkte verantwortlich dafür sind, dass Erträge seitens der Banken generiert werden können, die die Verluste aus Angebotsoptionen kompensieren.

Mithilfe der Einführung von Transaktionskosten in den modellierten Markt und der Definition des *Investor-Market-Maker* Marktes gelingt es zu zeigen, dass es für die Banken möglich ist, mit verbindlichen Angeboten Erträge zu erwirtschaften. Banken haben am Markt eine besondere Stellung und können diese nutzen, um durch die alleinige Kredittransaktion per se Prämien abzuschöpfen. Diese Prämien werden *Markteintrittsprämien* genannt. Gelingt es dem Bankensystem, Markteintrittsprämien für Kredittransaktionen zu erheben, deren Wert über dem der verbindlichen Angebote liegt, können handelsrechtliche Verluste vermieden werden, d. h. die Jahresabschlüsse der Banken zeigen positive Erträge aus dem Kreditgeschäft. Dennoch können die Banken mit der Vergabe von Angebotsoptionen Opportunitätsverluste nicht vermeiden.

Mit der Definition einer Markteintrittsprämie im Kreditgeschäft und der Optionsbewertungstheorie ist es zum Zeitpunkt der Angebotsabgabe möglich, den Wert der Verpflichtung seitens des Kunden zu bestimmen, die Markteintrittsprämie bei Kreditabschluss zu entrichten. Da der Kunde das Recht hat, innerhalb eines definierten Zeitraumes zu bestimmen, wann die Markteintrittsprämie fällig wird, ist der Wert der Verpflichtung zur Leistung der Markteintrittsprämie geringer als die barwertige Markteintrittsprämie. Die Differenz wird Realisationsprämie genannt.

Will eine Bank das Preisänderungsrisiko sichern, das mit der Vergabe von Angebotsoptionen verbunden ist, wird sie eine der Angebotsoption angepasste Handelsstrategie, bzw. Option (Derivativer Zinstitel) erwerben. Der Wert dieser Sicherungsoption schmälert den Ertrag aus der erhaltenen Markteintrittsprämie, da vom Kunden für die Übernahme des Preisänderungsrisikos keine Kompensation erfolgt.

Beide Komponenten, Realisationsprämie und Wert der Sicherungsoption, können als derjenige Preis interpretiert werden, der notwendig ist, um

Angebotsoptionen vom Markt zu nehmen. Ohne Angebotsoptionen könnte sofort die barwertige Markteintrittsprämie abgeschöpft werden. Durch Vergabe von verbindlichen Angeboten schmälert sich diese um die oben genannten Komponenten. Falls die abschöpfbaren Markteintrittsprämien über den Sicherungskosten für eventuell eintretende, für die Bank negative Preisentwicklungen liegen, kann es für eine Bank vorteilhaft sein, Angebotsoptionen zu vergeben.

Im Rahmen dieser Arbeit werden die einzelnen Wertbestandteile der Angebotsoption beschrieben. Die formale Beschreibung des barwertigen Preises wird erweitert um die Bestimmung von prozentualen Aufschlägen auf den Zinszahlungsstrom des zugrunde liegenden Kreditgeschäftes. Diese Erweiterung dient dazu, die Preisstellung an die Usancen im Kreditgeschäft anzupassen.

Der Wert einer Angebotsoption und die Vorteilhaftigkeit von Angebotsoptionen hängt entscheidend davon ab, ob eine Bank mit Sicherheit eine Markteintrittsprämie erhält, oder ob die Markteintrittsprämie für diese Bank unsicher ist. Lässt der Finanzmarkt die Möglichkeit zu, dass ein Kunde mehrere Angebote verschiedener Banken einholt, kann nicht mit Sicherheit bestimmt werden, ob (selbst zu einem optimalen Ausübungszeitpunkt der Angebotsoption) der Kunde bei der betreffenden Bank den Kredit in Anspruch nimmt. Dieses „Ausübungsrisiko“ kann nicht abgesichert werden. Dies bedeutet, dass eine Angebotsoption nicht mehr exakt dupliziert werden kann; der Finanzmarkt wird unvollkommen. Auf Basis des so genannten *mean-variance*-Ansatzes wird eine lokal risikominimierende Handelsstrategie für die Angebotsoption in unvollkommenen Märkten entwickelt. Aufgrund der Unvollkommenheit des Marktes existiert kein eindeutiger, arbitragefreier Wert, sondern ein Intervall arbitragefreier Werte für eine Angebotsoption. Das Wahlrecht des Kunden, bei mehreren Banken identische Angebotsoptionen einzuholen, bedeutet für eine einzelne Bank, dass es für sie unmöglich ist, bereits bei Abgabe einer verbindlichen Kondition exakt zu kalkulieren, ob die Vergabe einer Angebotsoption Gewinn bringend oder Verlust bringend ist. Für die Summe aller Banken, bei denen ein Kunde verbindliche Angebote einholt, ist die Ermittlung der Vorteilhaftigkeit jedoch gegeben. Die Vorteilhaftigkeit von Angebotsoptionen hängt für den „Kapitalmarkt“ ausschließlich von der erzielbaren Markteintrittsprämie und den Sicherungskosten ab. Die Unsicherheit hinsichtlich der Kreditvergabe (und die damit verbundene Markteintrittsprämie) erschwert die Entscheidung, die Angebotsoption zu vergeben oder nicht. In der Regel wird immer dann eine Angebotsoption seitens einer Bank vergeben, wenn diese durch die Nennung einer verbindlichen Kondition der Ansicht ist, die Chancen zu erhöhen, eine Markteintrittsprämie zu erzielen. Könnte eine Bank mit Sicherheit eine Markteintrittsprämie erzielen, bräuchte sie keine Angebotsoption zu vergeben, die lediglich ihren Ertrag schmälert. Vermutlich ist die Unsicherheit über die Annahme unter anderem eine Ursache für die Existenz von Angebotsoptionen. Ist sich eine Bank über den Abschluss eines Geschäftes (bzw. Erzielung von Markteintrittsprämien) unsicher, versucht sie ihre Chancen dadurch zu erhöhen, dass sie einem potentiellen Kunden Anreize bietet, mit ihr und nicht mit einer anderen Bank zu kontrahieren. Ein möglicher Anreiz ist die Angebotsoption. Problematisch wird die Strategie des Anreizes immer dann, wenn sich alle potentiellen Konkurrenten des gleichen Anreizes bedienen. In diesem Fall hat eine einzelne Bank durch die Vergabe von Angebotsoptionen keinen Vorteil gegenüber anderen Banken, sondern ausschließlich eine um die Sicherungskosten und die Realisationsprämie geschmälerte Markteintrittsprämie.

Die Arbeit schließt mit einer numerischen Analyse der Angebotsoption. Mithilfe eines Zinsstrukturmodells, des HO-LEE-Modells und zweier historischer Zinsstrukturkurven, werden numerische Werte für die Realisations-

Werte in Basispunkte [bp = 0,01%]			
Markteintrittsprämie	Realisationsprämie	Sicherungskosten	Nettoertrag
0,00	0,00	-25,11	-25,11
10,00	-0,12	-25,11	-15,25
20,00	-0,24	-25,10	-5,35
30,00	-0,37	-25,10	4,53
40,00	-0,49	-25,10	14,41
50,00	-0,61	-25,10	24,29
60,00	-0,74	-25,10	34,16
70,00	-0,86	-25,10	44,04
80,00	-0,99	-25,10	53,92

Tabelle 4.1: Markteintrittsprämie, Realisationsprämie, Sicherungskosten und Nettoertrag

prämie und Prämie der Sicherungsoption ermittelt. Werden die Zinssätze vom 30/07/1992 (hohes, inverses Zinsniveau) dem HO-LEE-Modell zugrunde gelegt, ergeben sich beispielsweise für einen 5-jährigen, annuitätischen Kredit mit 1,00% anfänglicher Tilgung, 98,00% Auszahlung die aus der Tabelle 4.1 ersichtlichen, prozentualen Werte für die Realisationsprämie, die Sicherungsoption sowie den Nettoertrag bzw. die nach Abgabe verbindlicher Angebote abschöpfbare Markteintrittsprämie einer Bank in Abhängigkeit einer realisierbaren Markteintrittsprämie. Neben verschiedener numerischer Preise wird auch eine minimal zu erzielende Markteintrittsprämie ermittelt, die notwendig ist, um keine Verluste aus dem Geschäft mit verbindlichen Angeboten zu erleiden. Diese schwanken auf Basis des verwandten Datenmaterials zwischen 6,32 bp und 31,94 bp. Liegen die Aufschläge auf den Nominalzins unter diesen Schwellenwerten, können im Rahmen des Modells Banken aus dem Kreditgeschäft keine Erträge erwirtschaften. Der Break-Even der Markteintrittspämie liegt im obigen Beispiel bei 25,41 bp bzw. 0,2541%:

Markteintrittsprämie	Realisationsprämie	Sicherungskosten	Nettoertrag
25,41	-0,31	-25,10	0,00

Tabelle 4.2: Break-Even des Nettoertrages

Literaturverzeichnis

Artzner, Delbean (1989): Term Structure of Interest Rates: The Martingale Approach; in: Advances in Applied Mathematics; 10; 1989; 95 –129

Bachelier (1900): Théorie de la spéculation; in: Annales de l'École Normale Superieure; 17; 1900; 21 – 86

Bauer (1978); Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie; 1978

Baxter, Rennie (1997); Financial Calculus; 1997

Bernoulli (1738); Specimen theoriae novae de mensura sortis; in: Commentarii academiae scientarium imperialis petropolitanae; Tomus 5; 1738; 172 – 192; (Englische Übersetzung: Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk; in: Econometria; 22; 1954; 23 – 36)

Black (1997); How We Came Up with The Black-Scholes Formula; in: Risk Magazine; 10; 1997; 12; 143 –148

Black, Derman, Toy (1990); A One Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options; in: Financial Analyst Journal; 46; 1990; 33 – 39

Black, Scholes (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities; in: Journal of Political Economy; 81; 1973; 635 – 654

Boyle, Verst (1990); Option Pricing with Transaction Costs; in: Journal of Finance; 57; 1990; 1741–1753

Cox, Ingersoll, Ross (1985); A Theory of the Terms Structure of Interest Rates; in: Econometrica; 53; 1985; 385 – 407

Cox, Ross (1976): The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes; in: Journal of Financial Economics; 3; 145 – 166

Cox, Rubinstein (1985): Options Markets; 1985

Dacunha-Castelle, Duflo (1986); Probability and Statistics Volume 1 and 2; 1986

Davis, Panas (1993); European Option Pricing with Transaction Costs; in: SIAM Journal of Control and Optimization; 31; 1993; 470 – 493

Delbean, Schachermayer (1994); A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing; in: Mathematische Annalen; 300; 1994; 463 – 520

Delbean, Monat, Schachermayer, Schweizer, Stricker (1997); Weighted Norm Inequalities and Hedging in Incomplete Markets; Finance and Stochastics; 1; 1997; 181 – 227

Doob (1953); Stochastic Processes; 1953

Duffie (1988); Security Markets, Stochastic Models; 1988

Duffie (1992); Dynamic Asset Pricing Theory; 1992

Duffie, Sun (1990); Transaction Costs and Portfolio Choice in A Discrete-Continous Time Setting; in: Jounal of Economic Dynamics and Control; 14; 1990; 35 – 51

Eichwald (1994); Kreditarten; in: Handwörterbuch des Bank- und Finanzwesens; 2. Auflage; 1994; 1250 – 1263

Endl (1985); Analytische Geometrie und Lineare Algebra; 1985

Fama, Miller (1972); The Theory of Finance; 1972

Flesch, Piaskowski, Sièvi (1987); Effektivzinsrechnung und Marktzinsmethode; in: Die Bank; 1987; 4; 190 – 193

Föllmer, Sondermann (1986); Hedging of Non-Redundant Contingent Claims; in: Hildebrand and Mas-Colell (editors); Contributions to Mathematical Economies; 1986; 205–223

Föllmer, Schweizer (1991); Hedging of Contingent Claims under Incomplete Information; in: Davis and Elliot (editors); Applied Stochastic Analysis; 1991; 389–414

Gablers Bank Lexikon (1997); 11. Auflage; 1997; 973 ff

Harrison, Kreps (1979); Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets; in: Journal of Economic Theory; 29; 1979; 381 – 408

Harrison, Pliska (1981); Martingales and Stochastic Integrals in The Theory of Continous Trading; in: Stochastic Processes and Their Applications; 11; 1981; 215 – 260

Harrison, Pliska (1983); A Stochastic Calculus Model of Continous Trading: Complete Markets; Stochastic Processes and Their Applications; 13; 1983; 313 – 316

Heath, Jarrow, Morton (1990a); Bond Pricing and The Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation; in: Journal of Financial and Quantitative Analysis; 25; 1990; 4; 419 – 440

Heath, Jarrow, Morton (1990b); Contingent Claim Valuation with a Random Evolution of Interest Rates; in: Review of Futures Markets; 9; 1990; 1; 55 – 76

Heath, Jarrow, Morton (1992); Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rate Contingent Claims; in: Journal of Finance; 41; 1992; 1011 – 1028

Hirshleifer (1970); Investment, Interest, and Capital; 1970

Ho, Lee (1986); Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims; in: Journal of Finance; 41; 1986; 5; 1011 – 1029

Hull, White (1990); Pricing Interest Rate Derivative Securities; in: Review of Financial Studies; 3 (4); 1990; 573 – 592

Jarrow (1988); Finance Theory; 1988

Jarrow (1996); Modelling Fixed Income Securities and Interest Rate Options; 1996

Kabanov, Safarian (1996); On Leland's Strategy of Option Pricing with Transaction Costs; in: Finance and Stochastics; 1; 1997; 3

Karlin, Taylor (1975); A First Course in Stochastic Processes; 1975

Keller, Holler (1993); Exotische Swaps und Swaption; in: Hipp u. a. (Hrsg.): Geld, Finanzwirtschaft, Banken und Versicherungen; 1993; 495 – 508

Lamberton, Lapeyere (1996); Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance; 1996

Lamberton, Schweizer (1998); Local Risk Minimizing under Transaction Costs; preprint: Technische Universität Berlin, UniversitĆ de Marne-la-VallĆe; 1998

Leland (1985); Option Pricing and Replication with Transaction Costs; in: Journal of Finance; 40; 1985; December; 1283 – 1301

Merton (1973); Theory of Rational Option Pricing; in: Bell Journal of Economics and Management Science; 4; 1973; 141 – 183

Meyer (1972); Martingales and Stochastic Integrals; 1972

Modigliani, Miller (1958); The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment; American Economic Review; 48; 1958; 261 – 297

Modigliani, Miller (1961); Dividend Policy, Growth and the Valuation of Shares; in: Journal of Business; 34; 1961; 411 – 433

Morton (1989); Arbitrage and Martingales; 1989

Neveu (1965); Mathematical Foundations of the Calculus of Probability; 1965

Neveu (1972); Martingales *À* Temps Discrets; 1972

NJW (1986); Neue Juristische Wochenzeitung; 1986; Heft 29; 1803 – 1804

NJW (1989); Neue Juristische Wochenzeitung; 1989; Heft 29; 1797 – 1798

Pliska (1997); Introduction to Mathematical Finance; 1997

Revuz, Yor (1999); Continous Martingales and Brownian Motion; Third Edition; 1999

Safarian (1995); On generalization of Leland's Strategy; Dokladi seminarov; 1995

Samuelson (1965); Rational Theory of Warrant Pricing; in: Industrial Management Review; 10; 1965; 13 – 31

Schäl (1994); On Quadratic Cost Criteria for Option Hedging; Mathematics of Operations Research; 19; 1994; 121 – 131

Schweizer (1995); Variance Optimal Hedging in Discrete Time; Mathematics of Operations Research; 20; 1995; 1 – 32

Sharpe (1970); Portfolio Theory and Capital Markets; 1972

Shiryayev (1978); Optimal Stopping Rules; 1978

Shiryayev (1983); Theory of Martingales; 1983

Shiryayev (1986); Probablity; 1986

Smith (1976); Option Pricing: A Review; in: Journal of Financial Economics; 3; 1976; January – March; 802 – 824

Sprenkle (1962); Warrant Prices as Indicators of Expectations and Preferences; in: Yale Economic Essays; 1962; 172 – 231

Vasicek (1977); An Equilibrium Characterization of the Term Structure; in: Journal of Financial Economics; 5; 1977; 177 – 188

Williams (1991); Probability with Martingales; 1991

Wimmer (2000); Margenerstattung bei der Umschuldung von Darlehensverträgen; in: Die Bank; 2000; 12; 862 – 867

Anhang

Nominalzinsen

Nominalzinsen für annuitätische Konditionen						
	02/01/1996			30/07/1992		
g^p	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre
0	3,71369	4,37112	4,87077	8,48982	8,46624	8,40338
10	3,71369	4,37110	4,87074	8,48981	8,46624	8,40339
20	3,71368	4,37108	4,87070	8,48981	8,46624	8,40339
30	3,71368	4,37106	4,87066	8,48981	8,46624	8,40339
40	3,71367	4,37104	4,87062	8,48981	8,46625	8,40340
50	3,71366	4,37102	4,87058	8,48981	8,46625	8,40340
60	3,71366	4,37100	4,87054	8,48981	8,46625	8,40341
70	3,71365	4,37098	4,87050	8,48981	8,46625	8,40341
80	3,71365	4,37097	4,87046	8,48981	8,46625	8,40341

Risikolose Margenfaktoren

Risikoloser Margenfaktor $\hat{\psi}$						
	02/01/1996			30/07/1992		
g^p	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre
0	2,73956	3,53608	4,26947	2,48521	3,16970	3,79469
10	2,73955	3,53604	4,26939	2,48520	3,16967	3,79461
20	2,73954	3,53601	4,26931	2,48519	3,16964	3,79454
30	2,73953	3,53598	4,26922	2,48518	3,16961	3,79446
40	2,73952	3,53594	4,26914	2,48518	3,16958	3,79439
50	2,73951	3,53591	4,26906	2,48517	3,16955	3,79432
60	2,73950	3,53587	4,26897	2,48516	3,16952	3,79424
70	2,73949	3,53584	4,26889	2,48515	3,16949	3,79417
80	2,73949	3,53580	4,26880	2,48515	3,16946	3,79409

Risikogewichtete Margenfaktoren

Risikogewichteter Margenfaktor 3-jährige Kondition								
$\tilde{\psi}$	02/01/1996							
t / g^p	5	10	15	20	30	40	50	60
0	2,73771	2,73586	2,73400	2,73214	2,72842	2,72468	2,72094	2,71717
10	2,73770	2,73585	2,73399	2,73214	2,72841	2,72468	2,72093	2,71717
20	2,73769	2,73584	2,73398	2,73213	2,72840	2,72467	2,72092	2,71716
30	2,73768	2,73583	2,73398	2,73212	2,72839	2,72466	2,72091	2,71715
40	2,73767	2,73582	2,73397	2,73211	2,72839	2,72465	2,72090	2,71714
50	2,73766	2,73581	2,73396	2,73210	2,72838	2,72464	2,72089	2,71713
60	2,73766	2,73580	2,73395	2,73209	2,72837	2,72463	2,72088	2,71712
70	2,73765	2,73580	2,73394	2,73208	2,72836	2,72462	2,72087	2,71711
80	2,73764	2,73579	2,73393	2,73207	2,72835	2,72461	2,72087	2,71711

Risikogewichteter Margenfaktor 4-jährige Kondition								
$\tilde{\psi}$	02/01/1996							
t / g^p	5	10	15	20	30	40	50	60
0	3,53350	3,53092	3,52833	3,52574	3,52055	3,51534	3,51012	3,50489
10	3,53346	3,53088	3,52830	3,52571	3,52051	3,51531	3,51009	3,50485
20	3,53343	3,53085	3,52826	3,52567	3,52048	3,51527	3,51005	3,50482
30	3,53340	3,53081	3,52823	3,52564	3,52045	3,51524	3,51002	3,50478
40	3,53336	3,53078	3,52819	3,52560	3,52041	3,51521	3,50999	3,50475
50	3,53333	3,53075	3,52816	3,52557	3,52038	3,51517	3,50995	3,50472
60	3,53329	3,53071	3,52812	3,52554	3,52034	3,51514	3,50992	3,50468
70	3,53326	3,53068	3,52809	3,52550	3,52031	3,51510	3,50988	3,50465
80	3,53323	3,53064	3,52806	3,52547	3,52028	3,51507	3,50985	3,50462

Risikogewichteter Margenfaktor 5-jährige Kondition								
$\tilde{\psi}$	02/01/1996							
t / g^p	5	10	15	20	30	40	50	60
0	4,26618	4,26289	4,25959	4,25628	4,24966	4,24303	4,23638	4,22972
10	4,26610	4,26280	4,25950	4,25620	4,24958	4,24295	4,23630	4,22963
20	4,26602	4,26272	4,25942	4,25612	4,24950	4,24287	4,23622	4,22955
30	4,26593	4,26264	4,25934	4,25603	4,24942	4,24278	4,23613	4,22947
40	4,26585	4,26255	4,25925	4,25595	4,24933	4,24270	4,23605	4,22939
50	4,26576	4,26247	4,25917	4,25587	4,24925	4,24262	4,23597	4,22930
60	4,26568	4,26239	4,25909	4,25578	4,24917	4,24253	4,23588	4,22922
70	4,26560	4,26230	4,25900	4,25570	4,24908	4,24245	4,23580	4,22914
80	4,26551	4,26222	4,25892	4,25562	4,24900	4,24237	4,23572	4,22905

Risikogewichteter Margenfaktor mehrfache Angebotsoption 02/01/1996								
$\tilde{\psi}$	02/01/1996							
t / g^p	5	10	15	20	30	40	50	60
0	3,49881	3,68314	3,49153	3,62257	3,59164	3,57059	3,55427	3,61914
10	3,02219	3,30732	3,19257	3,35400	3,37185	3,38022	3,38411	3,46626
20	2,78493	2,99553	2,96108	3,11093	3,16672	3,19972	3,22122	3,31385
30	2,73768	2,81816	2,82280	2,92944	2,99855	3,04454	3,07709	3,17141
40	2,73767	2,75193	2,76023	2,81825	2,87763	2,92363	2,95923	3,04661
50	2,73766	2,73727	2,73945	2,76290	2,80160	2,83837	2,87022	2,94414
60	2,73766	2,73580	2,73467	2,74085	2,75997	2,78405	2,80818	2,86533
70	2,73765	2,73580	2,73399	2,73399	2,74022	2,75285	2,76834	2,80857
80	2,73764	2,73579	2,73393	2,73237	2,73218	2,73673	2,74478	2,77032

Risikogewichteter Margenfaktor 3-jährige Kondition								
$\tilde{\psi}$	30/07/1992							
t / g^p	5	10	15	20	30	40	50	60
0	2,48248	2,47978	2,47711	2,47444	2,46936	2,46418	2,45923	2,45426
10	2,48247	2,47977	2,47710	2,47443	2,46936	2,46414	2,45917	2,45416
20	2,48247	2,47976	2,47710	2,47442	2,46935	2,46413	2,45910	2,45415
30	2,48246	2,47975	2,47709	2,47442	2,46930	2,46413	2,45909	2,45409
40	2,48245	2,47974	2,47701	2,47441	2,46922	2,46412	2,45906	2,45408
50	2,48244	2,47974	2,47700	2,47440	2,46921	2,46401	2,45899	2,45402
60	2,48244	2,47973	2,47700	2,47439	2,46920	2,46400	2,45898	2,45396
70	2,48243	2,47972	2,47699	2,47439	2,46907	2,46399	2,45889	2,45394
80	2,48242	2,47971	2,47698	2,47438	2,46906	2,46399	2,45889	2,45390

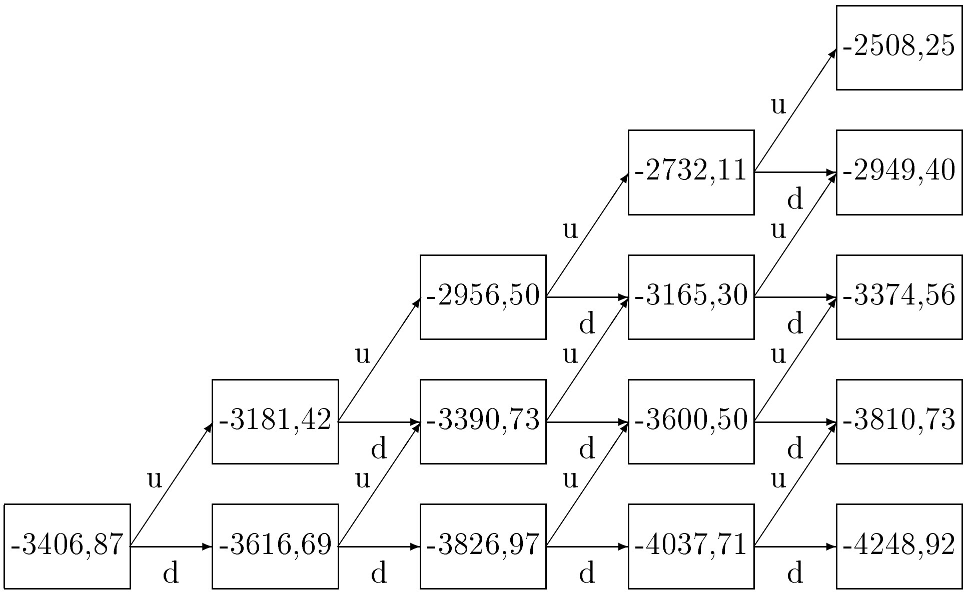
Risikogewichteter Margenfaktor 4-jährige Kondition								
$\tilde{\psi}$	30/07/1992							
t / g^p	5	10	15	20	30	40	50	60
0	3,16629	3,16290	3,15947	3,15621	3,14971	3,14332	3,13703	3,13074
10	3,16626	3,16287	3,15944	3,15618	3,14968	3,14316	3,13694	3,13071
20	3,16623	3,16284	3,15941	3,15615	3,14965	3,14313	3,13684	3,13061
30	3,16620	3,16281	3,15938	3,15612	3,14962	3,14310	3,13677	3,13051
40	3,16617	3,16278	3,15935	3,15609	3,14959	3,14307	3,13674	3,13048
50	3,16614	3,16275	3,15932	3,15606	3,14956	3,14304	3,13665	3,13036
60	3,16611	3,16272	3,15929	3,15603	3,14946	3,14295	3,13657	3,13033
70	3,16608	3,16269	3,15926	3,15594	3,14936	3,14292	3,13647	3,13028
80	3,16605	3,16266	3,15923	3,15591	3,14925	3,14282	3,13644	3,13019

Risikogewichteter Margenfaktor 5-jährige Kondition								
$\tilde{\psi}$	30/07/1992							
t g^p	5	10	15	20	30	40	50	60
0	3,79065	3,78664	3,78259	3,77873	3,77104	3,76326	3,75579	3,74832
10	3,79058	3,78657	3,78252	3,77859	3,77089	3,76318	3,75563	3,74822
20	3,79050	3,78649	3,78244	3,77852	3,77082	3,76311	3,75548	3,74814
30	3,79043	3,78642	3,78237	3,77844	3,77066	3,76304	3,75535	3,74803
40	3,79035	3,78635	3,78230	3,77837	3,77058	3,76288	3,75527	3,74781
50	3,79028	3,78627	3,78222	3,77830	3,77051	3,76265	3,75520	3,74769
60	3,79021	3,78620	3,78215	3,77822	3,77043	3,76257	3,75513	3,74762
70	3,79013	3,78612	3,78207	3,77815	3,77036	3,76249	3,75491	3,74736
80	3,79006	3,78605	3,78200	3,77807	3,77029	3,76242	3,75484	3,74729

Risikogewichteter Margenfaktor mehrfache Angebotsoption								
$\tilde{\psi}$	30/07/1992							
t g^p	5	10	15	20	30	40	50	60
0	3,13200	2,99329	3,12396	3,02058	3,03667	3,03737	3,04061	3,04077
10	2,76532	2,96743	2,92280	3,00890	3,02542	3,03301	3,03325	3,03374
20	2,72442	2,73552	2,87000	2,81790	2,87015	2,89846	2,91707	2,92712
30	2,52245	2,69984	2,67990	2,79927	2,84941	2,87974	2,89560	2,90950
40	2,52244	2,55031	2,66953	2,65153	2,71648	2,75769	2,78795	2,80946
50	2,48244	2,54903	2,55436	2,64152	2,70069	2,74138	2,77062	2,79051
60	2,48244	2,49317	2,53255	2,54742	2,59903	2,64085	2,67329	2,69946
70	2,48243	2,48462	2,49882	2,53167	2,57945	2,61836	2,64974	2,67524
80	2,48242	2,47971	2,48501	2,49637	2,52696	2,55782	2,58570	2,61258

Bedingte Erwartungswerte

Preisprozess der bedingten Erwartungswerte $E^Q[\kappa_{t+1}|F_t]$ für eine 5-jährige Kreditkondition und für das Zinsniveau vom 02/01/1996



Prozess von $E^Q[\kappa_{t+1}|F_t]$

Notation

Lateinische Zeichen

a	Auszahlung	39
$\breve{a}$	binomiale Zufallsvariable	110
b	Anzahl der Banken, die ein identisches, verbindliches Angebot abgeben	100
A	Zahlungsstrom der Auszahlungen	39
B	Spot-Bond-Prozess	29
	Broker	59
B^{i^+}	Brokereinheit eines kapitalmarktfähigen Investors	68
c	Contingent Claim	27
$c(\omega)$	Zahlungsstrom eines Contingent Claims	27
$\hat{c}^p$	risikolose Marge der Angebotsoption	85
$\tilde{c}^p$	risikogewichtete Marge der Angebotsoption	87
C	Zufallsvariable für einen Contingent Claim	27
$\hat{C}(0)$	Zahlungsstrom der Marge bezüglich der Angebotsoption, die durch $p_{t_a}[C]$ induziert wird	85
d	Abwärtsbewegung der Diskontierungsfunktion im binomialen Modell	103
D	Folge von Discount-Bonds	51
e	Einheitsvektor	60

E^W	Erwartungswertoperator bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes W	31
$f(t, t+n, s)$	Terminrendite zum Zeitpunkt t für die Periode $[t+n, s]$	36
F_t	Filtration zum Zeitpunkt t	16
$F(t, t+n, s)$	Terminpreis zum Zeitpunkt t für die Periode $[t+n, s]$	36
g	Element der Indexmenge	21
g^p	prozentualer Aufschlag auf das Nominalvolumen eines Kredites	72
$\hat{g}^p$	risikolose Marge der Markteintrittsprämie	85
$\tilde{g}^p$	risikogewichtete Marge der Markteintrittsprämie	87
G	Maklergebühr, die an Broker zu entrichten ist	59
G^{i^+}	Gebühr, die ein kapitalmarktfähiger Investor an seine Brokereinheit bezahlt	68
$\hat{G}(0)$	Zahlungsstrom der Marge bezüglich der Markteintrittsprämie, die durch $p_{t_a}[G]$ induziert wird	85
$\hat{G}$	stochastische Folge	85
$h(\cdot)$	Störterm einer Aufwärtsbewegung im HO-LEE-Zinsstrukturmodell	109
$h^\star(\cdot)$	Störterm einer Abwärtsbewegung im HO-LEE-Zinsstrukturmodell	109
H	Sicherungsgeschäft der Angebotsoption	76
i	beliebiger Investor oder	17
	Laufvariable für Indices	18
i^+	kapitalmarktfähiger Investor	59
i^-	nicht kapitalmarktfähiger Investor	59
I^+	Menge der kapitalmarktfähigen Investoren	68
I^-	Menge der nicht kapitalmarktfähigen Investoren	68
j	beliebiger Investor oder	18
	Laufvariable für Indices	23

J	Kosten, die durch Unvollkommenheit des Marktes entstehen	96
$\hat{J}$	Risikoprozess	98
$\tilde{J}$	diskontierter Kostenprozess	96
k	proportionale Transaktionskosten	61
k_t	Zahlungsstrom einer Kreditkondition zum Zeitpunkt t	39
K	Kreditkondidition	39
$L(\bullet)$	Menge aller Linearkombinationen einer Basis	22
m	Anzahl der Kreditkonditionen einer mehrfachen Angebotsoption	51
M	Folge der Werte der Duplikationsstrategie	49
$\hat{M}$	stochastische Folge	63
$\tilde{M}$	Martingal	64
$M(s, S)$	Marktpreis einer Payer-Swaption mit Restlaufzeit s und Swapfälligkeit S	116
M^{Swap}	Marktwert des Swaps	118
n	Laufvariable oder	22
	prozentualer Nominalzinssatz	73
N	Nominalzins	73
N_t	ausstehendes Nominalvolumen zum Zeitpunkt t	84
$\hat{N}$	anfängliches Nominalvolumen eines Kredites	84
Q	Wahrscheinlichkeitsmaß	30
$p[x]$	Preis eines Finanztitels x	20
p^b	Kaufpreis	62
p^s	Verkaufpreis	62
p^{EURO}	Wert einer europäischen Angebotsoption	122
P	Preisfunktion oder	33
	Diskontierungsfunktion	34
$\mathrm{Prob}_i(\bullet)$	subjektive Wahrscheinlichkeit des Investors i, dass die Ereignisse aus $\bullet$ eintreten	18

q	binomiale Wahrscheinlichkeit	31
r	Zinstitel	36
$R(s)$	Parzinssatz mit Restlaufzeit s	115
s	Verfalltag einer Swaption	116
$s(t)$	lokaler Zeitwert der Angebotsoption	75
S	Endfälligkeitszeitpunkt eines Swaps	117
$S(t_a)$	angebotener Nominalzins im Kreditangebot	9
$S(t_e)$	aktueller Nominalzins im Kreditangebot zum Zeitpunkt der Ausübung	9
t	Handelszeitpunkt	16
$\bar{t}$	Anzahl der Schritte für $[0, t]$	112
t_a	Zeitpunkt der Abgabe des Angebotes	10
t_e	Zeitpunkt der Ausübung bzw. Verfalls des Angebotes	10
t_f	Zeitpunkt einer frühzeitigen Ausübung	47
t_{f_0}	optimaler Zeitpunkt einer frühzeitigen Ausübung	47
t^Z	Zinszahlungszeitpunkt	73
T	letzter Handelszeitpunkt des endlichen Finanzmarktes	16
T^Z	Menge der Zeitpunkte der Zinszahlungen	73
u	Aufwärtsbewegung der Diskontierungsfunktion im binomialen Modell	103
u_t	Tilgungszahlung zum Zeitpunkt t	39
U	Tilgungszahlungsstrom	40
v_t	Margenzahlung zum Zeitpunkt t	79
v^p	prozentuale Marge auf das Nominalvolumen	79
$\hat{v}^p$	risikolose Marge des Sicherungsgeschäftes	85
$\tilde{v}^p$	risikogewichtete Marge des Sicherungsgeschäftes	87
V	Margenzahlungsstrom	78

$\hat{V}(0)$	Zahlungsstrom der Marge bezüglich des Sicherungsgeschäftes, die durch $p_{t_a}[V]$ induziert wird	85
W	Wahrscheinlichkeitsmaß eines Wahrscheinlichkeitsraumes	16
x	beliebiger Finanztitel	17
$x(t,\omega)$	Zahlungsanspruch aus dem Finanztitel x zum Zeitpunkt t und im Zustand ω	17
X	Preisprozess	28
X^-	untere Arbitragegrenze	97
X^+	obere Arbitragegrenze	97
$y_t(s,\omega)$	Zerorendite zum Zeitpunkt t eines Spot-Bonds mit Fälligkeit s im Zustand ω	33
y	beliebiger Finanztitel	17
Y	Zerorenditekurve	34
Y_t	Prämie für Unvollkommenheit des Marktes	96
z	Zinszahlung	39
Z	Zinszahlungsstrom	39

Griechische Zeichen

α_x	Stückzahl des Finanztitels x	17
α_y	Stückzahl des Finanztitels y	17
β_t	Kehrwert des Spot-Bond-Prozess	29
γ	Markteintrittsprämie	72
$\tilde{\gamma}$	Markteintrittspämie für Kapitalanlagen	82
$\hat{\gamma}$	Zahlungsstrom der Gebühren	64
Γ	Anzahl der Basisvektoren	22
δ	vertikaler Störterm im HO-LEE-Zinsstrukturmodell	110
η	Zufallsvariable des binomialen Prozesses	103
κ	Wert der Kreditkondition	40
κ^i	Wert der i-ten Kreditkondition einer mehrfachen Angebotsoption	51
κ^{max}	Maximum der Werte aller Kreditkonditionen einer mehrfachen Angebotsoption	51
$\hat{\kappa}$	Ausübungswert der Angebotsoption	46
λ	Wahrscheinlichkeit der Realisierung einer Markteintrittsprämie bei Vergabe einer Angebotsoption	98
μ	prozentualer Anteil des Preises des Margenzahlungsstromes an der Markteintrittsprämie	79
ν	Marktwert des Zahlungsstromes V	79
$\check{\nu}$	Anzahl der im Portfolio gehaltenen Spot-Bonds	103
ω	Zustand des Finanzmarktes	16
Ω	Menge aller Zustände des Finanzmarktes	16
Π	Menge aller Preissysteme	30
$\hat{\psi}$	risikoloser Margenfaktor	84
$\tilde{\psi}$	risikogewichteter Margenfaktor	86
ρ	Derivativer Zinstitel	37
$\rho(\omega)$	Zahlungsstrom eines Derivativen Zinstitels im Zustand ω	37

σ	Volatilitätsterm im HO-LEE-Zinsstrukturmodell	110
$\sigma(\bullet)$	σ-Algebra über eine Menge	17
σ_{imp}	implizite Volatilitäten für Swaptions	116
τ	Zeitpunkt	29
$\theta_i(t, \omega)$	Anteil des i-ten Finanztitels zum Zeitpunkt t im Zustand ω an einer Handelsstrategie	23
$\hat{\theta}$	Anteil einer Handelsstrategie	64
Θ	dynamische, selbstfinanzierende Handelsstrategie	23
Θ^+	Handelsstrategie	50
ϖ	Wert der frühzeitigen Ausübung einer Angebotsoption	122
ϱ	Mehrfachprämie	52
χ_t	risikoloser, einperiodischer Bond, bzw. Spotbond	29
ϵ	binomiale Zufallsvariable im HO-LEE-Zinsstrukturmodell	109

Sonstige Zeichen

$\mathcal{B}$	Menge aller Zinstitel	32
$\mathcal{C}$	Menge aller Contigent Claims	30
$\mathcal{D}$	Menge aller Discount Bonds	36
$\mathcal{F}$	Menge der Filtrationen	16
$\mathcal{G}$	Indexmenge	21
$\mathcal{H}$	Teilmenge aller Zustände, bzw. Menge von Zuständen	18
$\mathcal{M}$	Menge aller Finanztitel	17
$\mathcal{P}$	Menge aller Diskontierungsfunktionen	114
$\mathcal{R}$	Menge aller Zinstitel	36
$\mathcal{T}_{t_1,t_2}$	Menge aller Stoppzeiten im Intervall $[t_1; t_2]$	47
$\mathcal{W}$	Menge aller äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaße	30
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen	16
$\mathbb{R}$	Menge der reelen Zahlen	17
$\emptyset$	leere Menge	16
$1_{\mathcal{H}}$	Indikatorfunktion für die Zustände $\mathcal{H}$	31
ϑ	Transformator zwischen segmentiertem und unsegmentiertem Finanzmarkt	89
$\wp$	Realisationsmarge	90
$a.b$	Vektorprodukt aus a und b	40
$[a]^+$	$\max[a; 0]$	46
$N[\cdot]$	Normalverteilung an der Stelle $\cdot$	118
$.^A$	Variable unter Berücksichtigung von Arbitragemöglichkeiten	82
$Var^W[\bullet]$	Varianz von $\bullet$ bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes W	98
$\square$	Ende eines Beweises	50
$*$	Ende einer Bemerkung	66
$\star$	Ende einer Definition	7

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere, dass ich meine Dissertation

Zur Bewertungstheorie von Angebotsoptionen im Kreditgeschäft

selbstständig verfasst und mich anderer als der angegebenen Hilfsmittel nicht bedient habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Bruchsal, 30. 05. 2001