Solveig JENSEN, Osnabrück

Aufbau und Stärkung von Prozessvorstellungen zu Rechenprozessen bei Schulanfängern anhand einer mathematischen Spielwelt

Die Konstruktion von Zahlen und das Rechnen mit ihnen beruhen auf dem Zählen. Das Zählen kann durch die Nachfolgerfunktion beschrieben werden und beruht so auf dem Anwenden einer Erzeugungsvorschrift (Mainzer 1992; Dedekind 1969). Für das Verständnis der Zahlkonstruktion und um dieses für geschicktes Rechnen ausnutzen zu können sind demnach Konstruktionsvorstellungen elementar (Schwank 2008, 2013a). Am Treffpunkt ‚Mathematisch-informatische Frühförderung' (wissenschaftliche Leitung: Prof. Dr. Inge Schwank) werden für die Unterstützung dieser Konstruktionsvorstellungen Mathematische Spielwelten wie die Rechenwendeltreppe (vgl. Schwank 2013a) und der ZARAO (vgl. Schwank 2013b) eingesetzt, in denen Figurenbewegungen im Vordergrund stehen. Sie repräsentieren die Rechenvorgänge.

In Studien am Treffpunkt hat sich gezeigt, dass unterschiedliche Perspektiven auf Figurenbewegungen eingenommen werden (vgl. Brückel 2013, Schwank, I. & Schwank, E. 2015). Aus Prozesssicht werden die die Nachfolger- bzw. Vorgängerfunktion repräsentierenden Schritte gezählt und somit die Veränderungsprozesse in den Blick genommen. Aus Objektsicht werden nicht die Bewegungen fokussiert, sondern die von der Figur besuchten Plätze gezählt:

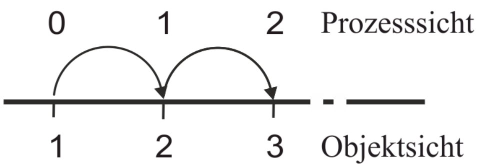

Abb. 1: Prozess- und Objektsicht, angelehnt an Schwank, I. &Schwank, E. 2015

Abb. 2: Ein Lopserzwerg

Abb. 3: Wettlopserbahn mit Zielfähnchen nach neunmal lopsern

Neben der Bildung von Konstruktionsvorstellungen wird die Einbindung der Null aus dieser Sichtweise heraus erschwert. Die Überlegung, eine Spielwelt ohne zählbare Objekte zu konzipieren und so den Blick verstärkt auf die Aktionen zu lenken, führte zur Entwicklung eines „Lopserzwerges" (**L**aufen, H**opser**). Diese Figur hat Räder, die oben und unten abgeflacht sind. Durch die Drehung der Räder von einer flachen Seite zur anderen entsteht eine getaktete Bewegung, nach immer gleich langen Strecken pau-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

siert die Figur. Ortsmarkierungen sind nicht nötig, um eine Bewegung in gleichmäßigen Abständen zu erzielen.

Die Spielwelt wurde in einer empirischen Studie mit neun Schulanfängern eingesetzt, die seit knapp drei Wochen eine erste Klasse besuchten. Pro Kind hat die Autorin fünf wöchentlich stattfindende Spielstunden durchgeführt und videografiert. Für jeden Durchgang der Spielstunden wurden bestimmte Spiele konzipiert. Sie boten z.B. die Möglichkeit, über Zahlbeziehungen zu sprechen und Vergleiche zwischen Standorten der Lopserzwerge anzustellen. Von Anfang an wurden für die Bewegungsaufträge der Lopserzwerge Operations- und Zahlzeichen verwendet (z.B. ‚+2' für zweimal vorwärtslopsern). Ziel war der Aufbau eines prozessgebundenen Verständnisses von Additions- und Subtraktionszeichen.

Um die Bedeutung der für die Beschreibung einer Zahlkonstruktion verwendeten Notation 0+1, 0+2, … vertiefend zu thematisieren, wurden in der vierten Spielstunde symbolische Repräsentationen anhand einer weiteren am Treffpunkt eingesetzten Spielwelt thematisiert. Die Kinder spielten mit Fröschen, die sich auf einem Weg aus Moosgummiplatten analog zu einem Zahlenstrahl bewegen. Aus Holzplättchen mit Zahl- und Operationszeichen konnten Aufgaben gelegt werden. Zunächst wurden Aufgaben mit Null als erstem Argument angesprochen, auch Kompositionen mehrerer Additionen bzw. Subtraktionen, dann Aufgaben mit erstem Argument ungleich Null.

Die Analyse der Videos erfolgte unter mehreren Fragestellungen, von denen hier die folgende thematisiert wird: „Welche Bedeutung schreiben die Kinder den eingeführten Zeichen bzw. Zeichenkombinationen im Laufe der Spielstunden zu? Ist diese an Prozessvorstellungen gebunden?"

Im Folgenden werden drei Transkriptausschnitte diskutiert.

Gelungene Verbindung von Pluszeichen und Prozess

Jannek spielt in der vierten Spielstunde mit den Fröschen. Ein Frosch soll den Auftrag ‚1+3' erfüllen. Für Jannek ist dies die erste Additionsaufgabe, die nicht Null als erstes Argument hat. Jannek lässt den Frosch vom Start aus einmal und dann dreimal hüpfen und repräsentiert damit ‚0+1+3'. Auf Nachfrage der Spielleiterin (SL) hin fordert er noch ein Plättchen mit Null und eines mit ‚+', sodass die Aufgabe ‚0+1+3' liegt. Der Unterschied zwischen ‚0+1+3' und ‚1+3' wird besprochen. Die Frage ist, wo der Frosch bei ‚1+3' anfangen muss. Jannek erkennt den Unterschied zwischen Zahlzeichen, vor denen kein Operationszeichen steht (erstes Argument), und Zahlzeichen nachfolgend einem Operationszeichen (zweites Argument):

SL: Wo muss der anfangen (.) mit der *[fährt mit dem Finger die Aufgabe entlang]*?

Jannek: *[setzt den Frosch ein Wegstück weiter]* Da.

SL: Warum?

Jannek: Wegen eins *[zeigt auf das Plättchen]*

SL: Was heißt denn das?

Jannek: Und plus, also, ach das ist das Startzeichen die Eins! Und dann soll er drei vor. Eins, zwei, drei *[versetzt den Frosch um drei Wegstücke]*.

Jannek unterscheidet durch seine Handlung und die sprachliche Hervorhebung des „Startzeichens" den Anfang der Bewegung und die Bewegung selbst. Er versteht eine Zahl einerseits als schon erreichten Ort und andererseits gemeinsam mit einem Operationszeichen als Teil einer Bewegung.

Fokussierung auf zu besuchende Orte

Auch Henry spielt in der vierten Spielstunde mit den Fröschen. Er legt selbst aus Holzplättchen die Aufgabe ‚6+8+3'. Er übersetzt sie so in eine Handlung, dass der Frosch auf dem Wegstück drei Hüpfer vom Start entfernt landet. Auf die Nachfrage der Spielleiterin hin, wo der Frosch bei der Aufgabe anfangen muss, antwortet Henry: „Bei der Null, da fehlt noch eine Null" und ersetzt die Plättchen so, dass hinterher ‚0+1+2+3' liegt:

Henry: *[nimmt den auf dem Start stehenden Frosch und setzt ihn zweimal ein Wegstück vorwärts]* eins, zwei, ahhh, *[setzt den Frosch zurück auf den Start]* Null, eins, zwei, drei. *[setzt den Frosch dreimal ein Wegstück vor]* Das klappt.

Henry versteht hier die Zahlen einseitig als Orte, die es zu besuchen gilt. Die Deutung gemeinsam mit dem Pluszeichen als Angabe einer Bewegung nimmt er nicht vor. Welche Bedeutung Henry dem Pluszeichen zuschreibt, wird hier nicht ersichtlich.

Zusätzliche Handlung für das Operationszeichen

Johannes spielt in der fünften Spielstunde u.a. mit Lopserzwergen, die wie die Frösche Aufträge erfüllen sollen. Die Lopserzwerge sind an der Startlinie und der rote Lopserzwerg soll so lopsern, dass es zu ‚0+7' passt.

Johannes: Ok *[fasst den roten Lopserzwerg an]* nullmal lopsern (.) hab ich schon. Pluuus *[schiebt den Zwerg etwa einen halben Lopser vor]* ist das *[der Lopserzwerg rollt zurück auf den flachen Teil des Rades]* hier. Pluuus *[lässt den Zwerg wieder ca. einen halben Lopser vorrollen und verharrt]* sieben *[beendet den angefangenen Lopser]* eins *[lässt den Zwerg noch sechsmal lopsern]* zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben.

Johannes verortet das Pluszeichen dort, wo der Lopserzwerg ungefähr ein halbes Mal gelopsert ist. Bei den Fröschen verortet er es in zwei Spielsituationen in der vorherigen Spielstunde zwischen dem Start- und dem folgenden Wegstück. Johannes scheint nicht unmittelbar einsichtig zu sein, dass zwei Zeichen zusammen für eine Bewegung stehen und so durch eine gemeinsame Handlung repräsentiert werden.

Fazit und Ausblick

Um eine Addition oder Subtraktion von einer symbolischen in eine enaktive Repräsentation in einer der beiden Spielwelten zu übersetzen, muss unterschieden werden, ob eine Zahl als Ort oder als Teil eines Bewegungsauftrags verstanden werden muss. Jannek gelingt diese Unterscheidung, während Henry zwischenzeitlich das Operationszeichen nicht zu beachten scheint und Zahlen nur als Orte deutet. Johannes verbindet zwar das Pluszeichen anscheinend mit der Richtung, unklar ist aber, ob das Zeichen für ihn zur Bewegung gehört. Aus weiteren Szenen mit Johannes geht hervor, dass er zeitweise alle Zahlen als Bewegungsauftrag deutet, was erklären würde, weshalb er das Pluszeichen zwischenzeitlich separat übersetzt.

Henry und Johannes hätte es evtl. geholfen, der betonten Beschreibung des Weges zu einem Ort die Beschreibung des Ortes gegenüberzustellen und den Unterschied zu thematisieren. Andernfalls kann eine Symbolfolge wie ‚0+2' trotz Betonung des Weges auf den Ort bezogen werden und der Bezug der Zeichen zur Bewegung verloren gehen.

Literatur

Brückel, L. (2013). Arithmetisches Denken von schulpflichtigen, aber nicht schulfähigen Kindern: eine qualitativ empirische Studie zum Zahlraum- und Rechenoperationsverständnis. Osnabrück: Universität Osnabrück.

Dedekind, R. (1969). Was sind und was sollen die Zahlen? Zehnte Auflage. Braunschweig: Vieweg.

Mainzer, K. (1992). Von den natürlichen zu den komplexen und p-adischen Zahlen. In H.-D. Ebbinghaus et al., Zahlen. Berlin, Heidelberg: Springer.

Schwank, I. (2008): Mathematiklernen: Die verkannte Bedeutung des sprachlosen Denkens. In S. Kliemann (Hrsg.), Diagnostizieren und Fördern in der Sekundarstufe II – Schülerkompetenzen erkennen, unterstützen und ausbauen (S. 174-185). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Schwank, I. (2013a): Die Schwierigkeit des Dazu-Denkens. In: von Aster, M. & Lorenz, J. H. (Hrsg.), Rechenstörungen bei Kindern: Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik. 2. überarbeitete und erweiterte Auflage (S. 93-138). Göttingen: Vandehoeck & Ruprecht.

Schwank, I. (2013b): ZARAO-Flyer (Hintergrund). In: http://www.mathedidaktik.uni-koeln.de/fileadmin/home/ischwank/literatur/flyer_zarao_hintergrund_k.pdf (30.3.15)

Schwank, I. & Schwank, E. (erscheint 2015): Development of mathematical concepts during early childhood across cultures. In The International Encyclopedia of the Social and Behavioral Sciences, Second Edition. Oxford: Elsevier.